33. ročník matematické olympiády

Kategorie C

In: František Zítek (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); Beloslav Riečan (editor); Karol Križalkovič (editor): 33. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1983-84. 25. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. pp. 58–71.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404784

Kategorie C

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI I. KOLA

C - I - 1

Najděte všechny uspořádané trojice kladných reálných čísel a, b, c, pro které platí

$$a + 2b^2 + 3c^3 + \frac{1}{a} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^3} = 12.$$

Řešení. Pro každé kladné číslo u platí nerovnost $u + \frac{1}{u} \geqq 2$, přičemž znaménko rovnosti platí jen v případě $u = 1$. Pro každou trojici kladných čísel a, b, c proto platí

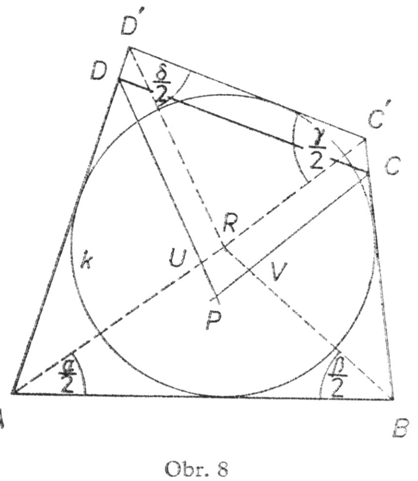
$$a + \frac{1}{a} + 2\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + 3\left(c^3 + \frac{1}{c^3}\right) \geqq 12,$$

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, je-li $a = b = c = 1$. To je jediná trojice, která vyhovuje rovnici úlohy.

C - I - 2

Osy vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku procházejí jedním bodem nebo omezují čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici. Dokažte.

Řešení. Osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ při vrcholech A, B nemohou být rovnoběžné, označme jejich průsečík R. Bod R je středem kružnice, která se dotýká strany AB čtyřúhelníku a také polopřímek AD a BC. Je-li CD také tečnou této kružnice k, procházejí všechny osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ bodem R. Dál budeme předpokládat, že přímka CD není tečnou kružnice k. Na polopřímkách BC a AD zvolíme body C' a D' tak, aby čtyřúhelník $ABC'D'$ byl kružnici k opsán a aby $C'D' \| CD$ (obr. 8). Osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABC'D'$ se protínají v bodě R, osy vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ při vrcholech C, D se protínají v bodě P, pro který platí $CP \| C'R$, $DP \| D'R$. Přímky BC, AD, RP procházejí buď jedním bodem, nebo jsou spolu rovnoběžné. Proto jsou body R, P



Obr. 8

protějšími vrcholy čtyřúhelníku $PURV$ omezeného osami vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$. Platí $|\sphericalangle UPV| =$

$$= |\sphericalangle D'RC'| = 180° - \frac{\gamma + \delta}{2}, \quad |\sphericalangle URV| = |\sphericalangle ARB| =$$

$$= 180° - \frac{\alpha + \beta}{2},$$ kde jsme α, β, γ, δ označili velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCD$ při vrcholech A, B, C, D. Protože $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, je součet velikostí úhlů UPV a URV roven $180°$. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu lze čtyřúhelníku $PURV$ opsat kružnici, což jsme měli dokázat.

C - I - 3

Určete všechna přirozená čísla n ($200 > n > 3$) s touto vlastností: Poslední dvojčíslí dekadického zápisu čísla $(n+1)^2$ se liší od posledního dvojčíslí dekadického zápisu čísla n^2 nejvýše pořadím cifer.

