52. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: 52. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2002/2003. 44. mezinárodní matematická olympiáda. 15. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2004. pp. 28–44.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405058

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavte pět navzájem různých pětimístných čísel tak, aby jejich součet byl co největší. *(J. Šimša)*

C – I – 2

Je dán trojúhelník ABC s ostrými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Označme Q průsečík těžnice AD s výškou CP a E patu kolmice z bodu D na stranu AB. Dále nechť R je bod na polopřímce opačné k PC takový, že $|PR| = |CQ|$. Dokažte, že přímky AD a RE jsou různoběžné a že jejich průsečík leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B. *(J. Švrček)*

C – I – 3

Předpokládejme, že každá ze dvou bank A a B bude mít po následující dva roky stálou roční úrokovou míru. Kdybychom uložili $5/6$ našich úspor u banky A a zbytek u banky B, vzrostly by naše úspory po jednom roce na 67 000 Kč a po dvou letech na 74 900 Kč. Kdybychom však uložili $5/6$ našich úspor u banky B a zbytek u banky A, vzrostly by naše úspory po jednom roce na 71 000 Kč. Na jakou částku by se v takovém případě naše úspory zvýšily po dvou letech? *(J. Šimša)*

C – I – 4

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou 3 cm a shodnými stranami BC, CD a DA, pro který platí: Na základně AB existuje takový bod E, že úsečka DE má délku 5 cm a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy. *(E. Kováč)*

C – I – 5

K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m a n.

(*J. Zhouf*)

C – I – 6

V rovině je dána přímka p a kružnice k. Sestrojte takový trojúhelník ABC, aby k byla kružnicí jemu vepsanou, její střed ležel ve čtvrtině jeho těžnice na stranu AB a aby vrchol C ležel na přímce p. Proveďte diskusi o počtu řešení v závislosti na vzájemné poloze přímky p a kružnice k.

(*P. Černek*)

C – S – 1

Odtrhneme-li od libovolného alespoň dvojmístného přirozeného čísla číslici na místě jednotek, dostaneme číslo o jednu číslici „kratší". Najděte všechna původní čísla, která se rovnají absolutní hodnotě rozdílu druhé mocniny „kratšího" čísla a druhé mocniny odtržené číslice. (*J. Zhouf*)

C – S – 2

Na straně CD čtverce $ABCD$ je zvolen bod E tak, že úhel DAE má velikost $30°$. Bod P je patou kolmice vedené bodem B na přímku AE, bod Q patou kolmice vedené bodem C na přímku BP. Rozhodněte, zda je obsah lichoběžníku $PQCE$ menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

(*L. Boček*)

C – S – 3

Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavíme pět pětimístných čísel, která se čtou zepředu stejně jako zezadu (např. 32 223), a pak tato čísla sečteme. Jakou nejmenší a jakou největší hodnotu může mít výsledný součet? (*J. Šimša*)

C – II – 1

Najděte nejmenší přirozené číslo n, pro které je součin

$$2\,003 \cdot 2\,004 \cdot 2\,005 \cdot \ldots \cdot (2\,003 + n)$$

dělitelný všemi dvojmístnými prvočísly. *(J. Šimša)*

C – II – 2

V rovině je dána úsečka AP. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ tak, aby bod P byl středem jeho strany DE. *(J. Švrček)*

C – II – 3

Kdyby Karel půjčil jednomu známému p tisíc Kč s úrokem $p\,\%$ a druhému známému q tisíc Kč s úrokem $q\,\%$, kde p a q jsou celá čísla, přinesly by obě půjčky Karlovi stejný zisk, jako kdyby jedné osobě půjčil celkovou částku s úrokem $(p + 2{,}4)\,\%$. Kdyby půjčil jednomu známému p tisíc Kč s úrokem $2p\,\%$ a druhému známému q tisíc Kč s úrokem $2q\,\%$, přinesly by mu tyto půjčky stejný zisk, jako kdyby jedné osobě půjčil celkovou částku s úrokem $(p + 5{,}8)\,\%$. Určete čísla p a q. *(J. Šimša, J. Zhouf)*

