35. ročník matematické olympiády na středních školách

Korespondenční seminář ÚV MO

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Jozef Hvorecký (editor); Branislav Rovan (editor): 35. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1985/86. 27. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. pp. 181–188.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404817

Korespondenční seminář ÚV MO

Korespondenční seminář ÚV MO je jednou z forem péče o talentované žáky, zvláště pak o ty, kteří nemají možnost navštěvovat speciální školy se zaměřením na matematiku a pracovat v tamních seminářích. Tak až dosud nebyli přijímáni studenti pražských škol, protože mají možnost seznámit se s vybranými okruhy úloh na seminářích řešitelů MO.

K účasti v korespondenčním semináři pozvalo předsednictvo ÚV MO na základě návrhů KV MO a individuálního zájmu téměř 50 žáků, z nichž se přihlásilo 26 řešitelů z celé republiky:

Kraj	Stč	Jč	Zč	Sč	Vč	Jm	Sm	Zsl	Ssl	Vsl
Počet řešitelů	4	2	1	4	3	4	2	2	2	2

V průběhu 35. ročníku MO jim bylo zasláno pět sérií poměrně náročných úloh. Došlá řešení pak byla opravena, ohodnocena a s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům semináře. Korespondenční seminář je řízen tajemníkem ÚV MO RNDr. Karlem Horákem, který se stará o výběr a přípravu úloh a provádí redakci komentářů. Opravu pak zajišťuje několik pracovníků Matematického ústavu ČSAV a několik studentů a aspirantů MFF UK v Praze (všichni jsou bývalí olympionici).

Pouze 13 řešitelů vydrželo až do posledního 5. kola. Nejlepšími v celkovém hodnocení byli:

1. *Radek Adamec* (4, G Kroměříž)	84 bodů
2. *Igor Melicherčík* (4, G B. Bystrica)	81 bodů
3. *Dominik Munzar* (4, G kpt. Jaroše Brno)	71 bodů
4. *Libor Skřička* (4, G kpt. Jaroše Brno)	62 bodů
5. *Marián Lukáč* (3, G Bánovce n. Bebr.)	56 bodů

Dále uvádíme znění všech zadaných úloh.

1. Posloupnosti a mnohočleny

1.1 Dokažte vztah

$$\operatorname{arccotg} u_1 = \operatorname{arccotg} u_2 + \operatorname{arccotg} u_3 + \ldots,$$

kde $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ a $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$, $n \geqq 2$.

1.2 Ukažte, že číslo

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} . 1\,973 + \binom{n}{5} . 1\,973^2 + \ldots$$

je pro n přirozené násobkem čísla 2^{n-1}.

1.3 Ukažte, že posloupnost $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ určená podmínkami

$$v_n > 0,$$

$$v_n^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} v_{n-k} \quad \text{pro} \quad n \in \{0, 1, \ldots\}$$

je posloupností celých čísel.

1.4 Najděte zbytek při dělení mnohočlenu $(x + 1)^n$ mnohočlenem $(x - 1)^3$, kde n je přirozené číslo.

1.5 Ukažte, že mnohočleny p_n určené vztahy

$$p_1(x) = 1,\ p_2(x) = 1 + x,$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + xp_{n-2}(x),\ n \geqq 3,$$

mají pro $n \geqq 2$ všechny kořeny reálné.

1.6 Ukažte, že nenulový mnohočlen s celočíselnými koeficienty, který má kořeny $x = 1$ a $x = 2$, musí mít aspoň jeden koeficient menší než -1.

1.7 Najděte všechny mnohočleny p (s reálnými koeficienty) takové, že pro všechna (reálná) x platí

$$p(x^2) + p(x)\,p(x + a) = 0.$$

Proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru a.

2. Planimetrie

2.1 Ke které ze stran trojúhelníku ABC je nejblíže průsečík jeho výšek, je-li $\alpha < \beta < \gamma$? A ke kterému vrcholu?

