In: 52. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2002/2003. 44. mezinárodní matematická olympiáda. 15. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2004. pp. 157–170.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405064

44. mezinárodní matematická olympiáda

V pořadí již 44. ročník této prestižní mezinárodní soutěže uspořádala společnost *Mathematical Olympiad Foundation of Japan* za podpory japonského *Ministerstva školství, kultury, sportu, vědy a technologie*, *Japonské matematické společnosti* a *Japonské společnosti pro matematické vzdělávání* v hlavním městě Japonska Tokiu v době od 7. do 19. července 2003. Každou zemi reprezentuje vždy nejvýše šest soutěžících; letošního ročníku MMO se zúčastnilo 457 studentů z 82 zemí.

Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Kostelci nad Černými lesy na závěrečném soutěžním soustředění deseti nejúspěšnějších účastníků celostátního kola. Vybraní soutěžící se pak ještě zúčastnili trojutkání ve slovenské Žilině mezi Českou republikou, Slovenskem a Polskem, kde soutěžili reprezentanti zúčastněných zemí za podmínek podobných jako při soutěži na MMO. Po této přípravě odjela do Japonska tato šestice soutěžících: *Pavel Čížek* z Gymnázia v Kralupech nad Vltavou, *Vítězslav Kala*, *Marek Krčál* a *Jaromír Kuben* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Pavel Kocourek* z SPŠST v Panské ulici v Praze 1 a *Jan Moláček* z Gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové. Vedoucím české delegace byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze, zástupcem vedoucího byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Masarykovy Univerzity v Brně. Vedoucí delegace přicestoval do Tokia kvůli výběru úloh již 7. července, ostatní čeští účastníci pak o čtyři dny později.

Téměř vše se odehrávalo v moderním areálu budov *Národního olympijského střediska*, postaveném pro obdobná sportovní, kulturní a vzdělávací setkání v místě, kde se v roce 1964 konaly letní olympijské hry. Jen začátek soutěže od příletu soutěžících až do odpoledne druhého soutěžního dne strávila mezinárodní jury složená z vedoucích národních týmů v nedalekém Makuhari.

Den po příletu soutěžících se konalo slavnostní zahájení. Vlastní soutěž pak proběhla v neděli a v pondělí 13. a 14. července. Každý z těchto dnů řešili soutěžící trojici úloh po dobu 4,5 hodiny. Za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

O náročnosti soutěžních úloh svědčí i nízké hranice pro zisk medailí: na bronzovou medaili stačilo 13 bodů, stříbro se udělovalo za 19–28 bodů a zlato za alespoň 29 z možného počtu 42 bodů. Výsledky našich jsou uvedeny v následující tabulce:

		Body za úlohu						Body	Cena
Umístění		1	2	3	4	5	6		
269.–291.	Pavel Čížek, 8. roč. gymnázia, Kralupy nad Vltavou	7	1	0	0	1	0	9	HM
231.–246.	Vítězslav Kala, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	0	0	3	1	0	11	HM
179.–196.	Pavel Kocourek, 2. roč. SPŠST, Panská ulice, Praha 1	0	7	0	7	0	0	14	III.
269.–291.	Marek Krčál, 4. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	0	0	2	0	0	9	HM
138.–162.	Jaromír Kuben, 1. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	1	0	7	1	0	16	III.
93.–97.	Jan Moláček, 3. roč. GJKT, Hradec Králové	5	7	0	7	1	0	20	II.
	Celkem	33	16	0	26	4	0	79	

Jak je z tabulky vidět, zklamali oba naši maturanti, shodou okolností první dva vítězové letošního celostátního kola. Přitom nejlepší náš účastník, *Jan Moláček* z Gymnázia v Hradci Králové, skončil v celostátním kole až na 11. místě a do reprezentačního výběru se dostal jen díky neúčasti několika vítězů, kteří dali přednost přípravě na Mezinárodní fyzikální olympiádu. Stejně jako vloni získal 20 bodů, kdy to stačilo jen na bronzovou medaili, tentokrát však stejný bodový zisk znamenal stříbro. Podobně i Vítězslav Kala téměř zopakoval svůj loňský výsledek: získal o dva body méně, a zatímco vloni mu k bronzové medaili chyběl jen jeden bod, letos to byly body dva. V celkovém pořadí se však posunul o dvě příčky výše.

