29. ročník matematické olympiády

Kategória B

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 29. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1979-1980. 21. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 78–102.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404729

Kategória B

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

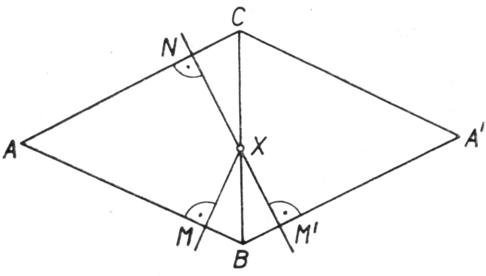
B - P - 1

Je dané kladné číslo c, rovina a v nej dve rôznobežky p, q.

a) Určte množinu všetkých bodov X danej roviny, pre ktoré je súčet vzdialeností od priamok p, q rovný c.

b) Určte množinu všetkých bodov X danej roviny, pre ktoré sa absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od priamok p, q rovná číslu c.

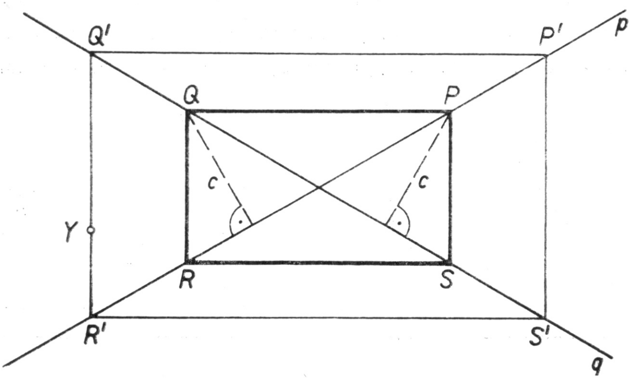
Riešenie. a) Pri riešení úlohy využijeme túto vlastnosť rovnoramenného trojuholníka (obr. 24): Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou BC a body A, A' sú súmerne



Obr. 24

združené podľa priamky BC. Ak je X ľubovoľný bod úsečky BC a M päta kolmice vedenej z bodu X na priamku BA, prejde pri osovej súmernosti kolmica XM do kolmice XM' k priamke BA'. Pretože $BA' \parallel CA$, je $XM' \parallel XN$, kde N je päta kolmice z bodu X na priamku AC a platí $|XM| + |XN| = |XM'| + |XN| = |NM'|$, čo je dĺžka výšky trojuholníka ABC na stranu AC.

Nech teraz P, R sú také body priamky p, ktoré majú od priamky q s ňou rôznobežnej vzdialenosť c (pozri obr. 25),



Obr. 25

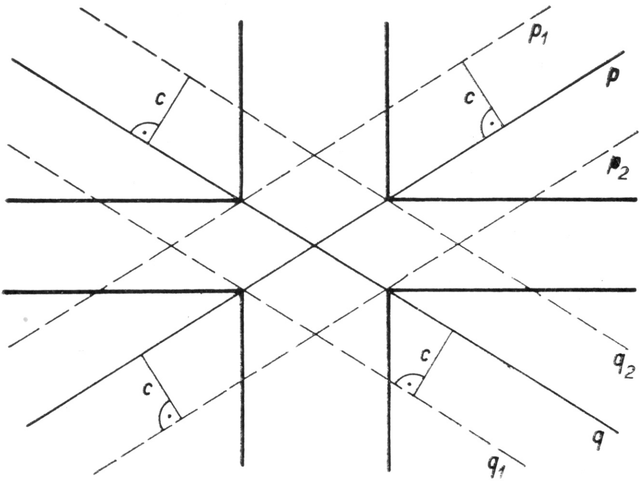
a Q, S zasa také body priamky q, ktorých vzdialenosť od priamky p sa rovná c. Na základe vyššie uvedenej úvahy má každý bod hranice pravouholníka $PQRS$ od priamok p, q súčet vzdialeností rovný c.

Ak je Y ľubovoľný bod roviny rôznobežiek p, q, ktorý neleží na hranici pravouholníka $PQRS$, potom možno zostrojiť pravouholník $P'Q'R'S'$, na hranici ktorého bude ležať bod Y tak, že bude rôzny od pravouholníka $PQRS$, a preto súčet vzdialeností bodu Y od priamok p, q bude rôzny od c.

