# 27. ročník matematické olympiády

## III. Súťažné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 53–90.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404701

# III. Súťažné úlohy I. kola

## KATEGÓRIA A

### A — I — 1

Nech $a, b$, $a < b$ sú dané reálne čísla a $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$ také otvorené intervaly, že $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2 \cup \dots \cup \mathbf{I}_n$. Potom možno spomedzi intervalov $\mathbf{I}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ vybrať $k \leqq n$ takých, že žiadne tri z nich nemajú spoločný bod a $\langle a, b \rangle$ je podmnožinou ich zjednotenia. Dokážte.

**Riešenie.** Najprv dokážeme jednoduché pomocné tvrdenie: ak tri otvorené intervaly majú spoločný bod, potom ich zjednotenie je rovné zjednoteniu niektorých dvoch z nich.

Skutočne, nech $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, $(a_3, b_3)$ sú také intervaly, že $\alpha \in (a_1, b_1)$, $\alpha \in (a_2, b_2)$, $\alpha \in (a_3, b_3)$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a_3 \leqq a_2$, $a_3 \leqq a_1$. Ak $b_3 \geqq b_2$, $b_3 \geqq b_1$, tak zrejme

$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) = (a_3, b_3)\,.$$

Potom tiež

$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) = (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3),$$

a teda platí pomocné tvrdenie.

Ak $b_3$ nie je najväčšie z čísel $b_1, b_2, b_3$, tak bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $b_2 \geqq b_1$, $b_2 \geqq b_3$.
Keďže

$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) \supseteq (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3)\,,$$

stačí dokázať, že platí

$$(a_1, b_1) \subseteq (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3)\,.$$

Nech $x \in (a_1, b_1)$, t.j. $a_1 < x < b_1$. Rozlíšime dva prípady.

a) $x \leqq \alpha$. Keďže $\alpha \in (a_3, b_3)$, $a_3 \leqq a_1$, tak potom musi byť $x \in (a_3, b_3)$.

b) $x > \alpha$. Keďže $\alpha \in (a_2, b_2)$, $b_2 \geqq b_1$, tak zase $x \in (a_2, b_2)$. Teda v obidvoch prípadoch $x \in (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3)$.

Tým je pomocné tvrdenie dokázané.

Dokážeme teraz tvrdenie úlohy matematickou indukciou podľa $n$.

Pre $n = 1, 2$ je tvrdenie úlohy triviálne pravdivé. Pre $n = 3$ tvrdenie úlohy vyplýva z pomocného tvrdenia: buď intervaly $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ nemajú spoločný bod a potom tvoria požadované pokrytie, alebo majú spoločný bod a potom jeden z nich možno vynechať.

Predpokladajme, že tvrdenie úlohy platí pre $n - 1$. Nech

$$\langle a, b \rangle \subseteq \mathbf{I}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{I}_n\,.$$

Ak žiadne tri z intervalov $\mathbf{I}_1, \ldots, \mathbf{I}_n$ nemajú spoločný bod, stačí zvoliť $k = n$.

Nech niektoré tri z nich majú spoločný bod, napr. $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$. Potom podľa pomocného tvrdenia

$$\mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2 \cup \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 \cup \mathbf{I}_3$$

(alebo zjednoteniu iných dvoch). Potom

$$\langle a, b \rangle \subseteq \mathbf{I}_2 \cup \mathbf{I}_3 \cup \ldots \cup \mathbf{I}_n .$$

Podľa indukčného predpokladu z $n - 1$ intervalov $\mathbf{I}_2, \ldots, \mathbf{I}_n$ možno vybrať $k$ takých, že žiadne tri z nich nemajú spoločný bod a $\langle a, b \rangle$ je podmnožinou ich zjednotenia.

## A – I – 2

Ak $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $(n \geqq 2)$ sú také reálne čísla, že

$$(n - 1)(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2) = (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^2 , \quad (1)$$

tak nastane aspoň jeden z týchto prípadov:

1. všetky čísla $c_i$ sú nezáporné,
2. všetky čísla $c_i$ sú nekladné.

Dokážte.

**Riešenie.**

Podľa úlohy A – P – 2 platí

$$(n - 1)(c_1^2 + \ldots + c_{k-1}^2 + c_{k+1}^2 + \ldots + c_n^2) \geqq$$
$$\geqq (c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_{k+1} + \ldots + c_n)^2 .$$

Teda

$$(n - 1)(c_1^2 + \ldots + c_n^2) \geqq$$
$$\geqq (c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_{k+1} + \ldots + c_n)^2 + (n - 1)c_k^2 .$$

Podľa rovnosti (1) teda máme

$$(c_1 + \ldots + c_n)^2 \geqq (c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_{k+1} + \ldots + c_n)^2 + \\ + (n - 1)c_k^2 . \qquad (2)$$

Z druhej strany platí

$$(c_1 + \ldots + c_n)^2 = (c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_{k+1} + \ldots + c_n)^2 + \\ + c_k^2 + 2(c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_{k+1} + \ldots + c_n)c_k .$$

Dosadíme do nerovnosti (2) a odčítame

$$(c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_{k+1} + \ldots + c_k)^2:$$

$$c_k^2 + 2(c_1 + \ldots + c_{k-1} + c_{k+1} + \ldots + c_n)c_k \geqq (n - 1)c_k^2.$$

Ak pripočítame k tejto nerovnosti $c_k^2$, dostaneme nerovnosť

$$2(c_1 + \ldots + c_n) . c_k \geqq nc_k^2 . \qquad (3)$$

Ak niektoré $c_i$ je kladné, tak podľa nerovnosti (3) pre $k = i$ je $c_1 + \ldots + c_n > 0$. Potom podľa tej istej nerovnosti je $c_k \geqq 0$ pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ak niektoré $c_i$ je záporné, tak podľa nerovnosti (3) pre $k = i$ je $c_1 + \ldots + c_n < 0$. Zase podľa nerovnosti (3) potom je aj $c_k \leqq 0$ pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$.

## A — I — 3

Pre prirodzené číslo $n \geqq 2$ označíme $L_n$ súčin všetkých $n - 1$ nepárnych čísel od $2n + 3$ do $4n - 1$. Potom číslo $L_n . 2^{n-1}$ je deliteľné číslom $n$! Dokážte.

