50. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Tomáš Pitner (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 50. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2000/2001. 42. mezinárodní matematická olympiáda. 13. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2001. pp. 25–36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/405028

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Najděte všechna trojmístná čísla n taková, že poslední trojčíslí čísla n^2 je shodné s číslem n. *(J. Zhouf)*

C – I – 2

Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány délky 9 cm a 12 cm jeho úhlopříček, délka 8 cm střední příčky a vzdálenost 2 cm středů úhlopříček.

(E. Kováč)

C – I – 3

Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí

$$n(a,b) + D(a,b) = 63,$$

kde $n(a,b)$ značí nejmenší společný násobek a $D(a,b)$ největší společný dělitel čísel a, b. *(L. Boček)*

C – I – 4

Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí

$$\frac{(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2}{abc^2} \leqq 2.$$

Pro které trojúhelníky nastane v předchozím vztahu rovnost?

(J. Šimša)

C – I – 5

Třicet maturantů jednoho gymnázia si podalo přihlášku k dalšímu studiu na některou ze šesti fakult Českého vysokého učení technického. Využili možnost podat více přihlášek, a tak polovina žáků podala přihlášku aspoň na tři fakulty, třetina si podala přihlášku na více než tři fakulty. Na fakultu architektury se s ohledem na talentovou přijímací zkoušku nehlásil nikdo. Dokažte, že na některou ze zbývajících pěti fakult se přihlásilo méně než dvacet studentů. (*P. Hliněný*)

C – I – 6

Do dané kružnice s poloměrem r vepište lichoběžník $ABCD$ s kratší základnou CD a průsečíkem úhlopříček E tak, aby platilo $|BC| = |CD|$ a $|AE| = r$. (*P. Leischner*)

C – S – 1

Najděte všechny trojice a, b, c přirozených čísel, pro které současně platí

$$n(ab, c) = 2^8, \qquad n(bc, a) = 2^9, \qquad n(ca, b) = 2^{11},$$

kde $n(x, y)$ značí nejmenší společný násobek přirozených čísel x a y.

(*P. Černek*)

C – S – 2

V rovině je dán čtverec $ABCD$. Kružnice k prochází body A, B a dotýká se přímky CD. Označme M ($M \neq B$) průsečík kružnice k a strany BC. Určete poměr $|CM| : |BM|$. (*J. Švrček*)

C – S – 3

Pro která dvojmístná čísla n je číslo $n^3 - n$ dělitelné stem? (*J. Zhouf*)

C – II – 1

Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí

$$a + b + D(a, b) + n(a, b) = 50,$$

kde $D(a, b)$ značí největší společný dělitel a $n(a, b)$ nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b. (*J. Šimša*)

C – II – 2

Kružnice $k(S, r)$ a $l(O, R)$ se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná tečna v bodě T protíná jejich vnější společnou tečnu v bodě M. Dokažte, že trojúhelník SOM je pravoúhlý, a vyjádřete jeho obsah pomocí poloměrů r, R daných kružnic. (*P. Leischner*)

C – II – 3

Najděte všechny dvojice kladných čísel x, y, které jsou řešením soustavy rovnic

$$x \cdot y_{10} = 195{,}6,$$

$$y \cdot x_{10} = 241{,}7.$$

Zápis z_{10} značí číslo, které vznikne zaokrouhlením čísla z na desítky. (*S. Bednářová*)

C – II – 4

Sestrojte trojúhelník ABC takový, že výška a těžnice z vrcholu C dělí těžnici z vrcholu A na tři shodné úsečky, je-li dána délka strany AB a velikost výšky z vrcholu C. (*J. Földes*)

C – I – 1

Budeme hledat nejdříve ta čísla n, pro která je poslední číslice čísla n^2 totožná s poslední číslicí čísla n. V tom případě se musí poslední číslice čísla n rovnat některé z číslic 0, 1, 5 nebo 6.

