52. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie B

In: 52. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2002/2003. 44. mezinárodní matematická olympiáda. 15. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2004. pp. 45–65.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405059

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Palindromem rozumíme přirozené číslo, které se čte zepředu i zezadu stejně, např. 16 261. Najděte největší čtyřmístný palindrom, jehož druhá mocnina je také palindromem. (*E. Kováč*)

B – I – 2

Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z) vyhovující soustavě rovnic

$$x^3 + y^3 = 9z^3,$$
$$x^2y + y^2x = 6z^3.$$

(*J. Zhouf*)

B – I – 3

Je dán trojúhelník se stranami délek a, b, c a obsahem S. Dokažte, že rovnost $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí, právě když existuje trojúhelník se stranami délek a, b, $2c$ a obsahem $2S$. (*P. Černek*)

B – I – 4

Krokem budeme rozumět nahrazení uspořádané trojice celých čísel (p, q, r) trojicí $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodněte, zda existuje celé číslo k taskové, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečném počtu kroků trojice $(k, k + 1, k + 2)$. (*P. Černek*)

B – I – 5

V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD

jako průměrem a kružnice k_2, která prochází vrcholy B, C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné. (*J. Švrček*)

B – I – 6

V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice

$$|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$$

s neznámou x právě tři různá reálná řešení. (*J. Šimša*)

B – S – 1

Najděte největší pětimístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu. (*J. Šimša*)

B – S – 2

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a Q průsečík spojnic středů jeho protějších stran. Leží-li bod Q na úhlopříčce BD, je bod P středem úhlopříčky AC. Dokažte. (*E. Kováč*)

B – S – 3

Kolik různých výsledků můžeme dostat, sečteme-li každá dvě z daných pěti různých přirozených čísel? Pro každý možný počet uveďte příklad takové pětice čísel. (*P. Černek*)

B – II – 1

Určete největší počet po sobě jdoucích pětimístných přirozených čísel, mezi nimiž není žádný palindrom, tj. číslo, které se čte zepředu stejně jako zezadu. (*J. Šimša*)

B – II – 2

V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, na jehož přeponě AB uvažujeme libovolný bod K. Kružnice sestrojená nad úsečkou CK jako nad průměrem protne odvěsny BC a CA ve vnitřních bodech, které označíme po řadě L a M. Rozhodněte, pro který bod K má čtyřúhelník $ABLM$ nejmenší možný obsah. (*J. Švrček*)

B – II – 3

Určete všechna reálná čísla p, pro něž má rovnice

$$(x-1)^2 = 3|x| - px$$

právě tři různá řešení v oboru reálných čísel. (*J. Šimša*)

B – II – 4

V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte.

(*J. Švrček*)

B – I – 1

Každý čtyřmístný palindrom $p = \overline{abba}$ lze zapsat ve tvaru

$$p = a \cdot 1001 + b \cdot 110,$$

kde $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Potom druhá mocnina čísla $\overline{abba}$ má tvar

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 \cdot 1\,002\,001 + 2ab \cdot 110\,110 + b^2 \cdot 12\,100 = \\ &= a^2 \cdot 10^6 + 2ab \cdot 10^5 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^4 + \\ &\quad + (2a^2 + 2b^2) \cdot 10^3 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10^1 + a^2. \end{aligned}$$

Poslední číslice čísla p^2 je tedy stejná jako poslední číslice čísla a^2.

Pro $a \geqq 4$ je číslo p^2 nutně osmimístné. Jeho první číslice je rovna jedné z hodnot c, $c+1$, $c+2$, kde c je první číslice dvojmístného čísla a^2. (Maximální přenos z nižšího řádu je roven číslu 2.) Je-li však dané číslo opět palindromem, je jeho první i poslední číslice stejná. Porovnáním první a poslední číslice u čísel 16, 25, 36, 49, 64, 81 vidíme, že žádné z nich není tvaru $\overline{c(c+2)}$, $\overline{c(c+1)}$ nebo $\overline{cc}$.

Je-li $a = 3$ a $b \geqq 2$, je číslo p^2 opět osmimístné, jeho poslední číslice je 9 a první je 1, nejedná se tedy o palindrom.

Ve všech ostatních případech je číslo p^2 sedmimístné. Protože a^2 je pouze jednomístné a zápis čísla p^2 je symetrický, musí být nutně všechny tři hodnoty $2ab$, $2ab + b^2$, $2a^2 + 2b^2$ menší než 10, aby nedošlo k přenosu do vyššího řádu. Diskutujme tři případy:

- $a = 3$: nerovnici $2 \cdot 3^2 + 2b^2 < 10$ nevyhovuje žádné b,
- $a = 2$: nerovnici $2 \cdot 2^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje pouze $b = 0$,
- $a = 1$: nerovnici $2 \cdot 1^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje pouze $b = 0$, $b = 1$,

Závěr: Největším čtyřmístným palindromem splňujícím podmínky úlohy je číslo 2 002.

B – I – 2

Přičteme-li k první rovnici trojnásobek rovnice druhé, získáme rovnici

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27z^3.$$

Její úpravou dostaneme

$$(x+y)^3 = (3z)^3, \qquad \text{tj.} \quad x+y=3z.$$

Dosadíme-li tento výraz do levé strany druhé rovnice soustavy, dostaneme

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y) = 3xyz, \qquad \text{tj.} \quad 3xyz = 6z^3.$$

Rozlišíme dva případy.