**Riešenie.** Označíme

$$s_n = \frac{L_n . 2^{n-1}}{n!} = \frac{(2n+3).(2n+5).\ldots.(4n-1).2^{n-1}}{n!}.$$

Potom $(2n+1).s_n$ je číslo $c_{2n+1,n}$ z úlohy A - P - 1. Číslo

$$2ns_n = \frac{(2n+3).(2n+5).\ldots.(4n-1).2^n}{(n-1)!}$$

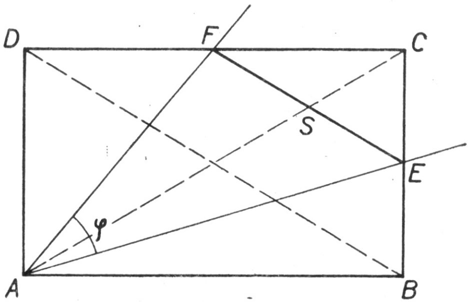
je číslo $4.c_{2n+3,\,n-1}$.

Podľa úlohy A — P — 1 obidve čísla $c_{2n+1,\,n}$ a $4.c_{2n+3,\,n-1}$ sú celé. Tvrdenie úlohy vyplýva z rovnosti

$$s_n = (2n+1)s_n - 2ns_n = c_{2n+1,\,n} - 4c_{2n+3,n-1}.$$

## A — I — 4

Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ak je daná dĺžka jeho strany $d = |AB|$ a veľkosť $\varphi$ uhla $EAF$, kde $E$ je stred strany $BC$ a $F$ stred strany $CD$. Nájdite podmienky riešiteľnosti.




Obr. 8

**Riešenie.** Označme $S$ stred úsečky $EF$ (pozri obr. 8). Bod $S$ leží na uhlopriečke $AC$ a zrejme platí

$$|EF| = \tfrac{1}{2}\,|DB| = \tfrac{1}{2}\,|AC|\,,$$

$$|AS| = \tfrac{3}{4}\,|AC|\,,$$

$$|AS| = \tfrac{3}{2}\,|EF|\,.$$

Dĺžka úsečky $AS$ nesmie byť väčšia ako výška rovnoramenného trojuholníka so základňou $EF$ a uhlom oproti základni veľkosti $\varphi$ (obr. 9).
Teda

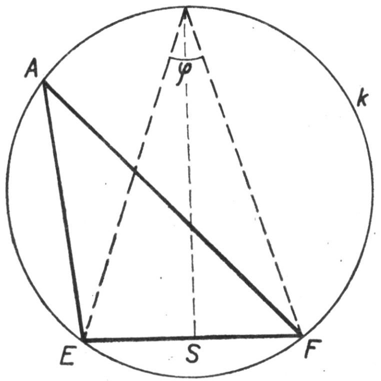
$$|AS| \leqq \frac{|ES|}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}\,.$$

Keďže $|AS| = \frac{3}{4}\,|AC|$, $|ES| = \frac{1}{4}\,|AC|$, tak odtiaľ vyplýva , že

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \leqq \frac{1}{3}\,. \qquad (4)$$

Z uvedeného rozboru už vyplýva návod na konštrukciu.

Zostrojíme ľubovoľný rovnoramenný trojuholník $E'F'X$ s uhlom $E'XF' = \varphi$. Zostrojíme kružnicu $k \equiv (S, r)$ opísanú trojuholníku $E'F'X$. Zo stredu $S'$ strany $E'F'$ opíšeme kružnicu $k'$ o polomere $\frac{3}{2}\,|E'F'|$. Označíme $A'$ jeden z priesečníkov kružníc $k$ a $k'$. Trojuholník $A'E'F'$ je podobný trojuholníku $AEF$ zostrojovaného obdĺžnika. Zostrojíme bod $C'$ tak, aby $E'F'$ bola prepona pravouhlého trojuholníka $E'F'C'$ a $C'$ ležal na polopriamke opačnej k polopriamke $S'A'$. Zostrojíme body $B'$ a $D'$ tak, aby $E'$, $F'$ boli stredy strán $B'C'$ a $C'D'$ obdĺžnika $A'B'C'D'$. Rovnoľahlosťou so stredom $A'$ a koeficientom $d : |A'B'|$ dostaneme hľadaný obdĺžnik $ABCD$.




Obr. 9

Z konštrukcie vyplýva, že obdĺžnik $ABCD$ je možné takto zostrojiť, ak existuje priesečník kružníc $k$ a $k'$. Ak výška $S'X$ trojuholníka $E'F'X$ nie je menšia ako polomer kružnice $k'$, tak $k$ a $k'$ majú spoločný bod. Teda úloha je riešiteľná, ak

$$|S'X| = \frac{|E'F'|}{2} : \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \geqq \frac{3}{2} |E'F'| \,,$$

t.j. ak je splnená podmienka (3).

*Záver*. Nerovnosť (4) je nutná a postačujúca podmienka pre existenciu obdĺžnika požadovanej vlastnosti.

## A — I — 5

Štvorsten $ABCD$ má objem 36 cm³, súčet dĺžok jeho hrán $AB$, $BC$ a $CD$ je rovný 18 cm. Určete dĺžku hrany $AD$.

**Riešenie.** **Ľahko** vidieť, že pre objem $V$ štvorstena $ABCD$ platí nerovnosť

$$V \leqq \tfrac{1}{3}\,|CD|\,.\,\tfrac{1}{2}\,|AB|\,.\,|BC|\,.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $CD$ je kolmá na rovinu $ABC$ a $AB$ je kolmá na $BC$. Pomocou Cauchyho nerovnosti $xy \leqq \frac{1}{4}(x + y)^2$ a nerovnosti z úlohy A — P — 3 postupne dostávame

$$V \leqq \frac{1}{3}|CD|\,.\,\frac{1}{2}|AB|\,.\,|BC| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{6}|CD|\,.\,\frac{1}{4}(|AB| + |BC|)^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{27}(|AB| + |BC| + |CD|)^3 =$$

$$= \frac{1}{6\,.\,27}(|AB| + |BC| + |CD|)^3\,.$$

Rovnosti nastávajú v prípadoch $|AB| = |BC|$ a $|AB| + |BC| = 2|CD|$.

Keďže $|AB| + |BC| + |CD| = 18$, tak máme vždy

$$V \leqq \frac{1}{6\,.\,27}\,.\,18^3 = 36\,.$$

Chceme, aby $V = 36$, čo je možné len v prípade, že vo všetkých nerovnostiach nastanú rovnosti.

*Záver.* Hľadaný štvorsten je určený jednoznačne, dĺžky jeho hrán sú $|AB| = |BC| = |CD| = 6$, hrana $AB$ je kolmá na hranu $BC$ a hrana $CD$ je kolmá na rovinu $ABC$.

