32. ročník matematické olympiády

Kategorie Z

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Karel Horák (editor); František Zítek (editor): 32. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1982/83. 24. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. pp. 40–56.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404768

Kategorie Z

ÚLOHY I. KOLA

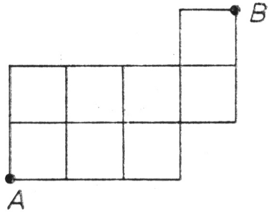
Z - I - 1

Každý ze šesti kamarádů má dřevěnou kostku, jejíž každá stěna je obarvena jednou z barev bílá, žlutá, červená, zelená, modrá, černá. Na žádné kostce nejsou dvě různé stěny obarveny stejně a proti bílé stěně je vždy stěna černá. Kostky se liší pouze umístěním dalších barev, například Alšova kostka má proti zelené stěně stěnu modrou, kdežto u Honzovy kostky jsou zelená a modrá stěna sousedními stěnami. Mohou být kostky všech šesti kamarádů obarveny tak, aby se každé dvě lišily?

Řešení. Každou z kostek můžeme jediným způsobem položit před sebe na stůl tak, že horní stěna je bílá (dolní stěna je tudíž černá) a přední stěna červená. Jednotlivé kostky se pak liší podle toho, jakou barvu mají zadní, levá a pravá stěna kostky. Je-li například zadní stěna modrá, může být levá stěna zelená a pravá žlutá nebo levá stěna žlutá a pravá zelená. Další dvě možnosti dostaneme, když je zadní stěna zelená, levá strana může být žlutá a pravá modrá, nebo obráceně. Konečně může být zadní stěna žlutá, dostaneme tak ještě dvě možnosti - buď je levá stěna modrá a pravá zelená, nebo obráceně. Celkem máme šest možností, jak obarvit zadní a obě boční stěny krychle. Kostky všech šesti kamarádů mohou být tedy obarveny tak, aby se každé dvě kostky lišily.

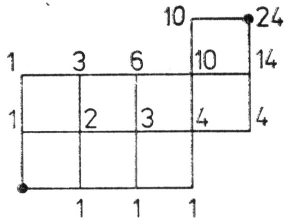
Z - I - 2

Mezi místy A a B tvoří ulice čtvercovou síť, strana každého čtverce měří 100 m (obr. 1). Jakou nejmenší vzdálenost musí ujít chodec, aby se dostal z místa A po ulicích do místa B? Kolika možnými způsoby to může provést? Přitom považujeme dvě cesty za různé, jakmile se liší aspoň jedním úsekem.



Obr. 1

Řešení. Nejkratší cesta z místa A do místa B bude taková, při které jde chodec vždy jen »doprava« nebo »nahoru«, nevrací se zpět »dolů« nebo »doleva«. Přitom musí ujít čtyři úseky doprava a tři úseky nahoru, nejkratší vzdálenost je tedy 700 m. Chodec nemůže ovšem nejdřív ujít všechny čtyři úseky doprava, nejvýše po třech úsecích doprava musí jít aspoň jeden úsek nahoru. Připišme si na plánku města ke každé křižovatce číslo, které udává, kolika možnými způsoby lze k této křižovatce dojít nejkratším způsobem z bodu A. Začneme u křižovatek, které leží nejblíže k bodu A, a postupujeme až k bodu B. Každé připsané číslo je součtem těch čísel, která stojí od něho nalevo a pod ním. Jdeme-li totiž nejkratším způsobem, můžeme ke každé křižovatce přijít jen zleva nebo zdola. Výsledek je znázorněn na obr. 2. Celkem je 24 možností, jak dojít nejkratší cestou z místa A do místa B.



Obr. 2

Z - I - 3

Sedminásobný součet dvou dvojciferných čísel je desetkrát větší než jejich rozdíl. Určete všechny takové dvojice.

