36. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 36. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. 28. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 65–125.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404839

Kategorie A

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

A - I - 1

Reálná funkce f je definována na množině všech uspořádaných dvojic (n, x), kde $n \geqq 1$ je přirozené číslo, x je reálné číslo. Funkce f splňuje podmínky

$$f(1, x) = x, \tag{1}$$

$$f(2n, x) = n + f(n, x + 1), \tag{2}$$

$$f(2n + 1, x) = n + f(n + 1, x + 1). \tag{3}$$

Dokažte, že pro $n \geqq 2$ a každé reálné číslo x platí

$$f(n, x) = n + x + [\log_2(n - 1)]. \tag{4}$$

(Symbol $[x]$ značí celou část čísla x.)

Řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Dosazením $n = 1$ do rovnosti (2) a použitím (1) postupně dostaneme

$$f(2, x) = 1 + f(1, x + 1) = 1 + x + 1 = 2 + x =$$

$$= 2 + x + [\log_2 1],$$

vztah (4) tedy platí pro $n = 2$ a libovolné reálné x.

Předpokládejme, že rovnost (4) platí pro každé přirozené $k < n$ a pro všechna reálná x, a dokážeme, že pak platí i pro $k = n$ a libovolné reálné x.

Je-li $n = 2k$, je podle (2) a podle indukčního předpokladu ($k < n$)

$$f(n, x) = f(2k, x) = k + f(k, x + 1) =$$

$$= k + (k + x + 1 + [\log_2(k - 1)]) =$$

$$= 2k + x + [1 + \log_2(k - 1)] =$$

$$= 2k + x + [\log_2(2k - 2)] =$$

$$= 2k + x + [\log_2(2k - 1)] = n + x + [\log_2(n - 1)].$$

Zde jsme využili toho, že $[\log_2 m] = a$, právě když $2^a \leqq m < 2^{a+1}$. Pro $m = 2k - 2$ odtud plyne

$$2^a \leqq 2k - 2 < 2k - 1 \leqq 2^{a+1},$$

ale $2k - 1$ je liché, takže $2^a \leqq 2k - 1 < 2^{a+1}$, a tudíž

$$[\log_2(2k - 1)] = a = [\log_2(2k - 2)].$$

Je-li $n = 2k + 1$, je podle (3) a podle indukčního předpokladu

$$f(n, x) = f(2k + 1, x) = k + f(k + 1, x + 1) =$$

$$= k + (k + 1 + x + 1 + [\log_2 k]) =$$

$$= 2k + 1 + x + [\log_2 2k] =$$

$$= n + x + [\log_2 (n - 1)].$$

A - I - 2

Funkce f zobrazuje interval $\mathrm{I} = (-c, c)$, $c > 0$, do množiny komplexních čísel tak, že pro každé $t \in \mathrm{I}$ platí

$$|f(t)| = f(t)(\cos t + \mathrm{i} \sin t),$$

$$|f(t)| - 1 = |f(t) - 3|$$

a ke každému $t \in \mathrm{I}$ lze nalézt $s \in \mathrm{I}$ tak, že

$$2|f(t)| < |f(s)|.$$

Vypočtěte c (na tři platné číslice) a vypočtěte $f(t_0)$, víte-li, že $|f(t_0)| = 5$.

Řešení. Funkce f je komplexní funkce reálné proměnné. Z podmínky $|f(t)| = f(t)(\cos t + \mathrm{i} \sin t)$ je však vidět, že $f(t) = |f(t)| (\cos t - \mathrm{i} \sin t)$, k určení f proto stačí určit reálnou funkci g, $g(t) = |f(t)|$.

Umocněním druhé podmínky dostaneme

$$(g(t) - 1)^2 = |g(t)\cos t - 3 - \mathrm{i}\, g(t)\sin t|^2,$$

$$g^2(t) - 2g(t) + 1 = (g(t)\cos t - 3)^2 + (g(t)\sin t)^2 =$$

$$= g^2(t)(\cos^2 t + \sin^2 t) - 6g(t)\cos t + 9,$$

$$(1) \qquad g(t) = \frac{4}{3\cos t - 1}.$$

Aby funkce f byla dobře definována, musí být $g(t) > 0$ pro všechna t z definičního oboru $\mathrm{I} = (-c, c)$, takže $\cos t > \frac{1}{3}$. Proto je $(-c, c) \subset \left(-\arccos \frac{1}{3}, \arccos \frac{1}{3}\right)$, tj. $c \leqq \arccos \frac{1}{3}$.

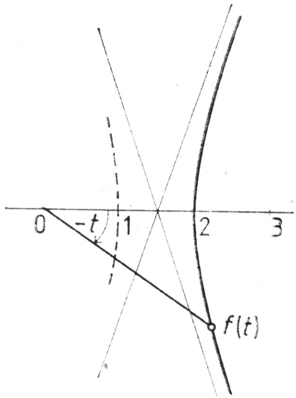
Protože pro každé $t \in (-c, c)$ existuje $s \in (-c, c)$ tak, že $g(s) > 2g(t)$, musí být funkce g neomezená. Odtud plyne, že je $c = \arccos \frac{1}{3} \doteq 1{,}23$ (hodnotu určíme pomocí tabulek nebo počítačky).

Je-li $|f(t_0)| = 5$, je podle (1) $\cos t_0 = \frac{3}{5}$, a tedy $|\sin t_0| = \frac{4}{5}$. Odtud plyne, že je $f(t_0) = |f(t_0)|\,(\cos t_0 - \mathrm{i}\sin t_0) = 5\left(\frac{3}{5} \pm \mathrm{i}\,\frac{4}{5}\right) = 3 \pm 4\mathrm{i}$.

Jiné řešení. Hodnoty funkce f leží na větvi hyperboly určené (v komplexní rovině) rovnicí

$$|z| - |z - 3| = 1$$

s ohnisky v bodech (s komplexními souřadnicemi) 0 a 3 (obr. 16).



Obr. 16

Přitom podle první podmínky je

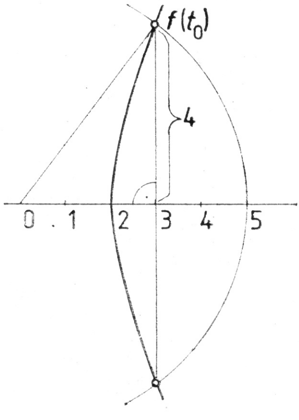
$$f(t) = |f(t)| (\cos t - \mathrm{i} \sin t) = |f(t)| (\cos(-t) + \mathrm{i} \sin(-t)),$$

takže pro $t \in (-c, c)$ dostaneme hodnotu $f(t)$ jako průsečík dané větve hyperboly s polopřímkou s počátkem v 0 a svírající s reálnou osou úhel $-t$ (v obloukové míře). Podle třetí podmínky úlohy je funkce f neomezená, takže pro $|t| = c$ uvedené polopřímky už danou větev hyperboly neprotínají, tj. polopřímky

$$z = |z|e^{-ic}, \quad z = |z|e^{ic}$$

jsou rovnoběžné s jejími asymptotami. Jak snadno zjistíme, má daná hyperbola hlavní poloosu $a = \frac{1}{2}$ a excentricitu $e = \frac{3}{2}$, takže pro hodnotu c platí $\cos c = \frac{a}{e} = \frac{1}{3}$.

Je-li $|f(t_0)| = 5$, plyne z rovnice hyperboly $|f(t_0) - 3| = 4$, trojúhelník s vrcholy 0, 3, $f(t_0)$ je tedy, jak snadno zjistíme, pravoúhlý (obr. 17), a proto $f(t_0) = 3 \pm 4i$.



Obr. 17

A - I - 3

Nechť n je přirozené číslo, $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Kolik řešení má soustava rovnic

$$a_1x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1$$

$$x_1 + a_2x_2 + \ldots + x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + a_nx_n = b_n?$$

Proveďte diskusi.

Řešení. Případ $n = 1$ je triviální, budeme předpokládat, že $n \geqq 2$. Je-li $a_1 = 1$, má první rovnice tvar

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1, \tag{1}$$

dosadíme-li tedy do zbylých rovnic soustavy, dostaneme soustavu

$$(a_i - 1)x_i + b_1 = b_i, \qquad 2 \leqq i \leqq n.$$

Odtud je vidět, že pro $1 = a_1 = \ldots = a_k$ má soustava řešení, jen když $b_1 = b_2 = \ldots = b_k$. Pak dostaneme $k \geqq 1$ stejných rovnic (1), a pokud $k < n$ a $a_{k+1} > 1$, je

$$x_j = \frac{b_j - b_1}{a_j - 1}, \qquad k + 1 \leqq j \leqq n. \tag{2}$$

Pro $a_2 > 1$ má tedy daná soustava vždy jediné řešení

$$x_1 = b_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i - b_1}{a_i - 1},$$

$$x_j = \frac{b_j - b_1}{a_j - 1} \qquad (2 \leqq j \leqq n).$$

Pro $1 = a_1 = \ldots = a_k$ $(k > 2)$ má soustava řešení, právě když $b_1 = b_2 = \ldots = b_k$. V tomto případě má soustava nekonečně mnoho řešení, neboť neznámé $x_{k+1}, \ldots, x_n$ jsou jednoznačně určeny vztahem (2), ale pro neznámé $x_1, \ldots, x_k$ máme jedinou podmínku

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = b_1 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j.$$

Je-li $a_1 > 1$, tj. $1 < a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, dosadíme z první rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = b_1 - (a_1 - 1)x_1$$

do ostatních rovnic soustavy

$$(a_j - 1)x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i = b_j \qquad 2 \leqq j \leqq n,$$

takže dostaneme

$$x_j = \frac{b_j - b_1 + (a_1 - 1)x_1}{a_j - 1}.$$

Z první rovnice pak plyne

$$(a_1 - 1)x_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - b_1}{a_i - 1} + (a_1 - 1)\,x_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - 1} = b_1.$$

Vidíme, že v tomto případě má soustava jediné řešení

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{b_i - b_1}{a_i - 1}}{(a_1 - 1)\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i - 1}\right)},$$

$$x_j = \frac{b_j - b_1 + (a_i - 1)x_1}{a_j - 1} \qquad (2 \leqq j \leqq n).$$

Závěr. Pro $n \geqq 2$ má daná soustava jediné řešení, právě když $a_2 > 1$. Pokud $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$ $(k > 2)$, má soustava nekonečně mnoho řešení, právě když $b_1 = b_2 = \ldots = b_k$; jinak nemá žádné řešení.