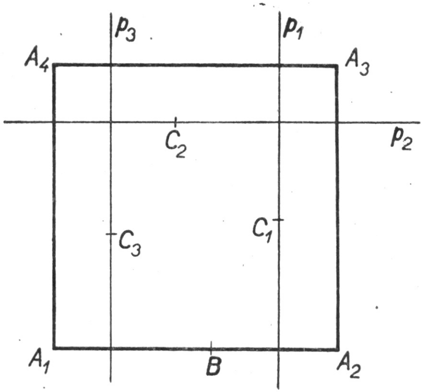
## A — I — 6

V štvorci **Q** je daná konečná množina bodov **M**. Každý z nich zafarbíme práve jednou zo štyroch farieb, a to tak, že každá farba je použitá aspoň pre jeden bod. Dokážte, že existuje taký štvorec **Q**′ so stranami rovnobežnými so stranami štvorca **Q**, ktorý obsahuje body všetkých štyroch farieb a pritom tie body množiny **M**, ktoré sú vnútornými bodmi štvorca **Q**′, sú najviac dvoch farieb.

**Riešenie.** Dokážeme pomocné tvrdenie: nech **Q** je štvorec, ktorý vo svojom vnútri obsahuje aspoň tri body z množiny **M**. Nech $B$ je bod z množiny **M** ležiaci na strane štvorca **Q**. Označíme **M**′ množinu tých bodov z množiny **M**, ktoré ležia vnútri štvorca **Q**. Potom existuje štvorec **Q**′ so stranou menšou ako strana štvorca **Q** a rovnobežnou so stranou štvorca **Q** s týmito vlastnosťami:

1. bod $B$ leží na strane štvorca **Q**′,
2. na troch stranách štvorca **Q**′ ležia body z množiny **M**′ $\cup \{B\}$,
3. všetky body z množiny **M**′ ležia v štvorci **Q**′ (vnútri alebo na jeho stranách).

Nech $\mathbf{Q} = A_1A_2A_3A_4$, bod $B$ leží na strane $A_1A_2$. Označíme postupne $C_1, C_2, C_3$ body z množiny $\mathbf{M}'$, ktoré sú najbližšie k stranám $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_1A_4$. Nech $p_1$, $p_2$, $p_3$ sú priamky idúce cez body $C_1$, $C_2$, $C_3$ a rovnobežné so stranami $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_1A_4$ (pozri obr. 10).




Obr. 10

Označíme $d$ vzdialenosť $p_1$ a $p_3$, $f$ vzdialenosť $p_2$ od strany $A_1A_2$.

Predpokladajme najprv, že bod $B$ leží „medzi" priamkami $p_1$ a $p_3$. Ak $d \geqq f$, tak štvorec $\mathbf{Q}'$ so stranami ležiacimi na $p_1$, $p_3$ a $A_1A_2$ je hľadaný štvorec. Ak $d < f$, tak hľadaným štvorcom $\mathbf{Q}'$ je štvorec so stranami ležiacimi na $p_2$, $p_3$, $A_1A_2$.

Ak $B$ neleží medzi priamkami $p_1$ a $p_3$, tak stačí zvoliť štvorec $\mathbf{Q}'$ tak, aby $B$ bol jeho vrchol a najvzdialenejšia z priamok $p_1$,$p_2$,$p_3$ obsahovala jeho stranu.

Prejdeme teraz k dôkazu tvrdenia úlohy. Nech **S** je množina všetkých štvorcov **T** s týmito vlastnosťami:

a) strany **T** sú rovnobežné so stranami štvorca **P**,

b) aspoň na troch stranách štvorca **T** ležia body z množiny **M**,

c) **T** obsahuje body z množiny **M** všetkých štyroch farieb.

Množina **S** je konečná, lebo každá trojica bodov z množiny **M** určuje najviac jeden štvorec s vlastnosťami a, b, c. Množina **S** je neprázdna, lebo aspoň jeden taký štvorec sa dá ľahko zostrojiť pomocou pomocného tvrdenia.

Nech **P**′ je štvorec z množiny **S**, ktorý má najkratšiu stranu. Tvrdíme, že štvorec **P**′ má vnútri len body dvoch farieb. Predpokladajme, že nie. Teda vnútri **P**′ existujú body troch farieb. Nech $B$ je bod na strane štvorca **P**′ takej farby, aby doplňoval farby vnútorných bodov. Podľa pomocného tvrdenia existuje štvorec **P**″ so stranou kratšou ako strana štvorca **P**′. Z vlastností 1—3 vyplýva, že **P**″ $\in$ **S**, čo je spor.

Úloha patrí k typu „evidentných úloh". Riešiteľ si veľmi rýchlo myslí, že úlohu vyriešil, ale nevie riešenie vysvetliť alebo napísať. Podobného typu boli napr. aj úlohy P — B — 3 a I — B — 6 z 26. ročníka MO.

KATEGORIE B

## B — I — 1

Dokážte, že medzi prirodzenými číslami, ktorých dekadický zápis končí skupinou číslic 1978, existuje číslo deliteľné číslom 1977.

**Řešení.** Zkusme najít takové přirozené číslo $X$, že dekadický zápis čísla $X.1977$ končí skupinou číslic 1978. Nechť dekadický zápis čísla $X$ končí skupinou číslic $\dots b_3 b_2 b_1 b_0$, takže

$$X = b_0 + b_1 . 10 + b_2 . 10^2 + b_3 . 10^3 + B . 10^4 ,$$

kde $B$ je nějaké přirozené číslo (a platí $0 \leqq b_i \leqq 9$). Číslo $b_0 . 1977$ končí číslicí 8. Proto $b_0 = 4$. Číslo $(X - b_0)1977$ je dělitelné deseti a přitom končí na stejné čtyřčíslí jako $Z1978 - 4.1977 = Z1978 - 7908$, tj. 4070. ($Z$ je symbol pro zápis libovolného přirozeného čísla.) Proto $X_1 = b_1 + 10b_2 + 10^2 b_3 + B . 10^3$ má vlastnost, že $X_1 . 1977$ končí skupinou číslic 407; tedy $b_1 . 1977$ končí číslicí 7, tj. $b_1 = 1$. Číslo $X_1 - b_1$ je dělitelné desíti, a přitom končí na stejné trojčíslí jako

$$Z407 - 1.1977, \text{ tj. } 430 .$$

Proto $X_2 = b_2 + 10b_3 + B . 10^2$ má vlastnost, že $X_2 . 1977$ končí dvojčíslím 43; tedy $b_2 . 1077$ končí číslicí 3, tj. $b_2 = 9$. Číslo $X_2 - b_2$ je dělitelné desíti a přitom končí na stejné dvojčíslí jako

$$Z43 - 9.1977 = Z43 - 17793, \text{ tj. } 50 .$$

Proto $X_3 = b_3 + B.10$ má vlastnost, že $X_3.1977$ končí číslicí 5, tj. $b_3 = 5$. Zkouškou se ověří, že číslo 5914.1977 končí čtyřčíslím 1978.