Každý z našich soutěžících vyřešil aspoň jednu z úloh za plný počet bodů a získal tak *Honorary mention* (HM), ocenění, které je zvykem udělovat od 29. ročníku MMO. Žádný bod neztratili jen tři soutěžící: *Yunhao Fu* z Číny (ten dosáhl stejného úspěchu už na loňské 43. MMO ve skotském Glasgow) a dva soutěžící *Hung Viet Bao Le* a *Trong Canh Nguyen* z Vietnamu.

	I	II	III	body
Bulharsko	6	0	0	227
ČLR	5	1	0	211
USA	4	2	0	188
Vietnam	2	3	1	172
Rusko	3	2	1	167
Korea	2	4	0	157
Rumunsko	1	4	1	143
Turecko	1	3	1	133
Japonsko	1	3	2	131
Maďarsko	1	3	1	128
Velká Británie	1	2	3	128
Kanada	2	0	3	119
Kazachstán	1	2	2	119
Ukrajina	1	2	3	118
Indie	0	4	1	115
Tchaj-wan	1	2	2	114
Írán	0	3	2	112
Německo	1	2	1	112
Bělorusko	1	2	2	111
Thajsko	1	1	3	111
Izrael (5)	0	2	3	103
Polsko	1	2	0	102
Srbsko a Černá Hora	0	3	1	101
Francie	0	2	2	95
Mongolsko	0	1	3	93
Austrálie	0	2	2	92
Brazílie	0	1	3	92
Argentina	1	1	2	91
Hongkong	0	2	2	91
Moldavsko	0	1	2	88
Řecko	0	1	4	88
Gruzie	0	1	2	86
Chorvatsko	0	0	3	80
Česká republika	0	1	2	79
Slovensko	0	0	4	77
Singapur	0	0	2	71
Belgie	0	1	1	70
Indonézie	0	0	2	70
Kolumbie	0	0	3	67
Ázerbájdžán	0	1	1	66
Mexiko	0	0	3	64
Norsko	0	1	0	62
Arménie	0	0	3	61
Bosna a Hercegovina	0	0	2	61
JAR	0	0	3	60
Španělsko	0	0	1	59
Makedonie	0	0	2	54
Švédsko	0	0	1	52
Itálie	0	0	1	50
Kirgizie	0	0	2	50
Lotyšsko	0	0	1	50
Litva	0	0	2	49
Uzbekistán	0	1	1	49
Estonsko	0	0	0	47
Finsko	0	0	1	43
Maroko	0	0	0	43
Nový Zéland	0	0	0	43
Macao	0	0	2	40
Rakousko	0	0	0	38
Peru (4)	0	0	1	37
Turkmenistán (4)	0	0	1	37
Island	0	0	1	33
Trinidad a Tobago	0	0	0	33
Nizozemsko	0	0	0	30
Uruguay (5)	0	0	0	29
Dánsko (5)	0	0	0	27
Malajsie (5)	0	0	0	26
Švýcarsko	0	0	0	26
Lucembursko (2)	0	0	1	25
Albánie (4)	0	0	0	23
Kypr	0	0	0	23
Portoriko (3)	0	0	1	23
Portugalsko	0	0	0	22
Irsko	0	0	0	21
Slovinsko	0	0	0	18
Kuba (1)	0	0	1	14
Ekvádor	0	0	0	11
Venezuela (3)	0	0	0	10
Filipíny	0	0	0	9
Kuvajt (3)	0	0	0	8
Srí Lanka (4)	0	0	0	4
Paraguay (1)	0	0	0	0

Jak je patrno z tabulky zúčastněných států, na první místo v neoficiálním pořadí jednotlivých zemí podle celkového bodového zisku se tentokrát vyšvihlo Bulharsko, další místa obsadily tradičně výborná družstva Číny, Spojených států, Vietnamu a Ruska. (Případná čísla v závorce upozorňují na nižší počet reprezentantů.)