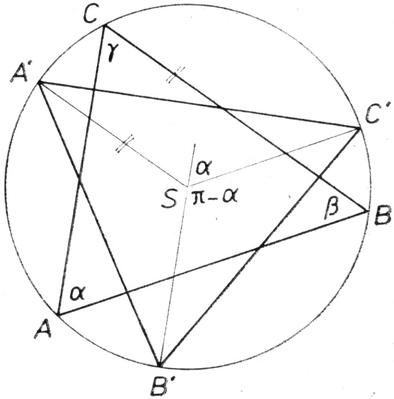
A - I - 4

Nechť body A', B', C' leží na jednotkové kružnici se středem S opsané trojúhelníku ABC tak, že dvojice vektorů SA' a BC, SB' a CA, SC' a AB jsou souhlasně rovnoběžné. Jsou-li P a P' obsahy trojúhelníků ABC a $A'B'C'$, pak platí

$$P' \geqq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{P}{2}}.$$

Dokažte.

Řešení. Jsou-li α, β, γ úhly daného trojúhelníku ABC, platí pro úhly trojúhelníků $SB'C'$, $SC'A'$, $SA'B'$, jak snadno plyne z konstrukce bodů A', B', C' (obr. 18),



Obr. 18

$$|\sphericalangle B'SC'| = \pi - \alpha, \quad |\sphericalangle C'SA'| = \pi - \beta,$$
$$|\sphericalangle A'SB'| = \pi - \gamma.$$

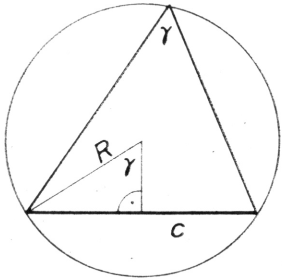
Označme R poloměr kružnice opsané oběma trojúhelníkům ABC, $A'B'C'$, pro obsah P' trojúhelníku $A'B'C'$ pak platí

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{2} R^2(\sin(\pi - \alpha) + \sin(\pi - \beta) + \sin(\pi - \gamma)) = \\ &= \frac{1}{2} R^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma). \end{aligned} \tag{1}$$

Obsah P trojúhelníku ABC můžeme vypočítat různě. Tak je např.

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{abc}{4R},$$

neboť pro tětivu délky c s obvodovým úhlem γ platí (obr. 19) $c = 2R \sin \gamma$. Tak dostaneme i vztah



Obr. 19

(2) $$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Ze známé nerovnosti

(3) $$\frac{x + y + z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz},$$

která platí pro libovolná tři nezáporná čísla x, y, z, a z rovností (1) a (2) tak plyne nerovnost

$$\frac{2P'}{3R^2} \geqq \sqrt[3]{\frac{P}{2R^2}},$$

neboli ($R = 1$)

$$P' \geqq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{P}{2}},$$

což je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Rovnost nastane, právě když nastane rovnost v nerovnosti (3), tj. právě když $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, tedy právě když daný trojúhelník ABC je rovnostranný (trojúhelník $A'B'C'$ pak bude také rovnostranný).

A - I - 5

Nechť funkce f je pro $s > 0$, $t > 0$ definována předpisem

$$f(s, t) = \frac{st(1 - st)}{(1 + s^2)(1 + t^2)}.$$

Dokažte, že tato funkce nabývá svého maxima právě v jednom bodě. Nalezněte tento bod a maximum funkce.

Řešení. Podle známé nerovnosti $s^2 + t^2 \geqq 2st$ $(s, t > 0)$ pro funkci f platí

$$f(s, t) = \frac{st(1 - st)}{1 + s^2 + t^2 + s^2t^2} \leqq \frac{st(1 - st)}{1 + s^2t^2 + 2st} = \frac{st(1 - st)}{(1 + st)^2},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $s = t$.

Funkce f tedy nabývá maxima na některé hyperbole $st = u$ pro $s = t = \sqrt{u}$ (přičemž stačí uvažovat $0 < u < 1$, kdy je $f(s, t) > 0$). Funkce

$$h(u) = \frac{u(1-u)}{(1+u)^2}$$

má derivaci

$$h'(u) = \frac{(1+u)^2(-2u+1) - 2(1+u)(u-u^2)}{(1+u)^4} = \frac{-3u+1}{(1+u)^3},$$

takže funkce h je na intervalu $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ rostoucí a na intervalu $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ klesající. Odtud plyne, že funkce f nabývá svého maxima v jediném bodě (s, t), $s = t = \sqrt{\frac{1}{3}}$, a je

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

Poznámka. Vhodnou úpravou můžeme využít nerovnosti $xy \leqq \frac{(x+y)^2}{4}$. Je totiž

$$h(u) = \frac{u(1-u)}{(1+u)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2u(1-u)}{(1+u)^2} \leqq \frac{1}{2(1+u)^2} \cdot \frac{1}{4}(1+u)^2 = \frac{1}{8}.$$

Odtud plyne, že funkce h nabývá svého maxima pro $2u = 1 - u$, tj. $u = \frac{1}{3}$, takže $f(s, t) \leqq \frac{1}{8}$ s rovností pro $s = t = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

A - I - 6

Šachovnice se skládá z 8×8 polí vytvářejících čtverec. Věž je jedna z figur, jimiž se hraje šach. Řekneme, že daná věž je neohrožena, jestliže v řádku a sloupci, ve kterém se nalézá, už není jiná věž.

a) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je každá z nich neohrožena.

b) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich neohrožena.

c) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich neohrožena a žádné dvě nejsou v témže řádku.

d) Řešte úlohy b) a c) pro čtvercovou šachovnici skládající se z $n \times n$ polí, přičemž rozmísťujeme k věží $(1 \leqq k \leqq n)$.

Řešení. Máme-li na šachovnici 8×8 rozmístit 8 věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly, musí stát v každém sloupci a v každém řádku právě jedna věž.

Pro umístění věže v prvním sloupci máme 8 možností. Pro každou z těchto možností máme 7 možností, jak umístit věž ve druhém sloupci (jeden řádek je blokován věží z prvního sloupce), pro umístění věží v prvním a druhém sloupci je tedy $8 . 7 = 56$ možností. Pro každou z nich máme 6 možností, jak umístit věž ve třetím sloupci, atd. Celkem je tedy $8.7.6. \ldots .2.1 = 8!$ možností, jak věže rozmístit. (Ke stejnému výsledku lze dospět také takto: každému rozmístění věží přiřadíme posloupnost osmi čísel $a_1, a_2, \ldots, a_8$ tak, že v daném rozmístění stojí v i-tém sloupci věž v a_i-tém řádku. Jelikož se věže neohrožují, je posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_8$ pořadím čísel $1, 2, \ldots, 8$; a naopak každé pořadí dává popsaným způsobem rozmístění neohrožujících se věží. Hledaný počet rozmístění je tedy roven počtu pořadí osmiprvkové množiny, tj. $8!$.)

Dále vyřešíme rovnou obecnou úlohu pro k věží a šachovnici $n \times n$. V tomto případě je vhodné nejprve uvažovat věže rozlišené očíslováním $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Označme A_i množinu všech rozmístění, ve kterých je věž v_i neohrožena, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Chceme určit počet rozmístění, ve kterých aspoň jedna věž není ohrožována, tj. počet prvků množiny $\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_k$. Podle principu inkluze a exkluze (viz např. Vrba, A.: Kombinatorika. 1. vyd. Praha, Mladá fronta 1980. ŠMM, sv. 45) je

$$
\begin{aligned}
(1)\quad |\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_k| &= |\mathsf{A}_1| + |\mathsf{A}_2| + \ldots + |\mathsf{A}_k| - \\
&- |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2| - |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_3| - \ldots - |\mathsf{A}_{k-1} \cap \mathsf{A}_k| + \\
&+ |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3| + \ldots + |\mathsf{A}_{k-2} \cap \mathsf{A}_{k-1} \cap \mathsf{A}_k| - \ldots + \\
&+ (-1)^{k-1} |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_k|.
\end{aligned}
$$

Nechť $1 \leqq j \leqq k$. Je-li ω j-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$, pak $|\bigcap_{i \in \omega} \mathsf{A}_i| = |\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_j|$. Stačí proto určit číslo $|\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_j|$, tj. počet rozmístění, ve kterých jsou věže $v_1, v_2, \ldots, v_j$ neohroženy. Věž v_1 můžeme umístit n^2 způsoby (do kteréhokoli políčka), pro v_2 zbývá $(n-1)^2$ možností (jeden řádek a jeden sloupec jsou blokovány věží v_1), atd. až v_j můžeme umístit $(n-j+1)^2$ způsoby. Věže $v_{j+1}, \ldots, v_k$ již můžeme umístit libovolně ve zbylých $(n-j)^2$ polích (nesmíme vstoupit do řádků a sloupců použitých pro věže $v_1, \ldots, v_j$). Takových rozmístění je $\binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!$ (počet variací $k-j$ prvků z $(n-j)^2$-prvkové množiny). Je tedy

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j| =$$
$$= n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Po dosazení do (1) dostáváme

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)! =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Jestliže nyní zapomeneme na rozlišení jednotlivých věží, bude vždy $k!$ rozmístění stejných, takže hledaný počet je

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Druhou část úlohy d) vyřešíme obdobně. Označme B_i množinu všech rozmístění, ve kterých není věž v_i ohrožena a přitom žádné dvě věže nestojí ve stejném řádku. Podle principu inkluze a exkluze pak je

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k| = |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_k| -$$

$$- |B_1 \cap B_2| - \ldots - |B_{k-1} \cap B_k| + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1}|B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k|.$$

Protože

$$|B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_j| =$$

$$= n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2(n-j)^{k-j}(n-j)(n-j-1)\ldots$$

$$\ldots (n-k+1),$$

je

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k| =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 (n-j)^{k-j} \binom{n-j}{k-j} (k-j)!.$$

Stejně jako v předešlém případě (zapomeneme-li na rozlišení věží) dostaneme hledaný počet rozmístění jako

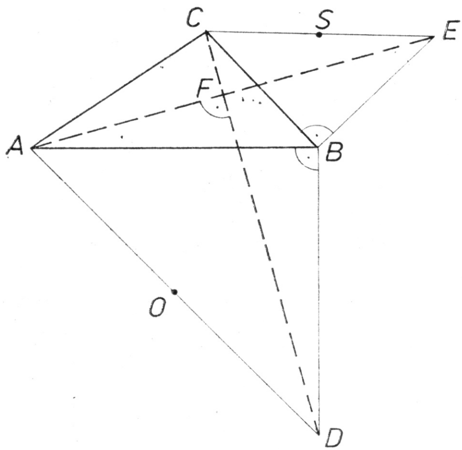
$$\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 (n-j)^{k-j} \binom{n-j}{k-j} (k-j)!.$$

Přitom ve všech součtech klademe $0^0 = 1$ (např. pro $j = k = n$).