Řešení. Hledaná čísla označíme x, y, jejich sedminásobný součet je $7(x + y)$ a ten má být desetkrát větší než jejich rozdíl $x - y$. Má tedy platit $7(x + y) = 10(x - y)$. Tuto rovnici upravíme na tvar $17y = 3x$. Je tedy číslo $3x$ dělitelné číslem 17, a protože jsou čísla 3 a 17 nesoudělná, musí být číslo x dělitelné číslem 17. Zároveň víme, že je to číslo dvojciferné, může se proto rovnat pouze některému z čísel 17, 34, 51, 68, 85. Ke každé z těchto hodnot x vypočteme z rovnice

$17y = 3x$ číslo y. Dostaneme tak dvojice (17, 3), (34, 6), (51, 9), (68, 12) a (85, 15). Jelikož číslo y má být také dvojciferné, má naše úloha pouze dvě řešení: $x = 68$, $y = 12$ a $x = 85$, $y = 15$.

Z - I - 4

Z krychlí o hraně 1 cm jsme slepili krychli o hraně 4 cm. Potom jsme stěnám velké krychle přiřadili čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6 stejným způsobem jako na hrací kostce, tj. na protějších stěnách jsou čísla 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4. Každé z těchto čísel jsme napsali na příslušné stěně do každého pole čtvercové sítě vytvořené hranami malých krychlí. Velkou krychli jsme pak opět rozdělili na původní malé krychle a pro každou malou krychli jsme vypočetli součet všech čísel, která na ní byla napsána.

Zjistěte:

a) Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 2 ?

b) Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 6 ?

c) Jaký je největší možný součet a kolik existuje malých krychlí s tímto největším součtem ?

Řešení. Na některých malých krychlích nebude napsáno žádné číslo; je jich 8 a jsou to ty, které ležely uvnitř velké krychle. Potom můžeme ke každému z čísel 1, 2, ..., 6 najít čtyři malé krychle, které mají toto číslo napsáno na jedné své stěně a k dalším stěnám nemají připsáno žádné číslo. Jsou to ty malé krychle, které leží při stěnách velké krychle, avšak ne při jejích hranách. Vynecháme-li ty malé krychle, které leží v rozích velké krychle, leží při každé hraně velké krychle dvě malé krychle, které mají na svých stěnách připsána právě dvě různá čísla. Nejsou to však taková dvě čísla, jejichž součet je 7. Konečně je v každém rohu velké krychle jedna malá rohová krychle, která bude mít připsána tři čísla; žádná dvě z nich nemají součet rovný číslu 7.

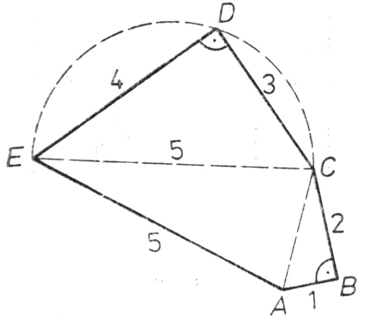
Součet 2 mají pouze ty čtyři malé krychle, které mají připsáno číslo 2 na jedné své stěně a ostatní stěny prázdné. Součet 6 mají ty čtyři krychle, které mají popsánu jen jednu stěnu, a to číslem 6, dále ty malé krychle, které mají připsána právě jen dvě čísla, a to čísla 1 a 5 nebo 2 a 4, celkem tedy opět čtyři krychle, a konečně ta jedna rohová krychle s připsanými čísly 1, 2, 3. Celkem je tudíž devět malých krychlí se součtem 6. Největší součet může být jen $6 + 5 + 4 = 15$ a patří k němu jediná malá krychle v rohu velké krychle.

Z - I - 5

Sestrojte pětiúhelník $ABCDE$, jestliže platí $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = 3$, $|DE| = 4$, $|AE| = 5$ a úhly ABC a CDE jsou pravé.

Řešení. Předpokládejme, že pětiúhelník požadovaných vlastností existuje. Protože je úhel CDE pravý, $|CD| = 3$, $|DE| = 4$, musí být podle Pythagorovy věty $|CE| = 5$. Odtud již plyne konstrukce hledaného pětiúhelníku: Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Dále sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ACE se základnou AC, jehož ramena AE, CE mají délku 5. To lze, protože $\frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{5} < 5$. Nad přeponou CE pak sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CDE s odvěsnami $|CD| = 3$, $|DE| = 4$. Úloha má sice více řešení, protože při konstrukci bodu E

i bodu D máme vždy dvě možnosti, avšak jen jeden pětiúhelník požadovaných vlastností je konvexní (obr. 3).

