Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

Zwardoń, 17.–18. června 2002

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již podruhé přípravné střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala vždy šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích letenky na 43. MMO do skotského Glasgowa.

Soutěž se uskutečnila v termínu 17.–18. 6. 2002 v krásném prostředí polských Beskyd, a to v příhraničním horském středisku Zwardoń. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli 16. 6. 2002. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z úloh mohli získat nejvýše 7 bodů, tj. celkově (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	body	Součet
1.	Katarína Quitnerová	SVK	7 6 7 7 7 7	41
2.	Wojciech Czerwiński	POL	6 7 5 7 7 6	38
3.	Marcin Pilipczuk	POL	6 7 7 7 7 1	35
4.	*Josef Cibulka*	CZE	6 4 5 7 7 2	31
5.	Peter Bella	SVK	7 6 6 7 3 0	29
6.	*Jaroslav Hájek*	CZE	6 7 5 7 3 0	28
7.–8.	Jarosław Wrona	POL	6 7 7 7 0 0	27
	Radovan Bauer	SVK	5 7 5 7 3 0	27
9.	Paweł Parys	POL	6 7 6 7 0 0	26
10.	Marek Tesař	SVK	6 7 5 6 1 0	25
11.	*Martin Tancer*	CZE	6 7 6 3 0 1	23
12.–13.	*Tomáš Protivínský*	CZE	6 0 7 7 1 0	21
	Roman Łomowski	POL	2 0 5 7 7 0	21
14.–15.	*Jan Moláček*	CZE	2 0 7 7 0 2	18
	Michal Burger	SVK	3 0 7 7 0 1	18
16.	Michał Jóźwikowski	POL	6 0 2 7 0 0	15
17.	*Vítězslav Kala*	CZE	5 0 5 1 0 1	12
18.	Andrej Osuský	SVK	6 0 0 0 0 0	6

Úlohy pro letošní soutěž vybrali polští organizátoři, a to především z vlastních zdrojů, jejich koordinaci prováděla mezinárodní jury, kterou tvořili dr. *Marcin Kuczma* a mgr. *Andrzej Mąkowski* z Polska, doc. *Oliver Ralík* a *Vladimír Marko* ze Slovenska a dr. *Jaroslav Švrček* a dr. *Jaroslav Zhouf* za Českou republiku. Na zdárném průběhu celé soutěže se dále významně podíleli polští kolegové dr. *Józef Kalinowski* a dr. *Jerzy Bednarczuk.*

Texty soutěžních úloh

1. Nechť a, b jsou různá reálná čísla a k, m přirozená čísla, pro něž platí $k + m = n \geqq 3$, $k \leqq 2m$ a $m \leqq 2k$. Uvažujme posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které vyhovují následujícím podmínkám:

k členů posloupnosti se rovná a; přitom $x_1 = a$;

m členů posloupnosti se rovná b; přitom $x_n = b$;

žádné tři po sobě jdoucí členy nejsou stejné.

Určete všechny možné hodnoty součtu

$$x_n x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-1} x_n x_1.$$

2. Je dán trojúhelník ABC, jehož obsah je S a pro jehož délky stran $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ platí $a \leqq b \leqq c$. Určete největší reálné číslo u a nejmenší reálné číslo v tak, aby pro každý vnitřní bod P trojúhelníku ABC byla splněna nerovnost

$$u \leqq |PD| + |PE| + |PF| \leqq v,$$

kde D, E, F jsou po řadě průsečíky přímek AP, BP, CP s protějšími stranami daného trojúhelníku.

(Hodnoty u, v vyjádřete pomocí daných veličin a, b, c a S.)

3. Nechť $\mathsf{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde n je dané přirozené číslo. Určete počet všech funkcí $f\colon \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ takových, že pro každé $x \in \mathsf{S}$ platí $x + f^4(x) = n + 1$.

Poznámka. Symbol f^4 značí čtvrtou iteraci, tj. $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$.

4. Nechť $n > 1$ je přirozené číslo a p prvočíslo takové, že n je dělitelem čísla $p - 1$ a současně p je dělitelem čísla $n^3 - 1$. Dokažte, že $4p - 3$ je druhou mocninou přirozeného čísla.

5. Nechť O značí střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Body P, Q nechť jsou po řadě takovými body jeho stran AC, BC, pro něž současně platí

$$\frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{a} \quad \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Dokažte, že body O, P, Q a C leží na téže kružnici.

6. Nechť $n \geqq 2$ je sudé přirozené číslo. Uvažujme polynomy tvaru

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$$

s reálnými koeficienty, které mají aspoň jeden reálný kořen. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2$.