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

A - S - 1

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na kolmici k přeponě AB procházející bodem B sestrojíme v polorovině opačné k polorovině ABC bod D tak, aby platilo $|BD| = |AB|$. Na kolmici k BC bodem B sestrojíme v polorovině opačné k polorovině BCA bod E tak, aby $|BE| = |BC|$. Označme S



Obr. 20

střed úsečky CE, O střed úsečky AD a F průsečík přímek AE, CD. Dokažte, že čtyřúhelník $OBSF$ je deltoid.

Řešení. Trojúhelník DBC vznikne z trojúhelníku ABE otočením o pravý úhel kolem bodu B (obr. 20), takže odpovídající si strany CD a EA jsou navzájem kolmé. Body B a F proto leží jednak na Thaletově kružnici nad průměrem AD, jednak na Thaletově kružnici nad průměrem CE. Osa společné tětivy BF obou těchto kružnic prochází jejich středy O a S a čtyřúhelník $OBSF$ je tedy osově souměrný podle osy úhlopříčky BF. Protože $|BS| = \frac{|BE|}{\sqrt{2}} < \frac{|BD|}{\sqrt{2}} = |BO|$, není $OBSF$ kosočtverec, ale deltoid. Jak je vidět z uvedeného řešení, $OBSF$ bude kosočtverec, právě když $|BC| = |AB|$, jinak vznikne deltoid. Tvrzení pak plyne nejen pro pravoúhlé trojúhelníky, ale obecně pro libovolný $\triangle ABC$, v němž $|AB| \neq |BC|$.

A - S - 2

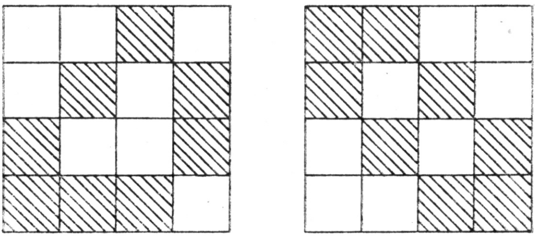
a) Každé pole čtvercové tabulky 5×5 je obarveno právě jednou z barev bílá, černá. Dokažte, že v tabulce existují čtyři pole stejné barvy, jež jsou rohovými poli některého pravoúhelníku.

b) Ukažte, že v případě tabulky 4×4 existuje takové obarvení, při kterém žádná čtyři pole stejné barvy nejsou rohovými poli pravoúhelníku.

Řešení. Tabulka má 25 polí. Jednou z barev, řekněme bílou, je obarveno aspoň 13 polí. Je-li všech pět polí některého sloupce obarveno bíle, jsou v aspoň jednom dalším sloupci aspoň dvě bílá pole. Ta tvoří spolu s dvěma bílými poli bílého sloupce čtyři rohová pole pravoúhelníku.

Jestliže jsou v některém sloupci 4 bílá pole, obsahuje některý další sloupec aspoň 3 bílá pole. Protože řádků je pět, musí být v uvažovaných sloupcích dvě bílá pole ve stejných řádcích.

Neobsahuje-li žádný sloupec 4 bílá pole, je rozložení 13 bílých polí do sloupců buď 3, 3, 3, 2, 2, nebo 3, 3, 3, 3, 1. V prvním případě z nich můžeme utvořit 11 dvojic polí téhož sloupce, ve druhém případě takových dvojic existuje dokonce 12. Jelikož v jednom sloupci je jen $\binom{5}{2} = 10$ dvojic, musí mezi uvedenými 11 či 12 dvojicemi být aspoň dvě, jejichž pole leží ve stejných řádcích. Pole těchto dvojic jsou opět rohovými poli pravoúhelníku. Tím je vyřešena část a) úlohy. Dva příklady tabulky 4×4 s požadovaným vybarvením dvěma barvami ukazuje obr. 21.



Obr. 21

Jiné řešení. V každém sloupci obarvené tabulky převládá jedna barva. Stejná barva musí převládat aspoň ve třech sloupcích, takže bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bílá barva převládá v prvních třech sloupcích a že v prvním sloupci jsou první tři pole bílá. Ve druhém sloupci pak musí být bílá pole ve 4. a 5. řádku, jinak dostaneme bílý pravoúhelník. Ve třetím sloupci pak už ale nelze umístit tři bílá pole tak, aby nevznikl bílý pravoúhelník. Tím je tvrzení dokázáno.

A - S - 3a

Jsou dána komplexní čísla u, v. Najděte všechna komplexní čísla w, pro něž je funkce

$$f(z) = |z - u|^2 + |z - v|^2 + |z - w|^2$$

konstantní na množině $\{z \in \mathrm{C}: |z| = 1\}$.

Řešení. Je

$$f(z) = 3|z|^2 - z(\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}) - \bar{z}(u + v + w) + \\ + |u|^2 + |v|^2 + |w|^2.$$

Je-li tato funkce na množině všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1 konstantní, je $f(1) = f(-1) = f(i)$. Odtud postupně plyne, že $\mathrm{Re}(u + v + w) = 0$, $\mathrm{Im}(u + v + w) = 0$, tedy $u + v + w = 0$. Je-li naopak tato podmínka splněna, je f konstantní na množině všech komplexních jednotek. Úloze vyhovuje jediné komplexní číslo $w = -u - v$.

Zjistěte, pro která celá čísla b má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + bx_2 \phantom{{}+ 2bx_3} &= 3b^3 \\ 2bx_1 + x_2 + 2bx_3 &= 2b^3 \\ bx_2 + x_3 &= b^3 \end{aligned}$$

řešení v oboru celých čísel, a pro každé takové b vypište všechna tato řešení.

Řešení. Daná soustava je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} x_1 &= 3b^3 - bx_2 \\ x_3 &= b^3 - bx_2 \\ (4b^2 - 1)x_2 &= 2b^3(4b - 1) \end{aligned}$$

a pro b celé má celočíselné řešení, právě když číslo $4b^2 - 1 = (2b - 1)(2b + 1)$ dělí číslo $2b^3(4b - 1)$. To je splněno v případě $b = 0$, pak je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Je-li $b \neq 0$, jsou lichá čísla $2b - 1$, $2b + 1$ s číslem $2b^3$ nesoudělná, takže číslo $4b^2 - 1$ musí dělit číslo $4b - 1$. Je proto

$$|4b^2 - 1| \leqq |4b - 1|.$$

Této nerovnici vyhovují pouze celá čísla -1, 0, 1. Pro $b = -1$ není číslo x_2 celé, pro $b = 1$ vyjde $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

A - II - 1

Nechť p a q jsou prvočísla. Dokažte, že libovolné řešení (x, y, z) rovnice

$$xyz = pq(x + y + z)$$

v oboru přirozených čísel má následující vlastnost: Jedno z čísel x, y, z dělí součet ostatních dvou.

Najděte prvočísla p, q, r a takové řešení rovnice

$$xyz = pqr(x + y + z),$$

které uvedenou vlastnost nemá.

Řešení. Je-li $xyz = pq(x + y + z)$, musí být buď jedno z čísel x, y, z dělitelné součinem pq, anebo jedno dělitelné prvočíslem p a jiné dělitelné prvočíslem q. Je-li např. $x = pqx'$, je

$$x'yz = x + y + z, \quad \text{tj.} \quad z(x'y - 1) = x + y,$$

takže z dělí součet $x + y$.

Je-li $x = px', y = qy'$, je obdobně

$$x'y'z = x + y + z, \quad \text{tj.} \quad z(x'y' - 1) = x + y,$$

takže opět z dělí součet $x + y$. Tím je důkaz hotov, neboť daná rovnice je symetrická v neznámých x, y, z.

Z uvedeného řešení je vidět, že v případě rovnice $xyz = pqr(x + y + z)$ prvočísla p, q, r musí být různá, máme-li najít nějaké její řešení, které nemá uvažovanou vlastnost. Vezměme tedy $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$. Rovnice

$$xyz = 30(x + y + z)$$

může mít řešení tvaru

$$x = 2x', y = 3y', z = 5z',$$

což vede k rovnici

$$x'y'z' = 2x' + 3y' + 5z'.$$

Volbou $z' = 1$ dostaneme jednodušší rovnici

$$x'y' = 2x' + 3y' + 5,$$

která má přirozené řešení např. pro $x' = 4$ ($y' = 13$) nebo pro $y' = 3$ ($x' = 14$). Čísla 8, 39, 5 a 28, 9, 5 jsou pak řešením rovnice $xyz = 30(x + y + z)$ a nemají uvažovanou vlastnost.

A - II - 2

Každé pole čtvercové tabulky 12×12 je obarveno jednou z třech barev. Dokažte, že v tabulce existují čtyři pole stejné barvy, jež jsou rohovými poli některého pravoúhelníku.

Řešení. Označíme-li a, b, c počty polí jednotlivých barev v nějakém sloupci tabulky, je $a + b + c = 12$ a přitom v takovém sloupci najdeme $\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c}{2}$ dvojic polí stejné barvy. Z nerovnosti $(x + y + z)^2 \leqq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, která platí pro libovolná reálná x, y, z, plyne

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 6 \geqq \frac{1}{6}12^2 - 6 = 18.$$

V každém sloupci obarvené tabulky najdeme tedy aspoň 18 dvojic polí stejné barvy. Celkem tak existuje nejméně 12.18 dvojic řádků, které mají s některým sloupcem společná dvě pole stejné barvy. Pro alespoň třetinu z nich jsou odpovídající dvojice polí jedné barvy. Protože

$$\frac{1}{3}.12.18 > \binom{12}{2},$$

existují nutně dva sloupce, v nichž se dvojice polí této barvy vyskytují ve stejné dvojici řádků, což dává tvrzení úlohy.