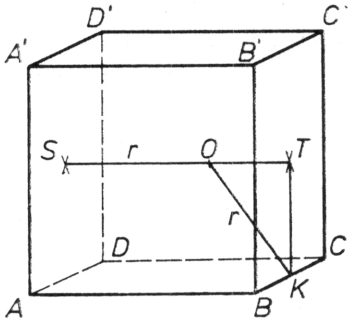


Obr. 3

Z - I - 6

Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 10. Kulová plocha protíná stěnu BCC' v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$ a prochází středem S protější stěny $ADD'A'$. Určete střed a poloměr této kulové plochy.

Řešení. Označme O střed uvažované kulové plochy a r její poloměr. Protože protíná stěnu BCC' v kružnici vepsané čtverci $BCC'B'$, leží její střed O na přímce, která prochází středem T tohoto čtverce a je k jeho rovině kolmá. Tato přímka protíná stěnu ADD' ve středu S čtverce $ADD'A'$ (obr. 4). V něm se kulová plocha stěny $ADD'A'$ dotýká. Označme ještě K střed úsečky BC; uvažovaná kulová plocha jím prochází, proto je $|OK| = r$. Bod O leží na polopřímce ST, $|SO| = r$, proto je $|OT| = 10 - r$ nebo $|OT| = r - 10$, podle toho, zda je r větší nebo menší než 10. Užitím Pythago-



Obr. 4

rovy věty na pravoúhlý trojúhelník OTK dostáváme pro r rovnost

$$r^2 - (10 - r)^2 = 25,$$

odkud plyne $r = 6{,}25$. Střed O naší kulové plochy leží na polopřímce ST ve vzdálenosti 6,25 od bodu S.

ÚLOHY II. KOLA

Z - II - 1

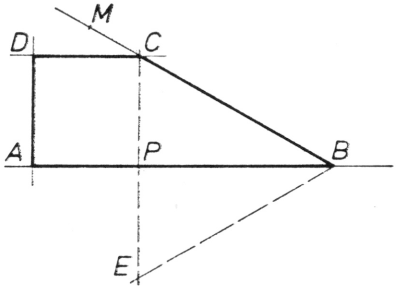
Třináctinásobný rozdíl dvou dvojciferných čísel je devětkrát větší než jejich součet. Najděte všechny takové dvojice.

Řešení. Označíme-li hledaná čísla x, y, má platit $13(x - y) = 9(x + y)$, tedy $4x = 22y$. Na rozdíl od podobné úlohy v I. kole nemůžeme nyní z poslední rovnice tvrdit, že číslo x je dělitelné číslem 22. Rovnici musíme nejdříve dělit dvěma, dostaneme $2x = 11y$. Čísla 2 a 11 jsou nesoudělná, a proto musí být číslo x dělitelné číslem 11. Protože je dvojciferné, přicházejí v úvahu čísla 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, a žádná jiná. Vynásobíme-li každé z těchto čísel dvěma a dělíme číslem 11, dostaneme příslušnou hodnotu y: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. První čtyři nejsou dvojciferná, řešením úlohy jsou tyto čtyři dvojice: (55, 10), (66, 12), (77, 14), (88, 16) a (99, 18).

Z - II - 2

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, pro který platí $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$ a úhel při vrcholu A je pravý. Vypočtěte délky stran AD, CD.

Řešení. Sestrojíme úsečku AB délky 8, dále polopřímku BM tak, aby $|\sphericalangle ABM| = 30°$ (obr. 5), na ní bod C tak, aby $|BC| = 6$. Bodem C vedeme rovnoběžku s přímkou AB, její průsečík s kolmicí k přímce AB vedenou bodem A je



Obr. 5

vrchol D. Označme P patu kolmice vedené bodem C k přímce AB a E bod souměrně sdružený k bodu C podle přímky AB. Trojúhelník CBE je rovnostranný, protože $|CB| = |CE|$ a $|\sphericalangle CBE| = 60°$. Podle Pythagorovy věty nebo podle vzorce pro velikost výšky v rovnostranném trojúhelníku je $|PB| = 3\sqrt{3}$, a tudíž $|CD| = |AB| - |PB| = 8 - 3\sqrt{3}$, $|AD| = |PC| = 3$.