Množinou bodov X požadovaných vlastností je teda hranica pravouholníka $PQRS$.

b) Nech X je ľubovoľný bod hľadanej množiny. Označme d_p jeho vzdialenosť od priamky p a d_q vzdialenosť od priamky q. Podľa podmienok úlohy musí platiť: $|d_p - d_q| = c$, čo znamená, že buď $d_p = d_q + c$, alebo $d_q = d_p + c$.

Ak je $d_p = d_q + c$, je vzdialenosť bodu X od priamky p väčšia alebo rovná c. Bod X musí preto ležať v niektorej z polrovín ohraničených priamkami p_1, resp. p_2, neobsahujúcej priamku p (obr. 26), pričom p_1, p_2 sú rovnobežky s priam-



Obr. 26

kou p, ktoré majú od nej vzdialenosť c. Ak hľadaný bod X leží v príslušnej polrovine ohraničenej priamkou p_1 vrátane tejto priamky, je $d_p = d_{p_1} + c$ čiže $d_{p_1} = d_q$. Bod X leží teda na niektorej z osí uhla priamok p_1 a q v príslušnej polrovine.

Obrátene, každý bod X, ktorý leží na niektorej z týchto dvoch polpriamok, vyhovuje podmienke $d_p = d_q + c$.

Analogickou úvahou sa dokáže, že hľadanej množine patria všetky body osí uhlov priamok p_2 a q v príslušnej polrovine.

Ak vyjdeme z rovnosti $d_q = d_p + c$, dostaneme podobným spôsobom ďalšie dve časti hľadanej množiny. Ak totiž q_1, q_2 sú rovnobežky s priamkou q vo vzdialenosti c, potom hľadanej množine patria osi uhlov priamok p, q_1, resp. p, q_2, v polrovine ohraničenej priamkou q_1, resp. q_2, a neobsahujúcej priamku q.

B - P - 2

Na šachovnici tvaru 20×20 polí je vyznačených 31 navzájom rôznych šachovníc tvaru 8×8. Dokážte, že existuje pole, ktoré patrí aspoň šiestim z vyznačených šachovníc.

Riešenie. Použijeme metódu nepriameho dôkazu. Budeme predpokladať, že tvrdenie úlohy neplatí, tj. že každé pole šachovnice 20×20 patrí najviac piatim vyznačeným šachovniciam tvaru 8×8.

Označme S súčet všetkých polí 31 vyznačených šachovníc, v ktorom je každé pole zahrnuté toľkokrát, koľkým vyznačeným šachovniciam patrí. Zrejme platí: $S = 31 . 8 . 8 = 1984$.

Pokúsme sa súčet S odhadnúť za predpokladu, že každé pole môže patriť najviac piatim vyznačeným šachovniciam. Pre polia v rohoch veľkej šachovnice bude však tento počet ešte menší, ako ukazuje schéma na obr. 27. Podľa toho by malo platiť:

$$S \leqq 4.(1 + 2.2 + 2.3 + 3.4) + (400 - 4.8).5 = 1932,$$

čo však je spor s vyššie určenou hodnotou súčtu S. To znamená, že náš predpoklad bol nesprávny a musí existovať aspoň jedno pole patriace šiestim šachovniciam, ako sme mali dokázať.

5	4	3	2	1
	5	5	4	2
		5	5	3
			5	4
				5

Obr. 27

Iné riešenie. Zaveďme na šachovnici 20×20 súradnice r, s polí tak, že r bude číslo radu počítané oddola nahor a s číslo stĺpca počítané zľava napravo. Významnú úlohu hrajú polia (8, 8), (8, 16), (16, 8), (16, 16). Ľahko sa vidí, že každá šachovnica tvaru 8×8, ktorú možno vyznačiť na šachovnici 20×20, obsahuje práve jedno z nich. Keďže $31 : 4 \geqq 7$, vyplýva z toho, že niektoré z týchto štyroch polí leží dokonca na 8 z 31 vyznačených šachovníc.

B - P - 3

Nájdite všetky reálne čísla a, b, c také, že rovnica

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0 \tag{1}$$

má korene a, b, c.