Řešení. Kdyby čísla $(n + 1)^2$ a n^2 končila stejným dvojčíslím, byl by jejich rozdíl dělitelný číslem 100, avšak $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ je vždy číslo liché a tedy není dělitelné číslem 100. Má-li tedy být přirozené číslo n řešením naší úlohy, musí se čísla $(n + 1)^2$ a n^2 lišit na posledních dvou místech pořadím cifer. Do následující tabulky si napíšeme do sloupců všechny možnosti pro poslední číslici čísel n, $n + 1$, n^2, $(n + 1)^2$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n + 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$(n + 1)^2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

Končí-li například číslo n^2 číslicí 4 a číslo $(n + 1)^2$ číslicí 9, a mají-li se tato dvě čísla lišit na posledních dvou místech pořadím cifer, musí n^2 končit dvojčíslím 94 a číslo $(n + 1)^2$ dvojčíslím 49. Výše uvedenou tabulku můžeme tedy doplnit tabulkou posledního dvojčíslí čísel n^2 a $(n + 1)^2$ (předpokládáme-li, že n vyhovuje podmínce úlohy):

n^2	10	41	94	69	56	65	96	49	14	01
$(n + 1)^2$	01	14	49	96	65	56	69	94	41	10

Je-li druhá mocnina přirozeného čísla n dělitelná deseti, je číslo n dělitelné deseti, pak je však číslo n^2 dělitelné stem a nemůže končit dvojčíslím 10. To znamená, že v poslední tabulce nemůže nastat situace vyjádřená v prvním sloupci, stejně tak pro poslední sloupec. Končí-li číslo n^2 číslicí 5, musí končit číslicí 5 i číslo n, pak však končí číslo n^2 dvojčíslím 25. To znamená, že nemůže platit obsah 5. a 6. sloupce. Konečně končí-li číslo n^2 číslicí 4, musí číslo n končit číslicí 2 nebo 8, pak je však v čísle n^2 na místě desítek číslo sudé. Proto žádná druhá mocnina přirozeného čísla nemůže končit dvojčíslím 94 nebo 14. Zbývají tedy jen dvě možnosti, buď číslo n^2 končí dvojčíslím 69 a číslo $(n + 1)^2$ dvojčíslím 96, nebo obráceně. V prvním případě končí číslo n číslicí 3, na místě desítek pak musí být cifra 1 nebo 6. V druhém případě musí číslo n končit dvojčíslím 36 nebo 86. Protože $n < 200$, může n nabýt pouze hodnot 13, 63, 113, 163 a 36, 86, 136, 186. Zkouškou se přesvědčíme, že všechny tyto hodnoty vyhovují.

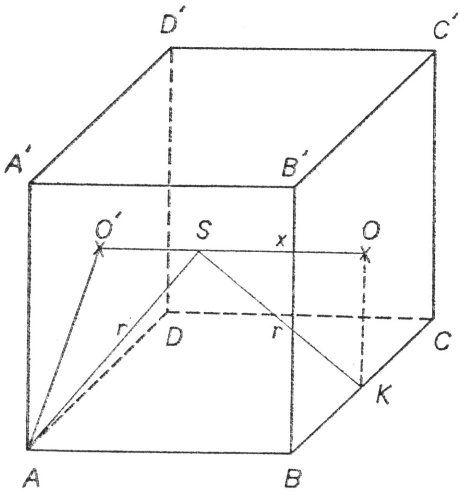
C - I - 4

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a. Kulová plocha protíná stěnu BCC' v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$ a prochází

a) bodem A,

b) středem úsečky AB.

V obou případech určete střed a poloměr kulové plochy.



Obr. 9

Řešení. Střed S dané kulové plochy leží na kolmici vedené středem O čtverce $BCC'B'$ k jeho rovině, tedy na spojnici středů O, O' čtverců $BCC'B'$ a $ADD'A'$, přesněji na polopřímce OO'. Označme $x = |OS|$ a r hledaný poloměr. Střed S bude vypočtenou velikostí x jednoznačně určen (obr. 9). V případě a) vypočteme x a r ze vztahů mezi stranami pravoúhlých trojúhelníků SAO' a SOK, kde K je střed strany BC. Podle Pythagorovy věty je

$$r^2 = (a - x)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2, \; r^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

odkud plyne $x = \frac{5}{8}a$, $r = \frac{a}{8}\sqrt{41}$. V případě b) nahradíme trojúhelník SAO' trojúhelníkem SLM, kde L je střed hrany AB a M střed krychle. Vyjde pak $x = \frac{a}{2}$, což znamená, že bod S splývá s bodem M, trojúhelník SLM je vlastně jen úsečkou, a $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

C - I - 5

Nechť a, b jsou nesoudělná přirozená čísla. Pak přirozená čísla x, y, z, kde $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$ jsou nesoudělná a platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Dokažte.