**Jiné řešení.** Označme pro $n = 1, 2, \ldots$ symbolem $a_n$ $4n$-ciferné číslo $a_n = 19781978 \ldots 1978$. Ukážeme, že mezi prvními 1977 členy posloupnosti $\{a_n\}$ je číslo dělitelné 1977.

Předpokládejme, že takové číslo dělitelné 1977 mezi čísly $a_1, \ldots, a_{1977}$ není. Pak mezi těmito čísly existují dvě různá čísla, která mají stejné zbytky po dělení číslem 1977 (možných zbytků je totiž jen 1976). Nechť jsou to čísla $a_i, a_k, i < k$. Označme $k - i = m$. Zřejmě platí, že číslo

$$a_k - a_i = 19781978 \ldots 1978.10^{4(k-i)} = a_m.10^{4m}$$

je dělitelné 1977. Avšak $10^{4m}$ je nesoudělné s číslem 1977; proto $a_m$ je dělitelné 1977 a přitom $1 \leqq m < 1977$, což je spor. Tvrzení je tím dokázáno.

## B — I — 2

Nech $\mathbf{A} = \{a, b\}$ je dvojprvková množina a $f$, $g$ zobrazenia množiny $\mathbf{A}$ na $\mathbf{A}$ definované predpismi:

$$f(a) = a, \quad f(b) = b \; ; \quad g(a) = b, \quad g(b) = a \, .$$

Na množine $\boldsymbol{R}$ všetkých relácií $\mathscr{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ je definovaná relácia $S$ takto: $\mathscr{R}_1 S \mathscr{R}_2$, kde $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, ak $\mathscr{R}_2$ je obrazom $\mathscr{R}_1$ pri zobrazení $f$ alebo $g$.

1. Dokážte, že $S$ je ekvivalencia.

2. Určte, koľko rôznych tried ekvivalentných relácií vzhľadom na $S$ existuje na množine $\boldsymbol{R}$.

**Řešení.** 1. Relace $S$ je ekvivalence, neboť je zároveň

I. reflexívní: Každá relace $\mathcal{R} \in \boldsymbol{R}$ je svým obrazem v (identickém) zobrazení $f$, takže $\mathcal{R}\ S\ \mathcal{R}$.

II. symetrická: Každé ze zobrazení $f$ a $g$ je inverzní samo k sobě, takže je-li $\mathcal{R}_2$ obrazem $\mathcal{R}_1$ v zobrazení $f$ (popř. $g$), je také $\mathcal{R}_1$ obrazem $\mathcal{R}_2$ v tomtéž zobrazení. Platí tedy: je-li $\mathcal{R}_1\ S\ \mathcal{R}_2$, pak $\mathcal{R}_2\ S\ \mathcal{R}_1$, pro každé $\mathcal{R}_1 \in \boldsymbol{R}$, $\mathcal{R}_2 \in \boldsymbol{R}_2$.

III. transitivní. Ukažme nejprve, že složením zobrazení $f$ a $g$ v různých pořadích dostaneme opět jedno z těchto zobrazení: je totiž $f \bigcirc f = f$, $f \bigcirc g = g \bigcirc f = g$, $g \bigcirc g = f$. Platí-li nyní $\mathcal{R}_1\ S\ \mathcal{R}_2$ a $\mathcal{R}_2\ S\ \mathcal{R}_3$, platí také $\mathcal{R}_1\ S\ \mathcal{R}_3$, a to pro libovolná $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ v $\boldsymbol{R}_3$.

2. Všech prvků množiny $\boldsymbol{R}_3$ je zřejmě $2^4 = 16$. Tuto část úlohy vyřešíme nejjednodušeji tím, že vypíšeme jednotlivé třídy rozkladu do tohoto schématu (v každém řádku je jedna třída):

$$\emptyset\,,$$
$$\{[a,a]\}\,,\quad \{[b,b]\}\,,$$
$$\{[a,b]\}\,,\quad \{[b,a]\}\,,$$
$$\{[a,a]\,,\ [b,b]\}\,,$$
$$\{[a,b]\,,\ [b,a]\}\,,$$
$$\{[a,a]\,,\ [a,b]\}\,,\quad \{[b,a]\,,\ [b,b]\}\,,$$
$$\{[a,a]\,,\ [b,a]\}\,,\quad \{[a,b]\,,\ [b,b]\}\,,$$
$$\{[a,a]\,,\ [a,b]\,,\ [b,a]\}\,,\quad \{[a,b]\,,\ [b,a]\,,\ [b,b]\}\,,$$
$$\{[a,a]\,,\ [a,b]\,,\ [b,b]\}\,,\quad \{[a,a]\,,\ [b,a]\,,\ [b,b]\}\,,$$
$$\{[a,a]\,,\ [a,b]\,,\ [b,a]\,,\ [b,b]\}\,.$$

*Závěr.* Na množině $\boldsymbol{R}$ je celkem 10 tříd navzájem ekvivalentních prvků.

## B — I — 3

Určete parametr $a$ tak, aby rovnice

$$a \,.\, \mathrm{sign}\,(x - 1) - 2x = \mathrm{sign}\,(x^2 + 2x - 3) \qquad (1)$$

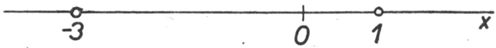
měla pro neznámou $x$ právě čtyři řešení.
(Poznámka: Funkce $x \mapsto \mathrm{sign}\, x$ je definována v textu 1. přípravné úlohy I. kola kategorie B.)

**Řešení.** Úpravou (1) dostaneme

$$a\, \mathrm{sign}\,(x - 1) - 2x = \mathrm{sign}\,(x - 1)\,(x + 3)\,. \qquad (2)$$

Body (viz obr. 11) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ rozloží množinu reálných čísel na pět disjunktních podmnožin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_5$. V každé z nich budeme hledat kořeny (1):

1. $\mathbf{M}_1 = \{x \in \mathbf{R};\, x < -3\}$; pro tato $x$ má (2) tvar $-a - 2x = 1$, odkud $x = -\frac{1}{2}(a + 1)$. Číslo $x$ bude kořenem, bude-li $-\frac{1}{2}(a + 1) < -3$, tj. $a > 5$.
2. $\mathbf{M}_2 = \{-3\}$; pak v $\mathbf{M}_2$ je kořen pro $-a + 6 = 0$, tj. $a = 6$.
3. $\mathbf{M}_3 = \{x \in \mathbf{R};\, -3 < x < 1\}$; pak (2) má tvar $-a - 2x = -1$, tj. $x = -\frac{1}{2}(a - 1)$. V $\mathbf{M}_3$ tedy bude (a to jediný) kořen, právě když $-3 < -\frac{1}{2}(a - 1) < 7$, tj. pro $-1 < a < 7$.