Riešenie. Nech reálne čísla a, b, c sú koreňmi rovnice (1). Potom ľavú stranu rovnice (1) možno rozložiť na súčin koreňových činiteľov:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c). \tag{2}$$

Vynásobením pravej strany (2) a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x na oboch stranách takto získanej identicky platnej rovnosti dostaneme:

(3) $a + b + c = a$ čiže $b + c = 0$,

(4) $ab + ac + bc = b$ čiže, vzhľadom na (3), $bc = b$,

(5) $abc = c$.

Ak je $c = 0$, je podľa (3) tiež $b = 0$. Pre ľubovoľné reálne a má potom rovnica (1) tvar

$$x^3 - ax^2 = 0$$

s koreňmi a, 0, 0.

Ak je $c \neq 0$, potom je podľa (3) tiež $b \neq 0$, z čoho vzhľadom na (4) vyplýva $c = 1$. Potom však podľa (3) je $b = -1$ a podľa (5) tiež $a = -1$.

Po dosadení týchto koeficientov do (1) dostaneme rovnicu

$$-x^3 - x^2 + x + 1 = 0,$$

ktorej čísla 1 a -1 vyhovujú, pričom číslo -1 je dokonca dvojnásobným koreňom.

Úloha má teda dve riešenia: 1) a ľubovoľné, $b = 0$, $c = 0$; 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$.

B - P - 4

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x + y = s,$$

(1)

$$ax + 2y = 0$$

s neznámymi x, y, pričom a, s sú reálne čísla. Urobte diskusiu riešiteľnosti sústavy vzhľadom na čísla a, s.

Riešenie. Ak od dvojnásobku prvej rovnice odčítame druhú, dostaneme

(2) $$(2 - a)\, x = 2s.$$

Ak je $a = 2$, $s \neq 0$, rovnica (2) zrejme riešenie nemá. Pre $a = 2$, $s = 0$ má nekonečne mnoho riešení tvaru $x = c$, $y = -c$, kde c je reálne číslo.

Ak je $a \neq 2$, môže rovnici (2) vyhovovať len číslo $x = \dfrac{2s}{2 - a}$, ku ktorému z prvej rovnice sústavy (1) ľahko určíme

$$y = \frac{as}{2 - a}.$$

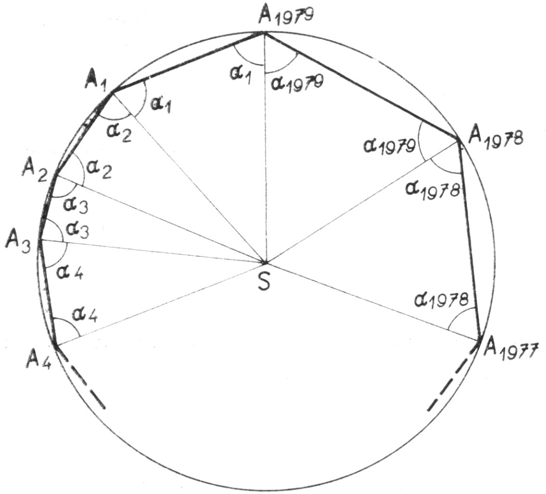
Dosadením sa ľahko presvedčíme, že táto dvojica čísel x, y sústave (1) skutočne vyhovuje.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - I - 1

Do kružnice je vpísaný 1979-uholník $A_1A_2A_3 \ldots A_{1979}$. Ak leží stred kružnice vo vnútri 1979-uholníka, potom súčet uhlov pri vrcholoch $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{1977}$ je menší než $\dfrac{1977}{2}\pi$. Dokážte.

Riešenie. Označme (obr. 28) S stred kružnice, do ktorej je vpísaný 1979-uholník, $\alpha_1 = \sphericalangle A_{1979}A_1S$, $\alpha_2 = \sphericalangle A_1A_2S$, $\alpha_3 = \sphericalangle A_2A_3S$, $\ldots$, $\alpha_{1979} = \sphericalangle A_{1978}A_{1979}S$. Úsečky A_1S,



Obr. 28

$A_2S, \ldots, A_{1979}S$ rozdelia daný mnohouholník na 1979 rovnoramenných trojuholníkov. Z toho vyplýva, že vnútorné uhly pri vrcholoch $A_1, A_2, \ldots, A_{1979}$ 1979-uholníka sú v uvedenom poradí $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \alpha_{1979} + \alpha_1$. Preto pre súčet s všetkých vnútorných uhlov 1979-uholníka platí

$$s = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{1979}) = 1977\pi.$$

Súčet vnútorných uhlov pri vrcholoch $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{1977}$ však bude

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{1977} + \alpha_{1978} =$$

$$= \frac{s}{2} - \alpha_{1979} < \frac{1977}{2} \pi,$$

čo sme mali dokázať.