Nechť x, y, z jsou nesoudělná přirozená čísla, pro něž platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Zjištěte, zda pak existují přirozená čísla a, b taková, že $x = a\,(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$.

Řešení. Čísla x, y, z jsou opravdu nesoudělná, když jsou nesoudělná čísla a, b. V opačném případě by některé prvočíslo z rozkladu čísla z muselo dělit čísla x i y. Dělí-li prvočíslo p číslo z, dělí buď a nebo b. Nechť dělí číslo a, pak nedělí číslo b, protože a, b jsou nesoudělná. Protože dělí číslo y, musí dělit číslo $a + b$. Jelikož dělí p číslo a a také číslo $a + b$, musí dělit b, což je spor. Tím je dokázáno, že čísla x, y, z jsou nesoudělná, vztah $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ dokážeme prostým dosazením.

Nechť platí obráceně pro nesoudělná přirozená čísla x, y, z vztah $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Označme d největší společný dělitel čísel x, y. Pak je $x = ad$, $y = bd$, čísla a, b jsou nesoudělná. Dále platí $\frac{1}{ad} + \frac{1}{bd} = \frac{1}{z}$, tedy $z = \frac{abd}{a + b}$. Protože a, b jsou nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla a, $a + b$, rovněž čísla b, $a + b$ jsou nesoudělná. Protože číslo z je přirozené, musí číslo $a + b$ dělit číslo d, $d = k(a + b)$, k je číslo přirozené, takže $x = ka(a + b)$, $y = kb(a + b)$, $z = kab$. Protože však čísla x, y, z jsou podle předpokladu čísla nesoudělná, musí být $k = 1$ a pak je $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$. Tím jsme zjistili, že existují přirozená čísla a, b tak, že jsou splněny podmínky druhé části úlohy, navíc víme, že to jsou čísla nesoudělná.

C - I - 6

Je dáno přirozené číslo n, $n > 2$. Dřevěnou krychli o hraně délky n natřeme na červeno a rozřežeme $3(n - 1)$ rovinnými řezy na n^3 malých krychliček o hraně délky 1.

a) Kolik malých krychliček bude mít jednu červenou stěnu, kolik dvě červené stěny, kolik tři červené stěny?

b) Je možné z malých krychliček sestavit kvádr o rozměrech $1, 4n - 8, 4n - 8$ tak, aby jedna jeho čtvercová stěna o rozměrech $4n - 8, 4n - 8$ byla vybarvena jako šachovnice?

Řešení. Krychle má 8 vrcholů, krychličky při vrcholech mají obarveny tři stěny. Právě dvě červeně natřené stěny budou mít ty krychličky, které jsou umístěny při hranách velké krychle, avšak ne při vrcholech. Vzhledem k tomu, že krychle má 12 hran, je jich $12(n - 2)$. Právě jednu červenou stěnu mají krychličky, které leží ve velké krychli při jejích stěnách, avšak ne při hranách. Je jich $6(n - 2)^2$. Tím je vyřešena část a) úlohy.

Abychom mohli kvádr z části b) úlohy složit tak, aby jedna jeho velká čtvercová stěna byla vybarvena šachovnicově, potřebujeme k tomu $(4n - 8)^2/2$ obarvených krychliček, stejně velký počet bude neobarvených. K dispozici máme $6n^2 - 12n + 8$ krychliček, které mají aspoň jednu stěnu červeně natřenou. Musí tudíž pro n platit

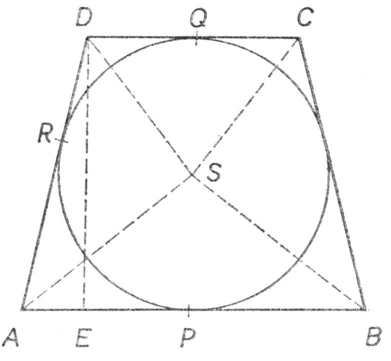
$$\frac{(4n - 8)^2}{2} \leqq 6n^2 - 12n + 8,$$

tedy $(n - 5)^2 \leqq 13$. Z přirozených čísel větších než 2 vyhovují pouze čísla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Celkem máme n^3 krychliček, natřených i nenatřených, potřebujeme jich $(4n - 8)^2$, přičemž natřené můžeme dát případně i nenatřenou stěnou do stěny šachovnicově složené. Musí tudíž ještě platit $(4n - 8)^2 \leqq n^3$. Z výše uvedených čísel pak vyhovují jen $n = 3$ a $n = 4$.