Je-li $z = 0$, je poslední rovnice splněna pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Z první rovnice soustavy získáme $x^3 + y^3 = 0$, tj. $y = -x$. Řešením je každá trojice $(t, -t, 0)$, kde t je libovolné reálné číslo.

Je-li $z \neq 0$, pak $xy = 2z^2$. Společně s rovnicí $x + y = 3z$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x+y &= 3z, \\ xy &= 2z^2 \end{aligned}$$

dvou rovnic o dvou neznámých x, y s parametrem z. Eliminací např. neznámé y dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 3zx + 2z^2 = 0.$$

Ze vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice získáme řešení ve tvaru $x = z$, $y = 2z$ nebo $x = 2z$, $y = z$. Řešením je tedy každá trojice $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je libovolné reálné číslo (různé od nuly).

Závěr: Soustava má řešení $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$ pro každé $t \neq 0$, $(t, -t, 0)$ pro každé t a žádné jiné řešení nemá.

Jiné řešení. První rovnici vynásobíme dvěma a odečteme od ní trojnásobek rovnice druhé (vyloučíme tak neznámou z). Získáme rovnici

$$2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 0.$$

Levou stranu rovnice postupně upravíme na tvar:

$$\begin{aligned} 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3(x+y)xy &= 0, \\ (x+y)(2x^2 - 5xy + 2y^2) &= 0, \\ (x+y)(2x-y)(x-2y) &= 0. \end{aligned}$$

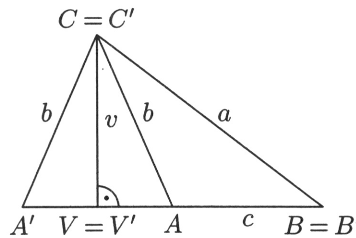
Mohou tedy nastat tři případy:

- $x + y = 0$, potom $y = -x$. Dosazením do první rovnice soustavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (-x)^3 = 0$, tj. $z = 0$.
- $2x - y = 0$, potom $y = 2x$. Dosazením do první rovnice soustavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (2x)^3 = 9x^3$, tj. $z = x$.
- $x - 2y = 0$, potom $x = 2y$. Dosazením do první rovnice soustavy dostaneme $9z^3 = (2y)^3 + y^3 = 9y^3$, tj. $z = y$.

Závěr: Řešením jsou všechny trojice $(t, -t, 0)$, $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

B – I – 3

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $a \geqq b$. Jestliže je obsah trojúhelníku $A'B'C'$ se stranami délek a, b, $2c$ roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c, jsou výšky CV a $C'V'$ těchto trojúhelníků shodné. Trojúhelníky ACV a $A'C'V'$ jsou tedy shodné podle věty *Ssu*, proto můžeme oba trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ přemístit tak, aby platilo $B = B'$, $C = C'$ a $V = V'$; pak už ovšem nemůže platit $A = A'$. Jaká je poloha bodů A a A' na přímce BV? Protože $b = |AC| = |A'C|$, je trojúhelník $AA'C$ je rovnoramenný a jeho základna AA' má střed v bodě V (obr. 9). Předpoklad $a \geqq b$ znamená,



Obr. 9

že $|AC| = |A'C| \leqq |BC|$, takže bod B neleží na úsečce AA'; protože $|AB| = c$ a $|A'B| = 2c$, leží bod B na polopřímce opačné k AA' tak, že bod A je středem úsečky $A'B$.

Z pravoúhlých trojúhelníků AVC a BVC vyplývá

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{3}{2}c\right)^2,$$

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2.$$

Porovnáním pravých stran dostaneme po úpravě

$$a^2 - b^2 = 2c^2.$$

Ukázali jsme tak, že pokud k danému trojúhelníku ABC existuje trojúhelník se stranami a, b, $2c$ a obsahem $2S$, pak pro délky a, b, c musí být splněna rovnost $|a^2 - b^2| = 2c^2$.

Předpokládejme naopak, že pro velikosti stran a, b, c trojúhelníku ABC platí $|a^2 - b^2| = 2c^2$. Nejprve ukážeme, že trojúhelník se stranami a, b, $2c$ existuje, tj. že platí trojúhelníková nerovnost

$$a + b > 2c > |a - b|.$$

Pro trojúhelník ABC platí trojúhelníková nerovnost $a + b > c > |a - b|$. Proto platí $2c > c > |a - b|$. Vynásobíme-li dále obě strany nerovnosti $c > |a - b|$ kladným výrazem $a + b$, obdržíme nerovnost

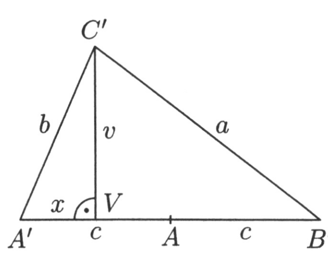
$$c(a + b) > |a^2 - b^2| = 2c^2,$$

z níž po dělení c vyplývá nerovnost

$$a + b > 2c.$$

Předpokládejme nyní, že v trojúhelníku $A'B'C'$ o stranách a, b, $2c$ platí rovnost $2c^2 = a^2 - b^2$ (opět bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $a > b$ — zde nemůže být $a = b$, protože by bylo $c = 0$).