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť A je podmnožina množiny $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ obsahující právě 101 prvků. Dokažte, že v S existují čísla $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ taková, že množiny

$$A_j = \{x + t_j : x \in A\} \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, 100$$

jsou navzájem disjunktní. (*Brazílie*)

2. Určete všechny dvojice přirozených čísel (a, b) takových, že

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

je přirozené číslo. (*Bulharsko*)

3. Je dán konvexní šestiúhelník, jehož libovolné dvě protější strany mají následující vlastnost: vzdálenost jejich středů je $\sqrt{3}/2$násobek součtu jejich délek. Dokažte, že všechny úhly daného šestiúhelníku jsou stejné.

(Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má tři dvojice protějších stran: AB a DE, BC a EF, CD a FA.) (*Polsko*)

4. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme postupně P, Q a R paty kolmic z bodu D na přímky BC, CA a AB. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$, právě když se osy úhlů ABC a ADC protínají na přímce AC. (*Finsko*)

5. Nechť n je přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reálná čísla taková, že $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$.

(a) Dokažte, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leqq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Ukažte, že rovnost platí, právě když $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je aritmetická posloupnost. (*Irsko*)

6. Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že existuje prvočíslo q takové, že pro žádné celé n není číslo $n^p - p$ dělitelné q. (*Francie*)

Řešení úloh

1. Vytvořme množinu všech rozdílů $\mathsf{D} = \{x-y : x, y \in \mathsf{A}\}$. Protože A má 101 prvků, obsahuje D kromě nuly nejvýše $2 \cdot \binom{101}{2} = 101 \cdot 100 = 10\,100$ dalších (kladných i záporných) čísel. Všimněme si, že dvě z uvažovaných množin A_i, A_j jsou disjunktní, právě když $x + t_i \neq y + t_j$ pro libovolná $x, y \in \mathsf{A}$, tedy právě když $t_i - t_j \notin \mathsf{D}$. Naším úkolem je proto vybrat čísla $t_1, t_2, \ldots, t_{100} \in \mathsf{S}$ tak, aby žádný jejich rozdíl nepadl do „zakázané" množiny D.

Zmíněný výběr provedeme induktivně. První číslo t_1 vybereme v S libovolně. Předpokládejme, že jsme již pro některé $k \leqq 99$ vybrali čísla $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathsf{S}$ tak, že $t_i - t_j \notin \mathsf{D}$ pro libovolná různá $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (pro $k = 1$ je to splněno triviálně). Číslo t_{k+1} musíme v S zvolit tak, aby platilo $t_{k+1} - t_i \notin \mathsf{D}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Pro pevné i tak má číslo t_{k+1} právě tolik „zakázaných" hodnot $t_i + d$, kolik je všech čísel $d \in \mathsf{D}$. Těch je, jak víme, nejvýše $1 + 101 \cdot 100 = 10\,101$. Pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tak dostaneme celkem nejvýše $k \cdot 10\,101$ zakázaných hodnot, což je nejvýše $99 \cdot 10\,101 = 999\,999$ čísel. V množině S je však 10^6 čísel, takže výběr čísla t_{k+1} je možný.

Poznámka. Hodnota $|\mathsf{S}| = 10^6$ je zbytečně velká (v předchozím řešení jsme zanedbali skutečnost, že v množině D leží s každým číslem i číslo opačné). Dá se ukázat, že pro libovolnou k-prvkovou podmnožinu A množiny $\mathsf{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ platí: je-li m přirozené číslo takové, že

$$n > (m-1)\left(\binom{k}{2} + 1\right),$$

existují v množině S čísla $t_1, t_2, \ldots, t_m$ taková, že množiny $\mathsf{A}_j = \{x + t_j : x \in \mathsf{A}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ jsou navzájem disjunktní. (Pro $k = 101$ stačí tedy uvažovat množinu $\mathsf{S} = \{1, 2, \ldots, 500\,051\}$.)

2. (Podle *Jana Moláčka.*) Ukážeme, že řešeními jsou právě všechny dvojice (a, b) tvaru $(8k^4 - k, 2k)$, $(k, 2k)$ a $(k, 1)$, kde $k \in \mathbb{N}$ je libovolné.