C - S - 1

V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ procházejí osy vnitřních úhlů jedním bodem. Vypočtěte součet a součin velikostí jeho základen $a = |AB|$, $c = |CD|$ pomocí velikosti ramene $b = |AD|$ a výšky v.

Řešení. Procházejí-li všechny osy vnitřních úhlů jedním bodem (označíme ho S), lze lichoběžníku vepsat kružnici, jež má střed v bodě S a poloměr $\frac{v}{2}$. Označme P, Q její body dotyku se základnami, R bod dotyku s ramenem (obr. 10). Je pak $|DR| = |DQ| = \frac{c}{2}$, $|AR| = |AP| = \frac{a}{2}$, tedy $a + c = 2b$. Můžeme předpokládat $c < a$. Veďme bodem D



Obr. 10

kolmici k přímce AB, patu označíme E. Z pravoúhlého trojúhelníku AED plyne

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 + v^2, \text{ tedy } ac = v^2.$$

C - S - 2

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky a. Kulová plocha protíná rovinu BCC' v kružnici opsané čtverci $BCC'B'$ a prochází středem M hrany AA'. Určete střed a poloměr této kulové plochy.

Řešení. Úloha i postup řešení je obdobný jako u úlohy C-I-4; pro poloměr kulové plochy vyjde $r = \frac{a}{8}\sqrt{41}$, její střed S leží na spojnici středů K, L čtverců $BCC'B'$, $ADD'A'$, $|LS| = \frac{5}{8}a$, $|KS| = \frac{3}{8}a$.

C - S - 3a

Číslo $n = 123\ldots399400$ vzniklo tak, že jsme za sebou zapsali prvních 400 přirozených čísel. Zjistěte, zda je číslo n druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Jestliže by číslo n bylo druhou mocninou přirozeného čísla p, muselo by číslo p být dělitelné deseti, $p = 10q$, q je číslo přirozené. Číslo q musí končit takovým dvojčíslím, jehož druhá mocnina končí dvojčíslím 94. Takové dvojčíslí však neexistuje, viz řešení úlohy C-I-3.

Dřevěný pravidelný čtyřboký hranol H má podstavnou hranu délky n a výšku $6n$, číslo n je přirozené. Hranol natřeme červeně a rozřežeme na krychličky o hraně délky 1. Zjistěte, pro která n lze z krychliček slepit dutou krychli K o hraně délky $2n$, jejíž vnější povrch je celý červený.

Řešení. Pro $n = 1$ zřejmě nelze krychli K slepit, protože hranol K je složen pouze ze šesti krychliček, zatímco pro slepení krychle bychom jich potřebovali aspoň 8. Předpokládejme, že $n \geqq 2$. Hranol H je složen z $6n^3$ malých krychliček, z nich je 8 s třemi červenými stěnami, dále ještě $8(n-2) + 4(6n-2) = 32n - 24$ má dvě červené stěny. Právě jednu červenou stěnu má $2(n-2)^2 + 4(n-2) \cdot (6n-2) = 26n^2 - 64n + 24$ krychliček. K sestavení krychle K potřebujeme všech 8 krychliček s třemi červenými stěnami, dále $12(2n-2) = 24n - 24$ krychliček s dvěma červenými stěnami, a konečně $6(2n-2)^2 = 24n^2 - 48n + 24$ krychliček, které mají aspoň jednu červenou stěnu. Vidíme, že krychliček s dvěma červenými stěnami máme dostatek, ani všechny nepotřebujeme, $8n$ jich přebývá a můžeme je použít při slepování krychle K jako krychličky s jednou červenou stěnou. Těch potřebujeme $24n^2 - 48n + 24$, máme k dispozici $26n^2 - 64n + 24 + 8n = 26n^2 - 56n + 24$.