C – II – 4

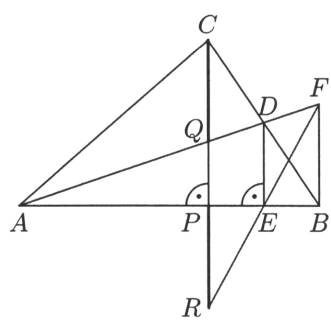
Určete délku ramen rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 10 a 12 tak, aby délky všech jeho stran i úhlopříček byly vyjádřeny celými čísly. *(P. Černek)*

C – I – 1

Největší možný součet by vytvořila pětice čísel 54 321, 54 321, 54 321, 54 321, 54 321. Jelikož mají být ale čísla navzájem různá, pokusíme se změnit tuto pětici tak, aby se nenarušilo trojčíslí 543, tj. aby změna součtu byla co nejmenší. Tak ale budou ještě dvě z pěti čísel stejná, neboť z číslic 1, 2 je možné sestavit pouze čtyři různá dvojčíslí 11, 12, 21, 22. Změníme proto jedno trojčíslí 543 na 542 tak, že zaměníme číslici 2 číslicí 3 na místě desítek. Stejně tak na místě jednotek nemůže být všech pět jedniček, protože by poslední trojčíslí nejméně tří pětimístných čísel bylo 321. Vyměníme proto číslici 1 z místa jednotek s číslicí 2 z místa stovek a to proto, aby změna součtu pětice čísel byla co nejmenší. Po těchto výměnách mohou být poslední dvojčíslí pěti čísel tato: 31, 22, 21, 21, 11, nebo 31, 21, 21, 21, 12, nebo 32, 21, 21, 21, 11. Snažíme se nyní rozmístit tato dvojčíslí za trojčíslí 543, 543, 543, 543, 542. Zjistíme, že vyhovuje pouze první pětice dvojčíslí. Hledaná pětice pětimístných čísel s největším možným součtem je 54 331, 54 322, 54 321, 54 311, 54 221.

C – I – 2

Ze zadání víme, že $|PR| = |CQ|$, proto je i $|QR| = |CP|$ (obr. 1). Úsečka DE je střední příčkou trojúhelníku CPB, proto je $|DE| = \frac{1}{2}|CP|$.



Obr. 1

Je tedy také $|DE| = \frac{1}{2}|QR|$. Protože je $DE \parallel QR$, nemůžou být úsečky RE a QD rovnoběžné (jinak by byl $REDQ$ rovnoběžník a platilo by $|DE| = |QR|$). Proto se přímky RE a QD protínají v bodě, který je na obrázku označen jako F, a úsečka DE je střední příčkou trojúhelníků CPB a QRF, jejichž strany CP a QR leží na stejné přímce. Proto je vzdálenost bodů F a B od přímky CR stejná, neboli přímky CR a FB jsou rovnoběžné, a tudíž přímka FB je (stejně jako přímka CR) kolmá k přímce AB.

C – I – 3

Nechť naše výchozí úspory činí x Kč a nechť roční úroková míra u banky A (banky B) je $p\,\%$ ($q\,\%$), tj. vklad u banky A (banky B) vzroste po jednom roce a-krát (b-krát), kde $a = 1 + p/100$ ($b = 1 + q/100$). Podle zadání platí

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b &= 67\,000,\\ \left[\left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a\right]\cdot a + \left[\left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b\right]\cdot b &= 74\,900,\\ \left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot b &= 71\,000,\end{aligned}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned}5\cdot\frac{xa}{6} + \frac{xb}{6} &= 67\,000,\\ 5\cdot\frac{xa}{6}\cdot a + \frac{xb}{6}\cdot b &= 74\,900,\\ \frac{xa}{6} + 5\cdot\frac{xb}{6} &= 71\,000.\end{aligned}$$

Označíme-li $u = \frac{1}{6}xa$ a $v = \frac{1}{6}xb$, přejdou první a třetí rovnice v soustavu

$$\begin{aligned}5u + v &= 67\,000,\\ u + 5v &= 71\,000,\end{aligned}$$

ze které vychází $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$. Protože $a = 6u/x$ a $b = 6v/x$, lze druhou rovnici soustavy zapsat jako

$$\frac{5}{6}\cdot x\cdot\frac{36u^2}{x^2} + \frac{1}{6}\cdot x\cdot\frac{36v^2}{x^2} = 74\,900,$$

neboli

$$\frac{30u^2 + 6v^2}{x} = 74\,900,$$

odkud pro $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$ vychází $x = 60\,000$, tudíž