2. řešení. Uvažujme tu z barev, kterou je vybarveno alespoň 48 (třetina) polí dané tabulky. Uvažujme všechny možné dvojice polí této barvy v jednotlivých sloupcích, zřejmě stačí dokázat, že je jich vždy více než $\binom{12}{2}$.

Pokud jsou v některém ze sloupců méně než čtyři pole zvolené barvy, přesuneme jedno pole ze sloupce, ve kterém jsou naopak více než čtyři pole vybrané barvy (ten existuje, protože všech polí této barvy je aspoň 48). Tím počet všech dvojic polí zvolené barvy ve sloupcích jen zmenšíme, neboť pro $a < 4$, $b > 4$ platí

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} > \binom{a+1}{2} + \binom{b-1}{2}.$$

Tak po konečném počtu kroků dostaneme tabulku, v níž jsou v každém sloupci aspoň čtyři pole vybrané barvy. Odtud plyne, že v původní tabulce bylo aspoň $12 . \binom{4}{2} > \binom{12}{2}$ dvojic polí zvolené barvy ve všech sloupcích. Některá ze dvojic se bude proto opakovat, čímž je existence hledaného pravoúhelníku dokázána.

3. řešení (podle Š. Holuba, 2. roč. G Trutnov a O. Ralíka, 4. roč. G Nitra). Protože $12 . 12 = 3 . 48$, v tabulce jistě najdeme 48 polí obarvených stejnou barvou. Označme jejich počet v jednotlivých sloupcích $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} = 48$. V každém sloupci tedy najdeme aspoň $\binom{x_i}{2}$ dvojic polí zvolené barvy.

Podle Cauchyovy nerovnosti je

$$\left(\sum_{i=1}^{12} x_i\right)^2 \leqq 12 \sum_{i=1}^{12} x_i^2,$$

takže pro všechny nalezené dvojice platí

$$\sum_{i=1}^{12} \binom{x_i}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - \sum_{i=1}^{12} x_i\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{12} x_i\right] =$$

$$= 72 > \binom{12}{2} = 66.$$

Odtud plyne, že se některá z nalezených dvojic musí opakovat aspoň ve dvou sloupcích. Existuje tedy hledaný pravoúhelník s vrcholy téže barvy.

Poznámka. Nerovnost

$$(\sum x_i)^2 \leqq n \sum x_i,$$

použitá pro $n = 3$ v 1. řešení a pro $n = 12$ ve 3. řešení, je speciálním případem Cauchyovy nerovnosti

$$(\sum u_i v_i)^2 \leqq \sum u_i^2 \sum v_i^2,$$

klademe-li $u_i = 1$, $v_i = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

4. řešení (podle P. Fencla, 4. roč. G Pardubice). Předpokládejme, že v některém řádku či sloupci existuje aspoň 5 polí stejné barvy (A). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je barvou A obarveno prvních pět polí prvého řádku. Dále se budeme zabývat jen prvními pěti sloupci (tj. tabulkou 12×5).

V každém dalším řádku se barva A může vyskytnout už nejvýše jednou, jinak jsme hotovi. Do pěti polí jednoho řádku můžeme umístit dvojici stejnobarevných polí $\binom{5}{2} = 10$

způsoby. Na zbývajících 11 řádcích tedy buď jednu dvojici zopakujeme (a dostaneme hledaný pravoúhelník), nebo jsou v některém řádku aspoň 3 pole jedné barvy (B). Pak nám ale zbývá jen $\binom{5}{2} - \binom{3}{2} = 7$ možností, jak umístit další dvojice polí barvy B do zbylých deseti řádků, aniž by se některá dvojice opakovala. V takovém případě by se zbylá barva (C) vyskytla ve třech řádcích aspoň třikrát. Nyní už je vidět (obr. 22), že takové tři trojice nelze umístit, aniž by vznikl požadovaný pravoúhelník.

C	C	C		
C			C	C

Obr. 22

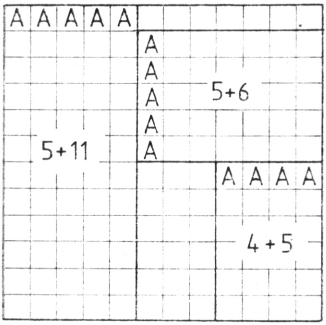
Pokud jsou v každém řádku i sloupci právě čtyři pole každé barvy, můžeme předpokládat, že barvou A jsou obarvena např. první čtyři pole prvého řádku. Kdyby v každém řádku prvých čtyř sloupců byla barva A zastoupena nejvýše jednou, dostaneme $4 + 11$ polí barvy A, což odporuje tomu, že v čtyřech sloupcích je celkem 16 polí každé barvy. Tím je tvrzení dokázáno.

5. řešení (podle M. Lukáče, 4. roč. G Bánovce nad Bebravou). Uvažujme barvu A, kterou je vybarveno aspoň 48 polí dané tabulky, takže existuje řádek, v němž jsou alespoň čtyři pole této barvy. Je zřejmé, že přehození řádků (resp.

sloupců) v tabulce nemá na existenci hledaného pravoúhelníku vliv stejně jako výměna řádků za sloupce a naopak. Dejme tomu, že v dané tabulce požadovaný pravoúhelník neexistuje. V takovém případě v každé její části, v níž je jeden řádek (resp. sloupec) obarven zvolenou barvou, obsahuje každý další řádek (resp. sloupec) už jen jedno pole této barvy.

Kdyby v některém řádku byla právě 4 pole barvy A, v odpovídajících 4 sloupcích by pak bylo celkem nejvýše $4 + 11 = 15$ polí této barvy, takže ve zbývajících 8 sloupcích by bylo aspoň 33 polí barvy A. Pak ale zase některý sloupec musí obsahovat aspoň 5 polí této barvy.

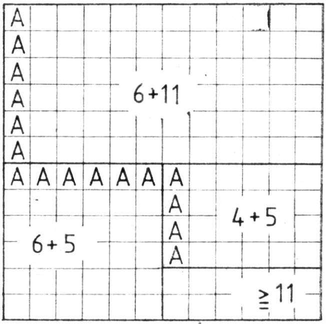
Pokud obsahuje některý řádek (či sloupec) tabulky právě 5 polí barvy A, je v odpovídajících pěti sloupcích nejvýše $5 + 11 = 16$ polí této barvy. Zbylá tabulka 12×7 obsahuje tedy nejméně 32 polí barvy A (nikoli už v prvním řádku, obr. 23). V některém jejím sloupci proto najdeme aspoň 5 polí této barvy a v odpovídajících pěti řádcích je pak nejvýše 11 polí bar-



Obr. 23

vy A. Ve zbylé tabulce 6×7 je tudíž aspoň 21 polí této barvy, což znamená, že v některém jejím řádku jsou aspoň 4 pole barvy A a v odpovídajících čtyřech sloupcích pak nejvýše 9 polí této barvy. Protože zbývajících nejméně 12 polí barvy A nemůže ležet jen v tabulce 6×2 (obr. 23), vidíme, že v označeném sloupci je aspoň 6 polí zvolené barvy.

Obsahuje-li však některý sloupec (či řádek) aspoň 6 polí barvy A, dojdeme analogickým postupem (obr. 24) k tabulce



Obr. 24

2×6, která by musela obsahovat nejméně 11 polí této barvy. To je zřejmě ve sporu s naším předpokladem, takže hledaný pravoúhelník vždy existuje.

A - II - 3a

Je dáno zobrazení f intervalu $(0, \pi)$ do množiny komplexních čísel takové, že pro každé $t \in (0, \pi)$ současně platí

$$|f(t)| > 0,$$

$$|f(t)| + f(t)(\sin t + \mathrm{i} \cos t) = 0,$$

$$|f(t) + 1| + |f(t) + 3| = 4.$$

Vypočtěte obsah trojúhelníku, jehož vrcholy jsou komplexní čísla 0, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Řešení. Z první rovnosti plyne, že je

$$f(t) = |f(t)|(-\sin t + \mathrm{i} \cos t),$$

takže

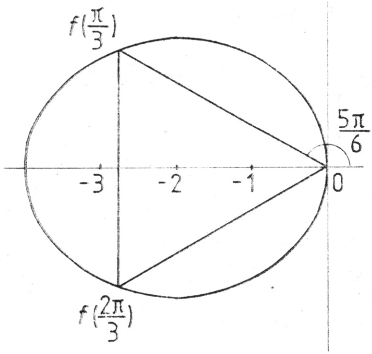
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left|f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\right).$$

Druhá rovnost znamená, že hodnoty funkce f leží na elipse s ohnisky -3, -1 (komplexní souřadnice) a hlavní poloosou velikosti 2. Protože pro argumenty $\alpha = \operatorname{Arg} f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a $\beta = \operatorname{Arg} f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ obou funkčních hodnot platí

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

je $\alpha = -\beta = \dfrac{5}{6}\pi$, a protože $|f(t)| > 0$, leží body $0, f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku (obr. 25). Stačí tedy vypočítat jeho výšku $|x|$, kde $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = x + iy$, $\dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



Obr. 25

Dosazením do dané rovnice elipsy dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4x^2 + 6x + 3} + \sqrt{4x^2 + 18x + 27}\right) = 4,$$

takže po dvojím umocnění postupně vyjde

$$(8x^2 + 24x - 18)^2 = 4\,(4x^2 + 6x + 3)\,(4x^2 + 18x + 27),$$

$$x(13x + 36) = 0.$$

Odtud vychází $x = -\frac{36}{13}$ (víme, že je $x \neq 0$ a že řešení existuje), obsah daného trojúhelníku je tedy

$$P = \frac{432}{169}\sqrt{3}.$$

Poznámka. Obecně vyjde

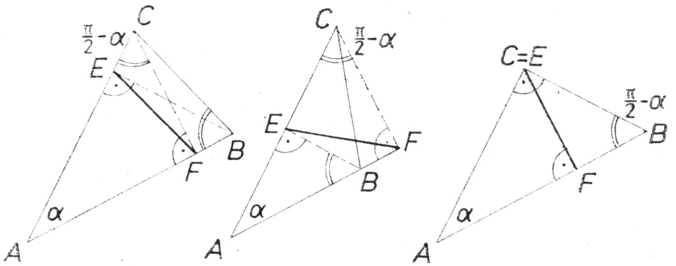
$$f(t) = \frac{12 \sin t}{4 - \sin^2 t}(- \sin t + \mathrm{i} \cos t), \; t \in (0, \pi).$$

A - II - 3b

V rovině jsou dány dva různé body E, F. Pro dané číslo $\alpha \in (0, \pi)$ určete množinu středů stran BC všech trojúhelníků ABC ležících v dané rovině, pro které $|\measuredangle BAC| = \alpha$ a body E, F jsou patami jejich výšek z vrcholů B, C.