Z - II - 3

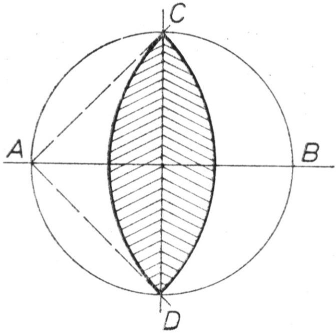
Dřevěnou krychli o hraně délky 7 cm natřeme červeně a pak rozřízneme rovinnými řezy na 7^3 krychliček, z nichž každá bude mít hranu dlouhou 1 cm. Kolik krychliček bude mít jednu červenou stěnu, kolik bude mít dvě červené stěny a kolik tři?

Řešení. Ty krychličky, které vzniknou z rohů velké krychle, budou mít každá tři červené stěny. Takových krychliček je 8. Ty krychličky, které jsou umístěny při hranách velké krychle, avšak nikoli v rozích, mají obarvené dvě stěny. Krychle má 12 hran, při každé hraně je 5 krychliček uvažovaného typu, celkem tedy 60. Jednu červenou stěnu budou mít ty krychličky, které leží při stěnách původní krychle, nikoli však při hranách. Při každé stěně je jich 25, celkem $6 . 25 = 150$. Výsledek je tudíž 150, 60, 8.

Z - II - 4

Na kružnici k o poloměru $r = 10$ cm jsou zvoleny body A, B, C, D tak, že AB a CD jsou kolmé průměry kružnice k. Vypočtěte obsah průniků kruhů, které jsou ohraničeny kružnicemi procházejícími body C, D, když jedna z nich má střed v bodě A, druhá v bodě B.

Řešení. Úhel CAD je pravý (obr. 6), protože $ABCD$ je čtverec. Vypočítáme obsah čtvrtkruhu ohraničeného poloměry



Obr. 6

AC, AD, odečteme obsah trojúhelníku ACD. Tím dostaneme obsah jedné ze dvou shodných kruhových úsečí, ze kterých se skládá průnik kruhů ze zadání úlohy. Hledaný obsah je proto

$$P = 2\left(\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2\right), \text{ kde je } a = |AC| = r\sqrt{2} = 10\sqrt{2},$$

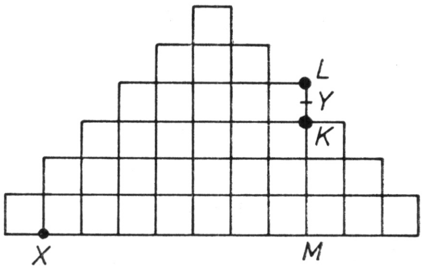
tedy

$$P = 100(\pi - 2) \doteq 114.$$

Úlohy připravil KV MO Středočeského kraje

Z - III - 1

Mnohoúhelník na obr. 7, který se skládá z 36 čtverců o straně 7 mm, rozdělte přímkou procházející bodem X na dva obrazce o stejném obsahu.



Obr. 7

Řešení. Spojíme-li bod X přímkou s bodem K, skládá se ta část mnohoúhelníku, která leží pod přímkou XK, z trojúhelníku XMK a šesti čtverců o straně 7 mm; celkový obsah je $\frac{1}{2}7.7.3.7 + 6.7^2 = 16{,}5.7^2$ (mm^2), což je méně než polovina obsahu celého mnohoúhelníku. Vedeme-li přímku bodem X a bodem L, skládá se část mnohoúhelníku pod přímkou XL opět z šesti čtverců o straně 7 mm a z trojúhelníku XML; celkový obsah této části je $\frac{1}{2}7.7.4.7 +$

$+ 6.7^2 = 20.7^2$ (mm^2). To je více než polovina obsahu celého mnohoúhelníku. Hledaná přímka bude proto procházet některým bodem Y na úsečce KL. Označme v vzdálenost bodu Y od bodu K. Obsah části mnohoúhelníku pod přímkou XY se pak rovná $\frac{1}{2}\,7.7.(3.7 + v) + 6.7^2$ a to má být polovina obsahu celého mnohoúhelníku, tedy 18.7^2, odkud plyne $v = 3$ mm. Tím je bod Y určen, a tím též hledaná přímka.

Z - III - 2

Součet tří celých kladných čísel, z nichž jedno se rovná součinu zbývajících dvou, je 47. Která jsou to čísla? Najděte všechna řešení úlohy.

