32. ročník matematické olympiády

Kategorie C

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); František Zítek (editor): 32. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83. 24. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. pp. 57–72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404769

Kategorie C

ÚLOHY I. KOLA — DOMÁCÍ ČÁST

C - I - 1

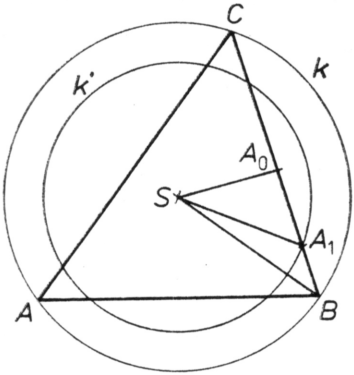
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Kružnice, která je mu opsána, má střed S a poloměr r. Zvolme soustřednou kružnici o poloměru $r' < r$, která však také protíná všechny strany trojúhelníku ve dvou bodech. Označme u, v, w velikosti tětiv, které tato kružnice vytíná na stranách trojúhelníku ABC. Dokažte, že

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 12\,(r^2 - r'^2),$$

kde a, b, c značí velikosti stran trojúhelníku ABC ($|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$).

Řešení. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží střed S uvnitř trojúhelníku. Označme (obr. 12) A_0 střed strany BC a A_1 jeden z průsečíků kružnice k' se stranou BC. Z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky BA_0S a A_1A_0S plyne

$$|SA_0|^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} = r'^2 - \frac{u^2}{4},$$



Obr. 12

takže

$$u^2 = a^2 - 4\,(r^2 - r'^2).$$

Obdobně pro ostatní úseky dostaneme

$$v^2 = b^2 - 4\,(r^2 - r'^2),$$

$$w^2 = c^2 - 4\,(r^2 - r'^2)$$

a sečtením

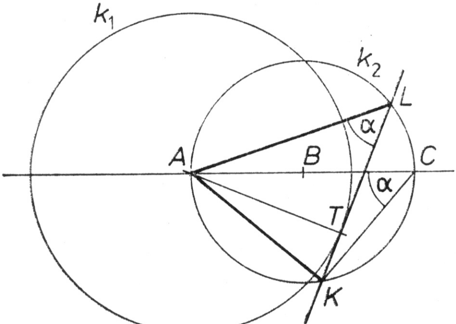
$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 12\,(r^2 - r'^2),$$

což je rovnost, kterou jsme měli dokázat.

Jsou dány dvě kružnice $k_1 = (A; r_1)$, $k_2 = (B; r_2)$, přičemž $r_1 < 2r_2$, $A \in k_2$. Na kružnici k_1 zvolme libovolný bod T tak, aby tečna v něm sestrojená ke kružnici k_1 protťala k_2 v různých bodech K, L. Dokažte, že $|AK| . |AL| = \text{konst.}$

Řešení. Označme C druhý průsečík přímky AB s kružnicí k_2, průsečíky tečny s kružnicí k_2 označme K, L tak, aby v případě, že oba leží na témže oblouku AC, bylo jejich pořadí A, K, L, C (obr. 13). Pak bude podle věty o obvodových úhlech

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle ALK|.$$



Obr. 13

Protože $|\sphericalangle ATL| = |\sphericalangle AKC| = 90°$, jsou trojúhelníky ATL a AKC podobné, takže musí platit

$$|AT| : |AK| = |AL| : |AC|.$$

Dosadíme-li $|AT| = r_1$, $|AC| = 2r_2$, dostaneme

$$|AL|.|AK| = 2r_1r_2 = \text{konst.}$$

Jiné řešení. Nechť KL je tětiva kružnice $k = (S;\ r)$, pak pro libovolný bod X na kružnici k, který je různý od bodů K a L, platí