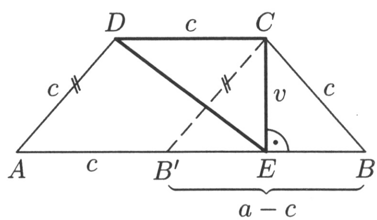
$$a = \frac{6u}{x} = \frac{66\,000}{60\,000} = 1{,}1,$$
$$b = \frac{6v}{x} = \frac{72\,000}{60\,000} = 1{,}2.$$

Hledaná částka je proto rovna

$$\left(\frac{1}{6}\cdot x\cdot a^2 + \frac{5}{6}\cdot x\cdot b^2\right)\ \text{Kč} = (10\,000\cdot 1{,}1^2 + 50\,000\cdot 1{,}2^2)\ \text{Kč} =$$
$$= 84\,100\ \text{Kč}.$$

C – I – 4

Rozbor: Označíme-li $|AB| = a$, $|CD| = c$ a výšku lichoběžníku v (obr. 2),



Obr. 2

můžeme pro jeho obsah S psát

$$S = \frac{1}{2}(a+c)v.$$

Obsah trojúhelníku AED je podle zadání roven

$$\frac{|AE|\cdot v}{2} = \frac{1}{2}\cdot S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)v,$$

odkud plyne, že $|AE| = \frac{1}{2}(a+c)$ (tj. úsečka AE má délku stejnou jako střední příčka lichoběžníku $ABCD$). Protože bod E leží na úsečce AB, platí

$$|EB| = |AB| - |AE| = a - \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(a-c),$$

takže je $a > c$. Označíme-li B' bod úsečky AB, pro který je $|AB'| = c$, bude $|B'B| = a - c$, a protože hledaný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný, je rovnoramenný i trojúhelník $B'BC$, takže střed E úsečky $B'B$ je zároveň patou výšky z vrcholu C na základnu AB (obr. 2). Pomocí Pythagorovy věty vypočteme, že

$$c = \sqrt{|DE|^2 - v^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}.$$

Popis konstrukce:

1. $\triangle DEC$; $|DC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|CE| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ECD| = 90°$;
2. p; $p \parallel CD$, $E \in p$;
3. $k(D, 4\,\mathrm{cm})$, $l(C, 4\,\mathrm{cm})$;
4. A; $A \in p \cap k$, úhel ADC je tupý;
5. B; $B \in p \cap l$, úhel BCD je tupý.

Úloha má jediné řešení.

C – I – 5

Nechť je číslo $n = \overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$, kde $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$. Číslo $m + n$ je čtyřmístné, proto je číslo m nejvýše čtyřmístné. Rozebereme jednotlivé případy podle počtu číslic m:

1. Číslo m je jednomístné, tj. $m = \overline{x} = x$, kde $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Podle zadání úlohy je jednak

$$m + n = 1\,000a + 100b + 10c + d + x,$$

jednak

$$m + n = 1\,000d + 100c + 10b + a.$$

Odtud postupně dostaneme

$$1\,000a + 100b + 10c + d + x = 1\,000d + 100c + 10b + a,$$
$$x = 999(d - a) + 90(c - b).$$

Pravá strana poslední rovnosti je dělitelná devíti, proto může být jedině $x = 9$. Po dosazení této hodnoty do rovnosti a vykrácení devíti vychází

$$1 = 111(d - a) + 10(c - b),$$
$$10(b - c) + 1 = 111(d - a).$$

Z nerovností $-9 \leqq b-c \leqq 9$ plyne $-89 \leqq 10(b-c)+1 \leqq 91$. Mezi čísly -89 a 91 je jediný násobek 111, a to číslo 0. Rovnost $10(b-c)+1=0$ však není splněna. Žádné jednomístné číslo m tedy není řešením dané úlohy.

