27. ročník matematické olympiády

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 114–127.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404703

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

A — III — 1

Nech n je prirodzené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)} \geqq$$
$$\geqq \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}\,. \qquad (1)$$

Ďalej dokážte, že rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}\,.$$

Riešenie. Dôkaz urobíme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ tvrdenie triviálne platí.

Pre $n = 2$ z nerovnosti

$$(\sqrt{a_1 b_2} - \sqrt{a_2 b_1})^2 \geqq 0 \qquad (2)$$

vyplýva

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \geqq 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}$$

a tiež

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \geqq$$
$$\geqq a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}\,,$$

t.j.

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \geqq (\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2})^2.$$

Odtiaľ už vyplýva nerovnosť

$$\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)} \geqq \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2}\,. \tag{3}$$

Naviac, v nerovnosti (2) nastane rovnosť jedine v prípade $\sqrt{a_1 b_2} = \sqrt{a_2 b_1}$, t.j. keď

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Predpokladajme teraz, že nerovnosť (1) platí pre n. Potom na základe už dokázanej nerovnosti (3) dostaneme

$$\sqrt{(a_1 + \ldots + a_{n+1})(b_1 + \ldots + b_{n+1})} =$$
$$= \sqrt{[(a_1 + \ldots + a_n) + a_{n+1}] \cdot [(b_1 + \ldots + b_n) + b_{n+1}]} \geqq$$
$$\geqq \sqrt{(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n)} + \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}}\,.$$

Ak využijeme nerovnosť (1) pre n, tak odtiaľ máme

$$\sqrt{(a_1 + \ldots + a_{n+1})(b_1 + \ldots + b_{n+1})} \geqq$$
$$\geqq \sqrt{a_1 b_1} + \ldots + \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}}\,. \tag{4}$$

Rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n},$$

a súčasne (podľa indukčného predpokladu)

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

A — III — 2

Najděte (alespoň jednu) dvojici čísel k a q tak, aby pro všechna x z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ platilo

$$|\sqrt{1 - x^2} - kx - q| \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) . \qquad (5)$$

Řešení: Má-li nerovnost (5) platit pro všechna x z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, musí platit i pro $x = 0$ a $x = 1$:

$$|1 - q| \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) , \qquad (6)$$

$$|k + q| \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) . \qquad (7)$$

Dále pak

$$|k + 1| \leqq |1 - q| + |k + q| \leqq \sqrt{2} - 1 < 1 ,$$

a tedy nutně $k < 0$.

Pro

$$x = \frac{|k|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

z (5) dostaneme

$$\left|\sqrt{1 - \frac{k^2}{1 + k^2}} - \frac{k \,.\, |k|}{\sqrt{1 + k^2}} - q\right| =$$

$$= |\sqrt{1 + k^2} - q| \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) . \qquad (8)$$

Podle (6) musí platit

$$|\sqrt{1 + k^2} - 1| \leqq |\sqrt{1 + k^2} - q| + |q - 1| \leqq \sqrt{2} - 1$$

a tedy

$$\sqrt{1 + k^2} \leqq \sqrt{2} ,$$

$$1 + k^2 \leqq 2 ,$$

$$|k| \leqq 1 .$$

Podle (7) a (8) dostaneme

$$\left|\sqrt{1+k^2}-|k|\right| \leqq \sqrt{2}-1 .$$

Umocněním pak

$$k^2+1 \leqq k^2+2\,|k|\,(\sqrt{2}-1)+2+1-2\sqrt{2},$$

a tedy

$$|k| \geqq 1 .$$

Tedy nutně musí být $k = -1$.

Po dosazení za $k = -1$ do (6) a (8) dostaneme

$$|1-q| \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) ,$$

$$|\sqrt{2}-q| \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) .$$

Odtud vyplývá, že

$$q = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{2}) .$$

Dokážeme, že $k = -1$, $q = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ skutečně vyhovuje úloze, tj. že platí (5).