$$\sin |\sphericalangle\ KXL| = \frac{|KL|}{2r}.$$

Pro obsah trojúhelníku AKL z úlohy pak dostáváme

$$P = \frac{1}{2}\,|AK|.|AL| \sin |\sphericalangle\ KAL| = \frac{1}{2}\,|AK|.|AL|.\frac{|KL|}{2r_2}$$

a zároveň

$$P = \frac{1}{2}\,|KL|.r_1,$$

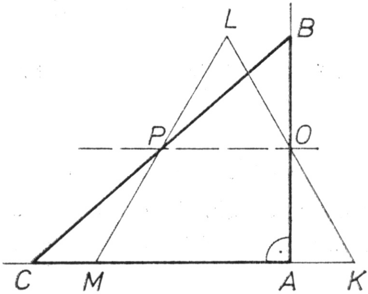
takže opět

$$|AK|.|AL| = 2r_1r_2 = \text{konst.}$$

C - I - 3

Je dán rovnostranný trojúhelník KLM a uvnitř jeho strany KL bod O. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož odvěsna AC leží na přímce KM, bod O je středem odvěsny AB a střed přepony BC leží na přímce LM.

Řešení. Označme P střed strany BC hledaného pravoúhlého trojúhelníku ABC (obr. 14); pak je OP střední příčkou trojúhelníku ABC. Odtud plyne konstrukce. Nejdříve sestrojíme odvěsnu AB, která je kolmá k přímce KM a jejímž středem je bod O. Bodem O vedeme rovnoběžku s přímkou KM a její průsečík s přímkou LM bude bod P. Přímka BP pak protne přímku KM v bodě C.



Obr. 14

C - I - 4

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž třetí mocnina končí skupinou cifer 56 789.

Řešení. Má-li třetí mocnina čísla n končit skupinou cifer 56 789, musí být především

$$n = 10a + 9,$$

pak

$$n^3 = (10a + 9)^3 = 100\alpha + 30.81a + 729 =$$
$$= 100\alpha' + 10.3a + 29,$$

takže musí být $a = 10a' + 2$, tj. $n = 100b + 29$, pak

$$n^3 = 10^3\beta + 300.29^2b + 29^3 = 10^3\beta' + 100.3b + 389,$$

takže musí být $b = 10b' + 8$, tj. $n = 10^3c + 829$, pak

$$n^3 = 10^4\gamma + 3.10^3c.829^2 + 829^3 = 10^4\gamma' + 10^3.3c + 2789,$$

takže musí být $c = 10c' + 8$, tj. $n = 10^4d + 8\,829$, pak

$$n^3 = 10^5\delta + 3.10^4d.8\,829^2 + 8\,829^3 =$$
$$= 10^5\delta' + 10^4.3d + 6\,789,$$

takže musí být $d = 10d' + 5$, tj. $n = 10^5e + 58\,829$. Dostáváme tak celkový výsledek. Uvedenou podmínku splňují všechna přirozená čísla, která končí pětičíslím 58 829.

C - I - 5

605 koulí stejného průměru je srovnáno do dvou pyramid, z nichž jedna má ve spodní vrstvě koule uspořádané do čtverce, druhá do rovnostranného trojúhelníku. Obě pyramidy mají stejný počet vrstev. Určete, v kolika vrstvách byly koule srovnány v každé z pyramid a kolik koulí bylo v jednotlivých pyramidách.

Řešení. V úloze se použijí obrazcová čísla trojúhelníková a čtvercová. Čísla (počty koulí) uspořádáme do tabulky:

vrstva	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
čtvercová pyramida	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
trojúhelníková pyramida	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
součet koulí v n vrstvách	2	9	24	50	90	147	224	324	450	605

Koule byly srovnány v 10 vrstvách. V pyramidě s trojúhelníkovou podstavou bylo 220 koulí a v pyramidě se čtvercovou podstavou 385 koulí. Pokud již známe nebo dovedeme odvodit vzorec pro počet koulí v n-té vrstvě trojúhelníkové pyramidy (počítáno od vrcholu)

