36. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie C

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Pavel Töpfer (editor): 36. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87. 28. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. pp. 36–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404837

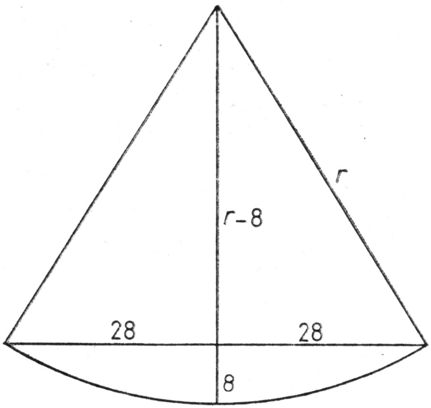
Kategorie C

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Na nitěném závěsu se kýve závaží. Šířka rozkmitu je 56 cm, výškový rozdíl nejnižší a nejvyšší polohy závaží je 8 cm. Vypočtěte délku závěsu.

Řešení. Závaží se pohybuje po kružnici o poloměru r,



Obr. 1

který se rovná délce závěsu. Je to velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku (obr. 1), jehož jedna odvěsna se rovná polovině rozkmitu a druhá odvěsna má délku $r - 8$. Podle Pythagorovy věty je tedy $r^2 = (r - 8)^2 + 28^2$, odkud $r = 53$ cm.

C - I - 2

Určete čísla a, b, c tak, aby byla řešeními rovnice

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

Řešení. Čísla a, b, c jsou právě tehdy řešeními dané rovnice, platí-li současně vztahy

$$\begin{aligned} a^3 - a^3 + ab - c &= 0 \\ b^3 - ab^2 + b^2 - c &= 0 \\ c^3 - ac^2 + bc - c &= 0. \end{aligned}$$

Musí tedy být $c = ab$ a současně $b(b - a)(b + 1) = 0$ a $ab(b - 1)(a^2b + 1) = 0$. Je tedy nutně $b = 0$ nebo $b = a$ nebo $b = -1$. Je-li $b = 0$, je $c = 0$, a libovolné. Je-li $b = -1$, musí být $c = -a$ a současně $a(a^2 - 1) = 0$, takže $a = c = 0$, $b = -1$, nebo $a = 1$, $b = c = -1$, nebo $a = b = -1$, $c = 1$. Je-li $b = a$, musí být $a^2(a - 1)(a^3 + 1) = 0$ a $c = a^2$, takže je buď $a = b = c = 0$, nebo $a = b = c = 1$, nebo $a = b = -1$, $c = 1$. Zkouškou se můžeme ještě přesvědčit, že všechny obdržené výsledky vyhovují požadavku úlohy. Přehledně jsou uvedeny v tabulce.

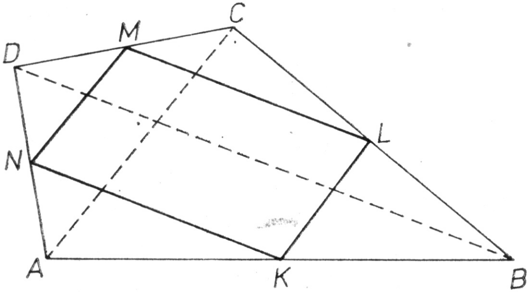
a	b	c	Rovnice	Kořeny
libovolné	0	0	$x^2(x - a) = 0$	0, 0, a
0	-1	0	$x(x - 1)(x + 1) = 0$	0, 1, -1
1	-1	-1	$(x + 1)(x - 1)^2 = 0$	-1, 1, 1
-1	-1	1	$(x + 1)^2(x - 1) = 0$	-1, -1, 1
1	1	1	$(x - 1)(x^2 + 1) = 0$	1

Text úlohy nepožaduje, aby se každý kořen rovnal některému z čísel a, b, c, například v případě $a = c = 0$, $b = -1$ má rovnice kromě 0 a -1 ještě kořen $+1$. V případě $a = 1$, $b = c = -1$ má sice příslušná rovnice kořeny 1 a -1, ale číslo 1 je tzv. kořenem dvojnásobným, zatímco mezi čísly a, b, c se vyskytuje číslo 1 jen jednou. Pokud by se v úloze požadovalo, aby každé z čísel a, b, c bylo tolikanásobným kořenem dané rovnice, kolikrát se vyskytuje mezi čísly a, b, c, vyhovovala by jen řešení v prvním a čtvrtém řádku uvedené tabulky. Dostali bychom je také jako ty trojice (a, b, c), pro které se rovnají mnohočleny $x^3 - ax^2 + bx - c$ a $(x - a)(x - b)(x - c)$, tj. ty trojice, pro které platí současně rovnosti $a + b + c = a$, $ab + bc + ca = b$, $abc = c$.