2. Číslo m je dvojmístné, tj. $m = \overline{xx} = 10x + x = 11x$, kde $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Analogicky jako v předchozím případě můžeme postupně psát

$$1\,000a + 100b + 10c + d + 11x = 1\,000d + 100c + 10b + a,$$
$$11x = 999(d-a) + 90(c-b).$$

Pravá strana poslední rovnosti je dělitelná devíti, proto může být jedině $x = 9$. Potom je

$$11 = 111(d-a) + 10(c-b),$$
$$10(b-c) + 11 = 111(d-a).$$

Zde je $-79 \leqq 10(b-c) + 11 \leqq 101$, odkud plyne jediná možnost $10(b-c) + 11 = 0$, která však neplatí pro žádné číslice b, c. Žádné dvojmístné číslo m tedy není řešením dané úlohy.

3. Číslo m je trojmístné, tj. $m = \overline{xxx} = 100x + 10x + x = 111x$, kde $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Opět můžeme psát

$$1\,000a + 100b + 10c + d + 111x = 1\,000d + 100c + 10b + a,$$
$$111x = 999(d-a) + 90(c-b),$$
$$37x = 333(d-a) + 30(c-b).$$

Pravá strana poslední rovnosti je dělitelná třemi a číslo 37 není dělitelné třemi, proto musí být $x = 3$, nebo $x = 6$, nebo $x = 9$.

Nechť $x = 3$. Potom je

$$37 = 111(d-a) + 10(c-b),$$
$$10(b-c) + 37 = 111(d-a).$$

Zde je $-53 \leqq 10(b-c) + 37 \leqq 127$, odkud je buď $10(b-c) + 37 = 0$, nebo $10(b-c) + 37 = 111$. Ani jedna z posledních dvou rovností však není splněna pro žádné číslice b, c.

Nechť $x = 6$. Potom je

$$74 = 111(d-a) + 10(c-b),$$
$$10(b-c) + 74 = 111(d-a).$$

Zde je $-16 \leqq 10(b-c)+74 \leqq 164$, odkud je buď $10(b-c)+74=0$, nebo $10(b-c)+74=111$. Ani jedna z posledních dvou rovností však není splněna pro žádné číslice b, c.

Nechť $x=9$. Potom je:

$$111 = 111(d-a)+10(c-b),$$
$$10(b-c) = 111(d-a-1).$$

Zde je $-90 \leqq 10(b-c) \leqq 90$, odkud je jedině $10(b-c)=0$ a $111(d-a-1)=0$, tj. jedině $c-b=0$ a $d-a=1$. Řešením dané úlohy jsou tedy čísla $n \in \{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\}$ pro $b \in \{0,1,\ldots,9\}$, tj. celkem 80 čísel. Číslo m je rovno 999.

4. Číslo m je čtyřmístné, tj. $m=\overline{xxxx}=1\,111x$, kde $x \in \{1,2,\ldots,9\}$. Opět můžeme psát

$$1\,111x = 999(d-a)+90(c-b).$$

Opět může být jedině $x=9$, což dává rovnost

$$10(b-c)+1\,111 = 111(d-a).$$

Platí jednak $10(b-c)+1\,111 \geqq 1\,111-90=1\,021$, jednak $111(d-a) \leqq 999$. Proto žádné čtyřmístné číslo m není řešením dané úlohy.

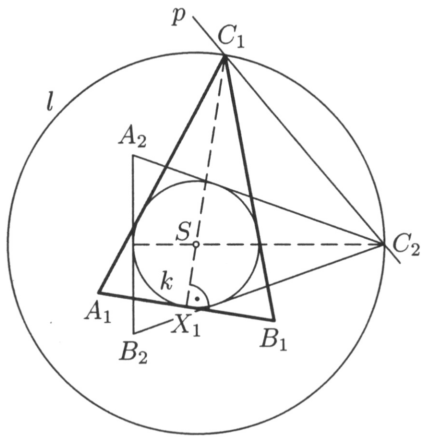
Závěr: Úloha má 80 řešení, a to čísla $m=999$ a

$$n \in \{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\}$$
$$\text{pro } b \in \{0,1,\ldots,9\}.$$