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a pro součet koulí v n vrstvách čtvercové pyramidy

$$c_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

pak pro součet koulí v n vrstvách trojúhelníkové pyramidy dostaneme

$$t_n = 1 + 3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + \ldots + n) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Pro součet koulí obou pyramid má platit (n je počet vrstev)

$$T_n = c_n + t_n = \frac{1}{2}n(n+1)^2 = 605.$$

Protože n je přirozené a má být

$$n(n+1)^2 = 1\,210 = 10.11^2,$$

dostáváme $n = 10$, $t_n = 220$, $c_n = 385$.

C - I - 6

Pro každé dva trojúhelníky se stranami a, b, c a p, q, r platí

$$(a+1)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 - 2(ap + bq + cr) >$$
$$> 6 - (p+1)^2 - (q-1)^2 - (r+1)^2.$$

Dokažte.

Řešení. Nejprve danou nerovnost upravíme pomocí ekvivalentních úprav

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 + 2(a - b + c) - 2(ap + bq + cr) >$$
$$> 6 - (p^2 + q^2 + r^2) - 2(p - q + r) - 3,$$

máme tedy dokázat nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + p^2 + q^2 + r^2 - 2(ap + bq + cr) +$$
$$+ 2(a - b + c) + 2(p - q + r) > 0.$$

Levou stranu poslední nerovnosti můžeme ale psát jako

$$(a - p)^2 + (b - q)^2 + (c - r)^2 + 2(a - b + c) +$$
$$+ 2(p - q + r),$$

což je vždy kladné vzhledem k trojúhelníkovým nerovnostem

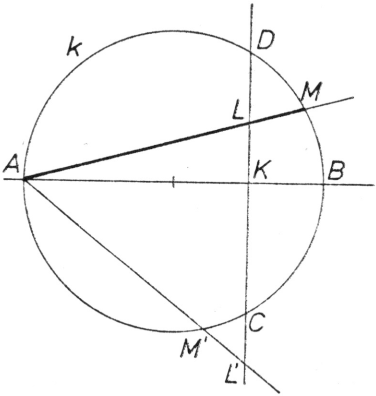
$$a - b + c > 0, \; p - q + r > 0.$$

ÚLOHY I. KOLA — ŠKOLNÍ ČÁST

C - S - 1

Na kružnici k sú dané body A, B, C, D tak, že AB je priemer kružnice k a tetiva CD je kolmá na AB. Na úsečke CD je daný bod L. Nech M je priesečník priamky AL s kružnicou k, $M \neq A$. Dokážte, že súčin $|AL| . |AM|$ je nezávislý na polohe bodu L.

Řešení. Označme K průsečík přímek AB a CD. Buď nyní L libovolný bod na přímce CD, M průsečík přímky AL a kružnice k (takový vždy existuje právě jeden) (obr. 15). Trojúhelník ABM je podle Thaletovy věty pravoúhlý.



Obr. 15

Trojúhelníky ABM a AKL jsou podobné, protože jsou oba pravoúhlé a mají společný úhel $|\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle MAB|$. Je tedy

$$|AL| : |AK| = |AB| : |AM|,$$

tj.

$$|AL| . |AM| = |AB| . |AK|,$$

a hodnota vpravo na poloze bodu L nezávisí.

C - S - 2

Dokážte, že pre reálne čísla a, b, p, q platí

$$a^2p^2 + a^2q^2 + b^2p^2 + b^2q^2 + a^2 + b^2 + p^2 + q^2 \geqq$$
$$\geqq (ap + bq)^2 + 2ap + 2bq.$$

Zistite, kedy platí rovnosť.