C - I - 3

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, středy jeho stran AB, BC, CD, DA označíme po řadě K, L, M, N. Dokažte, že přímky AC, BD jsou navzájem kolmé právě tehdy, když je $|KM| = |NL|$. Dokažte, že přímky KM, NL jsou navzájem kolmé právě tehdy, když je $|AC| = |BD|$.

Řešení. Úsečka KL je střední příčkou v trojúhelníku ABC (obr. 2), úsečka MN je střední příčkou v trojúhelníku ADC.



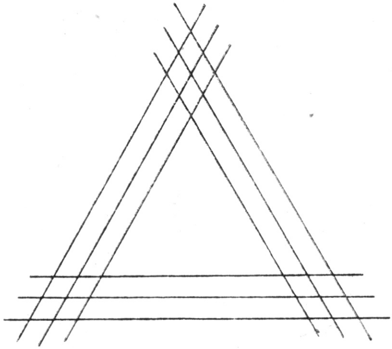
Obr. 2

Je $|KL| = |MN| = \frac{1}{2}|AC|$, $KL \| MN \| AC$. Podobně je

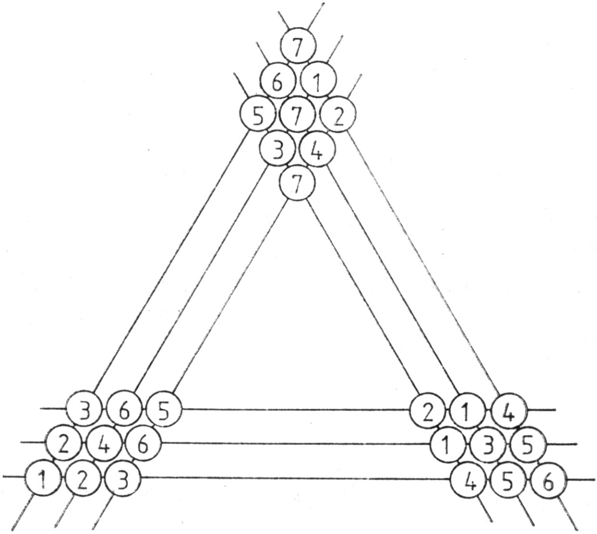
$|NK| = |ML| = \frac{1}{2}|BD|$, $NK \| ML \| BD$. Úhlopříčky KM a LN jsou v rovnoběžníku $KLMN$ právě tehdy stejně dlouhé, když je to pravoúhelník, tedy když je $KL \perp NK$, tj. $AC \perp BD$. Úhlopříčky KM, NL rovnoběžníku $KLMN$ jsou právě tehdy navzájem kolmé, když je rovnoběžník kosočtverec, tj. $|KL| = |NK|$, tedy $|AC| = |BD|$.

C - I - 4

Jakým nejmenším počtem barev je možno obarvit průsečíky devíti přímek na obr. 3a tak, aby na žádné této přímce neležely dva body téže barvy?



Obr. 3a



Obr. 3b

Řešení. Každá z daných přímek protíná šest dalších, je tedy třeba nejméně šesti barev. Ukážeme však, že šest barev nestačí. Při šesti barvách by muselo být jednou barvou obarveno aspoň pět z uvažovaných 27 bodů. Ale každý bod obarvený touto barvou je průsečíkem dvou daných přímek, na kterých už nemůže ležet další bod téže barvy. Takže pět bodů téže barvy by muselo ležet na deseti přímkách, máme však k dispozici jen devět přímek. Sedm barev však už stačí, důkazem je rozložení barev znázorněné na obr. 3b (různé barvy jsou označeny různými číslicemi). Každá barva musí být zastoupena čtyřikrát, pouze jedna třikrát (je označena číslicí 7).