C – I – 6

Rozbor: Předpokládejme, že požadovaný trojúhelník ABC je sestrojen. Střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku leží na osách jeho vnitřních úhlů. Podle zadání leží střed kružnice k na těžnici t_c trojúhelníku ABC, proto osa vnitřního úhlu při vrcholu C splývá s těžnicí t_c. Trojúhelník ABC je tedy rovnoramenný se základnou AB (obr. 3). Leží-li střed S kružnice k s poloměrem r ve čtvrtině těžnice t_c, leží tedy ve vzdálenosti r od strany AB a ve vzdálenosti $3r$ od vrcholu C. (Bod S nemůže mít od vrcholu C vzdálenost $\frac{1}{3}r$, neboť by bod C ležel ve vnitřní oblasti kružnice k, která je však trojúhelníku ABC vepsána, tudíž body

A, B, C leží v její vnější oblasti.) Bod C je tedy průsečíkem přímky p a kružnice l se středem S a poloměrem $3r$.



Obr. 3

Popis konstrukce:

1. dáno: $k(S,r)$, p;
2. $l(S,3r)$;
3. C; $C \in p \cap l$;
4. X; $X \in \rightarrow CS$, $|XC| = 4r$;
5. x; $x \perp XC$, $X \in x$;
6. tečny a, b z bodu C ke k (např. pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem CS);
7. A, B; $A \in x \cap b$, $B \in x \cap a$.

Diskuse pro případ, že pořadí vrcholů A, B, C je proti směru pohybu hodinových ručiček:

úloha má dvě řešení $\iff$ $|Sp| < 3r$,
úloha má jedno řešení $\iff$ $|Sp| = 3r$,
úloha nemá žádné řešení $\iff$ $|Sp| > 3r$.

C – S – 1

Označme hledané číslo $10a + b$, kde a, b jsou celá čísla, $a \geqq 1$, $0 \leqq b \leqq 9$. Podle zadání má platit

$$10a + b = |a^2 - b^2|.$$

Předpokládejme nejprve, že $a \geqq b$. V tom případě jednoduchými úpravami dostáváme

$$
\begin{aligned}
10a + b &= a^2 - b^2, \\
a^2 - 10a + 25 &= b^2 + b + 25, \\
(a-5)^2 &= b^2 + b + 25.
\end{aligned}
$$

Do poslední rovnosti pak postupně dosazujeme $b = 0$, $b = 1$, ..., $b = 9$ a zjišťujeme, zda výraz $b^2 + b + 25$ je druhou mocninou nějakého nezáporného celého čísla. Rovnici vyhovují dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 0$, $a = 10$; $b = 7$, $a = 14$.

V případě, kdy $a < b$, obdobnými úpravami dostaneme

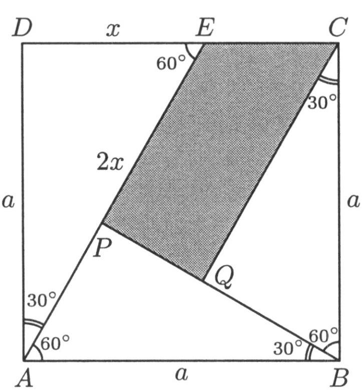
$$
\begin{aligned}
10a + b &= b^2 - a^2, \\
a^2 + 10a + 25 &= b^2 - b + 25, \\
(a+5)^2 &= b^2 - b + 25
\end{aligned}
$$

a podobně jako v prvním případě získáme dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 1$, $a = 0$; $b = 8$, $a = 4$.

Závěr: S přihlédnutím k podmínkám zadání jsou řešením úlohy tři čísla 48, 100, 147.

C – S – 2

Označme a délku strany čtverce $ABCD$. Trojúhelníky AED, BAP a CBQ jsou podobné podle věty *uu*, přičemž trojúhelníky BAP a CBQ jsou dokonce shodné (obr. 4). Trojúhelník AED je polovinou rovnostranného trojúhelníku o straně AE. Označíme-li $|ED| = x$, je $|AE| = 2x$.



Obr. 4

V pravoúhlém trojúhelníku AED platí

$$a = |AD| = \sqrt{|AE|^2 - |ED|^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3},$$

odkud $x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. (Velikost x můžeme také spočítat užitím goniometrického vzorce $x : a = |ED| : |AD| = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.)