Vezměme například 6 a označme b, a předcházející číslice čísla n, tedy $n = 100b + 10a + 6$, $n^2 = 10\,000b^2 + 2\,000ab + 1\,200b + 100a^2 + 120a + 36$. Tato dvě čísla se shodují v posledním dvojčíslí právě tehdy, jestliže se $20a + 36$ rovná $10a + 6$ až na celý násobek čísla 100, tedy $10a + 30$ má být násobek 100, což platí pouze pro $a = 7$. Je tedy $n = 100b + 76$, $n^2 = 10\,000b^2 + 15\,200b + 5\,776$. Tato dvě čísla se shodují v posledních třech číslicích, právě když se $200b + 776$ rovná $100b + 76$ až na násobek čísla 1 000, to znamená, že $b + 7$ má být celý násobek čísla 10, proto $b = 3$. Jedním řešením je číslo $n = 376$. Podobně bychom dostali další řešení $n = 625$, zatímco předpoklad, že poslední číslice je 0 nebo 1, nevede k cíli.

Výhodnější je ale postup založený na dělitelnosti — dvě čísla se shodují v posledních třech číslicích, právě když je jejich rozdíl dělitelný číslem 1 000. V našem případě má být číslo $n^2 - n = n(n-1)$ dělitelné číslem $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$. Čísla n a $n - 1$ jsou nesoudělná a menší než 1 000, proto musí být jedno dělitelné číslem 125 a druhé osmi.

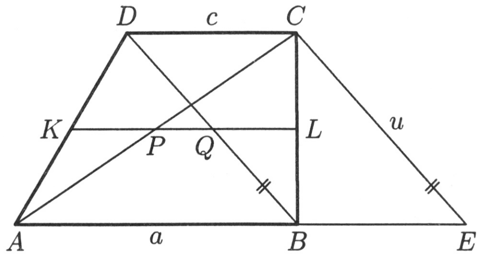
První možnost je tedy: n je *lichým* násobkem 125, takže se rovná některému z čísel 125, 375, 625, 875, a současně je $n - 1$ násobek osmi, proto $n = 625$.

Druhá možnost: n je násobek 8 (tedy sudé) a $n-1$ lichý násobek 125, proto $n = 376$, neboť z čísel 126, 376, 626, 876 je pouze číslo 376 násobek osmi.

Poznámka. Při tomto postupu hraje významnou roli nesoudělnost dvou čísel. Připomeňte si pojem největšího společného dělitele čísel a, b a ověřte, že ten dělí také každé číslo tvaru $ka + lb$, kde k, l jsou celá. Existují-li tedy celá k, l tak, že $ka + lb = 1$, jsou čísla a, b nesoudělná. Je-li d největší společný dělitel čísel a, b, je $a = dp$, $b = dq$, kde p, q jsou nesoudělná a číslo $n = dpq$ je nejmenším společným násobkem čísel a, b.

C – I – 2

Zvolme označení podle obr. 1, KP je střední příčka v trojúhelníku ACD,



Obr. 1

proto $|KP| = \frac{1}{2}|DC|$, obdobně $|QL| = \frac{1}{2}|DC|$, $|PL| = \frac{1}{2}|AB|$, takže $|PQ| = \frac{1}{2}(a - c) = 2\,\text{cm}$. Protože $|KL| = \frac{1}{2}(a + c) = 8\,\text{cm}$, je $a = 10\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$. Nejdříve sestrojíme trojúhelník AEC podle věty *sss*, na úsečce AE pak bod B, jím vedeme rovnoběžku s CE. Ta protne přímku vedenou bodem C rovnoběžně s AE v bodě D.