2.2 Veďme libovolným bodem P osy úhlu α trojúhelníku ABC kolmice PA_1, PB_1, PC_1 ke stranám BC, CA, resp. AB. Je-li R průsečík přímek PA_1 a B_1C_1, dokažte, že přímka AR dělí stranu BC na dvě stejné části.

2.3 Na stranách trojúhelníku ABC jsou jako na základnách sestrojeny rovnoramenné trojúhelníky AB_1C, BA_1C, AC_1B. Dokažte, že kolmice vedené body A, B, C k odpovídajícím přímkám B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 se protínají v jednom bodě.

2.4 Dokažte, že součet obsahů pěti trojúhelníků, které dostaneme z dvojic sousedních stran a úhlopříček konvexního pětiúhelníku, je větší než obsah celého pětiúhelníku.

2.5 Je-li tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že tečny sestrojené k opsané kružnici v bodech A a C se protínají na přímce BD, pak

a) tečny v bodech B a D se protínají na přímce AC;

b) osy vnitřních úhlů α a γ čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají na úhlopříčce BD.

Dokažte.

2.6 V ostroúhlém trojúhelníku ABC se osa úhlu α, těžnice na stranu AC a výška příslušná vrcholu C protínají v jednom bodě. Dokažte, že úhel BAC je větší než 45°.

2.7 Dva shodné obdélníky jsou umístěny v rovině tak, že jejich obvody se protínají v osmi bodech. Dokažte, že obsah společné části obou obdélníků je větší než polovina obsahu jednoho z nich.

3. Teorie čísel

3.1 Jaké nejmenší kladné hodnoty může nabývat součet tvaru

$$\varepsilon_1 . 1^5 + \varepsilon^2 . 2^5 + \varepsilon_3 . 3^5 + \ldots + \varepsilon_{1\,985} . 1\,985^5,$$

kde $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$?

3.2 Dokažte, že součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel není úplným čtvercem.

3.3 Zlomek $\frac{3}{10}$ lze napsat jako součet dvou kladných zlomků s čitatelem 1 právě dvěma způsoby: $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$. Kolika způsoby lze zapsat $\frac{3}{1\,984}$? Existuje číslo n nesoudělné se třemi a takové, že $\frac{3}{n}$ lze zapsat právě 1 984 způsoby?

3.4 Nechť p je liché prvočíslo a $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p+1}{2}}$ jsou vesměs různá přirozená čísla menší než p. Dokažte, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$ existuje dvojice čísel a_i, a_j tak, že $a_i a_j \equiv k \pmod{p}$ (může být případně $i = j$).

3.5 Pro n přirozené označme $\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$ součet všech dělitelů čísla n (včetně 1 a n). Číslo m nazveme »bohatým«, jestliže pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ platí $\frac{\sigma(k)}{k} < \frac{\sigma(m)}{m}$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho »bohatých« čísel.

3.6 Označme $\omega(n)$ počet činitelů v rozkladu přirozeného čísla n na prvočinitele. Dokažte, že pro $m \geqq 2$ existuje aspoň $\frac{m}{10}$ čísel $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ s vlastností $\omega(k) \equiv \omega(k + 1) \pmod{2}$.

3.7 Dokažte, že rovnice

$$x^2 + y^2 = z^n$$

má v oboru přirozených čísel řešení pro každé přirozené n.

4. Kombinatorická geometrie

4.1 Uvnitř jednotkového čtverce je rozmístěno několik kružnic, které mají součet obvodů 10. Dokažte, že pak existuje přímka, která protíná alespoň čtyři z těchto kružnic.

4.2 Dokažte, že n bodů v rovině můžeme vždy pokrýt několika disjunktními kruhy, které budou mít součet průměrů menší než n, přičemž vzájemná vzdálenost každých dvou kruhů bude větší než 1. (Vzdáleností dvou kruhů rozumíme vzdálenost jejich nejbližších bodů.)