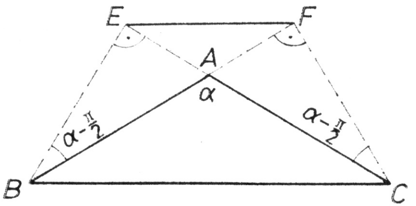
Řešení. Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje uvedené podmínky. Je $A \neq E$ i $A \neq F$, protože jinak by musel být trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A, a tedy $A = E = F$, což nejde. Je tedy $|\measuredangle EAF| = \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Trojúhelníky BCE, BCF jsou pravoúhlé, takže podle Thaletovy věty leží body B, C, E, F na kružnici s průměrem BC.

Je-li $\alpha < \frac{\pi}{2}$, leží pata aspoň jedné z výšek příslušných vrcho-



Obr. 26

lům B, C uvnitř cdpovídající strany AC, resp. AB (obr. 26), takže aspoň jeden z úhlů ECF, EBF je definován a má velikost $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Podobně pro $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ leží obě paty výšek vně stran AB, AC, takže (obr. 27)



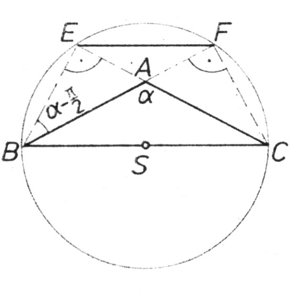
Obr. 27

$$|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle ECF| = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

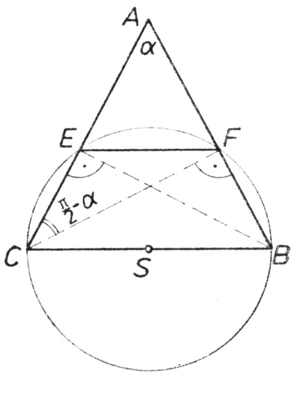
V každém případě leží jeden z vrcholů B, C trojúhelníku ABC na oblouku kružnice s tětivou EF a obvodovým úhlem

$\left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$, přitom BC je průměrem této kružnice. Odtud plyne, že střed strany BC je vždy středem kružnice s tětivou EF a středovým úhlem $2\left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$. Takové kružnice existují v rovině dvě, jejich středy S, S' jsou souměrně sdruženy podle osy EF.

Obráceně, pro daný úhel $\alpha \in (0, \pi)$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, ke každému z bodů S, S' najdeme trojúhelník ABC požadovaných vlastností: stačí např. vzít průměr BC sestrojené kružnice rovnoběžný s EF, přičemž pro $\alpha > \frac{\pi}{2}$ orientujeme úsečku BC souhlasně s EF (obr. 28a) a pro $\alpha < \frac{\pi}{2}$ opačně (obr. 28b). Přímky BF a CE se pak protnou v bodě A, pro který zřejmě



Obr. 28a



Obr. 28b

platí, že body E, F jsou patami výšek trojúhelníku ABC z vrcholů B, C, a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle BEA| = \alpha$, resp. $|\sphericalangle BAC| = \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle ECF| = \alpha$.

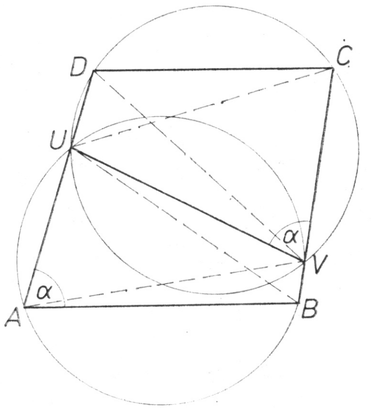
ÚLOHY III. KOLA

A - III - 1

Daný lichoběžník rozdělte na dva tětivové čtyřúhelníky, jejichž opsané kružnice mají stejný poloměr. Udejte podmínky řešitelnosti.

Řešení. Je-li lichoběžník $ABCD$ rozdělen na dva tětivové čtyřúhelníky přímkou protínající obě základny, z rovnosti odpovídajících úhlů vyjde, že $ABCD$ je rovnoběžník.

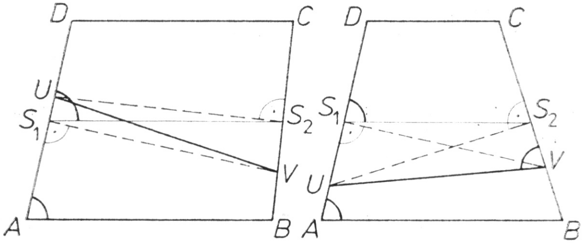
Předpokládejme tedy, že U, V jsou body na ramenech



Obr. 29

AD, BC takové, že $ABVU$, $UVCD$ jsou tětivové čtyřúhelníky (obr. 29). Pak je $|\sphericalangle UVC| = \pi - |\sphericalangle UVB| = |\sphericalangle UAB|$. Protože obě opsané kružnice mají stejný poloměr, plyne z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle UAB| = |\sphericalangle UVC|$ i rovnost odpovídajících tětiv $|UB| = |UC|$. Ze stejného důvodu je pak i $|AV| = |DV|$. Každý z bodů U, V tedy dostaneme jako průsečík jednoho ramene s osou protějšího ramene lichoběžníku $ABCD$.

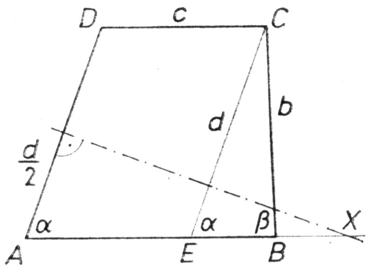
Úloha má řešení, právě když osy obou ramen procházejí vnitřkem protějšího ramene. V tom případě je podle Thaletovy věty (obr. 30) čtyřúhelník S_1VS_2U, resp. UVS_2S_1



Obr. 30

tětivový, odtud pak snadno plyne, že i čtyřúhelníky $ABVU$, $UVCD$ jsou tětivové. Z rovnosti $|UB| = |UC|$ dále plyne, že obě opsané kružnice mají stejný poloměr.

Označme strany lichoběžníku $ABCD$ tak, aby bylo $a > c$, $b \leqq d$. Z kosinové věty pro trojúhelník EBC (obr. 31) dostaneme, že lichoběžník lze rozdělit na požadované čtyřúhelníky, právě když $a < x = |AX|$, kde



Obr. 31

$$\cos\alpha = \frac{d}{2x} = \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2d(a-c)}.$$

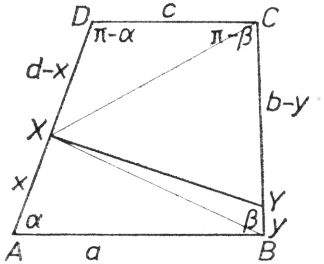
Odtud plyne jiná nutná a postačující podmínka existence hledaného rozdělení

$$ab^2 - cd^2 - a(a-c)^2 > 0.$$

(Vzhledem k předpokladu $a > c$, $b \leqq d$ je nutně $\alpha \leqq \beta < \pi - \alpha$, takže i bod U leží uvnitř AD.)

Jiné řešení (podle O. Šucha, 1. roč. G Velká Okružná, Žilina). Je-li lichoběžník $ABCD$ rozdělen příčkou XY na dva tětivové čtyřúhelníky, musí body X, Y ležet na ramenech AD, BC. Označme a, b, c, d strany lichoběžníku $ABCD$, $x = |AX|$ a $y = |BY|$ (obr. 32).

Pro poloměr r obou opsaných kružnic čtyřúhelníkům $ABYX$, $XYCD$ platí



Obr. 32

$$r = \frac{|BX|}{2 \sin \alpha} = \frac{|CX|}{2 \sin (\pi - \alpha)},$$

takže z kosinové věty pro trojúhelníky ABX, XCD dostaneme

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha}}{2 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 + (d - x)^2 - 2c(d - x) \cos (\pi - \alpha)}}{2 \sin (\pi - \alpha)}.$$

Odtud vyjde velikost

$$x = \frac{c^2 + d^2 - a^2 + 2cd \cos \alpha}{(2c - 2a) \cos \alpha + 2d}.$$

Podobně z trojúhelníků ABY a YCD dostaneme

$$\frac{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay\cos\beta}}{2\sin\beta} =$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 + (b-y)^2 - 2c(b-y)\cos(\pi-\beta)}}{2\sin(\pi-\beta)},$$

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc\cos\beta}{2b + (2c - 2a)\cos\beta}.$$

Tím jsou jednoznačně určeny oba body X, Y. Přitom je vidět, že daný lichoběžník $ABCD$ lze uvedeným způsobem rozdělit, právě když $0 < x < d$, $0 < y < b$.

A - III - 2

Dokažte, že rovnice

$$xyz = p^n(x + y + z),$$

kde $p > 3$ je prvočíslo a n liché přirozené číslo, má v oboru celých kladných čísel aspoň $3(n + 1)$ různých řešení. (Řešení, která se liší jen pořadím, nepovažujeme za různá.)