Obr. 11

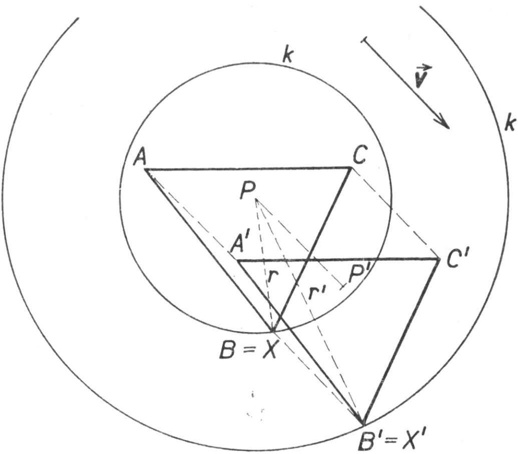
4. $\mathbf{M}_4 = \{1\}$; (2) přejde v $a . 0 - 2 = 0$, což nelze splnit. V $\mathbf{M}_4$ proto není nikdy kořen.

5. $\mathbf{M}_5 = \{x \in \mathbf{R};\ x > 1\}$; (2) má pak tvar $a - 2x = 1$, tj. $x = \frac{1}{2}(a - 1)$. V $\mathbf{M}_5$ je tedy (jediný) kořen, právě když $\frac{1}{2}(a - 1) > 1$, tj. $a > 3$.

Má proto daná rovnice pro parametr $a$ čtyři kořeny tehdy a jen tehdy, je-li zároveň splněno $a > 5$, $a = 6$, $-1 < a < 7$, $a > 3$. To nastane v jediném případě $a = 6$. Kořeny jsou pak čísla $-3{,}5$; $-3$; $-2{,}5$; $2{,}5$.

## B — I — 4

V trojúhelníku **T** je dán bod $P$. Nechť **T**′ je trojúhelník vzniklý z **T** posunutím o vektor **v**, nechť $r$, popř. $r'$



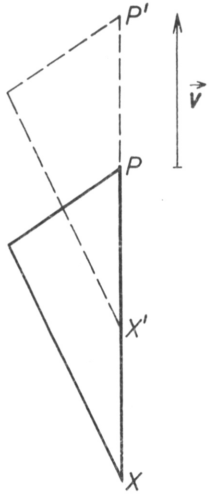

Obr. 12

je poloměr nejmenšího kruhu se středem v $P$, v němž je obsažen trojúhelník **T**, popř. **T**′.

Dokažte, že platí

$$r \leqq 2r' ,$$

a najděte příklad, kdy nastane rovnost.




Obr. 13

**Řešení** (obr. 12). Nechť $\mathbf{T} = ABC$, $\mathbf{T}' = A'B'C'$. Označme $P'$ obraz bodu $P$ v uvedeném posunutí. Protože $P \in \mathbf{T}$, je $P' \in \mathbf{T}'$, takže $|\mathbf{v}| = |PP'| \leqq r'$. Podle definice $r$ existuje v **T** bod $X$ takový, že $|PX| = r$. Proto platí, je-li $X'$ obraz bodu $X$, $r - |\mathbf{v}| = |PX| - |XX'| \leqq \leqq |PX'| \leqq r'$.

Z obou nerovností $|\mathbf{v}| \leqq r'$ a $r - |\mathbf{v}| \leqq r'$ plyne

$$r = (r - |\mathbf{v}|) + |\mathbf{v}| \leqq r' + r' = 2r' ,$$

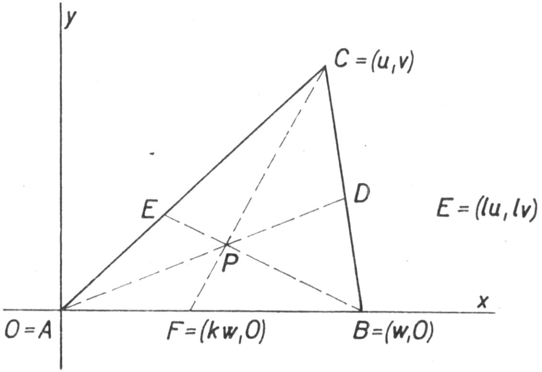
jak jsme měli dokázat.

Příklad, kdy platí $r = 2r'$, je na obr. 13.

## B — I — 5

Na stranách rovnostranného trojúhelníka $ABC$ jsou dány body $C_1$, $C_2$ na $AB$, $A_1$, $A_2$ na $BC$ a $B_1$, $B_2$ na $AC$ tak, že strany jsou jimi rozděleny na tři shodné úsečky. Příčky $AA_i$, $BB_i$, $CC_i$ ($i = 1, 2$) rozdělují trojúhelník na mnohoúhelníky. Vypočtěte, jakou částí obsahu trojúhelníka je obsah toho šestiúhelníka rozkladu, ve kterém leží střed trojúhelníka.

**Řešení.** Nejprve dokážeme pomocnou větu: Nechť $ABC$ (obr. 14) je trojúhelník, $E$ vnitřní bod jeho strany




Obr. 14

$AC$, $F$ vnitřní bod jeho strany $AB$, $P$ průsečík přímek $BE$ a $CF$. Je-li $k = \dfrac{|AF|}{|AB|}$, $e = \dfrac{|AF|}{|AC|}$, pak platí

$$|PF| = \frac{e(1 - k)}{1 - ke}|FC|, \tag{1}$$

$$|AP| = \frac{k + e - 2ke}{1 - ke}|AD|, \tag{2}$$

kde $D$ je průsečík přímky $AP$ s přímkou $BC$.