Řešení úloh

1. Uvažujme posloupnost $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, která vyhovuje podmínkám úlohy. Pro libovolné její tři po sobě jdoucí členy x, y, z existuje taková jejich permutace (x, y, z), pro kterou platí buď $(x, y, z) = (a, a, b)$, nebo $(x, y, z) = (a, b, b)$. V obou těchto případech je $xyz = ab(x+y+z-a-b)$. Položme ještě $x_0 = x_n$ a $x_{n+1} = x_1$. Potom pro hledaný součet platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i x_{i+1} = ab\left(3\sum_{i=1}^{n} x_i - n(a+b)\right) = \big((2k-m)a + (2m-k)b\big)ab.$$

Nyní ukážeme, že pro libovolná dvě přirozená čísla k, m, jež vyhovují daným podmínkám, existuje aspoň jedna posloupnost $(x_1, \ldots, x_n)$ splňující požadované podmínky. Nechť např. $2m \geqq k \geqq m$ (v případě $2k \geqq m \geqq k$ budeme postupovat analogicky) a uvažujme posloupnost $3m$ trojic (a, a, b) napsaných v řadě za sebou, tj. posloupnost

$$(a, a, b, a, a, b, \ldots, a, a, b).$$

Tato posloupnost obsahuje $2m$ čísel a a m čísel b. Jestliže vyškrtneme např. v prvních $2m-k$ trojicích (a, a, b) vždy jedno a, dostaneme posloupnost o $n = k+m$ prvcích, která zřejmě vyhovuje podmínkám úlohy.

Závěr: Pro všechny posloupnosti, které vyhovují podmínkám úlohy, je hodnota uvažovaného součtu vždy $\big((2k-m)a + (2m-k)b\big)ab$.

2. Uvažujme libovolný vnitřní bod P trojúhelníku ABC a body D, E, F podle zadání. Označme obsahy trojúhelníků PBC, PCA, PAB po řadě S_a, S_b, S_c. Z podmínek úlohy plyne $2S_a \leqq a \cdot |PD| \leqq c \cdot |PD|$,

$2S_b \leqq b \cdot |PE| \leqq c \cdot |PE|$ a $2S_c \leqq c \cdot |PF|$. Platí tedy následující dolní odhad

$$|PD| + |PE| + |PF| \geqq \frac{2(S_a + S_b + S_c)}{c} = \frac{2S}{c} = v_c,$$

kde v_c značí velikost výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC.

Uvažujeme-li nyní bod P této výšky libovolně blízko vrcholu C, vidíme, že i hodnota součtu $|PD| + |PE| + |PF|$ se libovolně přibližovat délce výšky v_c. Největší hodnota u, která vyhovuje podmínkám úlohy, je tudíž $u = v_c = 2S/c$.

Nyní stanovíme horní odhad uvažovaného součtu. Předně si uvědomme, že úsečka AB (délky c) je nejdelší (jedna z nejdelších) mezi všemi úsečkami, jejímiž krajními body jsou některé dva body trojúhelníku ABC (speciálně pak má větší velikost než každá z úseček AD, BE, CF). Platí proto

$$\frac{S_a}{S} = \frac{|PD|}{|AD|} \geqq \frac{|PD|}{c}, \quad \text{tj.} \quad |PD| \leqq c\frac{S_a}{S}.$$

Analogicky pak

$$|PE| \leqq c\frac{S_b}{S} \qquad \text{a} \qquad |PF| \leqq c\frac{S_c}{S}.$$

Součtem všech tří nerovností obdržíme

$$|PD| + |PE| + |PF| \leqq c\left(\frac{S_a}{S} + \frac{S_b}{S} + \frac{S_c}{S}\right) = c.$$

Zvolíme-li nyní bod P (uvnitř trojúhelníku ABC) libovolně blízko vrcholu A tak, aby velikost úhlu PAB byla libovolně malá, snadno nahlédneme, že i hodnota uvažovaného součtu se bude libovolně blížit délce c strany AB. S ohledem na získaný horní odhad pro součet $|PD| + |PE| + |PF|$ je tedy nejmenší hodnota v vyhovující podmínkám úlohy $v = c$.

3. Pro každé $x \in \mathsf{S}$ označme $x^* = n + 1 - x$, kde pro zobrazení $x \mapsto x^*$ platí $x^{**} = x$. Nechť $f\colon \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ je funkce vyhovující podmínkám úlohy. Protože $f^4(x) = x^*$, je $f^8(x) = x$. Z podmínek úlohy plyne, že funkce f je prostá, a tudíž bijektivní (jedná se tedy o permutaci na množině S). Množinu S lze proto rozložit na *cykly*, jejichž délky jsou dělitelé čísla 8. Jestliže x_0 náleží cyklu délky 4, 2 nebo 1, pak $x_0 = f^4(x_0) = x_0^*$, je tudíž

$x_0 = \frac{1}{2}(n+1)$. To je možné pouze pro lichá n, pak ale všechny prvky uvažovaného cyklu musí být rovny x_0. Odtud plyne, že S je sjednocením několika disjunktních cyklů délky 8, eventuálně navíc obsahuje izolovaný prvek x_0. Platí tedy $n = 8m$ nebo $n = 8m + 1$, kde m je přirozené číslo.