Trojúhelníky BAP a CBQ jsou polovinami rovnostranného trojúhelníku o straně a. Rovnostranný trojúhelník o straně délky a má výšku $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a jeho obsah je $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Součet obsahů trojúhelníků AED, BAP a CBQ je tudíž

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{12}a^2.$$

Jelikož obsah čtverce $ABCD$ je a^2, je poměr obsahů lichoběžníku $PQCE$ a čtverce $ABCD$ roven

$$\frac{a^2 - \frac{5}{12}\sqrt{3}a^2}{a^2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{12},$$

což je číslo menší než 0,29.

Závěr: Obsah lichoběžníku $PQCE$ je menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

Pro zajímavost uvedeme ještě jedno řešení, ve kterém ukážeme, že zkoumaný obsah lze odhadnout pomocí úvah o vzájemné poloze vhodných bodů (bez výpočtu délek a obsahu).

Jiné řešení. Protože nás zajímají jen poměry obsahů, můžeme předpokládat, že $ABCD$ je čtverec o straně 1. Ve středové souměrnosti podle středu O čtverce přejdou body E, P a Q v body, které označíme G, R a S (obr. 5). Z pravoúhlého trojúhelníku AED s úhlem 60° při vrcholu E plyne

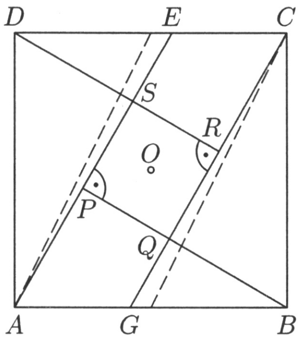
$$|DE| = \frac{1}{2}|AE| > \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2},$$

takže pro obsah rovnoběžníku $AGCE$ platí nerovnost

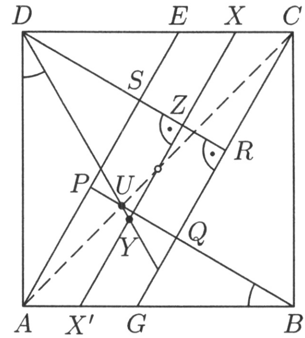
$$S(AGCE) < \frac{1}{2}.$$

Zároveň se zdá, že shodné lichoběžníky $RCES$ a $AGQP$ mají větší obsah než čtverec $PQRS$. Pokud tomu tak opravdu je, musí být $S(RCES) > \frac{1}{3}S(AGCE)$, takže nutně platí

$$S(PQCE) = S(AGCE) - S(AGQP) = S(AGCE) - S(RCES) <$$
$$< \frac{2}{3}S(AGCE) < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$



Obr. 5



Obr. 6

Tím bude úloha vyřešena.

Strana SR čtverce $PQRS$ je současně výškou lichoběžníku $RCES$. Proto bude nerovnost $S(PQRS) < S(RCES)$ dokázána, když ověříme, že strana čtverce je kratší než střední příčka lichoběžníku. Tou je úsečka XZ, kde Z označuje střed úsečky SR, což je zároveň pata výšky rovnostranného trojúhelníku XYD (obr. 6). Označme U průsečík úhlopříčky AC daného čtverce s úsečkou PQ. Tímto bodem prochází i přímka DY, která je souměrně sdružená s přímkou BP právě podle osy AC, neboť $|\sphericalangle YDA| = |\sphericalangle ABP| = 30°$. To ovšem znamená, že bod Y, který je průsečíkem DU a XZ, leží vně čtverce $PQRS$! Proto je opravdu $|XZ| = |ZY| > |QR|$.

Obsah lichoběžníku $PQCE$ je tudíž menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

C – S – 3

Označme a zapišme v desítkové soustavě pět pětimístných čísel, která se čtou zepředu stejně jako zezadu a jsou sestavena z daných číslic:

$$\begin{aligned}
\overline{a_1b_1c_1b_1a_1} &= a_1 \cdot 10^4 + b_1 \cdot 10^3 + c_1 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + a_1,\\
\overline{a_2b_2c_2b_2a_2} &= a_2 \cdot 10^4 + b_2 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + b_2 \cdot 10 + a_2,\\
\overline{a_3b_3c_3b_3a_3} &= a_3 \cdot 10^4 + b_3 \cdot 10^3 + c_3 \cdot 10^2 + b_3 \cdot 10 + a_3,\\
\overline{a_4b_4c_4b_4a_4} &= a_4 \cdot 10^4 + b_4 \cdot 10^3 + c_4 \cdot 10^2 + b_4 \cdot 10 + a_4,\\
\overline{a_5b_5c_5b_5a_5} &= a_5 \cdot 10^4 + b_5 \cdot 10^3 + c_5 \cdot 10^2 + b_5 \cdot 10 + a_5.
\end{aligned}$$

