

40. ročník matematické olympiády na základních školách

Kategória Z4

In: Milan Koman (editor); Jiří Binder (editor); Vladimír Repáš (editor): 40. ročník matematické olympiády na základních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/1991. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. pp. 100–109.

Terms of use.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

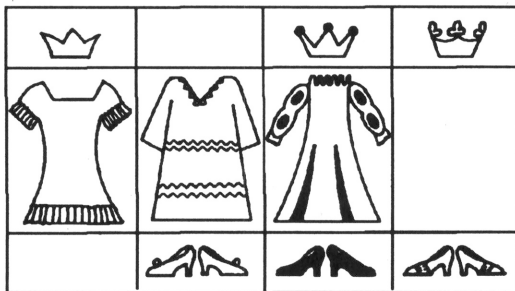
Kategória Z4

ÚLOHY I. KOLA

(Riešenia úloh na str. 103)

Z4 - I - 1

Ako vidíme na obrázku 57, princezná Martinka stojí pred ťažkou úlohou. Nevie, ktorú korunku, ktoré šaty a ktoré topánky si má na najbližšiu slávnosť obliecť. Nakoniec sa rozhodla, že z tej istej skrine zoberie najviac jednu vec. Kolkými spôsobmi sa môže Martinka obliecť?



Obr. 57

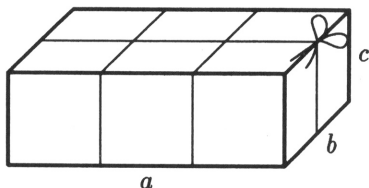
Z4 - 1 - 2

Nahradte hviezdičky číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie:

$$** \cdot 8 = *04$$

Z4 - 1 - 3

Škatulka (obr. 58) bola zviazaná špagátom. Rozmery škatule sú $a = 21$ cm, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm. Vypočítajte dĺžku špagátu. Na mašličku počítajte o 20 cm viac.



Obr. 58

Z4 - 1 - 4

Traja chlapci majú spolu 128 guľôčok. Karol má o 4 guľôčky menej ako Fero a Juro dohromady. Juro má o 4 guľôčky viac ako Fero. Koľko guľôčok má každý z nich?

Z4 - 1 - 5

Štvorec so stranou 4 cm je rozdelený na 16 rovnakých štvorcíkov. Odstrihnite z neho niekoľko týchto štvorcíkov, aby ostal a) 18-uholník, b) 16-uholník s obvodom 24 cm.

Z4 - I - 6

Kamilka sa hrala s miskovými váhami a hracími kockami. Pritom dostala rovnováhy znázornené na obr. 59.

Zistite, ktorá kocka má najväčšiu a ktorá najmenšiu hmotnosť. Svoju odpoveď vysvetlite.



Obr. 59

ÚLOHY II. KOLA

(Riešenia úloh na str. 108)

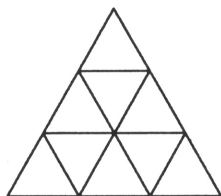
Z4 - II - 1

Nahradte hviezdičky číslicami tak, aby platilo naznačené násobenie

$$** \cdot 7 = *36$$

Z4 - II - 2

Trojuholník so stranou 3 cm je rozdelený na 9 rovnakých trojuholníkov (obr. 60). Odoberte niekoľko z týchto trojuholníkov, aby ste dostali šesťuholník. Nakreslite obrázok po odobratí trojuholníkov. Nájdite aspoň tri rôzne také šesťuholníky.



Obr. 60

Z4 – II – 3

Anka, Kamilka a Martinka nazbierali spolu 21 šišiek. Anka nazbierala 2krát viac šišiek ako Kamilka a Martinka nazbierala 4krát menej ako Anka. Koľko šišiek nazbierala každá z nich?

RIEŠENIA ÚLOH I. KOLA

Riešenie úlohy Z4-I-1 (str. 100)

Riešenie si zapíšeme do tabuľky. Skrine sú číslované zľava doprava.

vec	číslo skrine										
korunka	1	1	1	1	3	3	3	4	4	4	4
šaty	2	2	3	3	1	1	2	1	1	2	3
topánky	3	4	2	4	2	4	4	2	3	3	2

Každý stĺpec v tabuľke určuje jedno z oblečení princezny Martinky. Martinka sa teda môže obliecť celkom 11 spôsobmi.