Důkaz lze provést např. užitím analytické geometrie. V rovině trojúhelníka zvolíme ortonormální soustavu tak, že počátek je v bodě $A$, kladná osa $x$ je v polopřímce $AB$ a bod $C$ má kladnou druhou souřadnici: $A = (0, 0)$, $B = (w, 0)$, $C = (u, v)$, $w > 0$, $v > 0$. Pak $= E\,(eu, ev)$, $F = (kw, 0)$. Po snadném výpočtu najdeme souřadnice bodů $P$ a $D$:

$$P = \left(\frac{eu + kw - ke(u + w)}{1 - ke}, \frac{e(1 - k)}{1 - ke}v\right),$$

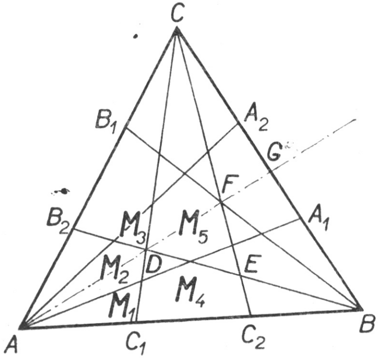
$$D = \left(\frac{eu + kw - ke(u + w)}{k + e - 2ke}, \frac{e(1 - k)}{k + e - 2ke}v\right).$$

(Protože $k + e - 2ke = e(1 - k) + k(1 - e)$, je jmenovatel kladný. Porovnáním druhých souřadnic bodů $P$ a $C$ dostaneme (1), porovnáním druhých souřadnic bodů $P$ a $D$ dostaneme (2).

Vlastní řešení provedeme v označení z obr. 15. Úsečky $AA_i$, $BB_i$, $CC_i$, $i = 1, 2$ rozdělí daný rovnostranný trojúhelník na mnohoúhelníky pěti druhů: $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$,

$\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_5$. Poměry obsahů $\mathbf{M}_i$ a obsahu $P$ trojúhelníka $ABC$ označíme $x_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, takže hledaný obsah šestiúhelníka bude $x_5P$. O číslech $x_1, \ldots, x_5$ platí vztahy:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \tfrac{1}{3} \qquad (3)$$




Obr. 15

(z obsahu $\triangle ACC_1$);

$$x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = \tfrac{1}{3} \qquad (4)$$

(z obsahu $\triangle CC_1C_2$);

$$2x_1 + x_2 = \tfrac{1}{6} \qquad (5)$$

(z obsahu čtyřúhelníka $AC_1DB_1$,

neboť $|AD| = \frac{1}{2}|AG|$ podle (2) pro $k = e = \frac{1}{3}$,

$|B_1C_1| = \frac{1}{3}\,|BC|$ a $AD \perp B_1C_1$);

$$x_1 = \tfrac{1}{21} \qquad (6)$$

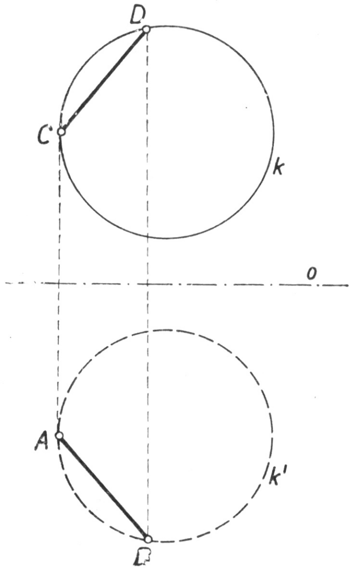
(neboť $|EC_2| = \frac{1}{7}|CC_2|$ podle (1) pro $k = \frac{2}{3}$, $e = \frac{1}{3}$, takže obsah $\triangle EBC_2$ je sedmina obsahu $\triangle C_2BC$);

$$2x_1 + x_4 = \frac{1}{5} \tag{7}$$

(z $\triangle BFC$, neboť $|FG| = \frac{1}{5}|AG|$ podle (2) pro $k = e = \frac{2}{3}$).

Z rovnic (3)—(7) plyne postupně $x_1 = \frac{1}{21}$, $x_2 = \frac{1}{14}$, $x_4 = \frac{11}{105}$, $x_3 = \frac{1}{70}$, $x_5 = \frac{1}{10}$.

*Závěr.* Obsah šestiúhelníka je desetina obsahu trojúhelníka.




Obr. 16

## B — I — 6

V rovině jsou dány dva body $A$, $B$ a kružnice $k$. Sestrojte na kružnici $k$ body $C$ a $D$ tak, aby body $A$, $B$, $C$, $D$ byly vrcholy rovnoramenného lichoběžníka s rameny $AB$ a $CD$.

**Řešení** (obr. 16). Nechť $C$, $D$ jsou body splňující podmínky, nechť $o$ je osa souměrnosti příslušného lichoběžníka. Kružnice $k'$ souměrná ke $k$ podle osy $o$ prochází body $A$ a $B$ a je shodná s $k$.

Z tohoto rozboru vyplývá konstrukce. Sestrojíme kružnici $k'$ shodnou s $k$ a procházející body $A$ a $B$. Každá osová souměrnost, která převádí $k'$ v $k$, převede body $A$ a $B$ v body $C$ a $D$ vyhovující podmínkám úlohy, pokud úsečky $AB$ a $CD$ nejsou rovnoběžné a nemají společný bod. Podmínkou řešitelnosti ovšem je, aby průměr kružnice $k$ byl větší nebo roven vzdálenosti bodů $A$ a $B$. Je-li větší, jsou dvě kružnice $k'$ procházející body $A$ a $B$. Úloha může mít nekonečně mnoho řešení (je-li $k$ shodná s některou z kružnic $k'$), nebo dvě řešení, jedno nebo žádné řešení.

# KATEGORIE C

## C — I — 1

Pro každé reálné číslo $a > 1$ platí

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}\,.$$

Dokažte.

**Řešení:** Protože pro kladná čísla $c$, $d$ platí $c < d$ právě tehdy, když je $c^2 < d^2$, je dokazovaná nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1})^2 < 4a\,,$$

kterou můžeme upravit na ekvivalentní nerovnost

$$\sqrt{a^2-1} < a\,.$$

Tato nerovnost je zřejmě splněna pro všechna $a > 1$, protože $0 < a^2 - 1 < a^2$, a proto $\sqrt{a^2-1} < \sqrt{a^2} = a$.

## C — I — 2

Určete všechna reálná čísla $a$, pro která se zlomek

$$\frac{a+2}{a^2+1}$$

rovná přirozenému číslu.