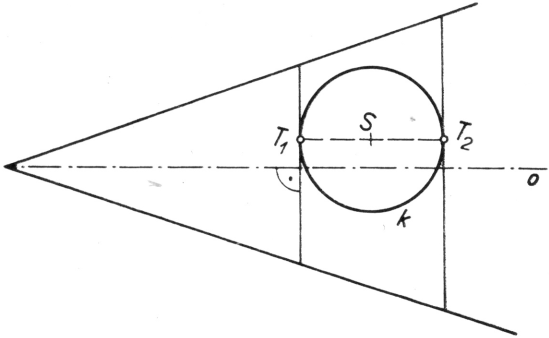
Poznámka. Z postupu dôkazu je zrejmé, že platí nasledujúca všeobecná veta: Nech n je nepárne prirodzené číslo. Ak n-uholník je vpísaný do kružnice, ktorej stred leží v jeho vnútri, potom súčet uhlov pri vrcholoch n-uholníka s nepárnymi indexami je menší než $\frac{n-2}{2}\pi$. Pre $n = 3$ dostaneme ako dôsledok známu vetu: Ak stred opísanej kružnice leží vo vnútri trojuholníka, potom je trojuholník ostrouhlý.

B - I - 2

V rovine je daný konvexný uhol a v ňom kružnica. Zostrojte na kružnici body, pre ktoré je súčet vzdialeností od ramien daného uhla minimálny.

Riešenie. Využijeme výsledok časti a) riešenia úlohy B - P - 1, podľa ktorého je množinou bodov v dutom uhle, pre ktoré je súčet vzdialeností od ramien tohto uhla dané číslo, úsečka kolmá k osi uhla. Je zrejmé, že tento súčet je tým väčší, čím väčšia je vzdialenosť úsečky od vrcholu uhla. Z tejto úvahy vyplýva, že minimum pre všetky body danej kružnice sa dosiahne v prípade dotykového bodu, v ktorom sa dotýka kružnice priamka kolmá na os uhla, a to bližšia k vrcholu uhla z oboch priamok tejto vlastnosti (pozri obr. 29).

Poznamenajme, že dotykový bod T_2 druhej z oboch priamok je tým bodom kružnice, pre ktorý je súčet vzdialeností od ramien daného uhla maximálny.



Obr. 29

B - I - 3

Je daný trojuholník ABC, ktorého výšky označíme v_a, v_b, v_c. Zistite, či existuje trojuholník UVW tak, aby $|UV| = v_a$, $|VW| = v_b$, $|WU| = v_c$ a aby strany UV, VW, WU boli v uvedenom poradí kolmé na strany BC, CA a AB trojuholníka ABC.

Riešenie. Predpokladajme, že trojuholník UVW žiadaných vlastností existuje. Vzhľadom na vzájomnú kolmosť odpovedajúcich si strán oboch trojuholníkov majú oba trojuholníky rovnako veľké odpovedajúce si uhly. Z toho vyplýva, že trojuholník UVW je podobný trojuholníku ABC. Existuje preto číslo $k > 0$ tak, že pre dĺžky strán trojuholníka ABC (pri obvyklom označení) platí

$$a = kv_a, \ b = kv_b, \ c = kv_c.$$

Z toho vyplýva, že taktiež platí

$$av_a = kv_a^2, \ bv_b = kv_b^2, \ cv_c = kv_c^2.$$

Ľavé strany týchto rovností majú všetky rovnakú hodnotu - dvojnásobok plošného obsahu trojuholníka ABC, čo znamená, že sa musia rovnať aj ich pravé strany. Z toho však vyplýva, že platí

$$v_a = v_b = v_c \text{ a taktiež } a = b = c.$$

Tieto vlastnosti však môže mať len rovnostranný trojuholník.

Na druhej strane je zrejmé, že rovnostranný trojuholník podmienkam úlohy vyhovuje.

B - I - 4

Na šachovnici tvaru 1000×1000 stojí 800 000 figuriek. Potom na obvode niektorej jej časti tvaru 8×8 stojí aspoň 22 figuriek. Dokážte.