C – I – 3

Využijeme to, co jsme uvedli v závěru řešení 1. úlohy. Je $a = Dp$, $b = Dq$, $n = Dpq$, kde D je největší společný dělitel, n nejmenší společný násobek čísel a, b a čísla p, q jsou nesoudělná. Podle textu úlohy má platit $D(1+pq) = 63$, takže máme tyto možnosti (bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $a \leqq b$):

D	pq	(p,q)		(a,b)	
1	62	$(1,62)$,	$(2,31)$	$(1,62)$,	$(2,31)$
3	20	$(1,20)$,	$(4,5)$	$(3,60)$,	$(12,15)$
7	8	$(1,8)$		$(7,56)$	
9	6	$(1,6)$,	$(2,3)$	$(9,54)$,	$(18,27)$
21	2	$(1,2)$		$(21,42)$	

Úloha má 8 řešení, nerozlišujeme-li pořadí čísel a, b.

C – I – 4

Uvedenou nerovnost upravíme na ekvivalentní tvar

$$0 \leqq (a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 2ab + b^2)c^2,$$

tj.

$$0 \leqq (a - b)^2 \cdot [(a + b)^2 - c^2].$$

Protože $a+b > c$, platí tato nerovnost pro délky libovolného trojúhelníku, rovnost nastane, právě když $a = b$, tedy pro rovnoramenné trojúhelníky se základnou c.

C – I – 5

Nejdříve odhadneme, kolik přihlášek celkem maturanti podali. Polovina, tj. 15 studentů, podala jednu nebo dvě přihlášky. Z druhé poloviny podalo 10 studentů aspoň 4, tedy 4 nebo 5 přihlášek, a zbývajících pět studentů podalo přihlášku právě na tři fakulty. Celkem podali nejvýše $15 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = 95$ přihlášek. Proto nemohli podat na každou fakultu aspoň 20 přihlášek, to by jich muselo být aspoň 100.

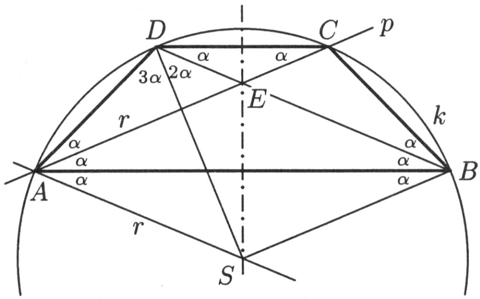
Následující rozpis pro případ ukazuje situaci, kdy na každou z pěti fakult bylo podáno právě 19 přihlášek: A znamená, že žák v příslušném sloupci podal přihlášku na fakultu uvedenou v řádku, znak – znamená, že přihlášku nepodal. Studenti jsou rozděleni do tří skupin, první je složena z 15 studentů, kteří podali dvě přihlášky. Následuje skupina pěti studentů s třemi přihláškami, třetí skupina má 10 členů, z nichž každý podal 5 přihlášek:

student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1. fakulta:	A	A	A	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2. fakulta:	–	–	–	A	A	A	A	A	A	–	–	–	–	–	–
3. fakulta:	–	–	–	–	–	–	A	A	A	A	A	A	–	–	–
4. fakulta:	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A	A	A	A
5. fakulta:	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A

student	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1. fakulta	A	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2. fakulta	–	A	A	A	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
3. fakulta	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
4. fakulta	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
5. fakulta	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