4.3 Čtvercový list papíru rozřízneme na dvě části (podle nějaké přímky). Jednu ze vzniklých částí opět rozřízneme atd. Jaký nejmenší počet řezů musíme učinit, abychom mezi vzniklými kusy nalezli právě sto dvacetiúhelníků?

4.4 Rozdělme každou stranu pravidelného trojúhelníku na n stejných částí a sestrojme jednotlivými body uvedeného dělení rovnoběžky se stranami trojúhelníku. Dostaneme tak rozdělení trojúhelníku na n^2 trojúhelníčků. Nazvěme »řetězem« takovou posloupnost trojúhelníčků, v níž se žádný trojúhelníček nevyskytuje dvakrát a každý následující má s předchozím společnou stranu. Jaký je největší možný počet trojúhelníčků v řetězu?

4.5 Předpokládejme, že vrcholy pravidelného n-úhelníku jsou obarveny několika barvami (každý jednou) tak, že vrcholy stejné barvy tvoří vrcholy pravidelného mnohoúhelníku. Dokažte, že mezi těmito mnohoúhelníky existují dva shodné.

4.6 Je dán čtverec a devět přímek. Nechť každá z devíti přímek dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 3. Dokažte, že alespoň tři z těchto devíti přímek procházejí jedním bodem.

4.7 Na každém poli šachovnice je zapsáno jedno z čísel 1, 2, ..., 64, přičemž na různých polích jsou různá čísla. Pomocí jedné otázky můžeme (určením množiny polí) zjistit množinu čísel stojících na polích zvolené množiny. Jaký je nejmenší počet otázek potřebných k určení polohy jednotlivých čísel na šachovnici?

5. Nerovnosti a odhady

5.1 Nechť rozdíl mezi největším a nejmenším z n reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je d a nechť součet $\sum_{i<j} |a_i - a_j|$ absolutních hodnot všech $\binom{n}{2}$ rozdílů těchto čísel je s. Pak je

$$(n-1)d \leqq s \leqq \frac{n^2}{4}\,.$$

Dokažte.

5.2 Dokažte, že pro přirozená čísla $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ $(n \geqq 2)$ platí

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2}\,.$$

5.3 Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $|AB| = a$, $|CD| = b$. Sestrojme úsečku A_1B_1, spojující středy úhlopříček lichoběžníku $ABCD$, dále sestrojme úsečku A_2B_2, která spojuje středy úhlopříček lichoběžníku A_1B_1CD, podobně sestrojíme úsečky A_3B_3, A_4B_4 atd. Může se v posloupnosti délek úseček ($|A_kB_k|$) vyskytnout nějaké číslo dvakrát? Bude tato posloupnost monotónní? Má uvedená posloupnost limitu?

5.4 Dokažte, že součet 45 čísel

$$\operatorname{tg} 1° + \operatorname{tg} 5° + \operatorname{tg} 9° + \ldots + \operatorname{tg} 173° + \operatorname{tg} 177°$$

je 45.

5.5 Jestliže pro čísla p_1, q_1, p_2, q_2 platí

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

pak mají kvadratické trojčleny

$$x^2 + p_1x + q_1,\ x^2 + p_2x + q_2$$

reálné kořeny a mezi kořeny každého z nich leží kořen druhého trojčlenu. Dokažte.

5.6 Na kružnici je napsáno několik reálných čísel. Jestliže pro některá čtyři za sebou jdoucí čísla a, b, c, d platí $(a - d)(b - c) < 0$, pak smíme čísla b, c vyměnit. Dokažte, že vždy můžeme provést jen konečný počet takových operací.

5.7 Několik lidí pozorovalo v rozpětí t minut lezoucího hlemýždě. Každý z nich ho pozoroval přesně 1 minutu a zjistil, že za tu dobu ulezl přesně 1 metr. Ani v jednom okamžiku nebyl hlemýžď »bez dozoru«. Jakou nejmenší a jakou největší dráhu mohl hlemýžď za uvedenou dobu t minut urazit?