Hledáme přirozená čísla a, b, n, pro která platí

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = n. \tag{1}$$

Rovnost (1) lze upravit do tvaru kvadratické rovnice s neznámou a:

$$a^2 - 2nb^2a + n(b^3 - 1) = 0.$$

Jejími kořeny jsou čísla

$$a_{1,2} = nb^2 \pm \sqrt{\left(nb^2\right)^2 - n\left(b^3 - 1\right)}. \tag{2}$$

Protože jeden z kořenů $a_{1,2}$ je roven hledanému přirozenému číslu a, odmocněnec ve vzorci (2) musí být „úplný kvadrát“, tedy tvaru

$$\left(nb^2\right)^2 - n\left(b^3 - 1\right) = d^2 \tag{3}$$

pro vhodné celé $d \geqq 0$. Takové číslo d zaručeně existuje, pokud $b = 1$ (pak $b^3 - 1 = 0$, takže $d = nb^2$). Zabývejme se však nejprve obsažnějším případem, kdy $b > 1$. Ukažme, že pro takové b z (3) plynou odhady

$$nb^2 - \frac{b+1}{2} < d < nb^2 - \frac{b-1}{2}. \tag{4}$$

Protože oba krajní výrazy jsou kladné, můžeme obě nerovnosti umocnit; po dosazení d^2 a snadných algebraických úpravách dostaneme dvojici nerovností

$$(b+1)^2 < 4n(b^2+1) \quad \text{a} \quad (b-1)^2 + 4n(b^2-1) > 0,$$

které zřejmě platí, neboť $n \geqq 1$ a $b > 1$. Tím jsou odhady (4) dokázány.

Všimněme si nyní, že rozdíl obou krajních výrazů v (4) je roven jedné. Pro liché b by se tyto výrazy dokonce rovnaly dvěma po sobě jdoucím přirozeným číslům, takže by žádné celé d splňující podmínku (4) neexistovalo. Číslo b je proto sudé, tedy $b = 2k$ pro vhodné $k \in \mathbb{N}$; jediné celé d vyhovující nerovnostem (4) je pak tvaru

$$d = nb^2 - \frac{b}{2} = 4nk^2 - k.$$

Pro taková b a d přejde rovnost (3) do tvaru

$$(4nk^2)^2 - n(8k^3 - 1) = (4nk^2 - k)^2,$$

ze které snadno plyne $n = k^2$; vzorce (2) pak dávají vyjádření

$$a_1 = 8k^4 - k \quad \text{a} \quad a_2 = k.$$

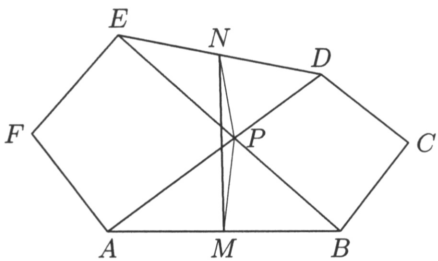
Protože obě vypočtené hodnoty $a_{1,2}$ jsou přirozená čísla (pro každé $k \in \mathbb{N}$), dostáváme dvě (nekonečné) skupiny řešení $(a, b) = (8k^4 - k, 2k)$ a $(a, b) = (k, 2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Zbývá rozebrat případ, kdy $b = 1$. Tehdy má zlomek ze zadání úlohy tvar

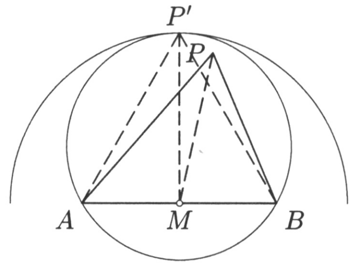
$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2},$$

takže je roven přirozenému číslu, právě když $a = 2k$ pro vhodné $k \in \mathbb{N}$. Třetí (a poslední) skupinou řešení jsou tedy dvojice tvaru $(a, b) = (k, 1)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

3. Označme A, B, C, D, E, F vrcholy daného šestiúhelníku a uvažujme tři úhlopříčky AD, BE a FC. Některé dvě z nich nutně svírají úhel aspoň $60°$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou to úhlopříčky AD a BE. Označme P jejich průsečík a M, N středy protějších stran AB a DE (obr. 37).