Uvažujme nejprve $n = 8m$. Označme $\mathsf{A} = \{1, \ldots, 4m\}$ a $\mathsf{B} = \{4m+1, \ldots, 8m\}$. Uvažujme nyní určitý cyklus délky 8, a označme C množinu jeho prvků. Pak $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$ je čtyřprvková množina a $\mathsf{B} \cap \mathsf{C}$ je její *-obraz. Naopak, pro každou čtveřici $1 \leqq a < b < c < d \leqq 4m$ lze vytvořit množinu $\mathsf{C} = \{a, b, c, d, d^*, c^*, b^*, a^*\}$, jejíž prvky tvoří cyklus délky 8. Dále určíme, kolika způsoby lze vytvořit takový cyklus délky 8 na množině C. Nechť $f(a) = w$, pak w může být libovolný prvek množiny C s výjimkou prvků a a a^* (šest možností); dále nechť $f(w) = z$, pak z může být libovolný prvek C s výjimkou prvků a, a^*, w, w^* (čtyři možnosti); konečně $f(z)$ může být libovolný prvek C s výjimkou prvků a, a^*, w, w^*, z a z^* (dvě možnosti). Zbytek cyklu je pak již určen. Celkově tak máme $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ možností.

Každé funkci f daných vlastností tak lze jednoznačně přiřadit rozklad $4m$-prvkové množiny A na m čtveřic. Spočítáme, kolik takových rozkladů existuje. Množina A má $\binom{4m}{4}$ různých čtyřprvkových podmnožin, první čtveřici rozkladu můžeme tedy vybrat $\binom{4m}{4}$ způsoby, druhou $\binom{4m-4}{4}$ způsoby atd., celkem tak máme

$$\binom{4m}{4}\binom{4m-4}{4}\cdots\binom{12}{4}\binom{8}{4} = \frac{(4m)!}{4!^m}$$

možností. Protože nezáleží na pořadí, v jakém m čtveřic rozkladu vybíráme, je vždy $m!$ rozkladů stejných. Celkem tedy existuje

$$\frac{(4m)!}{(4!)^m m!}$$

různých rozkladů množiny A na m (neuspořádaných) čtveřic. Každou takovou čtveřici prvků množiny A doplníme odpovídajícími *-obrazy z množiny B. Získáme tak jeden z možných cyklů délky 8. Na každém takovém cyklu můžeme funkci f definovat 48 způsoby, pro daný rozklad tak existuje celkem $48^m = (2 \cdot 4!)^m$ možností, jak definovat funkci f. Celkový počet funkcí f vyhovujících podmínkám úlohy je tedy

$$(2 \cdot 4!)^m \cdot \frac{(4m)!}{(4!)^m m!} = \frac{2^m (4m)!}{m!}.$$

V případě $n = 8m+1$ je nutno uvažovat izolovaně prvek $x_0 = \frac{1}{2}(n+1)$ a na množině $\mathsf{S} \setminus \{x_0\}$ můžeme postupovat analogicky jako v případě $n = 8m$ (se stejným výsledkem).

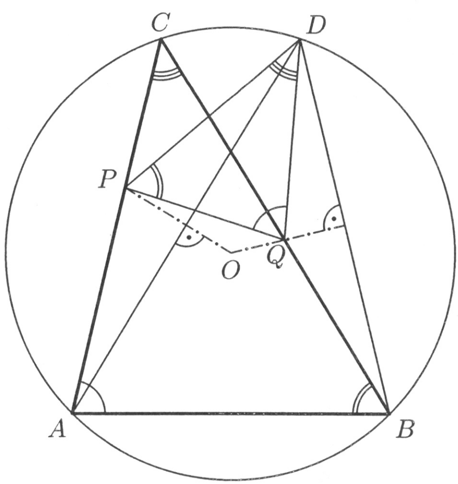
Pokud $n \not\equiv 0, 1 \pmod 8$, žádná funkce f vyhovující podmínkám úlohy neexistuje.