Pro každé x z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$0 \leqq \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}(2x^2-2\sqrt{2}\,x+1) ,$$

dále

$$1-x^2 \leqq x^2-2\sqrt{2}\,x+2$$

$$\sqrt{1-x^2} \leqq \sqrt{2}-x$$

$$\sqrt{1-x^2}+x-1 \leqq \sqrt{2}-1 ,$$

a tedy

$$\sqrt{1-x^2}+x-1-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\,. \qquad (9)$$

Zároveň

$$\sqrt{1-x} \leqq \sqrt{1+x}\,,$$

$$1-x \leqq \sqrt{1-x^2}\,,$$

$$0 \leqq \sqrt{1-x^2}+x-1\,,$$

a tedy

$$\sqrt{1-x^2}+x-1-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \geqq -\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\,. \qquad (10)$$

Z nerovností (9) a (10) vyplývá (1), jak jsme měli dokázat.

Řešil *Jan Kratochvíl,* 4.a, gymnázium Pardubice.

A — III — 3

Nech α, β, γ sú uhly trojuholníka. Skúmajme sústavu rovníc

$$x\cos\beta+\frac{1}{z}\cos\alpha=1\,,$$

$$y\cos\gamma+\frac{1}{x}\cos\beta=1\,, \qquad (11)$$

$$z\cos\alpha+\frac{1}{y}\cos\gamma=1\,.$$

a) Ukážte, že $x=\sin\alpha/\sin\gamma$, $y=\sin\beta/\sin\alpha$, $z=$ $=\sin\gamma/\sin\beta$ je riešením sústavy (11).

b) Nájdite všetky riešenia sústavy (11).

Riešenie.

a) Platí

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.\cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = 1 .$$

Podobne sa ukáže, že dané hodnoty x, y, z vyhovujú aj druhej a tretej rovnici sústavy.

b) Rozlíšime dva prípady:

1. Daný trojuholník je pravouhlý. Môžeme predpokladať $\gamma = 90°$ (prípady $\alpha = 90°$ a $\beta = 90°$ sú rovnaké). Sústava (11) má potom tvar

$$x\cos\beta + \frac{1}{z}\cos\alpha = 1$$

$$\frac{1}{x}\cos\beta = 1$$

$$z\cos\alpha = 1$$

a má riešenie

$$x = \cos\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad y \text{ ľubovoľné}$$

a

$$z = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

2. Trojuholník nie je pravouhlý, t. j.

$$\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma \neq 0 .$$

Pretože musí platiť $zxy \neq 0$, musí byť tiež $z \neq \cos \alpha$, $z \neq \dfrac{1}{\cos \alpha}$. Z prvej rovnice potom vyplýva

$$x = \frac{z - \cos \alpha}{z \cos \beta}$$

a z tretej rovnice

$$y = \frac{\cos \gamma}{1 - z \cos \alpha}.$$

Dosadením do druhej rovnice dostaneme rovnicu pre z:

$$\frac{\cos^2 \gamma}{1 - z \cos \alpha} + \frac{z \cos^2 \beta}{z - \cos \alpha} = 1.$$

Po úprave máme kvadratickú rovnicu

$$z^2 \cos \alpha \sin^2 \beta + z (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - 1) + \cos \alpha \sin^2 \gamma = 0 \qquad (12)$$

s diskriminantom

$$D = (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - 1)^2 - 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma.$$

Pretože je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, výpočtom zistíme, že platí

$$\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \beta + \cos^2 (\alpha + \beta) - \cos^2 \alpha - 1 = -2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Odtiaľ vyplýva, že $D = 0$.

Teda kvadratická rovnica (12) má jediný koreň. Dosadením zistíme, že je to $z = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$.

Podľa časti a) má sústava rovníc (11) v tomto prípade jediné riešenie.

A – III – 4

Existuje čtyřstěn $ABCD$, u něhož součet délek hran AB, BC, CD a AD je 12 cm a jehož objem je větší nebo roven $2\sqrt{3}$ cm³?

Řešení. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: má-li čtyřstěn $ABCD$ součet délek hran $|AB| + |BC| + |CD| + |AD|$ roven 12 a zároveň největší možný objem, potom $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$. Důkaz provedeme sporem.

a) Nechť existují dvě různé sousední hrany z dané čtveřice hran. Díky symetrii můžeme předpokládat $|AD| \neq |DC|$.