Obr. 37



Obr. 38

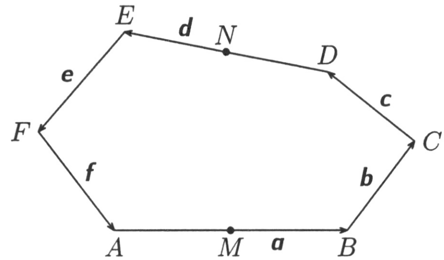
Protože $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle EPD| \geqq 60°$, leží bod P uvnitř kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABP' (obr. 38), takže platí $|MP| \leqq |MP'| = \frac{1}{2}\sqrt{3}|AB|$ s rovností, právě když $P = P'$, neboli právě když je trojúhelník ABP rovnostranný. Podobně odvodíme, že $|NP| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}|DE|$ s rovností, právě když je trojúhelník DEP rovnostranný. Pro vzdálenost středů obou protějších stran AB, DE tak dostáváme odhad

$$|MN| \leqq |MP| + |NP| \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(|AB| + |DE|).$$

Z předpokladů úlohy tedy plyne, že oba trojúhelníky ABP a DEP jsou rovnostranné a úhlopříčky AD, BE svírají úhel $60°$.

Zbývající úhlopříčka CF musí s jednou z úhlopříček AD, BE svírat úhel aspoň $60°$. Opět můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že se jedná např. o úhlopříčku AD, průsečík úhlopříček CE, AD označme Q. Úplně stejně jako v předchozím případě zjistíme, že trojúhelníky FAQ a CDQ jsou rovnostranné. Označíme-li nakonec R průsečík úhlopříček BE a CF, které dle předchozího svírají nutně úhel $60°$, zjistíme, že i trojúhelníky BCR a EFR jsou rovnostranné. Odtud plyne tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Označme A, B, C, D, E, F vrcholy daného šestiúhelníku a $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}, \ldots, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{FA}$ vektory určené jeho stranami, přitom $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{f} = 0$. Označíme-li M, N středy protějších stran AB, DE,



Obr. 39

můžeme příslušný vektor $\boldsymbol{MN}$ vyjádřit dvěma způsoby (obr. 39):

$$\boldsymbol{MN} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{d} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{MN} = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f} - \boldsymbol{e} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{d},$$

odkud

$$\boldsymbol{MN} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{e} - \boldsymbol{f}). \tag{1}$$

Podle předpokladu platí

$$|\boldsymbol{MN}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}| \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}|. \tag{2}$$

Položme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{b}$, z (1) a (2) tak dostaneme

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| \geqq \sqrt{3}|\boldsymbol{x}|$$

a podobně

$$|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}| \geqq \sqrt{3}|\boldsymbol{y}|,$$
$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geqq \sqrt{3}|\boldsymbol{z}|.$$

Právě uvedené nerovnosti můžeme pomocí skalárních součinů ekvivalentně přepsat jako

$$|\boldsymbol{y}|^2 - 2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + |\boldsymbol{z}|^2 \geqq 3|\boldsymbol{x}|^2,$$
$$|\boldsymbol{z}|^2 - 2(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + |\boldsymbol{x}|^2 \geqq 3|\boldsymbol{y}|^2,$$
$$|\boldsymbol{x}|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2 \geqq 3|\boldsymbol{z}|^2.$$

Sečtením všech tří nerovností vyjde

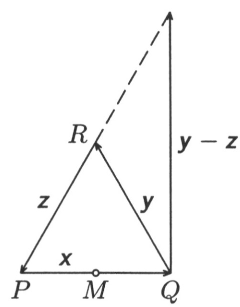
$$-|\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{z}|^2 - 2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) - 2(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0,$$

neboli $-|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}|^2 \geqq 0$. Odtud ovšem plyne, že $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$ a že ve všech předchozích nerovnostech platí rovnost. Je tedy jednak

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}| = \sqrt{3}|\boldsymbol{x}|,$$
$$|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}| = \sqrt{3}|\boldsymbol{y}|,$$
$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \sqrt{3}|\boldsymbol{z}|,$$

jednak díky rovnosti v (2) a v dalších dvou analogických nerovnostech i $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{d} \parallel \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{f} \parallel \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{z}$.