Řešení. Umocněním dvojčlenu vpravo a ekvivalentní úpravou nerovnosti dostaneme

$$a^2q^2 + b^2p^2 + a^2 + b^2 + q^2 + p^2 - 2ap - 2bq -$$
$$- 2apbq \geqq 0,$$

což lze upravit na nerovnost

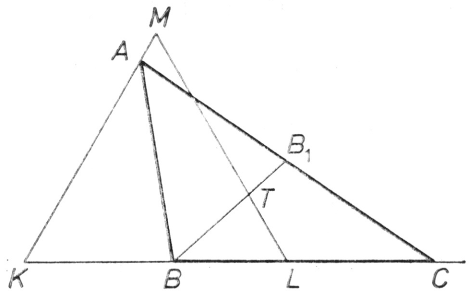
$$(aq - bp)^2 + (a - p)^2 + (b - q)^2 \geqq 0,$$

která platí vždy. Přitom je zřejmé, že rovnost v poslední nerovnosti, a tedy i v nerovnosti původní, nastane právě tehdy, když $a = p$, $b = q$ (pak je i $aq = bp$).

C - S - 3a

Je dán rovnostranný trojúhelník KLM. Uvnitř jeho stran KL a ML jsou po řadě dány body B a T, přitom platí $3|TL| \leqq \leqq |ML|$. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož vrcholy A, C leží po řadě na přímkách KM, KL a jehož těžištěm je bod T.

Řešení. Z rozboru (obr. 16) je zřejmé, že známe střed B_1 strany AC a že vrcholy A a C jsou středově souměrné podle středu B_1. Odtud plyne konstrukce: Na polopřímce BT



Obr. 16

najdeme bod B_1 tak, aby $|BB_1| = \frac{3}{2}|BT|$. Sestrojíme nyní přímku p středově souměrnou s přímkou KL podle středu B_1, její průsečík s přímkou KM bude vrchol A, vrchol C dostaneme např. z bodu A středovou souměrností podle středu B_1. ABC je pak trojúhelník požadovaných vlastností. Podmínka $3|TL| \leqq |ML|$ nám navíc zaručuje, že bod A bude ležet uvnitř strany KM.

C - S - 3b

Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že číslo $n^2 - n$ je deliteľné číslom 50.

Řešení. Protože číslo $n^2 - n = n(n - 1)$ je vždy dělitelné dvěma (ze dvou po sobě jdoucích čísel je aspoň jedno sudé), stačí zjistit, kdy je dělitelné 25 (čísla 2 a 25 jsou navzájem nesoudělná). Ale 25 dělí součin $n(n - 1)$, právě když 25 dělí n nebo 25 dělí $n - 1$, tedy hledaná přirozená čísla n jsou tvaru

$$n = 25k \quad \text{nebo} \quad n = 25k + 1,$$

kde k je libovolné přirozené číslo. Řešením jsou tedy všechna přirozená čísla zakončená dvojčíslím

$$00, 25, 50, 75 \quad \text{nebo} \quad 01, 26, 51, 76.$$

ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Určete všechna trojciferná přirozená čísla n, pro která se poslední trojčíslí dekadického zápisu čísla n^2 neliší od posledního trojčíslí dekadického zápisu čísla $(n + 32)^2$.

Řešení. Úlohu je možno řešit postupným zjišťováním, čemu se musí rovnat poslední cifra čísla n, jeho předposlední cifra atd. Označíme-li např. poslední cifru čísla n jako c, musí být číslo $(c + 2)^2 - c^2 = 4c + 4$ dělitelné 10, takže 5 dělí $2(c + 1)$ a může být jen $c = 4$ nebo $c = 9$. Dále rozlišujeme dva případy. Označíme-li další cifru jako b, musí pak např. pro $c = 4$ být číslo $(10b + 36)^2 - (10b + 4)^2 = 640b + 1280$ dělitelné 100, tedy 5 dělí $b + 2$, takže je buď $b = 3$, nebo $b = 8$. Jak je vidět, je tento postup značně zdlouhavý. Uvědomíme si rovnou, že poslední trojčíslí dekadického zápisu čísla a se neliší od posledního trojčíslí dekadického zápisu čísla b, právě když 1000 dělí $a - b$. Pro číslo n z naší úlohy musí tedy platit $(100 \leqq n \leqq 999)$, že 1000 dělí

