Přípravná soustředění před 44. MMO

V průběhu 52. ročníku se konalo výběrové soustředění pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 7. do 11. dubna 2003 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 10 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A s výjimkou těch, kteří se rozhodli dát přednost účasti na Mezinárodní fyzikální olympiádě. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Jan Moláček	3/4, GJKT Hradec Králové	77
Pavel Čížek	8/8, G Kralupy nad Vltavou	74
Vítězslav Kala	3/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	70
Marek Krčál	4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	69
Pavel Kocourek	2/4, SPŠST, Praha 1, Panská	66,5
Jaromír Kuben	1/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	65,5
František Konopecký	6/8, G Holešov	61
Martin Káldy	4/4, GChD, Praha 5	56
Tomáš Gavenčiak	3/4, GMK, Bílovec	53
Marek Pechal	5/8, G Zlín, Lesní čtvrť	53

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentačního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:
dr. *Karel Horák* (7. 4.),
dr. *Jaroslav Zhouf* (8. 4.),
dr. *Martin Panák* (9. 4.),
dr. *Jaroslav Švrček* (10. 4.)
a doc. *Jaromír Šimša* (11. 4.).

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme K průsečík přímky BC s tečnou ve vrcholu A a L průsečík přímky AD s tečnou ve vrcholu B ke kružnici opsané danému čtyřúhelníku. Jestliže $|AL| = |AD|$ a $|BK| = |BC|$, je $ABCD$ lichoběžník. Dokažte.

2. Nechť mnohočleny P, Q, R s reálnými koeficienty, mezi nimiž je mnohočlen druhého a mnohočlen třetího stupně, splňují rovnost

$$P^2 + Q^2 = R^2.$$

Dokažte, že pak jeden z mnohočlenů třetího stupně má vesměs reálné kořeny.

3. V rovině je dán konečný počet modrých a červených přímek, přičemž žádné dvě nejsou rovnoběžné a každým průsečíkem dvou přímek téže barvy prochází i přímka druhé barvy. Dokažte, že všechny přímky procházejí jedním bodem.

4. Nechť $n \geqq 2$ je přirozené číslo a pro kladná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí rovnost

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Dokažte, že

$$x_1 x_2 \ldots x_n \geqq (n-1)^n.$$

5. Nechť v trojúhelníku ABC je V průsečík výšek a S střed kružnice opsané a nechť přímky AV a AS protínají kružnici opsanou postupně v bodech M a N. Označme postupně P, Q a R průsečíky přímek BC a VN, BC a SM, VQ a SP. Dokažte, že $ASRV$ je rovnoběžník.

6. Je dána množina $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, \ldots, 2\,002, 2\,003\}$. Dokažte, že existuje 14 podmnožin množiny M takových, že pro každé $n \in \mathsf{M}$ mezi nimi existuje právě sedm množin takových, že n je jejich společným prvkem.

7. Na kruhu je dáno $4n$ bodů střídavě obarvených modře a červeně. Modré body jsou libovolně rozděleny do n párů a body v každém páru jsou spojeny modrou tětivou. Podobně červené body jsou libovolně rozděleny do n párů a body v každém páru jsou spojeny červenou tětivou. Body leží na kruhu tak, že žádné tři tětivy neprocházejí jedním bodem. Dokažte, že existuje aspoň n bodů, v nichž některá modrá tětiva protíná některou červenou tětivu.

8. Dokažte, že $\{n\sqrt{3}\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}$ pro libovolné přirozené n. (Symbol $\{n\}$ značí tzv. zlomkovou část čísla n.)

9. Nechť n je přirozené číslo a $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ je mnohočlen s celočíselnými koeficienty takový, že:
(i) každé z čísel $a_2, a_3, \ldots, a_m$ je dělitelné všemi prvočísly dělícími n,
(ii) a_1 a n jsou nesoudělná.
Dokažte, že pro libovolné přirozené k existuje přirozené c tak, že $f(c)$ je dělitelné číslem n^k.

10. Nechť x_1, x_2, ... je nekonečná náhodná posloupnost nul a jedniček. Co je pravděpodobnější:
(i) posloupnost 110 se v ní vyskytne před posloupností 010,
(ii) posloupnost 010 se v ní vyskytne před posloupností 110?

11. Nechť pro kladná čísla x, y, z platí $xyz(x+y+z) = 1$. Určete nejmenší hodnotu výrazu $V = (x+y)(y+z)$.

12. Nechť M je střed strany AB daného trojúhelníku ABC. Sestrojte rovnoběžku p se stranou AB tak, aby její průsečíky E a F po řadě se stranami BC a AC tvořily vrcholy pravoúhlého trojúhelníku EFM s přeponou EF.

13. Nechť T je těžiště a M libovolný bod trojúhelníku ABC. Označme A_1, B_1, C_1 průsečíky přímky MT po řadě s přímkami BC, CA, AB. Dokažte, že platí nerovnost

$$|MA_1| \cdot |MB_1| \cdot |MC_1| \leqq |TA_1| \cdot |TB_1| \cdot |TC_1|.$$

14. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník se středem S kružnice jemu opsané a P průsečík jeho úhlopříček. Kružnice opsané trojúhelníkům ABP a CDP se protínají v bodě Q ($Q \neq P$). Jestliže jsou body S, Q, P navzájem různé, pak přímky SQ a PQ jsou navzájem kolmé. Dokažte.

15. Určete počet těch čtveřic (a, b, c, d) přirozených čísel, pro které platí

$$1 \leqq a < b < c < d \leqq 30 \quad \text{a} \quad a + d = b + c.$$

Výsledek uveďte jedním číslem zapsaným v desítkové soustavě.

16. Označme $q(T)$ ten z poměrů délek dvou stran daného trojúhelníku T, který je nejblíže číslu 1. Určete nejmenší kladné číslo C takové, že pro každý trojúhelník T platí nerovnost $|1 - q(T)| \leqq C$.

17. Vnitřním bodem daného trojúhelníku ABC vedeme rovnoběžky s jeho stranami. Tyto přímky vytnou na trojúhelníku ABC tři úsečky téže délky. Vyjádřete ji pomocí délek a, b, c stran trojúhelníku ABC. Výsledek zapište ve tvaru podílu dvou mnohočlenů proměnných a, b, c.

18. V rovině je dána konečná množina bodů M a osm kružnic k_1, $k_2, \ldots, k_8$ tak, že kružnice k_j prochází právě j body množiny M pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Určete nejmenší možný počet prvků (bodů) množiny M.

19. Nechť x, y, z jsou navzájem různá celá čísla splňující rovnici

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu $|x+y+z|$.

20. Pro každé $n \geqq 4$ určete největší číslo C_n, při kterém nerovnost

$$\frac{a_1}{a_n+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1}+a_1} \geqq C_n$$

platí pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$.