Řešení. Nejprve ukážeme, že v každém řešení (x, y, z) dané rovnice jedno z čísel x, y, z dělí součet ostatních dvou. Jsou-li $x = p^\alpha x'$, $y = p^\beta y'$, $z = p^\gamma z'$ rozklady čísel x, y, z na součin mocniny prvočísla p a čísla s p nesoudělného, můžeme vzhledem k symetrii dané rovnice předpokládat, že $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq 0$. Pak je

$$xyz' = p^n(p^{\alpha-\gamma}x' + p^{\beta-\gamma}y' + z'),$$

takže z' dělí $p^{\alpha-\gamma}x' + p^{\beta-\gamma}y'$, a tedy i z dělí $x + y$.

Předpokládejme tedy, že z dělí $x + y$, pak je

$$x + y = zq, \; xy = p^n(q + 1), \tag{1}$$

kde q je celé číslo. Pro $q = 1$ odtud dostaneme $n + 1$ různých řešení

$$(2p^i, p^{n-i}, 2p^i + p^{n-i}), \; i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

a pro $q = 2$ dostaneme opět $n + 1$ různých řešení

$$\left(3p^j, p^{n-j}, \frac{1}{2}(3p^j + p^{n-j})\right), \; j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Využijeme tento postup i pro jiná q: položme $x = r$, $y = s(q + 1)$, přitom musí být q dělitelem čísla $x + y = r + s + sq$. Pro $q = r + s$, $z = s + 1$ tak dostaneme dalších $n + 1$ různých řešení

$$(p^k, p^{n-k}(p^k + p^{n-k} + 1), p^{n-k} + 1), \; k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Označme uvedené tři množiny řešení P_1, P_2, P_3. Je $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, neboť pro liché n nemůže být pro $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$2p^i = \frac{1}{2}(3p^j + p^{n-j})$$

neboli

$$4 = 3p^{j-i} + p^{n-j-i}.$$

Podobně $2p^i = p^{n-k} + 1$ může být jen pro $i = 0$, $k = n$, takže je $(2, p^n, p^n + 2) \in \mathsf{P}_1 \cap \mathsf{P}_3$. A $\mathsf{P}_2 \cap \mathsf{P}_3 = \emptyset$, neboť pro žádná j, k není

$$\frac{1}{2}(3p^j + p^{n-j}) = p^{n-k} + 1.$$

Pro liché n jsme tedy našli $3(n + 1) - 1$ řešení dané rovnice. Snadno ale najdeme další řešení. Položíme-li např. v (1) $x = 1$, $y = p^n(q + 1)$, vyjde $x + y = p^nq + p^n + 1$. Stačí tedy vzít $q = \frac{1}{2}(p^n + 1)$ a dostaneme řešení $\left(1, \frac{1}{2}p^n(p^n + 3), p^n + 2\right)$, které neleží v žádné z množin P_1, P_2, P_3. Celkem jsme tak nalezli $3(n + 1)$ různých řešení.

2. řešení (podle J. Hory, 4. roč. G Brno, tř. kpt. Jaroše). Pro $n = 1$ a libovolné prvočíslo $p \geqq 3$ najdeme následujících šest různých řešení dané rovnice

$$(1, p + 1, p(p + 2)), \qquad \left(1, p + 2, \frac{1}{2}p(p + 3)\right),$$

$$\left(1, \frac{1}{2}(3p + 1), 3p\right), \qquad (1, 2p + 1, 2p),$$

$$(2, p + 2, p), \qquad \left(2, \frac{1}{2}(p + 1), \frac{1}{2}p(p + 5)\right).$$

Jsou-li čísla x_0, y_0, z_0 řešením rovnice

$$xyz = p^n(x + y + z),$$

jsou čísla px_0, py_0, pz_0 zřejmě řešením rovnice

$$xyz = p^{n+2}(x + y + z).$$

Protože pro libovolné přirozené $n \geqq 3$ jsou trojice

$$
(2) \quad
\begin{gathered}
(1, p^n + 1, p^n(p^n + 2)),\\
(1, p^n + p, p^{n-1}(p^n + p + 1)),\\
(1, p^n + p^3, p^{n-3}(p^n + p^3 + 1)),\\
\left(1, p^n + 2, \frac{1}{2} p^n(p^n + 3)\right),\\
(1, p^n + p^2, p^{n-2}(p^n + p^2 + 1)),\\
\left(2, \frac{1}{2}(p^n + 1), \frac{1}{2} p^n(p^n + 5)\right)
\end{gathered}
$$

řešením dané rovnice, plyne odtud tvrzení úlohy matematickou indukcí: Jak jsme již ukázali, pro $n = 1$ tvrzení platí. Má-li daná rovnice pro $n = k$ aspoň $3(k + 1)$ různých řešení tvaru (x_i, y_i, z_i), $1 \leqq i \leqq 3(k + 1)$, má rovnice pro $n = k + 2$ kromě šesti řešení (2) i $3(k + 1)$ řešení tvaru (px_i, py_i, pz_i), která jsou vesměs různá od řešení (2), neboť všechny prvky každé takové trojice jsou soudělné s p. Celkem má tedy pro $n = k + 2$ daná rovnice $3(k + 1) + 6 = 3(k + 3)$ různých řešení. Tím je důkaz hotov.

3. řešení (upraveno podle I. Vázsonyiové, 4. roč. G maď., Komárno). Pro $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ položme $x = p^k(y + z)$. Pak bude daná rovnice splněna, právě když

$$(3) \qquad yz = p^{n-k}(p^k + 1).$$

Vidíme, že pro každé k najdeme alespoň $n - k + 1$ různých (neuspořádaných) dvojic (y, z). Máme tedy pro všechna $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a $i \in \{0, 1, \ldots, n - k\}$ celkem

$$\sum_{k=0}^{n} (n - k + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

řešení tvaru $(p^k(p^i + p^{n-i} + p^{n-i-k}), p^i, p^{n-k-i}(p^k + 1))$. Ta jsou pro $p > 2$ vesměs různá, neboť každá taková trojice obsahuje jedinou mocninu prvočísla p kromě případu, kdy $p = 3, k = 0, i = \dfrac{n}{2}$. Dávají-li tedy čísla i, k, resp. i', k' dvě stejné trojice, je nutně $i = i'$, pak je ale i $k = k'$, jak se snadno přesvědčíme.

Našli jsme tak pro libovolné přirozené n a prvočíslo $p \geqq 3$ nejméně $\dfrac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ různých řešení. Protože pro $n \geqq 4$ je

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \geqq 3(n + 1),$$

stačí najít další 3 řešení pro $n = 1$ a další 2 řešení pro $n = 3$ (případně i další 3 řešení pro $n = 2$, abychom dokázali tvrzení úlohy pro každé přirozené číslo n).

Pro $n = 1$ najdeme další tři řešení tvaru

$$\left(1, \frac{1}{2}(3p + 1), 3p\right), \quad \left(2, \frac{1}{2}(p + 1), \frac{1}{2}p(p + 5)\right),$$
$$\left(3, p, \frac{1}{2}(3 + p)\right),$$

pro $n = 2$ další tři řešení tvaru

$$(3p, 2p, p), \quad \left(\frac{1}{2}p(p^2 + p + 4), 2, \frac{1}{2}p(p + 1)\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}p^2(p^2 + 5), 2, \frac{1}{2}(p^2 + 1)\right)$$

a pro $n = 3$ další dvě řešení tvaru

$$\left(\frac{1}{2}p(p^3 + p^2 + 4), 2, \frac{1}{2}p^2(p + 1)\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}p(p^2 + 5p), 2p, \frac{1}{2}p(p + 1)\right).$$

Poznámka. Není těžké se přesvědčit, že tak dostaneme vesměs různá řešení i pro $p = 3$, takže jsme tvrzení dokázali dokonce pro libovolné přirozené číslo n a každé prvočíslo

$p \geqq 3$. Výhodou tohoto řešení je, že obecně dostáváme podstatně lepší odhad pro počet řešení. Mohli bychom ještě využít tu skutečnost, že $p^k + 1$ je sudé, takže v (3) dostaneme další rozklady tvaru

$$2p^i \cdot p^{n-k-i} \frac{p^k + 1}{2},$$

které dají pro $i \in \{1, 2, \ldots, n - k\}$ jistě i další řešení. Konečně spojením s předchozími výsledky se můžete sami pokusit o lepší odhad. S větším počtem řešení bude ale i diskuse toho, zda jsou různá, složitější.

4. řešení (upraveno podle V. Majerecha, 4. roč. G Pardubice). Položme

$$x = p^\alpha \xi, \quad y = p^\beta \eta, \quad z = p^\gamma \zeta,$$

kde α, β, γ jsou celá nezáporná čísla. Pro přirozená čísla ξ, η, ζ tak vyjde rovnice

$$p^{\alpha+\beta+\gamma} \xi\eta\zeta = p^n(p^\alpha \xi + p^\beta \eta + p^\gamma \zeta).$$

Uvažujme α, β, γ taková, že $\alpha + \beta + \gamma = n$. Pro $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$ dostaneme rovnici

$$\xi\eta\zeta = a\xi + b\eta + c\zeta. \tag{4}$$

Nyní každému řešení (ξ, η, ζ) rovnice (4) odpovídá řešení $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$ dané rovnice.

Najdeme tedy nějaká řešení rovnice (4) v přirozených číslech. Vezmeme-li $\xi = 1$, vyjde

$$\zeta = \frac{a + b\eta}{\eta - c}.$$

Odtud je vidět, že pro $\eta = c + 1$ dostaneme celočíselné řešení $(\xi, \eta, \zeta) = (1, c + 1, a + bc + b)$. Tomu odpovídá řešení $(a, b(c + 1), c(a + bc + b))$ dané rovnice.