Vysvětlíme, proč pata V výšky z vrcholu C' na stranu $A'B'$ padne dovnitř této strany (a ne na její prodloužení). K tomu stačí ukázat, že trojúhelník $A'B'C'$ má ostré vnitřní úhly u vrcholů A' i B' (obr. 10). Úhel $A'B'C'$ je menší než úhel $B'A'C'$, neboť předpokládáme, že $a > b$. Úhel



Obr. 10

$B'A'C'$ je ostrý, právě když platí nerovnost $|B'C'|^2 < |A'B'|^2 + |A'C'|^2$, neboli $a^2 < 4c^2 + b^2$. Poslední nerovnost je ale zaručena rovností $a^2 = b^2 + 2c^2$.

Z pravoúhlých trojúhelníků $A'VC'$ a $B'VC'$ plyne, že pro délky $x = |A'V|$ a $v = |C'V|$ platí

$$v^2 = b^2 - x^2,$$
$$v^2 = a^2 - (2c - x)^2.$$

Porovnáním pravých stran dostaneme po úpravě

$$4cx = 4c^2 - (a^2 - b^2)$$

a dosazením za $a^2 - b^2$ vyjde

$$4cx = 4c^2 - 2c^2 = 2c^2, \qquad \text{tj. } x = \frac{1}{2}c.$$

Označíme-li A (ve shodě s první částí) střed strany $A'B'$, platí

$$|AC'| = |A'C'| = b,$$

tudíž trojúhelník $AB'C'$ má strany délek a, b, c a obsah rovný polovině obsahu trojúhelníku $A'B'C'$. Tím jsme dokázali opačnou implikaci.

Jiné řešení. Z Heronova vzorce pro obsah S_1 trojúhelníku ABC a pro obsah S_2 trojúhelníku $A'B'C'$ máme

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big)},$$
$$S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - 4c^2\big)\big(4c^2 - (a-b)^2\big)}.$$

Z podmínky $S_2 = 2S_1$ plyne

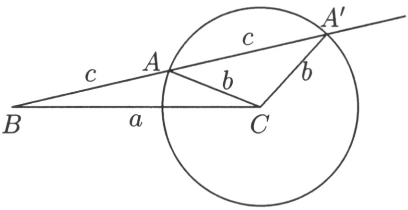
$$\big((a+b)^2 - 4c^2\big)\big(4c^2 - (a-b)^2\big) = 4\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big).$$

Z této podmínky po úpravě dostaneme

$$(a^2 - b^2)^2 = 4c^4, \qquad \text{tj. } \big|a^2 - b^2\big| = 2c^2.$$

Provedené úpravy jsou ekvivalentní, proto je možno celý postup obrátit. Z rovnosti $|a^2 - b^2| = 2c^2$ vyplývá, že trojúhelník $A'B'C'$ má dvakrát větší obsah než trojúhelník ABC. Existenci trojúhelníků lze dokázat stejným postupem jako v prvním řešení.

Jiné řešení. Uvažujme úsečku BC délky a $(a > b)$ a kružnici k se středem v bodě C a poloměrem b (obr. 11).



Obr. 11

Ve stejné polorovině (s hraniční přímkou BC) uvažujme body A a A', pro něž platí $|AB| = c$, $|A'B| = 2c$. Leží-li body B, A a A' na téže přímce, potom obsah trojúhelníku $A'BC$ je dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC. Z mocnosti bodu B ke kružnici k plyne

$$|BA| \cdot |BA'| = 2c^2 = a^2 - b^2.$$

Je-li naopak splněna poslední rovnost, protne polopřímka opačná k AB kružnici k v bodě, jehož vzdálenost od bodu B je rovna $2c$, tímto bodem je však A'. Odtud již plyne tvrzení pro obsahy trojúhelníků. Existenci trojúhelníků lze dokázat stejným postupem jako v prvním řešení.

B – I – 4

Sečteme-li všechna tři čísla nově vzniklé trojice, dostaneme

$$(r+5q)+(3r-5p)+(2q-3p) = 4r+7q-8p = 3(r+2q-3p)+(p+q+r).$$

Toto číslo dává při dělení třemi stejný zbytek jako číslo $(p + q + r)$, tj. zbytek při dělení třemi součtu čísel v trojici zůstává zachován. Pro trojici $(1, 3, 7)$ je zbytek roven dvěma $(1 + 3 + 7 = 11 = 3 \cdot 3 + 2)$.

Součet tří po sobě jdoucích celých čísel je však dělitelný třemi, takže dává zbytek nula. Plyne to z rovnosti $k + (k + 1) + (k + 2) = 3(k + 1)$.

Závěr: Po konečném počtu *kroků* nemůžeme z trojice $(1, 3, 7)$ dospět k trojici po sobě jdoucích celých čísel.

Jiné řešení. Předpokládejme, že z nějaké trojice (a, b, c) vznikne v následujícím *kroku* trojice po sobě jdoucích čísel (a_1, b_1, c_1). Tato tři čísla jsou tedy nutně členy aritmetické posloupnosti s diferencí 1. Musí proto platit

$$c_1 - b_1 = b_1 - a_1.$$

Dosadíme-li sem $a_1 = c + 5b$, $b_1 = 3c - 5a$, $c_1 = 2b - 3a$, dostaneme po úpravě

$$7(a + b) = 5c.$$

Odtud nutně platí $c = 7k$, $a + b = 5k$ pro nějaké celé číslo k. Potom ale $a_1 = 32k - 5a$, $b_1 = 21k - 5a$, $c_1 = 10k - 5a$. Aby tato trojice tvořila aritmetickou posloupnost s diferencí jedna, muselo by být $11k = -1$, tj. $k = -\frac{1}{11}$. To je spor s předpokladem, že k je celé číslo.