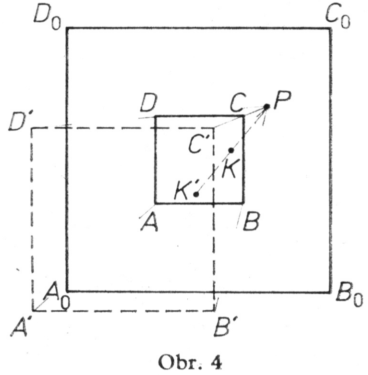
C - I - 5

Nechť m, n jsou libovolná přirozená čísla a platí, že číslo 5 nedělí číslo $mn(m + n)$. Potom číslo 5^2 nedělí číslo $(m + n)^5 - m^5 - n^5$. Dokažte.

Řešení. Podle předpokladu nedělí číslo 5 žádné z čísel m, n, $m + n$. Je $(m + n)^5 - m^5 - n^5 = 5mn(m + n)(m^2 + mn + n^2)$. Máme tedy dokázat, že číslo 5 nedělí součet $m^2 + mn + n^2$. Každé z čísel m, n dává při dělení pěti zbytek 1, 2, 3 nebo 4. Dává-li jedno z nich zbytek 1, nemůže dát druhé zbytek 4, protože by pak byl jejich součet dělitelný pěti. Podobně je to se zbytky 2 a 3. Mohou být tedy zbytky při dělení čísel m, n číslem 5 pouze tyto dvojice: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4). V prvním případě je $m = 5r + 1$, $n = 5s + 1$, r, s jsou přirozená čísla. Pak je $m^2 + mn + n^2 = 5(5r^2 + 5s^2 + 5rs + 3r + 3s) + 3$. Vidíme, že toto číslo není dělitelné pěti, jeho zbytek při dělení pěti je 3. Podobně se to dokáže ve zbývajících sedmi případech. Důvtipnější, i když trochu vykonstruovaný je tento postup: Číslo $m^2 + mn + n^2$ je právě tehdy dělitelné pěti, když je dělitelný pěti jeho dvojnásobek $2(m^2 + mn + n^2) = m^2 + (m + n)^2 + n^2$. Žádné z čísel $m, m + n, n$ není dělitelné pěti, každé dává při dělení pěti zbytek 1, 2, 3 nebo 4, proto jeho druhá mocnina dává při dělení pěti vždy zbytek 1 nebo 4. Pak však není nikdy součet tří takových druhých mocnin dělitelný pěti.

C - I - 6

Je dán čtverec $ABCD$. Zvolme libovolně v rovině čtverce bod P a označme A', B', C', D' obrazy bodu P v středových souměrnostech se středy v bodech A, B, C, D. Dokažte, že $A'B'C'D'$ je čtverec. Určete množinu všech bodů P, pro které je průnik čtverců $ABCD$, $A'B'C'D'$ neprázdný.



Obr. 4

Řešení. Úsečka AB je střední příčkou v trojúhelníku $A'B'P$ (obr. 4) rovnoběžnou s $A'B'$, proto je $A'B' \parallel AB$, $|A'B'| = 2|AB|$. Obdobně to platí pro úsečky $B'C'$, $C'D'$ a $D'A'$. Je tedy $A'B'C'D'$čtverec, je to obraz čtverce $ABCD$ v stejnolehlosti se středem v bodě P a koeficientem 2. Předpokládejme, že některý bod K' čtverce $A'B'C'D'$leží současně ve čtverci $ABCD$. Pak leží ve čtverci $ABCD$ také střed K úsečky $K'P$, je tedy bod P bodem souměrně sdruženým k bodu K' podle bodu K, přičemž oba body K, K' leží v čtverci $ABCD$. Má-li obráceně bod P tuto vlastnost, tj. pro některý bod K' čtverce $ABCD$ leží střed K úsečky $K'P$ také ve čtverci $ABCD$, mají čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$ neprázdný průnik, do průniku patří bod K'. Body P popsané vlastnosti vytvoří čtverec $A_0B_0C_0D_0$, který má s čtvercem $ABCD$ společný střed a rovnoběžné strany, přičemž $|A_0B_0| = 3|AB|$.