Mezi číslicemi c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 je právě jedna jednička, právě jedna dvojka, právě jedna trojka, právě jedna čtyřka a právě jedna pětka. Kdyby totiž na místě stovek uvažovaných pěti čísel chyběla např. jednička, musela by se na místech ostatních řádů vyskytovat v lichém počtu (pětkrát), což vzhledem k symetrii uvažovaných čísel není možné.

Pro součet S uvažovaných čísel tedy platí

$$\begin{aligned}S &= \overline{a_1b_1c_1b_1a_1} + \overline{a_2b_2c_2b_2a_2} + \overline{a_3b_3c_3b_3a_3} + \overline{a_4b_4c_4b_4a_4} + \overline{a_5b_5c_5b_5a_5} = \\ &= (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\cdot(10^4+1) + \\ &\quad + (b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)\cdot(10^3+10) + \\ &\quad + (c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)\cdot 10^2 = \\ &= 10\,001\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) + 1\,010\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) + \\ &\quad + 100\cdot(1+2+3+4+5) = \\ &= 10\,001\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) + \\ &\quad + 1\,010\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) + 1\,500.\end{aligned}$$

S ohledem na číslice, jež máme k dispozici, bude součet S nejmenší, jestliže bude

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 1+1+2+2+3 = 9,$$
$$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 = 5+5+4+4+3 = 21.$$

Nejmenší možný součet má tudíž hodnotu

$$S_{\min} = 10\,001\cdot 9 + 1\,010\cdot 21 + 1\,500 = 112\,719$$

a vznikne např. jako součet

$$S_{\min} = 13\,131 + 14\,241 + 24\,342 + 25\,452 + 35\,553.$$

Podobně bude součet S největší, pokud bude

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 5+5+4+4+3 = 21,$$
$$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 = 1+1+2+2+3 = 9.$$

Největší možný součet má tudíž hodnotu

$$S_{\max} = 10\,001\cdot 21 + 1\,010\cdot 9 + 1\,500 = 220\,611$$

a vznikne např. jako součet

$$S_{\max} = 53\,535 + 52\,425 + 42\,324 + 41\,214 + 31\,113.$$

C – II – 1

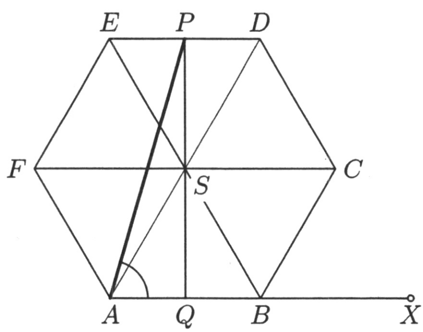
Pro každé z dvojmístných prvočísel 97, 89, 83, 79, 73, … hledáme jeho nejmenší násobek, který převyšuje číslo 2 003. Vzhledem k tomu, že mezi k po sobě jdoucími celými čísly je právě jedno dělitelné k, a protože je $97 \cdot 21 = 2\,037$, $89 \cdot 23 = 2\,047$, $83 \cdot 25 = 2\,075$, $79 \cdot 26 = 2\,054$, musí být $2\,003 + n \geqq 2\,075$, tedy $n \geqq 72$. Pro takové n máme zaručeno, že pro každé z prvočísel 97, 89, 83, 79 je mezi čísly 2 003, 2 004, 2 005, …, $2\,003 + n$ aspoň jedno jím dělitelné.

Mezi uvedenými 73 čísly 2 003 až 2 075 je vždy aspoň jedno dělitelné prvočíslem 73, aspoň jedno dělitelné prvočíslem 71 atd.

Hledané číslo n je tedy 72.