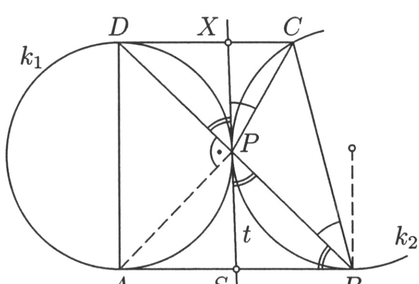
Jiné řešení. Zkoumejme, jak se mění parita trojice čísel v následujících *krocích*. Na začátku jsou všechna tři čísla lichá. Postupně dostáváme:

$$(l, l, l) \to (s, s, l) \to (l, l, s) \to (l, l, l) \to \dots$$

Protože se parita čísel pravidelně mění dle daného schématu, nemůžeme z trojice lichých čísel dospět k trojici (s, l, s), resp. (l, s, l), které reprezentují všechny trojice po sobě jdoucích čísel (za sudým číslem následuje liché a naopak).

B – I – 5

Protože úsečka AD je průměrem kružnice k_1, je úhel APD pravý (obr. 12).



Obr. 12

Uvažujme společnou tečnu t obou kružnic procházející bodem P. Označme po řadě S a X průsečíky tečny t s úsečkami AB a CD. Přímka AB je však také společnou tečnou obou kružnic. Platí proto $|SA| = |SP| = |SB|$. Bod S je proto středem Thaletovy kružnice sestrojené na stranou AB jako průměrem. Úhel APB je tudíž stejně jako úhel APD pravý a bod P je tedy vnitřním bodem úsečky BD.

Trojúhelník BPS je rovnoramenný se základnou BP, pro jeho úhly tedy platí $|\sphericalangle SBP| = |\sphericalangle SPB|$. Úhel SPB má navíc stejnou velikost jako úhel DPX (dvojice vrcholových úhlů). Platí proto $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle DPX|$. Současně však je úhel XPC úhlem úsekovým pro tětivu CP kružnice k_2. Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu máme $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle XPC|$.

Celkově dostáváme

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DPX| + |\sphericalangle XPC| = |\sphericalangle DPC|,$$

což jsme chtěli dokázat.

B – I – 6

Nulové body výrazu $x^2 - ux$ jsou $x = 0$ a $x = u$. Protože dle zadání platí $u > 0$, rozdělíme reálnou osu na tři vzájemně disjunktní intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = \langle 0, u\rangle$ a $I_3 = (u, \infty)$.

Na intervalech I_1 a I_3 řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2 - (u - v)x - 1 = 0.$$

Tato rovnice má kladný diskriminant $(u - v)^2 + 4$, a tudíž dva různé reálné kořeny

$$x_1 = \frac{u - v - \sqrt{(u-v)^2 + 4}}{2},$$
$$x_2 = \frac{u - v + \sqrt{(u-v)^2 + 4}}{2}.$$

Protože $\sqrt{(u-v)^2+4} > |u - v|$, platí $x_1 < 0$ a $x_2 > 0$. Znamená to, že číslo x_1 je vždy řešením rovnice (1), neboť $I_1 = (-\infty, 0)$, zatímco číslo x_2 je řešením rovnice (1), právě když platí $x_2 \in I_3$, neboli $x_2 > u$.

Na intervalu I_2 řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2 - (u + v)x + 1 = 0.$$

Tato rovnice má diskriminant $D = (u+v)^2 - 4$ a případné reálné kořeny

$$x_3 = \frac{u+v-\sqrt{(u+v)^2-4}}{2},$$
$$x_4 = \frac{u+v+\sqrt{(u+v)^2-4}}{2}.$$

Ze zadání vyplývá, že aspoň jeden z kořenů x_3, x_4 musí být řešením rovnice (1) (ležícím na intervalu I_2). Proto předně musí být diskriminant D nezáporný, z čehož plyne podmínka $|u+v| \geqq 2$. Protože navíc $\sqrt{(u+v)^2-4} < |u+v|$, mají oba kořeny x_3, x_4 stejné znaménko jako součet $u+v$. Dohromady to znamená, že musí platit $u+v \geqq 2$ (v případě $u+v \leqq -2$ by totiž žádné z čísel x_3, x_4 neleželo na I_2). Za podmínky $u+v \geqq 2$ ovšem platí $0 < x_3 \leqq x_4$, takže ze zadání plyne, že na intervalu $I_2 = \langle 0, u\rangle$ leží číslo x_3 (a případně i číslo x_4).

Z dosavadních úvah plyne, že naší úlohou je posoudit otázku, kdy za podmínek

$$u > 0 \quad \text{a} \quad u+v \geqq 2 \tag{2}$$

nastane některý z těchto případů:

a) $x_2 \notin I_3$, $\{x_3, x_4\} \subset I_2$, $x_3 \neq x_4$;

b) $x_2 \in I_3$, $x_3 = x_4 \in I_2$;

c) $x_2 \in I_3$, $x_3 \in I_2$, $x_4 \notin I_2$.

Ad a. Zjistíme, kdy jsou splněny jednotlivé podmínky, které tento případ vymezují (pro lepší přehled je v textu uvádíme černými puntíky).