Dále ukážeme, že pro každou uspořádanou trojici (α, β, γ) takovou, že $\alpha + \beta + \gamma = n$, dostaneme jiné řešení původní rovnice. Z čísel a, $b(c + 1)$, $c(a + bc + b)$ je jedině a mocninou prvočísla p, přičemž číslo

$$\begin{aligned} a + bc + b &= p^\alpha + p^{\beta+\gamma} + p^\beta = \\ &= p^\alpha(1 + p^{\beta-\alpha+\gamma} + p^{\beta-\alpha}), \quad \alpha \leqq \beta, \\ &= p^\beta(p^{\alpha-\beta} + p^\gamma + 1), \quad \alpha \geqq \beta, \end{aligned}$$

může být rovněž mocninou prvočísla p jen pro $p = 3$, $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$ (v tom případě je $n = 2\alpha$ sudé). Jsou-li tedy (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ dvě uspořádané trojice, pro něž $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = n$, dostaneme stejné řešení dané rovnice, jen když $a = a'$ (tj. $\alpha = \alpha'$) a navíc $b(c + 1) = b'(c' + 1)$, tedy $b = b'$, $c = c'$, anebo

$$\begin{aligned} b(c + 1) &= c'(a' + b'c' + b'), \\ b'(c' + 1) &= c(a + bc + b). \end{aligned} \tag{5}$$

V posledním případě by ale muselo být $b = c'$, $b' = c$, takže

$$c'(a' + b'c' + b') = b(a + bc + c) \geqq b(c + 2) > b(c + 1).$$

To odporuje předchozí rovnosti (5).

Zbývá tedy zjistit, kolik existuje uspořádaných rozkladů čísla na tři nezáporné sčítance. To je známá kombinatorická úloha ekvivalentní tomu, kolika způsoby lze rozdělit $n + 3$ předmětů v řadě na tři neprázdné skupiny (ke každému sčítanci přidáváme 1, abychom dostali nenulové číslo). To jde právě $\binom{n+2}{2}$ způsoby (vložením dvou přepážek do $n + 2$ mezer).

Dokázali jsme tudíž, že daná rovnice má alespoň $\binom{n+2}{2}$ řešení. (Pro n sudé a $p = 3$ bez dalšího rozboru dostaneme ovšem číslo o 1 menší.) Protože $\binom{n+2}{2} \geqq 3(n + 1)$ pro $n \geqq 4$, plyne odtud tvrzení úlohy pro všechna lichá $n \geqq 5$ a prvočísla $p \geqq 3$. Zbývající případy $n = 1$ a $n = 3$ je třeba opět vyšetřit zvlášť (jak jsme již učinili v předchozím řešení).

I v tomto řešení lze bez velkých obtíží získaný odhad zlepšit, všimneme-li si, že $a + bc$ je pro liché p sudé číslo, takže rovnice (4) má také řešení $\xi = 1$, $\eta = c + 2$, $\zeta = \dfrac{a + bc + 2b}{2}$. Analogicky zjistíme, že kromě případu $p^n = 3$ dostaneme dalších $\binom{n+2}{2}$ řešení původní rovnice. Přitom $2\binom{n+2}{2} \geqq 3(n + 1)$ pro všechna přirozená n.

A - III - 3

Zobrazení f množiny všech kladných reálných čísel do sebe splňuje pro každá dvě kladná čísla x, y rovnost

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy.$$

Dokažte, že $f(x) = x$ pro každé kladné x.

Řešení. Pro $x = y$ z dané rovnosti vyjde

$$f(xf(x)) = x^2, \tag{1}$$

což pro $x = 1$ dává $f(f(1)) = 1$, a pro $x = f(1)$ pak dostaneme $f(1)^2 = f(f(1)) = 1$, takže $f(1) = 1$. Pro $y = 1$ zase z původního vztahu plyne rovnost

$$f(x) + f(f(x)) = 2x.$$

Odtud je vidět, že zobrazení f je prosté.

Položme nyní pro libovolné r kladné $x = rf(r), y = \dfrac{1}{r}$, dostaneme tak rovnost

$$f\left(rf(r)f\left(\frac{1}{r}\right)\right) + f\left(\frac{1}{r}f(rf(r))\right) = 2f(r),$$

takže podle (1) je $f(r) = f\left(rf(r)f\left(\dfrac{1}{r}\right)\right)$. Protože f je prosté, je pro každé r kladné

$$(2) \qquad f(r)f\left(\frac{1}{r}\right) = 1.$$

Podobně pro $y = \dfrac{1}{x}$ dostaneme dosazením do dané rovnosti

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = 2,$$

což podle (2) můžeme psát jako

$$f\left(\frac{x}{f(x)}\right) + f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 2,$$

přičemž podle (2) pro libovolné x kladné současně platí

$$f\left(\frac{x}{f(x)}\right) f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1.$$

Soustava rovnic $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 1$ má jediné řešení $\alpha = \beta = 1$, plyne tedy odtud $f\left(\dfrac{1}{x}f(x)\right) = 1$, tj. $f(x) = x$ pro každé kladné x.

2. řešení (podle R. Sotáka, 4. roč. G Košice, Šmeralova ul.). Stejně jako v předchozím řešení odvodíme vztah (1), z kterého pro $x = 1$ plyne $f(1) = 1$.

Pro libovolné z kladné označme $f(z) = a$, $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = b$. Z rovnosti (1) pak plyne

$$f(az) = z^2, \quad f\left(\frac{b}{z}\right) = \frac{1}{z^2}.$$

Dosadíme-li nyní do původní rovnosti $x = az$, $y = \frac{b}{z}$, vyjde

$$f\left(\frac{a}{z}\right) + f(bz) = 2ab$$

a pro $x = \frac{1}{z}$, $y = z$ zase dostaneme

$$f\left(\frac{a}{z}\right) + f(bz) = 2. \tag{3}$$

Porovnáním obou získaných rovností vidíme, že $ab = 1$, takže jednak pro každé kladné x platí

$$f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

a speciálně je tedy

$$f\left(\frac{a}{z}\right) f\left(\frac{z}{a}\right) = 1, \tag{4}$$

jednak můžeme rovnost (3) přepsat jako

$$f\left(\frac{a}{z}\right) + f\left(\frac{z}{a}\right) = 2. \tag{5}$$

Z obou rovností (4), (5) plyne, že je $f\left(\frac{a}{z}\right) = f\left(\frac{z}{a}\right) = 1$

a pro $x = \frac{z}{a}$, $y = 1$ z původní rovnosti dostáváme, že

$$\frac{2z}{a} = f\left(\frac{z}{a}\right) + f\left(f\left(\frac{z}{a}\right)\right) = 2,$$

takže $a = z$. Pro libovolné z kladné je tedy $f(z) = z$.

3. řešení (podle J. Sochora, 4. roč. G W. Piecka, Praha). Označíme-li $f(1) = a$, plyne z daného vztahu pro $x = y = 1$ rovnost $f(a) = 1$ a pro $x = y = a$ dostaneme $f(a) = a^2$, tj. $a^2 = 1$. Protože $f(1) > 0$, je $f(1) = a = 1$.

Pro $y = 1$ a pro libovolné kladné x z původního vztahu dostaneme rovnost

$$f(x) + f(f(x)) = 2x, \tag{6}$$

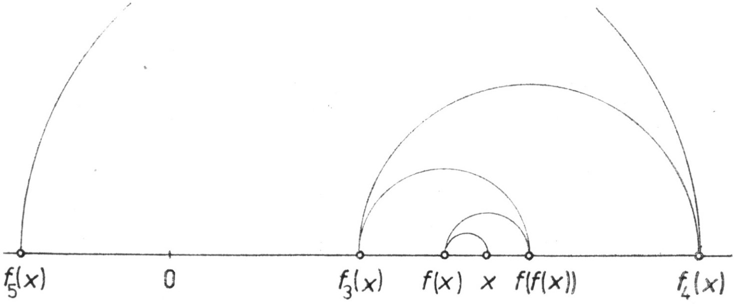
tj. x je aritmetickým průměrem čísel $f(x), f(f(x))$,

$$x = \frac{f(x) + f(f(x))}{2}. \tag{7}$$

Je tedy také

$$f(x) = \frac{f(f(x)) + f(f(f(x)))}{2}, \quad f(f(x)) = \ldots, \ldots .$$

Položme $f_0(x) = x$ a $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ pro $n \geqq 0$ celé. Z názoru je zřejmé (obr. 33), že pro $f(x) \neq x$ a $k \to \infty$ vyjde



Obr. 33

$$f_{2k+1}(x) \to -\infty \text{ pro } f(x) < x,$$

$$f_{2k}(x) \to -\infty \text{ pro } f(x) > x.$$

To odporuje tomu, že oborem hodnot funkce f je podmnožina kladných reálných čísel, musí tedy být $f(x) = x$ pro každé x.

Dokažme naše heuristické tvrzení podrobněji: Z rovnosti (7) plyne matematickou indukcí pro každé $k \geqq 0$ rovnost

$$f_k(x) = \frac{f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x)}{2},$$

což přepíšeme jako

$$f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x) = 2(f_k(x) - f_{k+1}(x)).$$

Matematickou indukcí odtud dostaneme vztah

$$f_{k+2}(x) - f_{k+1}(x) = (-2)^{k+1}(f(x) - x),$$

takže je také

$$f_{k+2}(x) - f_k(x) = f_k(x) - f_{k+1}(x) = (-2)^k(x - f(x)).$$

Postupně tak dostaneme rovnosti

$$f_{2k}(x) = 2^{2k-2}(x - f(x)) + f_{2k-2}(x) = \ldots =$$

$$= x + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2i}(x - f(x)) = x + \frac{4^k - 1}{3}(x - f(x)),$$

$$f_{2k+1}(x) = -2^{2k-1}(x - f(x)) + f_{2k-1}(x) = \ldots =$$

$$= f(x) - \sum_{i=0}^{k-1} 2^{2i+1}(x - f(x)) =$$

$$= x - \frac{2.4^k + 1}{3}(x - f(x)).$$

Je vidět, že pro $x < f(x)$ je $f_{2k}(x) < 0$ pro dost velké k a pro $x > f(x)$ zase $f_{2k+1}(x) < 0$ pro dostatečně velké k.