ÚLOHY ŠKOLNÍ ČÁSTI I. KOLA

C - S - 1

Určete všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $2^n + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Nechť pro přirozené číslo n platí $2^n + 1 = m^2$, kde m je také přirozené číslo. Pak je $2^n = (m - 1)(m + 1)$. Jsou tedy čísla $m - 1$, $m + 1$ mocninou čísla 2 s celým nezáporným exponentem. Vzhledem k tomu, že se jejich rozdíl rovná dvěma, je nutně $m - 1 = 2$, $m + 1 = 4$. Proto je $n = 3$ jediné řešení úlohy.

C - S - 2

Prvky dané množiny M jsou nenulová celá čísla. Množina M obsahuje aspoň jedno sudé, aspoň jedno liché, aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné číslo. Dokažte, že v množině M existují dvě čísla, jejichž součet je číslo liché a součin je číslo záporné.

Poznámka. Čísla ..., -4, -2, 0, 2, 4, ... jsou sudá, čísla ..., -3, -1, 1, 3, ... jsou lichá.

Řešení. Nechť $a \in M$, $b \in M$, číslo a nechť je sudé, číslo b liché. Mají-li čísla a, b opačná znaménka, splňují podmínky úlohy. Mají-li čísla a, b stejné znaménko, existuje v M číslo c opačného znaménka. Je-li číslo c sudé, splňují podmínku úlohy čísla b, c, v opačném případě můžeme vzít dvojici a, c.

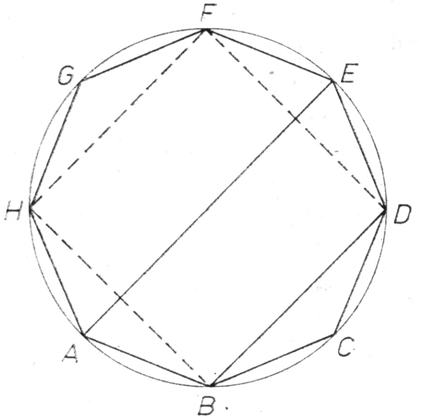
C - S - 3a

Do kružnice o poloměru $r = 10$ je vepsán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABDE$.

Řešení. Je $|AE| = 20$ (obr. 5), $|BD|$ je délka a strany čtverce vepsaného kružnici o poloměru $r = 10$, tedy $a = 10\sqrt{2}$. Výška lichoběžníku se rovná polovině strany čtverce $BDFH$, takže hledaný obsah je $50(\sqrt{2} + 1)$.

C - S - 3b

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky, pro které je délka jedné odvěsny aritmetickým průměrem délek druhé odvěsny a přepony.



Obr. 5

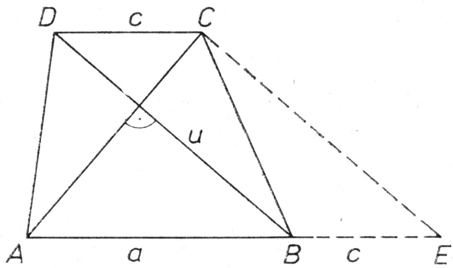
Řešení. Označíme-li c délku přepony a a, b délky odvěsen, má platit $2a = b + c$ a současně $a^2 + b^2 = c^2$. Vyloučením c dostaneme $3a^2 - 4ab = 0$. Jelikož $a \neq 0$, je $a = \frac{4}{3}b$, $c = \frac{5}{3}b$. Úloze vyhovují právě všechny trojúhelníky o stranách $3d$, $4d$, $5d$, tedy trojúhelníky podobné trojúhelníku o stranách 3, 4, 5.

ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Určete obsah lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD, jsou-li dány délky stran $a = |AB|$, $c = |CD|$ a délka úhlopříčky $u = |BD|$, přičemž víte, že úhlopříčky AC, BD jsou navzájem kolmé.

Řešení. Bodem C (obr. 6) veďme přímku rovnoběžnou s přímkou BD, její průsečík s přímkou AB označíme E. Trojúhelníky CDA, BEC mají stejné obsahy, neboť $|CD| = |BE|$ a příslušné výšky se rovnají výšce lichoběžníku. Proto se obsah S lichoběžníku $ABCD$ rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníku ACE, který má přeponu $a + c$, jedna jeho odvěsna má délku u. Je tedy nutně $a + c > u$ a $S = \dfrac{u}{2}\sqrt{(a + c)^2 - u^2}$.