**Řešení.** Předpokládejme, že pro reálné číslo $a$ se daný zlomek rovná přirozenému číslu $n$. Pak je $na^2 - a + n - 2 = 0$, číslo $a$ je proto řešením kvadratické rovnice

$$nx^2 - x + n - 2 = 0\,,$$

která musí mít tudíž nezáporný diskriminant, tj. pro $n$ musí platit $1 - 4n(n-2) \geqq 0$. Tuto nerovnost upravíme na tvar

$$(2n-2)^2 \leqq 5\,,$$

odkud plyne, že $2n - 2$ se může rovnat pouze 0 nebo 2, protože je to číslo sudé. Číslo $n$ se proto rovná buď jedné, nebo dvěma. Je-li $n = 1$, musí $a$ splňovat rovnici

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

tedy $$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{nebo} \quad a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

je-li $n = 2$, musí $a$ splňovat rovnici $2a^2 - a = 0$, tedy $a = 0$ nebo $a = \frac{1}{2}$. Obráceně se snadno ověří, že daný zlomek se rovná jedné nebo dvěma, jestliže za $a$ dosadíme jednu z čtyř vypočtených hodnot $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $0$, $\frac{1}{2}$.

## C — I — 3

Z cifer „nula, jedna" je utvořena posloupnost

$$10100100010000 \ldots;$$

za $n$-tou jedničkou stojí $n$ nul ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Kolik jedniček stojí na prvním miliónu míst této posloupnosti? Na kolikátém místě stojí poslední z nich?

**Řešení.** Uvažujme začátek dané posloupnosti až po $n$-tou jedničku a za ní stojící nuly, kterých je právě $n$. Označme $a_n$ počet cifer v tomto konečném úseku dané posloupnosti, ve kterém je $n$ jedniček a $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ nul. Platí proto

$$a_n = n + \tfrac{1}{2}n(n + 1) = \tfrac{1}{2}n(n + 3),$$

tj. $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, atd. Položme ještě $a_0 = 0$. Je-li $p$ počet jedniček stojících na prvních $k$ místech dané posloupnosti, pak je $k$-tá cifra buď $p$-tou jedničkou, nebo je některou z $p$ nul, stojících za $p$-tou jedničkou. Musí tedy platit

$$a_{p-1} < k \leqq a_p$$

a číslo $p$ je těmito nerovnostmi jednoznačně určeno číslem $k$. V našem případě je $k = 10^6$, hledaný počet $p$ jedniček dostaneme z nerovností

$$\tfrac{1}{2}(p - 1)(p + 2) < 10^6 \leqq \tfrac{1}{2}p(p + 3)\,,$$

které upravíme na tvar

$$(p + \tfrac{1}{2})^2 < 2\,000\,002{,}25 \leqq (p + \tfrac{3}{2})^2.$$

Pomocí tabulek nebo kapesního kalkulátoru určíme druhou odmocninu $r$ z čísla 2 000 002,25. Stačí zjistit, že leží mezi hodnotami 1414,2 a 1414,3. Pro $p$ máme pak nerovnosti

$$p + 0{,}5 < r < 1414{,}3\,, \quad 1414{,}2 < r \leqq p + 1{,}5\,,$$

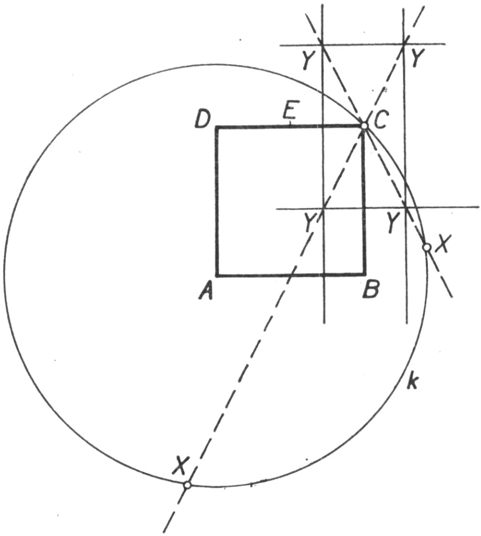
tedy $1412{,}7 < p < 1413{,}8$, a protože $p$ je číslo přirozené, je $p = 1413$. To je počet jedniček, stojících v dané posloupnosti nejvýše na milióntém místě. Poslední z nich stojí na místě s pořadovým číslem $a_{p-1} + 1 = 998\,991$.

## C — I — 4

Je dán čtverec $ABCD$. Označme $E$ střed strany $CD$ a $k$ kružnici o středu $A$ a poloměru $AC$. Určete všechny body $X \in k$ takové, že trojúhelníky $XDE$ a $XBC$ mají obsahy sobě rovné.

**Řešení.** Trojúhelníky $XDE$ a $XBC$ mají právě tehdy rovné obsahy, když vzdálenost bodu $X$ od přímky $DE$ je nenulová a dvakrát větší než vzdálenost bodu $X$ od přímky $BC$.

Dále platí: Má-li bod $X$ popsanou vlastnost, má tuto vlastnost každý bod přímky $CX$ různý od bodu $C$. To plyne z podobnosti trojúhelníků. Stejně tak je vidět, že na přímce $CX$ lze zvolit bod $Y$ tak, že jeho vzdálenost od přímky $BC$ je rovna jedné a jeho vzdálenost od přímky $CD$ je rovna dvěma (obr. 17.) Takové body $Y$ jsou čtyři, dostaneme je jako průsečíky dvou rovnoběžek s přímkou $BC$ ve vzdálenosti jedna od přímky $BC$




Obr. 17

s dvěma rovnoběžkami s přímkou $CD$, vedených ve vzdálenosti dvě od této přímky. Spojíme-li tyto čtyři body s bodem $C$, dostaneme dvě různoběžky a právě všechny body $X$ těchto dvou různoběžek (kromě bodu $C$) mají výše popsanou vlastnost.

K vyřešení naší úlohy stačí určit průsečíky obdržených dvou různoběžek s kružnicí $k$. Žádná z těchto přímek není tečnou kružnice $k$ v bodě $C$, protože každý bod této tečny má od přímek $BC$, $CD$ stejné vzdálenosti. Protíná proto každá z uvažovaných různoběžek kružnici $k$ v bodě $C$ a v jednom dalším bodě. Úloha má tedy dvě řešení.

## C — I — 5

Určete množinu středů všech čtverců, jejichž všechny strany leží na stěnách dané krychle.

**Řešení.** Nechť všechny strany čtverce $ABCD$ leží na stěnách dané krychle. Leží-li celý čtverec v jedné stěně krychle, leží v ní i střed čtverce. Ten je pak nutně vnitřním bodem stěny, neleží na žádné hraně krychle. Obráceně je každý vnitřní bod každé stěny krychle středem nějakého čtverce ležícího v té stěně. V dalším vyloučíme tento výjimečný případ. Nechť tedy čtverec $ABCD$ neleží v žádné stěně krychle. Pak leží všechny jeho vrcholy na hranách krychle — kdyby byl například bod $A$ vnitřním bodem některé stěny, musely by v ní ležet strany $AB$ i $AD$ čtverce, a tudíž celý čtverec. Mohou nastat tyto dva případy:

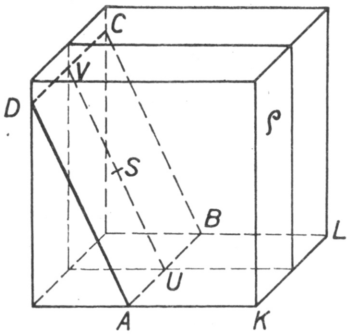
1. Strana $AB$ je rovnoběžná s některou hranou krychle.