• $x_2 \notin I_3$, neboli $x_2 \leqq u$. Po úpravě získáme nerovnost

$$\sqrt{(u-v)^2+4} \leqq u+v,$$

jejíž pravá strana je podle (2) kladná, takže obě strany můžeme umocnit na druhou. Po další snadné úpravě dostaneme podmínku $uv \geqq 1$. Proto platí:

$$x_2 \notin I_3 \iff uv \geqq 1.$$

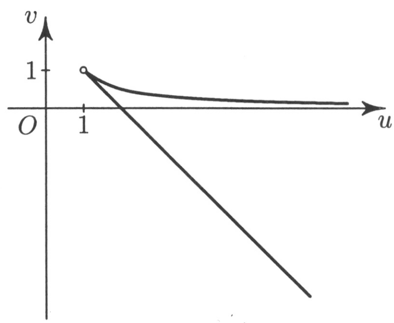
• $\{x_3, x_4\} \subset I_2$. Jak víme, za podmínek (2) platí $0 < x_3 \leqq x_4$, stačí proto pouze zkoumat nerovnost $x_4 \leqq u$, neboli $\sqrt{(u+v)^2-4} \leqq$ $\leqq u - v$. Poslední nerovnost může platit jedině tehdy, když $u \geqq v$. Pak po umocnění stran zkoumané nerovnosti a následné úpravě dostaneme podmínku $uv \leqq 1$. Proto platí:

$$\{x_3, x_4\} \subset I_2 \iff u \geqq v \wedge uv \leqq 1.$$

• $x_3 \neq x_4$. Z dřívějšího odvození podmínky $u + v \geqq 2$ je jasné, že rovnost $x_3 = x_4$ nastane, právě když $u + v = 2$. Za podmínek (2) tedy platí

$$x_3 \neq x_4 \quad \Longleftrightarrow \quad u + v > 2.$$

Shrneme nyní všechny podmínky pro zkoumaný případ A. Z nerovností $uv \geqq 1$ a $uv \leqq 1$ plyne $uv = 1$, neboli $v = 1/u$. Zbývající podmínky jsou pak tvaru $u \geqq 1/u$ a $u + 1/u > 2$ a jsou zřejmě obě splněny, právě když $u > 1$. Hledané body $[u, v]$ v případě A tedy tvoří část hyperboly $v = 1/u$ určenou omezením $u > 1$ (obr. 13).



Obr. 13

Ad b. Z předchozího rozboru případu A plyne, že za podmínek (2) platí tyto ekvivalence:

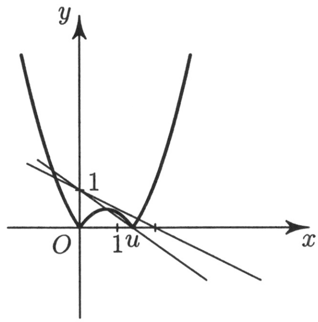
$$x_2 \in I_3 \Longleftrightarrow uv < 1, \quad x_4 \in I_2 \Longleftrightarrow u \geqq v \wedge uv \leqq 1,$$
$$x_3 = x_4 \Longleftrightarrow u + v = 2.$$

Vidíme, že v případě B musí platit $v = 2 - u$. Tehdy jsou zbývající podmínky tvaru $(2 - u)u < 1$ a $u \geqq 2 - u$ a jsou zřejmě obě splněny, právě když $u > 1$. Hledané body $[u, v]$ v případě B tedy tvoří polopřímku určenou rovnicí $v = 2 - u$ a omezením $u > 1$.

Ad c. Podmínku $x_3 \in I_2$ lze vyjádřit nerovností $x_3 \leqq u$, která je ekvivalentní s nerovností $\sqrt{(u + v)^2 - 4} \geqq v - u$, jež je splněna triviálně, pokud $u \geqq v$. Jak jsme ale ukázali dříve, v případě $u \geqq v$ platí nejen $x_3 \in I_2$, ale také $x_4 \in I_2$, což případ C vylučuje. V případě C tedy nutně platí $u < v$ a z nerovnosti $\sqrt{(u + v)^2 - 4} \geqq v - u$ po umocnění a úpravě dostaneme podmínku $uv \geqq 1$. Jak ale víme, z poslední nerovnosti plyne $x_2 \notin I_3$, takže případ C nemůže nikdy nastat.

Závěr: Množinou všech bodů vyhovujícím zadání je část hyperboly $v = 1/u$ a část přímky $v = 2 - u$, v obou případech části určené podmínkou $u > 1$.

Jiné řešení. Rovnici lze řešit také graficky. Zkoumáme, kdy budou mít grafy funkcí $f(x) = |x^2 - ux|$ a $g(x) = 1 - vx$ právě tři společné body (obr. 14).



Obr. 14

Graf funkce f je složen z částí paraboly, grafem funkce g je přímka procházející bodem $[0, 1]$. Aby tato přímka měla s grafem $f(x)$ společné právě tři body, musí být buď tečnou paraboly na intervalu $(0, u)$ (potom $u + v = 2$, odvození je analogické jako v předchozím řešení — pomocí diskriminantu), nebo musí procházet bodem $[u, 0]$ a současně protínat graf funkce f ve vnitřním bodě intervalu $(0, u)$. Dosadíme-li souřadnice bodu $[u, 0]$ do rovnice přímky g, dostaneme $0 = 1 - vu$, tj. $uv = 1$. Stejně jako v předchozím řešení musí platit $u > 1$, což můžeme ověřit nalezením druhého průsečíku přímky s parabolou.