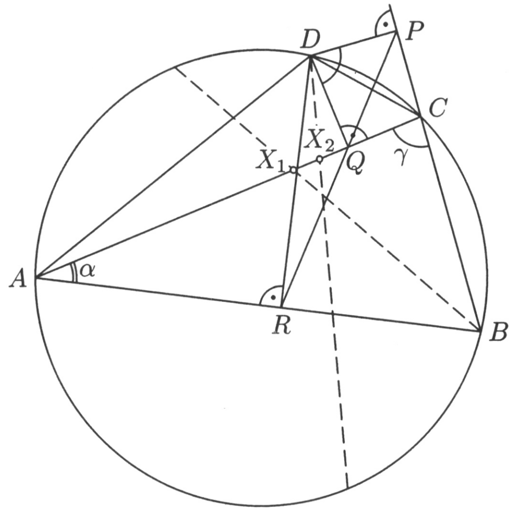
Sestrojíme-li trojúhelník PQR tak, že $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{QR}=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{RP}=\boldsymbol{z}$ (což můžeme díky rovnosti $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$), bude některý z jeho vnitřních úhlů mít velikost aspoň $60°$. Nechť je to např. úhel PRQ (obr. 40). Pro střed M strany PQ pak platí $|MR| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}|\boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}|PQ|$, což znamená, že trojúhelník PQR je rovnostranný. Pro vnitřní úhly daného šestiúhelníku to vzhledem k dokázané rovnoběžnosti jeho protějších stran s odpovídajícími vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{z}$ znamená, že všechny jeho vnitřní úhly mají velikost $120°$.



Obr. 40

Poznámka. Z uvedeného řešení je zřejmé, že libovolný šestiúhelník splňující předpoklady úlohy dostaneme tak, že z některého rovnostranného trojúhelníku „odřízneme“ při každém jeho vrcholu shodný rovnostranný trojúhelník.

4. Označme po řadě X_1, X_2 průsečíky osy úhlu ABC a osy úhlu ADC s úhlopříčkou AC daného tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 41). Ze známé vlastnosti osy úhlu plyne jednak $|AX_1|/|CX_1| = |AB|/|CB|$ (v trojúhelníku ABC), jednak $|AX_2|/|CX_2| = |AD|/|CD|$ (v trojúhelníku ACD). Osy úhlů ABC a ADC se tedy protnou na úhlopříčce AC, právě když $X_1 = X_2$, neboli právě když $|AD| \cdot |CB| = |AB| \cdot |CD|$.



Obr. 41

Podle Thaletovy věty leží paty P a Q na kružnici s průměrem CD, takže pro velikost tětivy PQ této kružnice platí

$$|PQ| = |CD| \sin |\sphericalangle PCQ| = |CD| \sin \gamma,$$

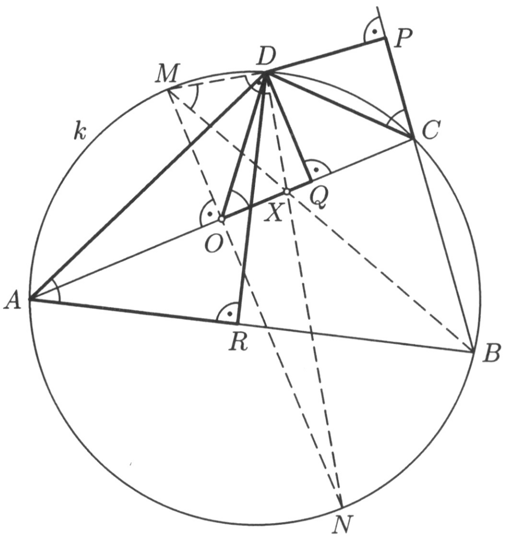
kde $\gamma = \sphericalangle ACB$ (bez ohledu na to, zda pata P padne dovnitř strany BC či nikoli). Podobně leží paty R a Q na kružnici s průměrem AD, takže pro velikost tětivy QR této kružnice platí

$$|QR| = |AD| \sin |\sphericalangle RAQ| = |AD| \sin \alpha,$$

kde $\alpha = \sphericalangle BAC$. Vidíme tedy, že rovnost $|PQ| = |QR|$ je ekvivalentní rovnosti $|CD| \sin \gamma = |AD| \sin \alpha$, což je podle sinové věty pro trojúhelník ABC ekvivalentní s rovností $|AD| \cdot |CB| = |AB| \cdot |CD|$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. (Podle *Marka Krčála*, bohužel až po soutěži.) Označme M a N body, v nichž osa úhlu ABC, resp. osa úhlu ADC protne kružnici k opsanou danému tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 42). Vzhledem k tomu, že každý z bodů M, N půlí příslušný oblouk AC kružnice k, je MN osou úhlopříčky AC a zároveň průměrem kružnice k. Označme O střed úsečky AC. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že úhel BAD není tupý (jinak bychom prohodili označení vrcholů A a C), takže pata P