Všimněme si bodů D', D'' v rovině ACD, které mají stejnou vzdálenost od bodů A, C a pro něž platí

$$|AD'| + |CD'| = |AD''| + |CD''| =$$
$$= |AD| + |CD| = 12 - |AB| - |BC|.$$

Body D', D'' mají největší možnou vzdálenost od roviny ABC, a tedy čtyřstěn daných vlastností s různými sousedními hranami nemá maximální objem, což je spor.

b) Nechť existují dvě různé protější hrany z dané čtveřice, např. $|AB| \neq |CD|$. Podle a) platí $|AD| = |CD|$

a odtud vyplývá $|AB| \neq |AD|$, což je opět spor s a).

Tím je pomocné tvrzení dokázáno.

Pokud roviny ABC a ACD nejsou na sebe kolmé, tak otočením jedné z nich okolo přímky AC do polohy vzájemně kolmé získáme čtyřstěn daných vlastností s větším objemem. Tedy čtyřstěn s maximálním objemem má roviny ABC a ACD na sebe kolmé.

Nechť S je střed hrany AC, $\alpha = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB$. Potom pro objem V čtyřstěnu platí

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{|AC| \cdot |BS|}{2} \cdot |DS| = \tfrac{1}{6}\, |AC| \cdot |BS| \cdot |DS| =$$

$$= \tfrac{1}{6}(2\cos\alpha \cdot |AB|) \cdot (\sin\alpha \cdot |AB|) \cdot (\sin\alpha\, |AB|) =$$

$$= 1/3 \cos\alpha \sin^2\alpha \cdot |AB|^3 .$$

Protože $|AB| = 3$, hledejme maximum funkce

$$f(\alpha) = 9 \cos\alpha \sin^2\alpha = 9\,(\cos\alpha - \cos^3\alpha)$$

na intervalu $(0, \pi/2)$.

Derivace

$$f'(\alpha) = 9 \sin\alpha\, (3\cos^2\alpha - 1)$$

je rovna nule pro $\alpha_0 = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Objem je roven

$$V = 9\,(\cos\alpha_0 - \cos^3\alpha_0) = 9\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\,.$$

Závěr. Požadovaný čtyřstěn skutečně existuje. Jedním z nich je i čtyřstěn $ABCD$, kde $|AB| = |BC| =$

$= |CD| = |AD| = 12$ cm, roviny ABC a ADC jsou na sebe kolmé a $\sphericalangle CAD = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

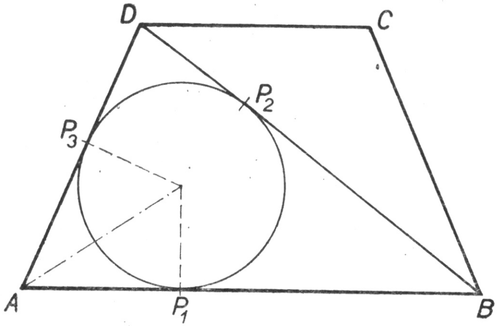
Řešil *Otto Ritter*, 3.d, gymnázium W. Piecka, Praha.

A – III – 5

Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$. Nech A', B', C', D' sú postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BCD, CAD, ABD, ABC. Dokážte, že A', B', C', D' sú vrcholy pravouhlého rovnobežníka.

Riešenie. Zo shodnosti trojuholníkov ABC a ABD vyplýva, že polomery vpísaných kružníc sú rovnaké a teda priamka $C'D'$ je rovnobežná so základňou AB. Podobne je aj $A'B'$ rovnobežná so základňou.