Riešenie. Podobne ako pri riešení úlohy B - P - 2 použijeme metódu nepriameho dôkazu. Najskôr zistíme, koľko rôznych šachovníc tvaru 8×8 sa dá vyznačiť na danej veľkej šachovnici. Je zrejmé, že prvý rad malej šachovnice možno umiestniť len na ľubovoľnom z prvých 993 radov veľkej šachovnice a rovnako tomu je s umiestnením prvého stĺpca malej šachovnice. Z toho vyplýva, že na veľkej šachovnici možno vyznačiť celkom 993^2 šachovníc tvaru 8×8.

Každá šachovnica tvaru 8×8 má celkom 28 obvodových polí. Z toho vyplýva, že nejaké pole veľkej šachovnice môže byť obvodovým poľom najviac 28 rôznych malých šachovníc. Túto vlastnosť však majú len tie polia, ktoré ležia aspoň na ôsmom rade alebo stĺpci od okraja veľkej šachovnice. Týchto polí je teda práve 986^2. Nazvime ich strednými poliami a ostatné polia veľkej šachovnice budeme volať okrajovými poliami. Označme S počet figuriek stojacich na obvodových poliach šachovníc tvaru 8×8, v ktorom je každá figúrka započítaná toľko ráz, na obvode koľkých rôznych malých šachovníc stojí. Predpokladajme teraz, že na obvode každej malej šachovnice stojí najviac 21 figuriek. Potom musí byť

$$(1) \qquad S \leqq 993^2 . 21 = 20\,707\,029.$$

Nech S_1 je tá časť súčtu S prislúchajúca stredným 986^2 poliam. Zrejme

$$(2) \qquad S \geqq S_1.$$

Všetkých figuriek stojacich na veľkej šachovnici je 800 000, okrajových polí je $1000^2 - 986^2$. Na stredných poliach musí preto stáť aspoň $800\,000 - (1000^2 - 986^2)$ figuriek. Do súčtu S_1 počítame každú z nich s násobnosťou 28, čiže platí

$$S_1 \geqq 28 . [800\,000 - (1000^2 - 986^2)] = 21\,621\,488,$$

čo je spor s (2) vzhľadom na (1).

Poznámka. Pracnejším odhadom so započítaním aj figuriek na okrajových poliach veľkej šachovnice do S_1 možno dokonca dokázať, že existuje šachovnica tvaru 8×8, na obvodových poliach ktorej stojí aspoň 23 figuriek.

B - I - 5

Koľko riešení má v obore reálnych čísel sústava rovníc

$$ax + \frac{b}{y} = 1,$$

$$by + \frac{a}{x} = 1$$

s neznámymi x, y? Urobte diskusiu vzhľadom na dané reálne čísla a, b.

Riešenie. Uvažujme najskôr o prípade $a = 0$. Vtedy sa sústava redukuje na $\frac{b}{y} = 1$, $by = 1$. Ak je $b = 1$ alebo $b = -1$, má táto sústava nekonečne mnoho riešení: $y = b$, x ľubovoľné. Pre ostatné hodnoty b sústava riešenie nemá.

Nech $a \neq 0$. Je zrejmé, že počet riešení sústavy sa nezmení, ak navzájom vymeníme čísla a, b. Preto pri $b = 0$ má sústava nekonečne mnoho riešení, ak $a = 1$ alebo $a = -1$, a pri ostatných hodnotách a riešenie nemá.

Zostáva teda vyšetriť prípad $ab \neq 0$. Nech x, y je riešenie danej sústavy. Potom musí byť $x \neq 0$, $y \neq 0$. Z druhej rovnice vyjadrime y:

$$(1) \qquad y = \frac{x - a}{bx}$$

a dosaďme do prvej rovnice sústavy. Dostaneme po jednoduchej úprave, že x je koreňom kvadratickej rovnice