Řešení. Hledaná čísla označíme x, y, z. Nechť se číslo z rovná součinu zbývajících, tedy $z = xy$. Podle podmínky úlohy má platit $x + y + xy = 47$, což můžeme psát ve tvaru $(x + 1)(y + 1) = 48$. Protože x, y jsou kladná celá čísla, jsou čísla $x + 1$, $y + 1$ celá a větší než 1. Rozložme číslo 48 v součin dvou celých čísel větších než 1, dostaneme tyto možnosti (nepřihlížíme k pořadí činitelů): $48 = 2.24$, $48 = 3.16$, $48 = 4.12$ a $48 = 6.8$. Čísla x, y jsou pak vždy o 1 menší než vypsané činitele, číslo z je součinem čísel x, y. Dostaneme tak čtyři trojice čísel, které jsou řešením úlohy: (1, 23, 23), (2, 15, 30), (3, 11, 33) a (5, 7, 35).

Z - III - 3

Na číselnou osu umístíme do obrazu čísla O figurku. Figurkou pohybujeme tak, že ji při každém tahu přemístíme do obrazu sousedního celého čísla, doprava nebo doleva. Figurka se může vracet, obrazem některého čísla může projít několikrát. Z obrazu čísla O se máme dostat do obrazu čísla 5 právě devíti tahy. Kolika různými cestami může figurka jít?

Řešení. Je zřejmé, že z devíti tahů musíme sedmkrát táhnout doprava (k většímu číslu) a dvakrát doleva. Záleží teď na tom, při kterých dvou tazích táhneme doleva. Možností je tolik, kolika způsoby je možno vybrat dvě čísla z čísel 1, 2, ..., 9. To je možno 36 způsoby.

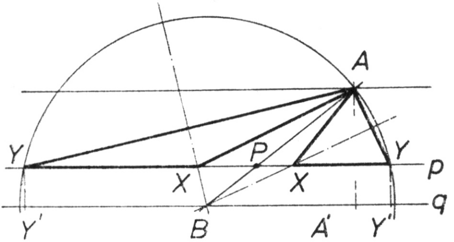
Z - III - 4

Je dána přímka p a na ní bod P. Narýsujte úsečku AB, která obsahuje bod P, jestliže je vzdálenost bodu A od přímky p 3 cm, vzdálenost bodu B od přímky p se rovná 1,5 cm a $|AP| = 5$ cm. Na přímce p sestrojte body X, Y tak, aby byl trojúhelník AXY rovnoramenný s rameny XA, XY a aby přímka BX půlila úhel AXY. Vypočítejte velikost základny rovnoramenného trojúhelníku AXY.

Řešení. Ve vzdálenosti 3 cm od přímky p sestrojíme přímku rovnoběžnou s přímkou p a zvolíme na ní bod A tak, aby $|AP| = 5$ cm. Bod B leží na polopřímce opačné k polopřímce PA a na přímce q rovnoběžné s přímkou p ve vzdálenosti 1,5 cm. Je-li trojúhelník AXY rovnoramenný se základnou AY a je-li přímka BX osou úhlu AXY, je tato přímka i osou základny AY. Proto je $|BA| = |BY|$. Bod Y tedy sestrojíme jako průsečík přímky p a kružnice o středu B, procházející bodem A. Takové průsečíky jsou dva. Zvolíme-li libovolný z nich za bod Y, sestrojíme k němu bod X

jako průsečík přímky p s osou úsečky AY. Úloha má dvě řešení (obr. 8). Označme A' a Y' paty kolmic vedených body A, Y na přímku q. Z pravoúhlých trojúhelníků BAA' a BYY' plyne (všechny vzdálenosti udáváme v cm):

$$|BA'| = \sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2} = 6,$$
$$|BY'| = \sqrt{7{,}5^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$



Obr. 8

Při jednom řešení je $|A'Y'| = |BY'| - |BA'| = 3\sqrt{6} - 6$, pro druhé řešení platí $|A'Y'| = |BY'| + |BA'| = 3\sqrt{6} + 6$. Dále je $|AY|^2 = |A'Y'|^2 + 3^2$, takže $|AY|^2 = 9(11 - 4\sqrt{6})$ při prvním řešení a $|AY|^2 = 9(11 + 4\sqrt{6})$ při druhém řešení.