Riešenie úlohy Z4-I-2 (str. 101)

1. riešenie (asi jednoduchšie). Číslo *04 musí byť deliteľné číslom 8. Vyskúšame všetkých deväť možností doplnenia * v tomto čísle. 104, 204, 304, 404, 504, 604, 704, 804, 904. Len čísla 104, 304, 504, 704, 904 sú deliteľné ôsmi. Dosadíme do pôvodného zadania; dostaneme 4 riešenia úlohy:

$$13 \cdot 8 = 104, 38 \cdot 8 = 304, 63 \cdot 8 = 504, 88 \cdot 8 = 704.$$

Súčin $113 \cdot 8 = 904$ nevyhovuje (prečo?).

2. riešenie (možno zložitejšie, ale poučnejšie). Rozpíšeme si príklad, ako keby sme ho písomne násobili:

$$\begin{array}{r} * * \\ \cdot 8 \\ \hline * 0 4 \end{array}$$

Pýtame sa: Akým číslom treba vynásobiť číslo 8, aby sme dostali na konci cifru 4? Sú dve možnosti — číslom 3 a číslom 8. Máme teda dva prípady, označme ich a), b).

a)

$$\begin{array}{r} * 3 \\ \cdot 8 \\ \hline * 0 4 \end{array}$$

Pýtame sa: Akým číslom treba vynásobiť číslo 8 a potom k výsledku pripočítať 2, aby sme dostali na konci číslo 0? Také čísla sú dve: číslo 1 a číslo 6 a tým dostávame dve riešenia:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \cdot 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \cdot 8 \\ \hline 504 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} *8 \\ \cdot 8 \\ \hline *04 \end{array}$$

Pýtame sa: Akým číslom treba vynásobiť číslo 8 a potom k výsledku pripočítať 6 (to nám zostalo), aby sme dostali na konci číslo 0? Také čísla sú dve: číslo 3 a číslo 8 a tým dostávame ďalšie dve riešenia:

$$\begin{array}{r} 38 \\ \cdot 8 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ \cdot 8 \\ \hline 704 \end{array}$$

Riešenie úlohy Z4-I-4 (str. 101)

Najprirodzenejšie je zrejme rozdelenie špagátu na úseky zhora nadol, sprava doľava, spredu dozadu.

Zhora nadol je 6 úsekov (dva vpredu, dva vzadu a dva na bokoch), každý je dĺžky 12 cm, čo je spolu $6 \cdot 12 \text{ cm} = 72 \text{ cm}$.

Sprava doľava sú dva úseky (hore a dole), každý dĺžky 21 cm, čo je spolu $2 \cdot 21 \text{ cm} = 42 \text{ cm}$.

Spredu dozadu sú 4 úseky (dva hore, dva dole), každý je dĺžky 15 cm, čo je spolu $4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}$.

Celý špagát spolu s mašľou teda má $(72 + 42 + 60 + 20) \text{ cm} = 194 \text{ cm}$.

Riešenie úlohy Z4-I-4 (str. 101)

Vyriešime si najprv pomocnú úlohu. Predstavte si, že máte hromadu guľôčok (neviete koľko presne ich je a ani to nechcete vedieť) a máte ich rozdeliť na dve časti tak, aby v jednej bolo o 4 guľôčky menej ako v druhej.

Riešenie pomocnej úlohy. Najskôr dáme 4 guľôčky nabok a potom striedavo dávame po jednej guľôčke na dve kôpky, teda zvyšok rozdelíme na polovice. Keď guľôčky rozdelíme, potom 4 guľôčky (zboku) pridáme k jednej kôpke.

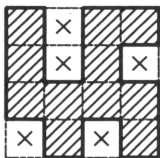
Riešenie danej úlohy. $128 - 4 = 124$ (oddelíme 4 guľôčky pre Jura a Fera spolu); $124 : 2 = 62$ (zvyšok rozdelíme na polovice). Teda Karol má 62 guľôčok a Fero s Jurom spolu 66 guľôčok.