B – S – 1

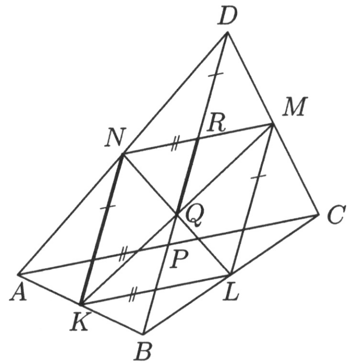
Libovolné z uvažovaných pětimístných čísel má desítkové soustavě zápis tvaru $\overline{abcba}$. Jeho rozvinutím a úpravou získáme rovnost

$$\overline{abcba} = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

Odtud plyne, že zkoumané číslo je dělitelné 101, právě když $2a - c = 0$ (pro libovolné číslice a, c totiž jistě platí $|2a - c| < 101$). Z rovnosti $2a = c$ plyne $a \leqq 4$, a protože hledáme co největší takové číslo, zvolíme jeho první číslici $a = 4$, které odpovídá číslice $c = 8$. Protože číslice b nemá na dělitelnost číslem 101 vliv, zvolíme ji co největší: $b = 9$. Hledané číslo je tudíž 49 894.

B – S – 2

Středy stran čtyřúhelníku $ABCD$ označme K, L, M, N podle obr. 15. Protože úsečky KL a MN jsou střední příčky trojúhelníků ABC



Obr. 15

resp. ACD, platí $KL \parallel AC \parallel MN$. Obdobně platí $LM \parallel BD \parallel KN$, tudíž $KLMN$ je rovnoběžník a bod Q půlí úsečku KM. Všimněme si nyní trojúhelníku KMN. Středem Q jeho strany KM prochází podle předpokladu úlohy úhlopříčka BD, která je, jak víme, rovnoběžná s druhou stranou KN. Proto i střed R třetí strany MN leží na úhlopříčce BD. Protože úsečka MN je stejnolehlá s úsečkou CA podle středu D, půlí úhlopříčka BD nejen úsečku MN (v bodě R), ale i úsečku AC (v odpovídajícím bodě P).

B – S – 3

Daná přirozená čísla označme podle velikosti $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Protože platí

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_2 + x_5 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5,$$

je mezi všemi součty $x_i + x_j$ aspoň sedm různých hodnot. Nevypsány zůstaly pouze tři z možných součtů, a to součty $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$ a $x_3 + x_4$. Proto pro počet p možných hodnot uvažovaných součtů platí $7 \leqq p \leqq 10$.

Pro každou z hodnot $p \in \{7,8,9,10\}$ uvedeme příklad pětiprvkové množiny M_p přirozených čísel, pro kterou uvažované součty nabývají právě p různých hodnot (jejich množinu označíme S_p):

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_7 &= \{1,2,3,4,5\}, & \mathsf{S}_7 &= \{3,4,5,6,7,8,9\}; \\ \mathsf{M}_8 &= \{1,2,3,4,6\}, & \mathsf{S}_8 &= \{3,4,5,6,7,8,9,10\}; \\ \mathsf{M}_9 &= \{1,2,3,4,7\}, & \mathsf{S}_9 &= \{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}; \\ \mathsf{M}_{10} &= \{1,2,3,5,8\}, & \mathsf{S}_{10} &= \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,13\}. \end{aligned}$$

B – II – 1

Mezi 109 po sobě jdoucími pětimístnými čísly

$$10\,902,\ 10\,903, \ldots, 10\,999,\ 11\,000, \ldots, 11\,009,\ 11\,010$$

není žádný palindrom (je možné uvést i jiné vyhovující příklady 109 pětimístných čísel, my jsme vypsali skupinu nejmenších z nich).

Nejmenší a největší pětimístné palindromy jsou čísla 10 001 a 99 999; před číslem 10 001 je jen jedno pětimístné číslo, za číslem 99 999 už dokonce žádné takové číslo není. Ukážeme nyní, že za každým pětimístným palindromem x, $x \neq 99\,999$, následuje pětimístný palindrom $x+100$ nebo $x+110$ nebo $x+11$. Skutečně, je-li $x = \overline{abcba}$, pak v případě $c \neq 9$ je palindromem číslo $x + 100 = \overline{ab(c+1)ba}$, v případě $c = 9 \neq b$ je palindromem číslo $x + 110 = \overline{a(b+1)0(b+1)a}$, konečně v případě $c = b = 9$ (kdy nutně $a \neq 9$) je palindromem číslo $x + 11 = \overline{(a+1)000(a+1)}$.

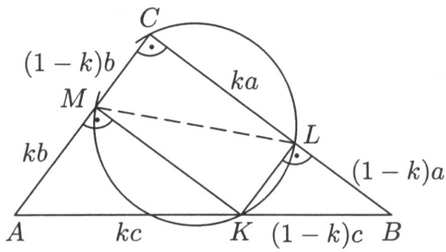
Odpověď. Hledaný největší počet čísel je roven 109.