C – I – 6

Předpokládejme, že jsme již lichoběžník sestrojili (obr. 2), přímka SE je



Obr. 2

nutně jeho osou souměrnosti. Označíme-li α velikost úhlu ACD, mají stejnou velikost i úhly BDC, ABD a CAB, jak plyne ze souměrnosti lichoběžníku podle přímky SE a z rovnoběžnosti přímek CD a AB. Protože $|BC| = |CD|$, je trojúhelník BCD rovnoramenný, a proto se α rovnají i velikosti úhlů CBD a CAD. A protože $|AE| = |AS|$ a AB je kolmá na SE, rovnají se α také velikosti úhlů SAB a SBA. Z rovnoramenného trojúhelníku ASD plyne, že úhly SAD a SDA mají velikost 3α, velikost úhlu SDB je 2α (trojúhelník SDB je také rovnoramenný). Z trojúhelníku ACD pak plyne, že $8\alpha = 180°$, $\alpha = 22{,}5°$. Tím už je dána *konstrukce*: zvolíme na dané kružnici libovolně bod A, jím vedeme přímku p svírající s přímkou AS úhel $2\alpha = 45°$, p protne kružnici k v bodě C různém od A. Na úsečce AC zvolíme bod E, $|AE| = r$. Body B, D sestrojíme jako body souměrně sdružené k bodům A, C podle přímky SE. Jiná volba bodu A by vedla pouze k řešení, které by vzniklo otočením řešení již sestrojeného. Podobně volba druhé přímky vedené bodem A pod úhlem 45° s přímkou AS vede k řešení souměrně sdruženému k sestrojenému podle přímky AS.

C – S – 1

Jsou-li čísla a, b, c řešením úlohy, jsou to dělitelé mocnin dvou, a tedy sama mocniny čísla 2, $a = 2^r$, $b = 2^s$, $c = 2^t$, kde r, s, t jsou celá nezáporná čísla. Z rovnosti $n(ab, c) = 2^8$ plyne, že čísla t, $r + s$ se rovnají nejvýše 8, přičemž aspoň jedno z nich se rovná 8. Podobně se čísla $s + t$, r

rovnají nejvýše devíti a aspoň jedno z nich je rovno devíti. Dále se jedno z čísel $r + t$, s rovná 11 a žádné z nich není větší než 11. Nemůže však platit $s = 11$, protože $s + t \leqq 9$, takže $r + t = 11$. Nemůže být $r = 9$, neboť má platit $r + s \leqq 8$. Proto $s + t = 9$. Dále máme dvě možnosti:

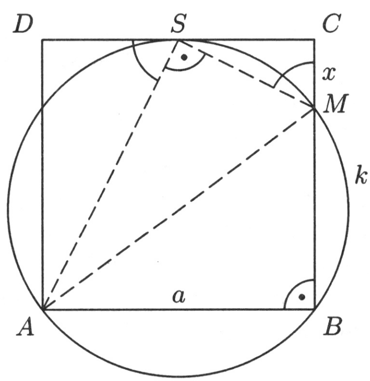
1) $t = 8$, odkud $r = 3$, $s = 1$, $a = 2^3$, $b = 2$, $c = 2^8$,

2) $r + s = 8$, odkud plyne $t = 6$, $r = 5$, $s = 3$, tedy $a = 2^5$, $b = 2^3$, $c = 2^6$.

Úloha má dvě řešení.

C – S – 2

Protože střed kružnice k leží na ose strany AB, která je zároveň osou i protější strany CD, dotýká se kružnice k úsečky CD v jejím středu S (obr. 3). Protože úhel ABM je pravý, je AM průměrem kružnice k,



Obr. 3

a proto je pravý i úhel ASM. Odtud plyne, že $|\sphericalangle DSA| = 90° - |\sphericalangle CSM| = |\sphericalangle SMC|$, proto jsou trojúhelníky SMC a ASD podobné, takže $|CM| : |CS| = |DS| : |DA|$. Označíme-li $a = |DA|$ a $x = |CM|$, je $x : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : a$, tedy $x = \frac{1}{4}a$. Proto $|CM| : |BM| = 1 : 3$.

Dodejme, že rovnost $x = \frac{1}{4}a$ lze odvodit i z Pythagorovy věty pro trojúhelníky AMB, AMS:

$$|AB|^2 + |BM|^2 = |AM|^2 = |AS|^2 + |SM|^2,$$

takže

$$a^2 + (a-x)^2 = \left(a^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2\right) + \left(\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + x^2\right),$$

odkud po úpravě

$$x = \tfrac{1}{4}a.$$

Poznámka. Známe-li pojem mocnosti bodu ke kružnici, můžeme napsat $|CM| \cdot |CB| = |CS|^2$, odkud ihned plyne $|CM| = \frac{1}{4}a$.