A ešte raz. $66 - 4 = 62$ (oddelíme 4 guľôčky pre Jura); $62 : 2 = 31$ (zvyšok rozdelíme na polovice). Teda Fero má 31 guľôčok a Juro 35 guľôčok.

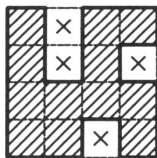
Karol má 62 guľôčok, Juro 35 a Fero 31 guľôčok.

Riešenie úlohy Z4-I-5 (str. 101)

Riešime skusmo. Úloha má viac riešení. Jedno z nich je na obr. 61a, b.



Obr. 61a



Obr. 61b

Riešenie úlohy Z4-I-6 (str. 102)

1. riešenie. Z prvej rovnováhy vyplýva, že \triangle má väčšiu hmotnosť ako \square , lebo $\triangle \triangle$ majú väčšiu hmotnosť ako $\square \square$. Potom z druhej rovnováhy vyplýva, že \circ je medzi nimi. Riešenie $\triangle > \circ > \square$.

2. riešenie. Snažíme sa upraviť misky pridávaním, alebo odoberaním toho istého tak, aby na miskách boli len dva druhy útvarov. Napr. (označme si rovnosť $\square \circ \square \stackrel{1}{=} \square \square$ a rovnosť $\circ \circ \stackrel{2}{=} \square \triangle$):

$$\begin{aligned} \square \circ \square \stackrel{1}{=} \triangle \triangle &\Rightarrow \square \circ \square \mid \square \square = \triangle \triangle \mid \square \square \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \circ \square \square \square = \square \triangle \mid \square \triangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \circ \square \square \square \stackrel{2}{=} \circ \circ \mid \circ \circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \square \square \square = \circ \circ \circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square < \circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \circ \square \stackrel{1}{=} \triangle \triangle &\Rightarrow \square \circ \square \mid \triangle \triangle = \triangle \triangle \mid \triangle \triangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square \triangle \mid \square \triangle \parallel \circ = \triangle \triangle \triangle \triangle \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} \circ \circ \mid \circ \circ \parallel \circ = \triangle \triangle \triangle \triangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \circ < \triangle \end{aligned}$$

RIEŠENIA ÚLOH II. KOLA

Riešenie úlohy Z4-II-1 (str. 102)

1. *riešenie.* Uvažujeme podiel $*36 : 7$, kde na miesto hviezdíčky dosadzujeme postupne 1, 2, ... , 9. Ak vydelíme bezo zvyšku, našli sme riešenie.

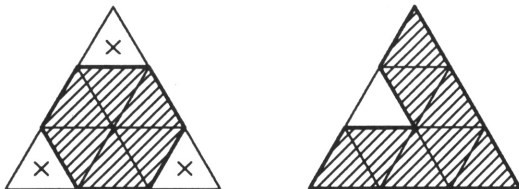
2. *riešenie.* $** \cdot 7 = 36$; číslicu 6 v súčine dostaneme vynásobením 7 s neznámou číslicou na mieste jednotiek. Jedinou vhodnou číslicou je 8.

Číslicu 3 v súčine dostaneme vynásobením 7 s neznámou na mieste desiatok a pričítaním 5 (zostatok zo súčinu $7 \cdot 8 = 56$). Teda hľadáme násobok 7, ktorý má na mieste jednotiek číslicu 8 (pretože $8 + 5 = 13$). Jediná možnosť je $4 \cdot 7 = 28$.

Úloha má jediné riešenie $48 \cdot 7 = 336$.

Riešenie úlohy Z4-II-2 (str. 102)

Sú tieto možnosti (obr. 62):





Obr. 62

Riešenie úlohy Z4-II-3 (str. 103)

Označme ako jeden diel to, čo nazbierala Martinka. Anka potom nazbierala 4krát viac, teda 4 diely.

Kamilka nazbierala polovicu toho čo Anka, teda dvakrát viac ako Martinka, teda dva diely. Spolu nazbierali 7 dielov — čo je ale 21 šišiek. Teda jeden diel sú 3 šišky. Takže Anka nazbierala 12, Kamilka 6 a Martinka 3 šišky.