B – II – 2

Protože úhly KLC, KMC a LCM jsou pravé (obr. 16), je čtyřúhelník $KLCM$ pravoúhelník a trojúhelníky AKM a KBL jsou podobné trojúhelníku ABC. Označme jako obvykle $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a položme $|AK| = kc$, kde $0 < k < 1$. Pak ovšem $|KB| = (1-k)c$ a ze zmíněné podobnosti trojúhelníků dostáváme vyjádření $|AM| = kb$, $|LC| = |KM| = ka$, $|BL| = (1-k)a$ a $|MC| = |KL| = (1-k)b$. Proto platí

$$S_{ABLM} = S_{ABC} - S_{LMC} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2} \cdot ka \cdot (1-k)b =$$
$$= \frac{1}{2}ab(1 - k + k^2) = \frac{1}{2}ab\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2}ab \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}S_{ABC},$$

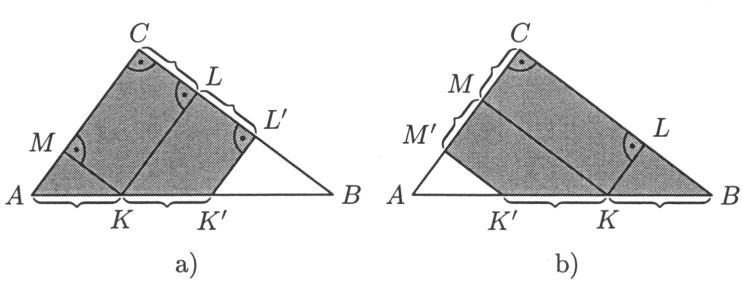
přičemž rovnost $S_{ABLM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ nastane, právě když $k = \frac{1}{2}$, tedy právě když je bod K středem přepony AB.



Obr. 16

Jiné řešení. Čtyřúhelník $ABLM$ má minimální obsah, právě když má maximální obsah trojúhelník LMC, který je „polovinou" pravoúhelníku $KLCM$. Stačí proto ukázat, že obsah S_{KLCM} je maximální, právě když je bod K středem přepony AB (kdy zřejmě $S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$). Je-li bod K vybrán tak, že $|AK| < \frac{1}{2}|AB|$, je úsečka KL střední příčkou lichoběžníku $AK'L'C$, který má o $S_{K'L'B}$ menší obsah než trojúhelník ABC (obr. 17a), takže platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{AK'L'C} < \frac{1}{2}S_{ABC}.$$



Obr. 17

Je-li naopak $|AK| > \frac{1}{2}|AB|$, využijeme obdobný lichoběžník $BK'M'C$ (obr. 17b) a usoudíme, že platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{BK'M'C} < \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Tím je tvrzení o maximálním obsahu S_{KLCM} dokázáno.

Odpověď. Čtyřúhelník $ABLM$ má nejmenší možný obsah, právě když bod K leží uprostřed přepony AB.

B – II – 3

I když lze danou úlohu řešit názorně geometrickou úvahou o vzájemné poloze paraboly $y = (x-1)^2$ a lomené čáry $y = 3|x| - px$, dáme nejprve přednost čistě algebraickému postupu.

Daná rovnice zřejmě nemá řešení $x = 0$. Po odstranění absolutní hodnoty a snadné úpravě dostaneme rovnice

$$x^2 + (p+1)x + 1 = 0 \qquad \text{pro } x < 0, \tag{1}$$
$$x^2 + (p-5)x + 1 = 0 \qquad \text{pro } x > 0. \tag{2}$$

Protože každá kvadratická rovnice má nejvýše dva různé kořeny, hledáme všechna ta čísla p, pro která má jedna z rovnic (1), (2) jeden kořen a druhá dva různé kořeny (a to vždy předepsaných znamének). Všimněme si, že pro každé $q \in \mathbb{R}$ mají reálné kořeny $x_{1,2}$ rovnice $x^2 + qx + 1 = 0$ (pokud vůbec existují) stejné znaménko, které je opačné než znaménko čísla q; platí totiž $x_1x_2 = 1$ a $x_1 + x_2 = -q$. Pro rovnice (1), (2) tak předně dostáváme podmínky

$$p + 1 > 0 \quad \text{a} \quad p - 5 < 0, \quad \text{neboli} \quad p \in (-1, 5).$$

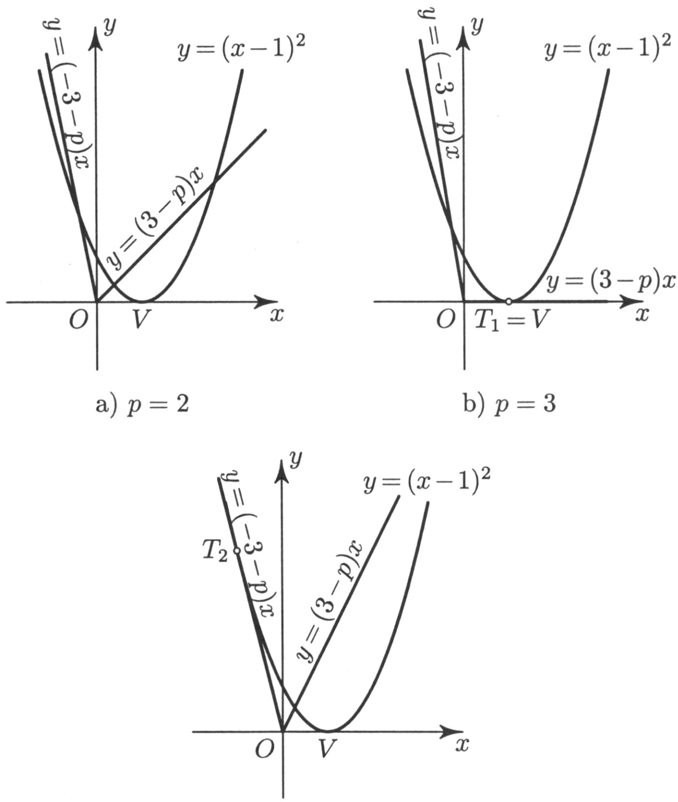
Kromě toho už jen požadujeme, aby pro diskriminanty obou rovnic