4. řešení (podle P. Čížka, 2. roč. G W. Piecka, Praha). Předpokládejme, že pro nějaké x kladné je $f(x) \neq x$ a uvažujme kladnou posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanou rekurentně

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 = x.$$

Stejně jako v předchozím řešení odvodíme rovnost (6), ze které nyní pro $x = a_k$ plyne

$$f(a_k) + f(a_{k+1}) = 2a_k,$$

neboli

$$a_{k+1} + a_{k+2} = 2a_k.$$

Protože příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, vyhovují uvedené diferenční rovnici právě všechny posloupnosti tvaru

$$a_n = \alpha + \beta(-2)^n.$$

Z počátečních podmínek $a_0 = x$, $a_1 = f(x)$ vyjde $\alpha + \beta = x$, $\alpha - 2\beta = f(x)$, takže

$$\alpha = \frac{2x + f(x)}{3} > 0 \quad \text{a} \quad \beta = \frac{x - f(x)}{3} \neq 0.$$

Pro $\beta > 0$ vyjde ovšem pro lichá $n \to \infty$

$$a_n = \alpha - 2^n\beta = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2^n\right) \to -\infty,$$

pro $\beta < 0$ zase pro sudá $n \to \infty$

$$a_n = \alpha + 2^n\beta = -\beta\left(-\frac{\alpha}{\beta} - 2^n\right) \to -\infty.$$

To odporuje tomu, že posloupnost (a_n) je kladná.

Poznámka. Obě předchozí řešení podstatně využívají toho, že oborem hodnot funkce f je množina kladných reálných čísel. Bez tohoto předpokladu bude mít daná funkcionální rovnice dvě řešení $f(x) = x$ a $f(x) = -x$.

A - III - 4

Je dáno přirozené číslo $n \geqq 3$ a přirozená čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 2x_1.$$

Je-li p prvočíslo a r přirozené číslo takové, že p^r dělí součin $x_1 x_2 \ldots x_n$, pak platí

$$(2) \qquad \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{p^r} > n!.$$

Dokažte.

Řešení. Označme $a_p(x)$ tu část rozkladu čísla x na prvočinitele, která neobsahuje prvočíslo p. Zřejmě $a_p(xy) = a_p(x)a_p(y)$. Je-li p^r dělitelem čísla x, pak ovšem $a_p(x) \leqq \dfrac{x}{p^r}$.

Kdyby nyní existovala $i < j$ tak, že $a_p(x_i) = a_p(x_j)$, pak by bylo $x_j \geqq px_i \geqq 2x_i$, tedy $x_n \geqq 2x_1$, což odporuje předpokladu. Je tudíž $a_p(x_i) \neq a_p(x_j)$ pro $i \neq j$ a platí $a_p(x_1 x_2 \ldots x_n) \geqq n!$. Rovnost ale může nastat jen tehdy, jsou-li čísla $a_p(x_i)$ permutací čísel $1, 2, \ldots, n$, a navíc musí být $p > n$ (p nedělí žádné $a_p(x_i)$, nemůže tedy dělit ani $n!$), takže $p \geqq 5$.

Je-li $a_p(x_i) = 1$, $a_p(x_j) = 2$, tj. $x_i = p^s$, $x_j = 2p^t$, pak je buď $s \leqq t$ čili $x_n \geqq 2p^t \geqq 2p^s \geqq 2x_1$, nebo $s > t$ a $x_n \geqq \geqq p^s \geqq p^{t+1} > 4p^t \geqq 2x_1$. Oba tyto případy odporují předpokladu úlohy a rovnost proto nemůže nastat. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení. Z nerovnosti (1) především plyne $2x_1 > x_n \geqq \geqq x_{n-1} + 1 \geqq \ldots \geqq x_1 + n - 1$, tedy $x_1 \geqq n$.

Bude stačit, když požadovanou nerovnost dokážeme jen pro nesoudělná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geqq 3$) taková, že $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n/p^r$ je celé číslo (pro $r \leqq 0$ platí tvrzení tím spíš). Je-li totiž $d = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ největší společný dělitel čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $d = p^\alpha d_0$, kde $p \nmid d_0$, pak pro nesoudělná čísla $x'_i = x_i/d$ rovněž platí $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_n < 2x'_1$ a je

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{p^r} = \frac{p^{n\alpha} d_0^n x'_1 x'_2 \ldots x'_n}{p^r} = d_0^n \frac{x'_1 x'_2 \ldots x'_n}{p^{r-n\alpha}},$$

takže pro $x'_1 x'_2 \ldots x'_n/p^{r-n\alpha} > n!$ je tím spíš $x_1 x_2 \ldots x_n/p^r > > n!$.

Pro nesoudělná čísla dokážeme tvrzení úlohy matematickou indukcí. Pro $n = 2$ a $(x_1, x_2) = 1$ zřejmě platí

$$\frac{x_1 x_2}{p^r} \geqq 2! = 2,$$

protože součin $x_1 x_2$ obsahuje aspoň dva prvočinitele (je $x_2 > > x_1 \geqq 2$).

Pro $n = 3$ je buď $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5 < 2x_1 = 6$ a

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{p^r} \geqq 12 > 3!,$$

anebo $x_1 > 3$ a

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{p^r} = x_i \frac{x_j x_k}{p^r} \geqq 2!x_i \geqq 2x_1 > 3!.$$

Předpokládejme, že tvrzení úlohy platí pro $n - 1 \geqq 3$, a uvažujme nesoudělná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňující naše předpoklady. Protože některé x_j, $1 \leqq j \leqq n$, je nesoudělné s p, je podle indukčního předpokladu

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{p^r} = x_j \frac{x_1 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_n}{p^r} > x_1(n-1)! \geqq n!,$$

neboť čísla $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ rovněž splňují předpoklady úlohy. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Snadno zjistíme, že pro $n = 2$ nastane rovnost, právě když $p = 3$, $x_1 = 2.3^s$, $x_2 = 3^{s+1}$, $s \geqq 0$, $r = 2s + 1$.

A - III - 5

V tabulce 3×11 je na začátku prvního řádku a na konci druhého řádku napsána nula. Určete nejmenší číslo α, pro které je možno tabulku vyplnit nezápornými reálnými čísly tak, aby současně platilo:

a) součet čísel v každém sloupci je 1,

b) součet každých dvou sousedních čísel v 1. i 2. řádku je nejvýše 1,

c) součet každých dvou sousedních čísel ve 3. řádku je nejvýše α.

Řešení. Uvažujme tabulku $3\times n$, kde n je liché. Z podmínek úlohy plyne, že součet čísel jak v 1., tak i v 2. řádku je nejvýše $\frac{n-1}{2}$. Jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ čísla ve 3. řádku tabulky, dostaneme ze sloupcových součtů nerovnost

$$n \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i + n - 1.$$

Pro součet čísel ve 3. řádku navíc platí

$$2\sum_{i=1}^{n} c_i = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i + c_{i+1}) + c_n \leqq 2\alpha + (n-1)\alpha =$$

$$= (n+1)\alpha,$$

takže dohromady je

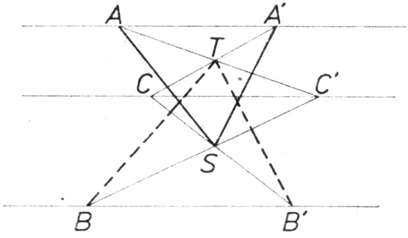
$$1 \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i \leqq \frac{(n+1)\alpha}{2}, \quad \text{neboli} \quad \alpha \geqq \frac{2}{n+1}.$$

Snadno se přesvědčíme, že následující tabulka 3×11 pro $\alpha = \frac{1}{6}$ vyhovuje podmínkám úlohy:

0	$1-\alpha$	α	$1-2\alpha$	2α	$1-3\alpha$	3α	$1-4\alpha$	4α	$1-5\alpha$	5α
$1-\alpha$	α	$1-2\alpha$	2α	$1-3\alpha$	3α	$1-4\alpha$	4α	$1-5\alpha$	5α	0
α	0	α	0	α	0	α	0	α	0	α

Jsou dány tři rovnoběžné přímky AA', BB', CC', které neleží v jedné rovině. Je-li U průsečík rovin $A'BC$, $AB'C$, ABC' a V průsečík rovin $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, pak je přímka UV rovnoběžná s AA'. Dokažte.

Řešení. Označme S průsečík přímek $B'C$, BC' (obr. 34).



Obr. 34

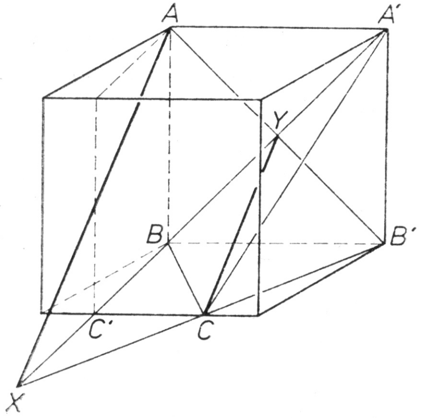
Potom je $U \in AS = ABC' \cap AB'C$ a $V \in A'S = A'BC' \cap \cap A'B'C$. Odtud plyne, že přímka UV leží v rovině $AA'S$, která je rovnoběžná s přímkou BB'. To ovšem platí, i když jsou přímky $B'C$, BC' rovnoběžné: za bod S pak vezmeme takový bod, pro který $AS \parallel B'C \parallel BC'$.

Podobně zjistíme, že přímka UV leží i v rovině $BB'T \parallel AA'$, kde T je průsečík přímek $A'C$, AC', resp. bod, pro který $BT \parallel A'C \parallel AC'$. Průsečnice rovin $AA'S$, $BB'T$ je přímka UV, a protože AA' je rovnoběžná s oběma rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.

Jiné řešení (podle P. Kolníka, 4. roč. G Nové Mesto nad Váhom). Označme S_A, S_B, S_C středy úseček AA', BB', CC'.

Zavedeme kosoúhlou soustavu souřadnic s počátkem v bodě S_A a s osami $x = AA'$, $y = S_AS_B$, $z = S_AS_C$. V této souřadné soustavě jsou dvojice bodů A, A'; B, B'; C, C' symetrické podle roviny $S_AS_BS_C$. Proto i dvojice rovin $A'BC$, $AB'C'$; $AB'C$, $A'BC'$ a ABC', $A'B'C$ jsou symetrické podle roviny $S_AS_BS_C$, a tedy i průsečík U rovin $A'BC$, $AB'C$, ABC' a průsečík V rovin $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ jsou symetrické podle roviny $S_AS_BS_C$. To znamená, že přímka UV má směr osy x, tj. $UV \parallel AA'$.

Poznámka. Obecně uvedené trojice rovin nemusí mít společný bod, jak je vidět na obr. 35, kde $AX = ABC' \cap AB'C$, $CY = A'BC \cap AB'C$ a $AX \parallel CY$.



Obr. 35