kolmice z bodu D na BC padne mimo úsečku BC. Z vlastností tětivového čtyřúhelníku plyne $|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle BAD|$ a z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou BD rovnost $|\sphericalangle BMD| = |\sphericalangle BAD|$. Jsou tedy trojúhelníky ARD a CPD podobné.



Obr. 42

Předpokládejme, že průsečík X obou zmíněných os úhlů leží na přímce AC. Protože MN je průměr kružnice k, je podle Thaletovy věty $|\sphericalangle XDM| = |\sphericalangle NDM| = 90°$, takže čtyřúhelník $OXDM$ je tětivový. Je tedy také $|\sphericalangle XOD| = |\sphericalangle XMD| = |\sphericalangle BMD|$ a vidíme, že trojúhelník OQD je podobný trojúhelníkům ARD a CPD. Uvažujme spirální podobnost, jež vznikne složením otočení kolem středu D o úhel $90° - |\sphericalangle BAD|$ a stejnolehlosti se středem D a koeficientem $|DR|/|DA|$. Tato podobnost zobrazí bod A do bodu R, bod C do bodu P a bod O do bodu Q. Protože O je střed úsečky AC, je jeho obraz v této podobnosti, tedy bod Q středem úsečky PR, jež je obrazem úsečky AC.

Obráceně, je-li Q střed úsečky PR, je obrazem bodu O v uvedené podobnosti, takže trojúhelník OQD je podobný trojúhelníkům ARD a CPD (ty jsou podobné vždy). Označíme-li nyní jako X průsečík přímky BM s úhlopříčkou AC, bude $XDMO$ tětivový, a tudíž velikost úhlu XDM bude $90°$. Odtud plyne, že bod X leží na ND, ose úhlu ADC.

5. Obě strany dokazované nerovnosti nezmění hodnotu, když ode všech členů x_i odečteme totéž číslo c. Vybereme-li za c aritmetický průměr dané n-tice členů x_i, bude „posunutá“ posloupnost členů $x_i := x_i - c$ splňovat podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \tag{1}$$

Dodejme, že zmíněné „posunutí“ zachová rovněž uspořádání čísel x_i podle velikosti a nezmění ani nic na tom, zda dotyčná n-tice tvořila aritmetickou posloupnost či nikoliv.

Za předpokladu (1) upravíme oba součty z dokazované nerovnosti:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| &= 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) = \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\big(\underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{(i-1)\ \text{krát}} - \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{(n-i)\ \text{krát}}\big)x_i = \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)x_i, \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 &= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j + n\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \\
&= 2n\sum_{i=1}^{n} x_i^2.
\end{aligned}$$

Po dosazení a krácení čtyřmi zjistíme, že máme dokázat nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)x_i\right)^2 \leqq \frac{(n^2 - 1)n}{3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{2}$$

Ukažme, že (2) je Cauchyova nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{3}$$

pro n-tici členů $y_i = 2i - n - 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Skutečně, pro takovou n-tici platí

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i - n - 1)^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4(n+1)\sum_{i=1}^{n} i + n(n+1)^2 =$$
$$= 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4(n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)^2 =$$
$$= \frac{(n^2-1)n}{3}.$$

Tím je důkaz nerovnosti (2) hotov.

Jak je dobře známo, rovnost v Cauychově nerovnosti (2) nastane, právě když existuje reálné číslo p, pro které platí n-tice rovností

$$x_i = py_i = p(2i - n - 1) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Ověřme, že tuto podmínku za předpokladu (1) splňují právě ty konečné posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jež jsou aritmetické. Skutečně, platí-li rovnosti (4), je konečná posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmetická s diferencí $2p$. Obráceně, je-li posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmetická a značí-li d její diferenci, pak pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí rovnost $x_i = x_1 + (i-1)d$ a součet všech členů x_i je dán vzorcem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n(x_1 + x_n)}{2}.$$

Podmínka (1) tudíž znamená, že $x_1 + x_n = 0$, neboli $x_1 + x_1 + (n-1)d = 0$. Odtud dostáváme $x_1 = \frac{1}{2}d(1-n)$, proto členy x_i mají pro každé i vyjádření

$$x_i = \frac{d(1-n)}{2} + (i-1)d = \frac{(1 - n + 2i - 2)d}{2} = \frac{(2i - n - 1)d}{2},$$

což je (4) pro $p = d/2$.