$$D_1 = (p+1)^2 - 4, \quad D_2 = (p-5)^2 - 4$$

platilo buď $D_1 = 0$ a $D_2 > 0$, nebo $D_1 > 0$ a $D_2 = 0$. Rovnost $D_1 = 0$ platí pouze pro $p \in \{-3, 1\}$, rovnost $D_2 = 0$ pouze pro $p \in \{3, 7\}$. Z těchto čtyř hodnot leží v intervalu $(-1, 5)$ pouze čísla $p = 1$ a $p = 3$, přičemž pro $p = 1$ vychází $D_2 = 12 > 0$, pro $p = 3$ zase $D_1 = 12 > 0$.

Odpověď. Hledané hodnoty jsou $p = 1$ a $p = 3$.

Jiné řešení. Grafem funkce $y = (x-1)^2$ je parabola s vrcholem $V[1,0]$, grafem funkce $y = 3|x| - px$ je lomená čára tvořená rameny některého úhlu s vrcholem $O[0,0]$ (obr. 18a pro $p = 2$). Oba grafy mají společné



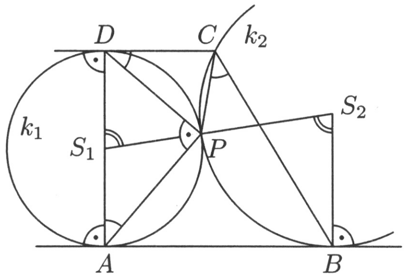
a) $p = 2$ b) $p = 3$ c) $p = 1$

Obr. 18

tři body, právě když jedno z ramen zmíněného úhlu je tečnou paraboly a druhé je její „sečnou“. Protože zkoumaná parabola nemá tečnu rovnoběžnou s osou y, můžeme rovnice obou tečen procházejících bodem $[0,0]$ hledat ve tvaru $y = kx$. Jak je známo, směrnice k se určí z podmínky, že rovnice $kx = (x-1)^2$ má dvojnásobný kořen, tedy nulový diskriminant. Ten má vyjádření $(k+2)^2 - 4$, takže hledané hodnoty jsou $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ a odpovídající body dotyku $T_1 = V[1,0]$ a $T_2[-1,4]$. Z rovnic pro směrnice tečných ramen zkoumaných úhlů $3 - p = 0$ a $-3 - p = -4$ najdeme řešení $p_1 = 3$ a $p_2 = 1$ a snadno se přesvědčíme, že druhé rameno je v obou případech skutečně sečnou paraboly (obr. 18b pro $p = 3$ a obr. 18c pro $p = 1$).

B – II – 4

Označme S_1 a S_2 středy uvažovaných kružnic (obr. 19). Obě úsečky S_1A a S_2B jsou kolmé na přímku AB, jsou tudíž rovnoběžné a střídavé úhly



Obr. 19

PS_2B a PS_1D shodné. Podle věty o obvodových a střídavých úhlech proto platí

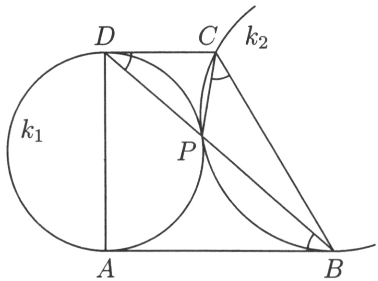
$$|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_1D| = |\sphericalangle PAD|.$$

Oba úhly APD a ADC jsou však pravé, tudíž

$$|\sphericalangle PAD| = 90° - |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CDP|.$$

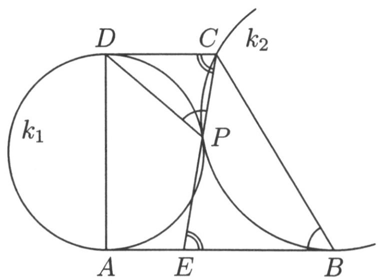
Dohromady dostáváme, že úhly PCB a CDP jsou shodné, což podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu znamená, že přímka BC je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku CDP.

Jiné řešení. Ve stejnolehlosti se středem P, při které kružnice k_1 přejde v kružnici k_2, musí tečna CD kružnice k_1 přejít v rovnoběžnou tečnu AB kružnice k_2, přitom se bod dotyku D zobrazí do bodu dotyku B. Bod P tudíž leží na úhlopříčce BD (obr. 20). Odtud plyne shodnost střídavých úhlů CDP a PBA (mezi rovnoběžkami AB a CD). Úhel PBA je ale úsekový úhel mezi tětivou BP a tečnou AB kružnice k_2, je tedy shodný s příslušným obvodovým úhlem PCB. Úhly CDP a PCB jsou proto shodné, což jsme potřebovali dokázat (viz závěr předchozího řešení).



Obr. 20

Poznámka. Podle úlohy B–I–5 jsou shodné úhly ABC a CPD (obr. 21). Protože jsou shodné i střídavé úhly PEB a PCD, kde E je



Obr. 21

průsečík polopřímky CP se stranou AB, lze kýženou shodnost úhlů CDP a PCB odvodit z trojúhelníků BCE a PDC.