$$(n + 32)^2 - n^2 = 64n + 1024 = 64(n + 16),$$

což je právě tehdy, když 125 dělí $n + 16$. Číslo n je tedy tvaru

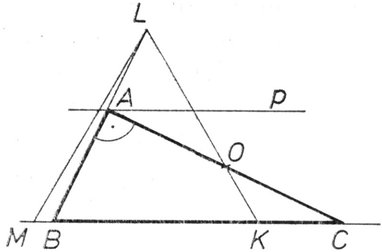
$$n = 125k - 16.$$

Vzhledem k podmínce $100 \leqq n \leqq 999$ může být jen $1 \leqq \leqq k \leqq 8$, takže úloze vyhovují čísla 109, 234, 359, 484, 609, 734, 859 a 984.

C - II - 2

Je dán rovnostranný trojúhelník KLM a uvnitř jeho strany KL takový bod O, že $|KO| < \frac{1}{2} |KL|$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona BC leží na přímce KM, bod O je středem odvěsny AC a přímka ABprochází bodem L.

Řešení. Protože O má být středem strany AC a vrchol C leží na přímce KM, bude A ležet na přímce p středově souměrné podle středu O s přímkou KM, $p \parallel KM$ (obr. 17).



Obr. 17

Dále si uvědomíme, že úhel OAL je pravý, takže vrchol A bude ležet na Thaletově kružnici k nad průměrem OL. Odtud již plyne konstrukce: Sestrojíme bod A jako průsečík přímky p a kružnice k, vrcholy B a C dostaneme jako průsečíky přímky KM s přímkami AL a AO. Z podmínky $|KO| < \frac{1}{2}|KL|$ plyne, že přímka p obsahuje právě jeden vnitřní bod úsečky OL, takže vždy najdeme dva různé průsečíky přímky p s kružnicí k. Úloha tedy bude mít vždy dvě různá řešení.

C - II - 3a

Úhlopříčky daného čtyřúhelníku jsou osami jeho vnitřních úhlů. Určete jeho obsah, jestliže jedna strana a jedna z jeho úhlopříček mají shodně délku 2 cm.

Řešení. Nechť $ABCD$ je daný čtyřúhelník a α, β, γ, δ příslušné vnitřní úhly. Označme O průsečík úhlopříček. Protože úhlopříčky jsou zároveň osami úhlů, musí být

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\gamma + \delta}{2},$$

neboť úhly AOB a COD jsou shodné. Protože součet úhlů ve čtyřúhelníku je $360°$, musí být $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90°$, takže úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Úhlopříčky jsou však zároveň osami úhlů, jsou tedy trojúhelníky ABC, BCD, CDA a DAB rovnoramenné, $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 2$, čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtverec a jeho obsah je roven $4\,P_{AOB}$, kde AOB je pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky 2 cm a jednou odvěsnou délky 1 cm. Jeho obsah tedy je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a obsah kosočtverce $ABCD$ pak bude $2\sqrt{3}$ cm².

C - II - 3b

Nájdite všetky trojice reálnych čísel x, y, z, pre ktoré platí $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ a súčasne $x^4 + y^4 + z^4 = 16$.

Řešení. Z uvedených rovnic plyne

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4,$$

takže

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 0.$$

Je tedy

$$xy = xz = yz = 0.$$

Tento vztah je splněn, právě když aspoň dvě z čísel x, y, z jsou rovna nule. Pro třetí číslo pak dostáváme z první rovnice hodnotu ± 2. Řešením soustavy jsou tedy právě trojice

$$(0, 0, 2), (0, 0, -2), (0, 2, 0), (0, -2, 0), (2, 0, 0),$$
$$(-2, 0, 0).$$