Pro n tak máme jedinou podmínku

$$26n^2 - 56n + 24 \geqq 24n^2 - 48n + 24,$$

tj. $n \geqq 4$.

C - II - 1

Najděte všechny uspořádané n-tice $(x_1, \ldots, x_n)$ reálných čísel ($n = 2k$ je číslo sudé), které splňují soustavu dvou rovnic:

$$x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_{2k-1}^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2k-1}x_{2k}$$

$$x_2^2 + x_4^2 + \ldots + x_{2k}^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2k-1}x_{2k}.$$

Řešení. Sečtením obou rovnic a odečtením pravé strany obdržené rovnice dostaneme rovnici

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \ldots + (x_{2k-1} - x_{2k})^2 = 0.$$

Odtud plyne nutně $x_2 = x_1$, $x_4 = x_3$, $\ldots$, $x_{2k} = x_{2k-1}$. Na druhé straně je ihned vidět, že každá n-tice čísel, která splňuje tyto vztahy, je řešením dané soustavy rovnic.

C - II - 2

Žák měl určit délku tětivy v kruhu o poloměru r cm, vzdálenost středu kruhu od tětivy byla d cm. Čísla r, d byla dána. Žák použil nesprávného postupu. Domníval se, že délka tětivy bude $(r + d)$ cm. Přes chybný postup došel k správnému výsledku. Jaký byl poměr délek r a d?

Řešení. Správně měl žák dosadit do výrazu $2\sqrt{r^2 - d^2}$, víme tedy, že pro čísla r, d platí vztah $2\sqrt{r^2 - d^2} = r + d$, po umocnění $4(r-d)(r+d)=(r+d)^2$. Součet $r+d$ je nenulový, můžeme tímto součtem předcházející rovnost dělit, dostaneme $4(r-d)=r+d$, odkud plyne $r:d=5:3$. Zkouškou se přesvědčíme, že každá dvojice $r=5p$, $d=3p$ $(p>0)$ je řešením.

C - II - 3a

Zjistěte, zda je přirozené číslo $1^1+2^2+3^3+\ldots+16^{16}+$ $+17^{17}$ dělitelné třemi. Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení. Každé přirozené číslo n můžeme psát ve tvaru $3m+z$, kde m je přirozené číslo nebo nula a z je zbytek při dělení čísla n třemi, $0\leq z<3$. Pro každé přirozené číslo k dávají čísla n^k a z^k při dělení třemi stejný zbytek. Dané číslo je právě tehdy dělitelné třemi, když je třemi dělitelný součet $1^1+2^2+0^3+1^4+2^5+0^6+\ldots+1^{16}+2^{17}=$ $=6+2^2+2^5+\ldots+2^{17}$. Zbytek při dělení čísla 2^k třemi je 2 při lichém k a 1 při sudém k. Proto je číslo 2^2+2^5 dělitelné třemi, stejně tak 2^8+2^{11}, $2^{14}+2^{17}$. Tím je dokázáno, že dané číslo je dělitelné třemi.

C - II - 3b

Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $|AB|=16$, $|BC|=|AD|=13$ a $|CD|=6$. Uvnitř lichoběžníku leží bod M tak, že poměr obsahů trojúhelníků ABM a CDM je $4:3$ a poměr obsahů trojúhelníků BCM a ADM je $7:12$. Určete obsahy trojúhelníků ABM, BCM, CDM a ADM.

Řešení. Výška lichoběžníku je 12, vypočteme ji pomocí Pythagorovy věty. Označme x výšku v trojúhelníku ABM,

y výšku v trojúhelníku CDM. Podle zadání je $8x : 3y = 4 : 3$, tedy $y = 2x$. Protože $x + y = 12$, je $x = 4$, $y = 8$, obsah trojúhelníku ABM je 32, obsah trojúhelníku CDM je 24. Obsah celého lichoběžníku je 132, zbývá tedy na trojúhelníky ADM a BCM obsah 76. Protože poměr jejich obsahů je $12 : 7$, je obsah trojúhelníku ADM roven 48, obsah trojúhelníku BCM je 28.