Označíme postupne P_1, P_2, P_3 body dotyku vpísanej kružnice so stranami AB, BD, AD trojuholníku ABD. Potom platí (pozri obr. 29)



Obr. 29

$$|BD| = |BP_2| + |P_2D| = |BP_1| + |DP_3| =$$
$$= |AB| - |AP_1| + |AD| - |AP_3|.$$

Keďže $|AP_1| = |AP_3|$, tak odtiaľ vyplýva

$$|AP_1| = \tfrac{1}{2}(|AB| + |AD| - |BD|).$$

Ak Q je bod dotyku kružnice vpísanej do trojuholníka ACD so stranou DC, tak rovnakým postupom zistíme, že

$$|DQ| = \tfrac{1}{2}(|CD| + |AD| - |AC|).$$

Keďže lichobežník je rovnoramenný, tak $|AC| = |BD|$. Odtiaľ vyplýva, že priamka $P_1Q = B'C'$ je kolmá na základňu lichobežníka.

Podobne sa ukáže, že aj $A'D'$ je kolmá na základňu. Z dokázaného už vyplýva tvrdenie úlohy.

A — III — 6

Dokažte, že číslo

$$p_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$$

je přirozené pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dále dokažte, že pro každé liché n je $p_n = r^2$ a pro každé sudé n je $p_n = 5s^2$, kde r, s jsou vhodná přirozená čísla.

Řešení. Uvažujme o posloupnosti

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots,$$

kde

$$q_n = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^n.$$

Členy posloupnosti jsou kladná čísla, přičemž

$$q_1 = 1, \quad q_2 = \sqrt{5}\,.$$

Snadno se dosazením přesvědčíme, že pro každé přirozené číslo n platí

$$q_{n+2} = q_{n+1}\sqrt{5} - q_n\,.$$

Užitím tohoto vztahu dokážeme, že pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ je q_{2k-1} celé číslo a rovněž $\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_{2k}$ je celé. Důkaz podáme matematickou indukcí.

Pro $k = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tedy

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_{2k}, \quad q_{2k-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\,q_{2k-2}, \ q_{2k-3}, \ \ldots, \ q_1$$

jsou celá čísla. Pak

$$q_{2k+1} = q_{2k}\sqrt{5} - q_{2k-1} = 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_{2k}\right) - q_{2k-1}$$

je číslo celé a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,q_{2k+2} = q_{2k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,q_{2k}$$

je číslo celé. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ tedy máme

$$q_{2k-1} = r, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\,q_{2k} = s\,,$$

kde r, s jsou čísla celá kladná. Odtud plyne

$$q_{2k-1}^2 = r^2, \quad q_{2k}^2 = 5s^2$$

pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$. Protože dále platí

$$q_n^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2 =$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - 2 = p_n$$

pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$, je tím celé tvrzení dokázáno.

Řešil *Ilja Turek*, student 4.c gymnázia v Hradci Králové.

Poznámka: Mnozí řešitelé si všimli, že v řešení úlohy A — III — 6 lze využít tzv. Fibonacciho čísel. Tato čísla F_n jsou definována předpisem

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1$$

a rekurentním vztahem

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

platným pro každé přirozené číslo n. Fibonacciho čísla tvoří tedy posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

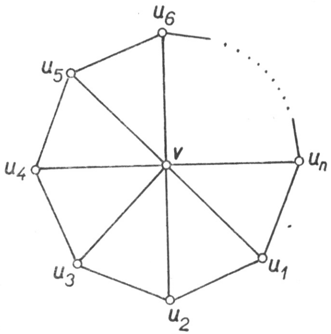
Dá se odvodit vzorec pro n-tý člen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

jak se o tom může čtenář poučit např. v knížce F. Zítka

*Vytvořující funkce.**)

Autoři této brožury poznamenávají ještě k úloze A — III — 6, že číslo p_n má pro $n \geqq 3$ poměrně jednoduchý kombinatorický význam. V teorii grafů se často



Obr. 30

vyskytuje útvar zvaný kolo (obr. 30). Ukazuje se, že počet koster tohoto kola je vyjádřen právě číslem p_n (viz o tom podrobněji v publikaci J. Sedláčka *Úvod do teorie grafů*)**).

---

*) Škola mladých matematiků, sv. 29, Mladá fronta, Praha 1972.

**) Cesta k vědění, sv. 25, nakladatelství Academia, Praha 1977, cvičení II. 7,6