ÚLOHY III. KOLA V SSR

Z - III - 1

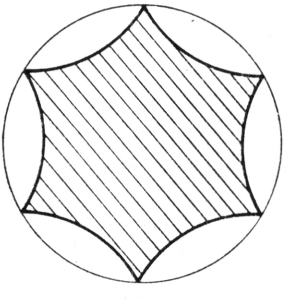
K dvojcifernému prirodzenému číslu pripočítajte prirodzené číslo k nemu obrátené, tj. číslo, ktoré dostanete zámenou číslic daného dvojciferného čísla. Nájdite všetky dvojciferné prirodzené čísla, o ktorých platí, že súčet daného čísla a čísla k nemu obráteného je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Řešení. Je-li dané číslo $10a + b$, je obrácené číslo $10b + a$, jejich součet je $11 (a + b)$. Má-li být toto číslo druhou mocninou přirozeného čísla, musí být $a + b$ vhodným násobkem čísla 11, a protože nemůže být větší než 18, musí být $a + b = 11$. Řešením úlohy jsou dvojciferná čísla 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 a 92.

Z - III - 2

Pomocou kruhovej formy s polomerom 10 cm vykrojila Anička nasledujúci koláčik (obr. 9). Určte veľkosť plošného obsahu koláčika. (Vrcholy koláčika sú vrcholmi pravidelného šesťuholníka.)

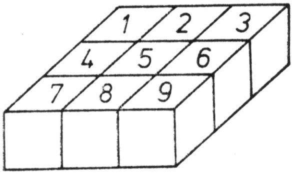
Řešení. $(3\sqrt{3} - \pi)\, 10^2 \doteq 205\ \text{cm}^2$, stačí od obsahu šestiúhelníku odečíst rozdíl obsahů kruhu a šestiúhelníku.



Obr. 9

Z - III - 3

Drevený kváder s rozmermi 3 cm $\times$ 3 cm $\times$ 1 cm celý zafarbíme na červeno, potom ho 4 rovinami rozrežeme na 9 kociek s rozmermi 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm. Vrchné steny kociek označíme 1 až 9 (obr. 10) a kocky pomiešame. Koľkými rôznymi spôsobmi sa dá z kociek opäť zložiť červený kváder, v ktorom sú všetky čísla na hornej stene?

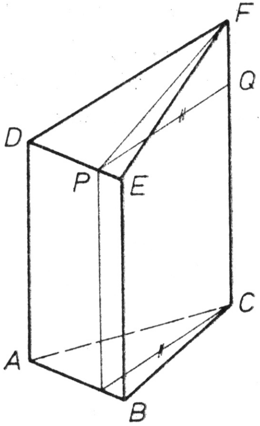


Obr. 10

Řešení. Kostka číslo 5 musí být vždy uprostřed a kostky 1, 3, 7 a 9 v rozích. Celkem máme $4.3.2.1 = 24$ možností jejich umístění. Rovněž tak máme 24 možností pro umístění kostek s čísly 2, 4, 6 a 8 na místa zbývající. Celkem máme $24.24 = 576$ různých možností, jak složit červený kvádr. To považujeme však za různé i takové dva kvádry, z nichž jeden dostaneme pouhým otočením z druhého. Jinak jich bude jen $576 : 4 = 144$.

Z - III - 4

Je daný zrezaný 3-boký hranol *ABCDEF*, veľkosť hrany *AB* je 10 cm, veľkosť hrany *AD* je 13 cm, veľkosť *BE* je tiež 13 cm a veľkosť hrany CF je 16 cm (obr. 11). Obsah hornej podstavy je 25 cm^2. Zistite obsah dolnej podstavy.



Obr. 11

Řešení. Velikost výšky na stranu DE v trojúhelníku DEF je 5 cm. Označme P patu této výšky a Q bod na úsečce CF, pro který je $|CQ| = 13$ cm. Podle Pythagorovy věty vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku PQF velikost úsečky $|PQ| = 4$ cm. To je zároveň velikost výšky v trojúhelníku DEQ a také velikost výšky na stranu AB v trojúhelníku ABC. Jeho obsah je proto 20 cm^2.