$$(2) \qquad ax^2 - (a^2 - b^2 + 1)\, x + a = 0.$$

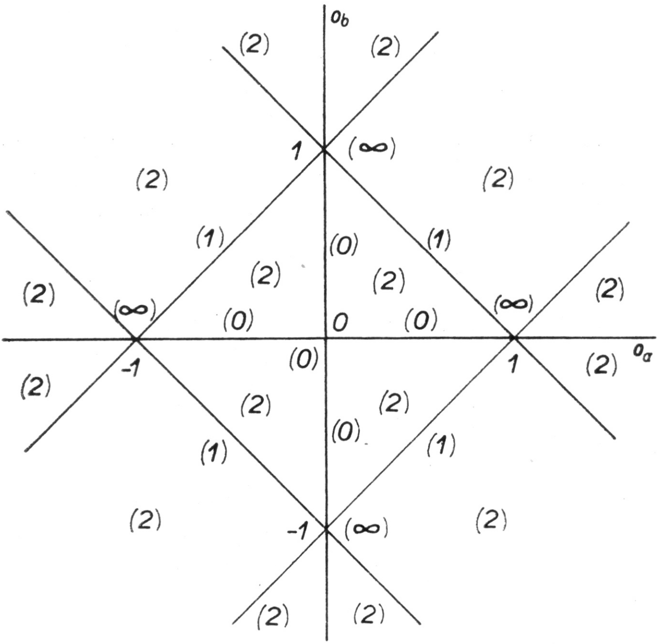
Obrátene, ak x je koreňom kvadratickej rovnice (2), potom — ako sa ľahko presvedčíme — musí platiť: $x \neq 0$, $x \neq a$. Po vydelení rovnice (2) číslom $x - a$ a jednoduchej úprave dostaneme

$$ax + \frac{b}{\dfrac{x - a}{bx}} = 1.$$

Z toho je zrejmé, že ak pre každé riešenie x kvadratickej rovnice (2) položíme y podľa (1), dostaneme dvojicu x, y, ktorá je riešením danej sústavy. Znamená to teda, že daná sústava je ekvivalentná so sústavou (1), (2), z čoho je zrejmé, že počet riešení danej sústavy je zhodný s počtom riešení kvadratickej rovnice (2). Diskriminant D tejto rovnice upravíme:

$$D = (a^2 - b^2 + 1)^2 - 4a^2 = (a^2 - b^2 + 1 - 2a).$$
$$.(a^2 - b^2 + 1 + 2a) = (a - 1 - b)(a - 1 + b)(a + 1 - b).$$
$$.(a + 1 + b).$$

Z toho vyplýva, že v prípade $ab \neq 0$ má daná sústava jedno riešenie, ak čísla a, b vyhovujú niektorej z rovností $a \pm b = \pm 1$ a vo všetkých ostatných prípadoch má dve riešenia. Výsledok diskusie znázorníme prehľadne v súradnicovej



Obr. 30

rovine a, b (pozri obr. 30), v ktorej vyššie uvedené rovnosti určujú dve dvojice rovnobežných priamok. Pri jednotlivých priamkach, ich priesečníkoch a v častiach roviny, na ktoré je týmito priamkami rozdelená, sú vyznačené počty riešení danej sústavy.

B - I - 6

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel x, y, z také, že

$$x^3 + y^3 + z^5 = 1979,$$
$$y^2 z = x.$$

Riešenie. Nech x, y, z sú prirodzené čísla, ktoré vyhovujú obom daným rovniciam. Pretože $13^3 = 2\,197 > 1979$ a $5^5 = 3\,125 > 1979$, vyplýva z prvej rovnice, že musí platiť

$$x \leqq 12, y \leqq 12, z \leqq 4.$$

Podobne dostaneme z druhej rovnice odhad pre y^2:

$$y^2 \leqq y^2 z = x \leqq 12,$$

z ktorého vyplýva, že $y \leqq 3$.

Pomocou vykonaných odhadov sa nám podarilo počet usporiadaných trojíc prirodzených čísel, ktoré môžu vyhovovať daným rovniciam, obmedziť na 144. Ich preskúšanie by však aj tak zabralo príliš mnoho času. Efektívnejšie bude, ak postupne preskúmame prípady, ktoré môžu nastať pri pevnej voľbe tej neznámej, ktorá má najmenší rozsah, tj. y.

Nech $y = 1$. Potom z druhej rovnice máme $x = z$ a z prvej rovnice po dosadení a jednoduchej úprave dostaneme

$$z^3 (1 + z^2) = 1978.$$

Ľahko sa presvedčíme, že tejto rovnici nevyhovuje žiadne z prirodzených čísel $z \leqq 4$.