C – II – 2

V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ se středem S, v němž Q je střed strany AB a P je střed strany DE, známe velikost úhlu PAQ (obr. 7),



Obr. 7

neboť všechny pravidelné šestiúhelníky jsou navzájem podobné. V pravoúhlém trojúhelníku APQ tedy známe délku přepony AP a velikosti dvou úhlů (AQP je pravý úhel). Odtud vyplývá postup *konstrukce*:

1. úsečka AP,
2. Thaletova kružnice k nad průměrem AP,
3. polopřímka AX, jež svírá s úsečkou AP úhel velikosti PAQ (ten sestrojíme pomocí libovolného pravidelného šestiúhelníku),
4. bod Q jako průsečík kružnice k s polopřímkou AX,
5. střed S úsečky PQ,

6. kružnice se středem S a poloměrem $|SQ|$,
7. pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$.

Úloha má dvě řešení souměrně sdružená podle osy AP podle toho, v které polorovině s hraniční přímkou AP sestrojíme polopřímku AX (bod 3 konstrukce).

C – II – 3

V prvním případě platí

$$1\,000p \cdot \frac{p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+2{,}4}{100},$$

v druhém případě platí

$$1\,000p \cdot \frac{2p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{2q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+5{,}8}{100}.$$

Úpravou obou rovnic získáme soustavu

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (p+2{,}4)(p+q), \qquad (1)\\ 2p^2 + 2q^2 &= (p+5{,}8)(p+q). \end{aligned}$$

Protože levá strana druhé rovnice je dvojnásobkem levé strany první rovnice, musí platit

$$2(p+2{,}4)(p+q) = (p+5{,}8)(p+q).$$

Odtud po vykrácení nenulovým výrazem $p+q$ vychází $p = 1$. Dosazením této hodnoty např. do rovnice (1) a po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$q^2 - 3{,}4q - 2{,}4 = 0.$$

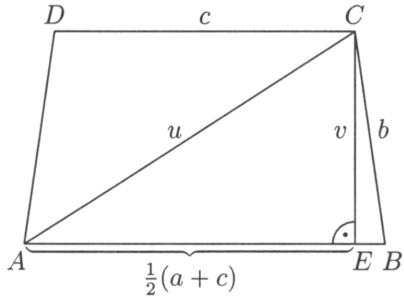
Protože hledáme celočíselné kořeny, přepíšeme rovnici do tvaru

$$q(5q - 17) = 12$$

a snadno zjistíme, že mezi děliteli čísla 12 rovnici vyhovuje jedině $q = 4$.

C – II – 4

Označme E patu kolmice spuštěné z vrcholu C na základnu AB rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ a jednotlivé délky úseček označme takto (obr. 8): $|AB| = a = 12$, $|BC| = b$, $|CD| = c = 10$, $|AC| = u$, $|CE| = v$. Potom je $|BE| = \frac{1}{2}(a-c) = 1$, $|AE| = \frac{1}{2}(a+c) = 11$.



Obr. 8

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelníky AEC a EBC můžeme tedy psát

$$v^2 = u^2 - 11^2 = b^2 - 1^2, \tag{1}$$

neboli

$$u^2 - b^2 = 11^2 - 1^2 = 120.$$

Odtud je vidět, že čísla u a b jsou zároveň obě sudá, nebo obě lichá, proto v rozkladu

$$(u-b)(u+b) = 120 = 2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12$$

přicházejí v úvahu jen uvedené rozklady čísla 120 na sudé činitele.

Uvedeným rozkladům pak odpovídají čtyři soustavy rovnic pro neznámé u a b:

$$\begin{array}{llll} u-b=2, & u-b=4, & u-b=6, & u-b=10, \\ u+b=60; & u+b=30; & u+b=20; & u+b=12. \end{array}$$

Jejich řešením (nejlépe tak, že vždy odečteme druhou rovnici od prvé) dostaneme pro délku ramene b lichoběžníku $ABCD$ čtyři možnosti, $b \in$ $\in \{29, 13, 7, 1\}$. Z rovnosti (1) ovšem vidíme, že musí být $b > 1$, úloze tedy vyhovují jen první tři hodnoty.

Odpověď. Možná délka ramene lichoběžníku je buď 7, nebo 13, nebo 29.