6. Připomeňme nejdříve vlastnosti mocnin $n^1, n^2, \ldots, n^k, \ldots$ při dělení prvočíslem q: je-li n celé číslo nesoudělné s q, pak $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ (tzv. *malá Fermatova věta*), navíc množina těch přirozených k, pro která $n^k \equiv 1 \pmod{q}$, je tvořena všemi násobky nejmenšího z nich (což je buď číslo $q - 1$, nebo některý jeho dělitel).

Uvažujme proto rozklad

$$p^p - 1 = (p-1)S, \quad \text{kde } S = p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + p + 1, \tag{1}$$

a za „kandidáta“ na vhodné prvočíslo q vyberme některé z prvočísel dělících součet S (v pravou chvíli upřesníme, jakou doplňující vlastnost prvočinitele q čísla S budeme ještě potřebovat a proč takové q vůbec existuje). Protože $q \mid S$ a $S \mid (p^p - 1)$, platí $q \mid (p^p - 1)$, tj. $p^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Připusťme, že pro vybrané q tvrzení úlohy neplatí, tedy existuje celé n s vlastností $n^p \equiv p \pmod{q}$. Umocněním této kongruence na p dostaneme $n^{p^2} \equiv p^p \pmod{q}$, což spolu s kongruencí ze závěru předchozího odstavce znamená, že $n^{p^2} \equiv 1 \pmod{q}$. Číslo n je tedy nesoudělné s číslem q a podle poznatků připomenutých v úvodu řešení víme, že nejmenší přirozené k s vlastností $n^k \equiv 1 \pmod{q}$ musí být dělitel čísla p^2, tedy jedno z čísel 1, p, p^2. Toto číslo musí být zároveň dělitelem čísla $q - 1$ (malá Fermatova věta), takže to nebude číslo p^2, nebude-li číslo p^2 dělit číslo $q-1$, tedy pokud $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. To je právě ona doplňující vlastnost prvočísla q, o které jsme se dříve zmínili; odložme na chvíli důkaz existence takového prvočísla q a dokončeme úvahy o mocninách čísla n.

Pokud tedy $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, platí kongruence $n^k \equiv 1 \pmod{q}$ pro $k = 1$ nebo pro $k = p$, v obou případech máme $n^p \equiv 1 \pmod{q}$. Porovnáním s kongruencí $n^p \equiv p \pmod{q}$ pak dostaneme $p \equiv 1 \pmod{q}$, takže každá z p mocnin p^j ze součtu S je kongruentní s číslem 1 (modulo q), tudíž $S \equiv p \pmod{q}$. Protože však $q \mid S$, platí $S \equiv 0 \pmod{q}$. Porovnáním vychází $p \equiv 0 \pmod{q}$, což je spor s tím, že $p \equiv 1 \pmod{q}$. Proto žádné celé n s vlastností $n^p \equiv p \pmod{q}$ neexistuje, splňuje-li prvočíslo q podmínku $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Existenci takového prvočinitele q (z rozkladu čísla S) nyní dokážeme.

Určeme zbytek součtu S při dělení číslem p^2: protože $p^2 \mid p^j$ ($j \geqq 2$), platí

$$S = p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + p + 1 \equiv 0 + 0 + \ldots + 0 + p + 1 \pmod{p^2},$$

tedy $S \equiv p + 1 \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Odtud již plyne, že aspoň jeden z prvočinitelů q_j čísla $S = q_1 q_2 \ldots q_r$ není kongruentní s 1 (modulo p^2). (Vynásobením r kongruencí $q_j \equiv 1 \pmod{p^2}$ bychom totiž dostali $S \equiv 1 \pmod{p^2}$.)

Důkaz je hotov a úloha vyřešena.