Pre $y = 2$ z druhej rovnice dostaneme $x = 4z$ a z prvej rovnice analogicky ako v predchádzajúcom prípade

$$z^3 (64 + z^2) = 1971.$$

Tejto rovnici vyhovuje $z = 3$, čomu odpovedá $x = 12$. Dosadením sa ľahko presvedčíme, že trojica 12, 2, 3 skutočne vyhovuje obom daným rovniciam.

Pre $y = 3$ je $x = 9z$ a z prvej rovnice máme

$$z^3 (729 + z^2) = 1952,$$

čomu však žiadne z prirodzených čísel $z \leqq 4$ nevyhovuje.

Podmienkam úlohy vyhovuje teda jediná trojica prirodzených čísel:

$$x = 12, y = 2, z = 3.$$

B - II - 1

Koreňmi rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sú reálne čísla x_1, x_2, x_3, koreňmi rovnice $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ sú čísla x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3.

Vyjadrite koeficienty A, B, C pomocou koeficientov a, b, c.

Riešenie. Mnohočlen na ľavej strane rovnice možno podľa predpokladu rozložiť na súčin koreňových činiteľov takto:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Z toho po vynásobení činiteľov v súčine na pravej strane identickej rovnosti a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách s koeficientami mnohočlena na ľavej strane dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} &-a = x_1 + x_2 + x_3, \quad b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \\ (1) \qquad &-c = x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Analogickým postupom pre koeficienty druhej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} -A &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \\ (2) \qquad B &= x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2x_3^2, \\ -C &= x_1^2x_2^2x_3^2. \end{aligned}$$

Ak dosadíme z (1) do pravých strán (2), dostaneme

$$A = -b, \; B = ac, \; C = -c^2.$$

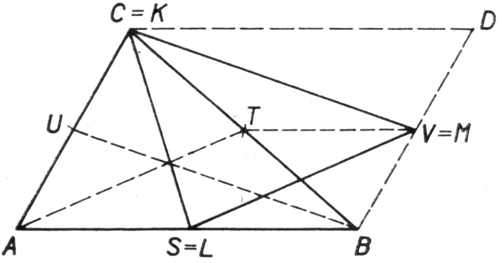
B - II - 2

Je daný trojuholník ABC s obsahom P. Nech S, T, U sú stredy úsečiek AB, BC, CA.

Ukážte, že existuje trojuholník KLM tak, že $KL \parallel CS$, $LM \parallel AT$, $MK \parallel BU$, $|KL| = |CS|$, $|LM| = |AT|$, $|MK| = |BU|$, tj. strany trojuholníka KLM sú rovnobežné s ťažnicami trojuholníka ABC a sú taktiež rovnako veľké ako ťažnice tohto trojuholníka.

b) Vyjadrite obsah trojuholníka KLM pomocou P.

Riešenie. a) Doplňme trojuholník ABC na rovnobežník $ABCD$ (obr. 31) a označme V stred úsečky BD. Potom sú $ASVT$ a $BVCU$ rovnobežníky, a preto platí: $SV \parallel AT$, $|SV| = |AT|$, $VC \parallel BU$, $|VC| = |BU|$. To znamená, že požado-



Obr. 31

vané vlastnosti má trojuholník CSV. Stačí preto položi $K \equiv C, L \equiv S, M \equiv V$.

b) Obsah rovnobežníka $ABDK$ je zrejme $2P$. Obsah trojuholníkov ALK a KMD sa rovná $P/2$. Označme W stred úsečky LM, tj. priesečník priamky LM s uhlopriečkou BK rovnobežníka $ABDK$. Potom obsah trojuholníka LBW je štvrtinou obsahu trojuholníka ABT, teda $P/8$. Obsah trojuholníka BMT je rovný zrejme $P/4$ a obsah trojuholníka BMW je jeho polovicou, teda tiež $P/8$. Preto je obsah trojuholníka LBM rovný $P/4$. Z toho už vyplýva, že pre obsah P trojuholníka KLM platí:

$$P' = 2P - 2(P/2) - P/4 = 3P/4.$$

B - II - 3a

Na poliach šachovnice tvaru 8×8 je rozostavených 42 figuriek. Potom na diagonálnych poliach niektorej jej časti tvaru 4×4 stoja aspoň štyri figurky. Dokážte. (Diagonálnymi poliami šachovnice tvaru 4×4 rozumieme 8 polí na jej uhlopriečkach.)