C – S – 3

Je-li číslo $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ dělitelné číslem $100 = 2^2 \cdot 5^2$, musí být jedno z čísel $n-1$, n, $n+1$ dělitelné číslem 25, protože ze tří po sobě jdoucích čísel může být nejvýše jedno dělitelné pěti. Dále musí být buď číslo n dělitelné čtyřmi (čísla $n-1$, $n+1$ jsou pak lichá), nebo musí být číslo n liché (čísla $n-1$, $n+1$ jsou sudá a jejich součin je dělitelný čtyřmi). Máme tedy tyto možnosti:
$n = 25$ vyhovuje, neboť je liché,
$n = 75$ vyhovuje, neboť je liché,
$n = 50$ nevyhovuje, neboť je sudé, ale není dělitelné čtyřmi,
$n - 1 = 25$, $n = 26$ nevyhovuje, neboť je sudé, ale není dělitelné čtyřmi,
$n - 1 = 50$, $n = 51$ vyhovuje, neboť je liché,
$n - 1 = 75$, $n = 76$ vyhovuje, neboť je dělitelné čtyřmi,
$n + 1 = 25$, $n = 24$ vyhovuje, neboť je dělitelné čtyřmi,
$n + 1 = 50$, $n = 49$ vyhovuje, neboť je liché,
$n + 1 = 75$, $n = 74$ nevyhovuje, neboť je sudé, ale není dělitelné čtyřmi,
$n + 1 = 100$, $n = 99$ vyhovuje, neboť je liché.

Úloha má sedm řešení.

C – II – 1

Položme $a = Dk$, $b = Dl$, kde $D = D(a,b)$ je největší společný dělitel čísel a, b, takže čísla k, l jsou nesoudělná. Je pak $n = n(a,b) = Dkl$ a má platit $D(k + l + 1 + kl) = 50$, tedy $(1+k)(1+l)D = 50$. Najdeme proto všechny rozklady čísla 50 na součin tří přirozených čísel D, $1+k$, $1+l$, z nichž poslední dvě jsou větší než 1. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leqq b$, tj. $k \leqq l$. Dostaneme tak tyto možnosti:

D	$1+k$	$1+l$	k	l	a	b
1	2	25	1	24	1	24
1	5	10	4	9	4	9
5	2	5	1	4	5	20

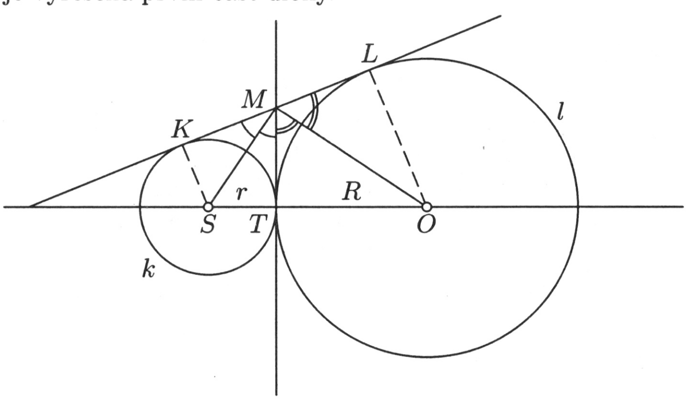
Pro $D = 2$ dostaneme $k = l = 4$, ale k, l mají být nesoudělná.

Pro $D = 10$, 25 nebo 50 dostaneme $k = 0$, což nevede k žádnému řešení.

Úloha má šest řešení: $\{a, b\} = \{1, 24\}$, $\{a, b\} = \{4, 9\}$, $\{a, b\} = \{5, 20\}$.