4. Podle zadání je $p-1 \geqq n$, neboli $p \geqq n+1$. Protože p je dělitelem čísla $n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$, je nutně dělitelem n^2+n+1, tj. $n^2+n+1 = mp$, kde m je přirozené číslo. Proto je $mp \equiv 1 \pmod n$ a podle předpokladu úlohy i $p \equiv 1 \pmod n$. Z obou předchozích kongruencí plyne $m \equiv 1 \pmod n$. Platí tedy $m = kn + 1$ a $p = ln + 1$, kde k a $l \geqq 1$ jsou nezáporná celá čísla, takže $n^2 + n + 1 = mp = (kn + 1)(ln + 1)$ a po úpravě $n(1 - kl) = k + l - 1 \geqq 0$. Poslední rovnosti a nerovnosti vyhovuje pouze $k = 0$. Odtud plyne $m = 1$, $p = n^2+n+1$, a tudíž $4p-3 = (2n+1)^2$.

Tím je důkaz ukončen.

5. Uvažujme obvyklé označení úhlů v trojúhelníku ABC. Nechť platí např. $\alpha \geqq \beta$. Uvažujme trojúhelník QPD, který je vně připsán straně QP čtyřúhelníku $ABQP$ a je podobný trojúhelníku ABC. Pak platí (obr. 37)

$$\frac{|PD|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{a} \quad \frac{|QD|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$



Obr. 37

Z daných podmínek plyne $|PD| = |PA|$ a $|QB| = |QD|$. Na základě předpokladu $\alpha \geqq \beta$ dále máme

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|PD|}{|QD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \geqq 1, \qquad \text{tj.} \qquad |AP| \geqq |BQ|.$$

V trojúhelníku CPQ tedy platí $|CP| \leqq |CQ|$ a také

$$|\sphericalangle CQP| \leqq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \leqq \alpha = |\sphericalangle DQP|,$$
$$|\sphericalangle CPQ| \geqq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \geqq \beta = |\sphericalangle DPQ|.$$

Z obou posledních nerovností je patrné, že D je vnitřním bodem konvexního úhlu BCX, kde X leží na polopřímce AC za bodem C.

Označme nyní velikosti vnitřních úhlů při základnách rovnoramenných trojúhelníků ADP a BDQ po řadě φ a ψ. Velikosti vnitřních úhlů ve čtyřúhelníků $ABDP$ mají pak po řadě velikosti α, $\beta+\psi$, $\gamma+\psi$ a $180^\circ-2\varphi$. Protože jejich součet je 360°, platí $\varphi = \psi$, a tedy $|\sphericalangle ADB| = \gamma$. Bod D leží tudíž na oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC. Vzhledem k tomu, že oba trojúhelníky ADP a BDQ jsou rovnoramenné (se základnami AD a BD), jsou přímky OP a OQ osami stran AD a BD trojúhelníku ABD. Protože střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC je jeho vnitřním bodem, plyne odtud bezprostředně

$$|\sphericalangle POQ| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB| = 180^\circ - |\sphericalangle PDQ| = 180^\circ - \gamma.$$

Platí proto $|\sphericalangle PCQ| + |\sphericalangle POQ| = 180^\circ$, což znamená, že body O, P, C a Q tedy leží na téže kružnici.

Zcela analogicky lze provést důkaz v případě, kdy $\alpha \leqq \beta$.

Tím je úloha vyřešena.

6. Nechť u je reálný kořen rovnice $P(x) = 0$. Její úpravou a dále pak využitím Cauchyho nerovnosti obdržíme

$$(u^n + 1)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i u^i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u^{2i}. \tag{1}$$

Položíme-li $n = 2m$ a $u^2 = w$, je

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} = \sum_{i=1}^{2m-1} w^i = w^m + (w^m + 1) \sum_{i=1}^{m-1} w^i. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ platí nerovnost $(w^i - 1)(w^{m-i} - 1) \geqq 0$, plyne odtud po snadné úpravě

$$w^i + w^{m-i} \leqq w^m + 1.$$

Součtem všech těchto nerovností pro $1 \leqq i \leqq m - 1$ dostaneme

$$2 \sum_{i=1}^{m-1} w^i \leqq (m-1)(w^m + 1).$$

Z nerovnosti $(w^m - 1)^2 \geqq 0$ dále plyne $w^m \leqq \frac{1}{4}(w^m + 1)^2$. Dosazením získaných nerovností do (2) obdržíme odhad

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} \leqq \frac{(w^m + 1)^2}{4} + (w^m + 1) \cdot \frac{m-1}{2}(w^m + 1) = \frac{n-1}{4}(u^n + 1)^2,$$

který využijeme v (1). Po úpravě pak ihned vyjde

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \geqq \frac{4}{n-1}.$$

S ohledem na použité nerovnosti zde nastává rovnost, právě když $u = 1$ a $a_1 = \ldots = a_{n-1}$, tj. právě když $a_i = \dfrac{-2}{n-1}$ pro všechna $i \in$ $\in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.