Riešenie. Použijeme metódu nepriameho dôkazu, ktorá sa nám osvedčila pri riešení úloh B - P - 2 a B - I - 4.

Najskôr si uvedomíme, že na šachovnici 8×8 možno vyznačiť celkom $5^2 = 25$ rôznych šachovníc tvaru 4×4. Označme S súčet, ktorý dostaneme, ak každú figurku započítame toľkokrát, na uhlopriečkach koľkých šachovníc tvaru 4×4 stojí.

Ak budeme predpokladať, že na diagonálach každej šachovnice tvaru 4×4 stoja najviac 3 figurky, musí platiť

$$S \leqq 3.25 = 75.$$

Zostavme si teraz tabuľku, v ktorej pre každé pole šachovnice 8×8 vyznačíme, na uhlopriečkach koľkých rôznych šachovníc tvaru 4×4 leží:

1	1	1	2	2	1	1	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	3	5	6	6	5	3	1
2	4	6	8	8	6	4	2
2	4	6	8	8	6	4	2
1	3	5	6	6	5	3	1
1	2	3	4	4	3	2	1
1	1	1	2	2	1	1	1

Je zrejmé, že S bude minimálne, ak figurky budú umiestnené na poliach s najmenšími hodnotami 1, 2, 3, ktorých je celkom

40 a na 2 poliach s hodnotou 4. To však znamená, že v každom prípade musí byť

$$S \geqq 20.1 + 12.2 + 8.3 + 2.4 = 76,$$

čo je spor s (1).

B - II - 3b

Nech a, b sú dané reálne čísla. Nájdite všetky štvorice x_1, x_2, x_3, x_4 nezáporných reálnych čísel, ktoré vyhovujú rovniciam

$$x_1 - x_2 = a, \tag{1}$$

$$x_3 - x_4 = b, \tag{2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Riešenie. Predpokladajme, že nezáporné čísla x_1, x_2, x_3, x_4 vyhovujú sústave (1), (2), (3). Ak do (3) dosadíme z (1) za a a z (2) za b, dostaneme

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2}\ ,$$

z čoho umocnením oboch strán na druhú a jednoduchej úprave dostávame

$$4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 = 0. \tag{4}$$

Všetky sčítance na ľavej strane (4) sú nezáporné, a teda nulové. Z toho vyplýva, že z čísel x_i, $i = 1, 2, 3, 4$ môže byť nenulové najviac jedno. Ak by totiž boli nenulové napríklad čísla x_1, x_2, potom $4x_1x_2 > 0$ a rovnosť (4) nemôže byť splnená. Analogicky vylúčime ostatné prípady. Z toho vzhľadom na (1) a (2) vyplýva, že z čísel a, b aspoň jedno musí byť rovné nule.

1) Nech $a = 0$. Potom z (1) máme $x_1 = x_2$. Uvažujme najskôr o prípade $b \geqq 0$. Potom z (2) a (3) dostaneme

$$x_3 - x_4 = b,\ 2x_1 + x_3 + x_4 = b. \tag{5}$$

Z (5) odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame rovnicu

$$2x_1 + 2x_4 = 0,$$

ktorej jediným nezáporným riešením je dvojica $x_1 = x_4 = 0$. Sústave (1)—(3) vyhovuje preto len štvorica

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = b.$$

V prípade $b < 0$ z (2) máme $x_3 = x_4 + b$ a po dosadení do (3) dostaneme

$$2x_1 + 2x_4 + b = \sqrt{b^2},$$

čiže

$$2x_1 + 2x_4 = -2b,$$

$$x_1 + x_4 = -b. \tag{6}$$

Ak má byť $x_3 = x_4 + b \geqq 0$, musí byť $x_4 \geqq -b$, z čoho vzhľadom na (6) vyplýva $x_1 = 0$ a sústava (1)—(3) má opäť jediné nezáporné riešenie:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \ x_4 = -b.$$

2) Nech $b = 0$. Potom z (2) máme $x_3 = x_4$ a analogickým postupom dostaneme v prípade $a \geqq 0$ jediné riešenie

$$x_1 = a, \ x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

a v prípade $a < 0$ taktiež jediné riešenie

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \ x_2 = -a.$$