C – II – 2

Označme K, L body dotyku té společné tečny obou kružnic, na které leží také bod M a která je různá od společné tečny v bodě T (obr. 4). Ze souměrnosti podle přímky MS plyne shodnost úhlů KMS a TMS a ze souměrnosti podle přímky OM plyne shodnost úhlů LMO a TMO. Součet těchto čtyř úhlů je 180°, proto $|\sphericalangle SMO| = |\sphericalangle SMT| + |\sphericalangle TMO| = 90°$. Tím je vyřešena první část úlohy.



Obr. 4

Užitím Pythagorovy věty pro trojúhelníky SOM, STM a OTM dostaneme pro výšku $v = |TM|$ trojúhelníku SOM rovnost

$$(r + R)^2 = (r^2 + v^2) + (R^2 + v^2),$$

odkud $v^2 = Rr$. (Tento vztah plyne i přímo z Eukleidovy věty pro trojúhelník SOM.)

Obsah trojúhelníku SOM je tedy $\frac{1}{2}(R+r)\sqrt{Rr}$.

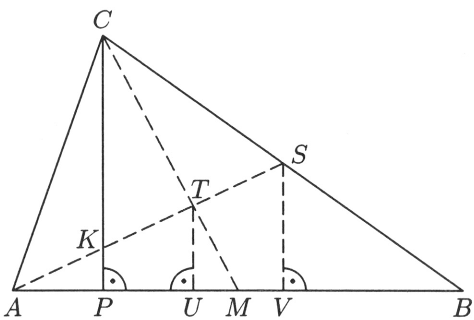
C – II – 3

Jsou-li x, y řešením, musí být $x \geqq 5$ a $y \geqq 5$, jinak by se x_{10} nebo y_{10} rovnalo nule. Protože $y_{10} \geqq 10$, je $x = 195{,}6 : y_{10} \leqq 19{,}56$, takže x_{10} se rovná 10 nebo 20. V prvním případě je $y = 24{,}17$, $y_{10} = 20$ a $x = 9{,}78$, v druhém případě je $y = 12{,}085$, $y_{10} = 10$ a $x = 19{,}56$. Úloha má právě dvě řešení:

$$(x, y) = (19{,}56; 12{,}085) \quad \text{a} \quad (x, y) = (9{,}78; 24{,}17).$$

C – II – 4

Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Označme S střed strany BC, M střed strany AB, T těžiště trojúhelníku, P patu výšky vedené bodem C, K průsečík těžnice AS a výšky CP. Protože těžiště T dělí úsečku AS v poměru 2 : 1, tj. platí $|AT| = 2|TS|$, musí být bod K středem úsečky AT (obr. 5). Z rovnosti $|AK| = |KT| = |TS|$ navíc plyne, že $|AP| = |PU| = |UV|$, kde U, V jsou kolmé průměty bodů T, S na přímku AB. Jelikož S je střed strany BC, je V střed úsečky PB. Proto $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Odtud již plyne *konstrukce*: Sestrojíme úsečku AB dané délky, na ní bod P tak, aby $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Bodem P vedeme kolmici k AB, na ni naneseme od bodu P danou výšku a dostaneme tak bod C, a tím i trojúhelník ABC.



Obr. 5

Důkaz správnosti konstrukce. V sestrojeném trojúhelníku ABC uvažujme těžnice CM a AS, těžiště T a průsečík K úseček AS, CP. Označme

U, V kolmé průměty bodů T, S do přímky AB. Protože $|CT| = 2|TM|$, je $|PU| = 2|UM|$, a proto $|PU| = \frac{2}{3}|PM|$. Označíme-li $c = |AB|$, je $|AP| = \frac{1}{5}c$, $|PV| = \frac{1}{2}(|AB| - |AP|) = \frac{2}{5}c$, $|PM| = \frac{1}{2}c - \frac{1}{5}c = \frac{3}{10}c$, $|PU| = \frac{2}{3}|PM| = \frac{1}{5}c$ a $|UV| = |PV| - |PU| = \frac{1}{5}c$. Protože $|AP| = |PU| = |UV|$, je také $|AK| = |KT| = |TS|$. Tím je správnost konstrukce dokázána.