Obr. 6

C - II - 2

Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n, pro které je číslo $(m + n)^5 - m^5 - n^5$ dělitelné číslem 5^6.

Řešení. Podle úlohy C - I - 5 se výraz $s = (m + n)^5 - m^5 - n^5$ rovná $5mn(m + n)\,r$, $r = m^2 - mn + n^2$, a pokud číslo 5 nedělí součin $mn(m + n)$, nedělí číslo 5 číslo r

a tedy není číslo s dělitelné číslem 5^6. Jsou-li čísla m, n obě dělitelná pěti, je číslo s zřejmě dělitelné číslem 5^6. Je-li právě jedno z čísel m, n dělitelné pěti, není pěti dělitelné žádné z čísel $m + n$, r a číslo s je dělitelné číslem 5^6 právě tehdy, když jedno z čísel m, n je dělitelné číslem 5^5. Není-li žádné z čísel m, n dělitelné pěti, ale jejich součet ano, dávají při dělení pěti zbytky 1 a 4 nebo 2 a 3. V žádném z těchto případů není číslo r násobkem pěti. Aby číslo s bylo dělitelné číslem 5^6, je nutné a stačí, aby byl součet $m + n$ násobkem čísla 5^5. Takže číslo s je dělitelné číslem 5^6, jestliže jsou čísla m i n dělitelná pěti, nebo je jedno z nich dělitelné číslem 5^5, nebo je jejich součet dělitelný číslem 5^5, v žádném dalším případně není s dělitelné číslem 5^6.

C - II - 3a

Zjistěte, kolik řešení má soustava rovnic

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_6 + x_7 + x_8,$$

$$|x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7\, x_8| = 1$$

v oboru celých čísel.

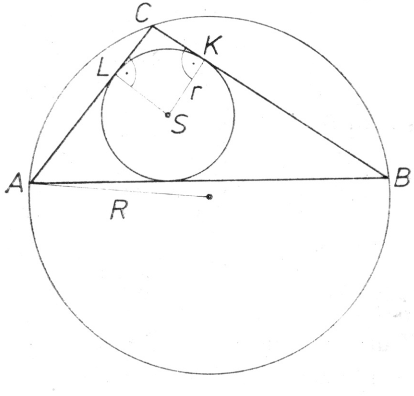
Řešení. Z druhé rovnice plyne, že každé z čísel x_i se může rovnat pouze 1 nebo -1. Je-li $x_6 = x_7 = x_8 = 1$, musí se jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_5$ rovnat -1, ostatní $+1$, to je 5 možností. Jestliže se jedno z čísel x_6, x_7, x_8 rovná -1 a zbývající dvě se rovnají $+1$ (to jsou tři možnosti), musí se dvě z čísel $x_1, \ldots, x_5$ rovnat -1 a tři $+1$, to je $\binom{5}{2} = 10$

možností, celkem tedy $3.10 = 30$ možností. Obdobně je tomu v případě $x_6 + x_7 + x_8 = -1$ (30 možností) a v případě $x_6 = x_7 = x_8 = -1$ (5 možností). Celkem má soustava 70 řešení.

C - II - 3b

V trojúhelníku ABC označme R poloměr opsané a r poloměr vepsané kružnice. Dokažte, že $|BC| + |AC| - |AB| = 2r$ právě tehdy, když platí $|AB| = 2R$.

Řešení. Označme S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC (obr. 7) a K, L její body dotyku se stranami BC, AC.



Obr. 7

Je pak $|BC| + |AC| - |AB| = 2|CK| = 2|CL|$. Je tedy $|BC| + |AC| - |AB| = 2r$ právě tehdy, když je $|CK| = r$, což znamená, že $CLSK$ je čtverec a trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Je-li trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, splývá střed přepony AB se středem kružnice trojúhelníku opsané a je tedy $|AB| = 2R$. Je-li obráceně $|AB| = 2R$, je úsečka AB průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC, který je pak podle Thaletovy věty pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Tím je celé tvrzení úlohy dokázané.