Strana čtverce je pak rovna délce hrany krychle, strana $CD$ leží buď v protější stěně k stěně, ve které leží strana $AB$, nebo ve stěně sousední podle toho, je-li rovina čtverce rovnoběžná s některou stěnou krychle či nikoli.

2. strana $AB$ není rovnoběžná se žádnou hranou krychle, pak musí strana $BC$ čtverce ležet ve stěně sousední k stěně, v níž leží strana $AB$, a protože jsou strany $AB$, $BC$ kolmé, musí být strana $BC$ rovnoběžná s hranou krychle, a sice s tou hranou, která je kolmá k stěně, v níž leží strana $AB$. Tím je tento případ převeden na případ předcházející. Vždy je některá strana čtverce rovnoběžná s některou hranou krychle. Strana čtverce je rovna v každém případě délce hrany krychle.

Je-li rovina čtverce $ABCD$ rovnoběžná s některou stěnou krychle, leží střed čtverce na spojnici středů těch stěn krychle, se kterými je rovina čtverce rovnoběžná. Obráceně je každý bod úsečky spojující středy protilehlých rovnoběžných stěn krychle středem čtverce, ve kterém protíná krychli rovina rovnoběžná se stěnami krychle, jejichž středy tvoří zvolenou spojnici.

Není-li rovina čtverce rovnoběžná s žádnou stěnou krychle, nýbrž je pouze rovnoběžná s některou hranou $KL$ dané krychle, leží střed $S$ čtverce $ABCD$ v rovině $\varrho$ souměrnosti hrany $KL$ (obr. 18). Rovina $\varrho$ protne krychli ve čtverci $\mathbf{Q}$. Označme ještě $U$, $V$ průsečíky čtverce $\mathbf{Q}$ s obvodem čtverce $ABCD$ a $R$ ten vrchol čtverce $\mathbf{Q}$, pro který je trojúhelník $URV$ pravoúhlý. Je pak $|SU| = |SV| = \frac{1}{2}a$, kde $a$ je délka hrany krychle. Protože je trojúhelník pravoúhlý a bod $S$ středem jeho přepony, je také $|RS| = \frac{1}{2}a$. Bod $S$ leží tedy nutně na té čtvrtkružnici v rovině $\varrho$ o středu $R$ a poloměru $\frac{1}{2}a$, která je částí krychle. Obráceně lze ke každému bodu $S$ této čtvrtkružnice sestrojit body $U$, $V$ tak, aby ležely v rovině $\varrho$ a současně na stěnách krychle a aby bod $S$ byl středem úsečky $UV$ a $|SU| = |SV| = \frac{1}{2}a$. K bodům




Obr. 18

$U$, $V$ se pak snadno sestrojí čtverec $ABCD$, jehož strany leží na stěnách krychle a jehož středem je bod $S$.

Množina středů všech čtverců, jejichž všechny strany leží ve stěnách dané krychle, je tudíž sjednocením těchto tří množin:

a) množiny všech vnitřních bodů všech stěn krychle,

b) množiny všech bodů na třech úsečkách spojujících středy protilehlých stěn krychle,

c) množiny všech bodů dvanácti čtvrtkružnic se středy v středech hran dané krychle, jejichž přesný popis je uveden výše.

Jsou dány tři různé body $A$, $B$, $C$, které neleží v přímce. V rovině $ABC$ určete všechny takové body $M$, pro které kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ jsou shodné.

**Řešení.** Označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům $ABM$, $BCM$, $CAM$ postupně $S_1$, $S_2$, $S_3$. Pak platí $|S_1A| = |S_1B| = |S_1M| = |S_2B| = |S_2C| = |S_2M| = |S_3C| = |S_3A| = |S_3M|$. Bod $M$ musí být různý od bodů $A$, $B$, $C$ a z rovností $|S_1M| = |S_2M| = |S_1B| = |S_2B|$ plyne, že buď $S_1 = S_2$, nebo že $S_1MS_2B$ je kosočtverec. Je-li $S_1 = S_2$, splývají kružnice opsané trojúhelníkům $ABM$, $BCM$ s kružnicí opsanou trojúhelníku $ABC$ a bod $M$ je jejím bodem. Ve druhém případě je nejen $S_1MS_2B$, ale též $S_2MS_3C$ a $S_3MS_1A$ kosočtverec. První dva mají společnou stranu $MS_2$, a proto tvoří zbývající vrcholy obou kosočtverců rovnoběžník, v našem případě je to rovnoběžník $S_1BCS_3$. Odtud plyne, že přímky $S_1S_3$ a $BC$ jsou rovnoběžné, a protože přímky $AM$, $S_1S_3$ jsou kolmé (úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé), jsou kolmé i přímky $AM$ a $BC$. Leží tedy bod $M$ na výšce trojúhelníka $ABC$, která prochází bodem $A$. Stejně bychom dokázali, že bod $M$ leží též na zbývajících výškách trojúhelníka $ABC$, neboli že je průsečíkem výšek trojúhelníka $ABC$. Tím jsme dokázali: jsou-li poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům $ABM$, $BCM$, $CAM$ stejné, pak je bod $M$ buď průsečíkem výšek v trojúhelníku $ABC$, nebo je bod $M$ libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku $ABC$, různý od bodů $A$, $B$, $C$.

Obráceně, nechť je $M$ libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku $ABC$, různý od bodů $A$, $B$, $C$. Pak kružnice opsané trojúhelníkům $ABM$, $BCM$, $CAM$ splývají všechny s kružnicí opsanou trojúhelníku $ABC$, a mají tudíž stejný poloměr. Nechť je teď bod $M$ průsečíkem výšek trojúhelníka $ABC$, který nemůže být pravoúhlý, protože podle předpokladu jeho průsečík výšek $M$ nesplývá s žádným jeho vrcholem. Kružnice $k_2$ a $k_3$ opsané trojúhelníkům $BCM$ a $CAM$ mají společnou tětivu $CM$, které přísluší v kružnici $k_2$ obvodový úhel $\sphericalangle CBM$ a v kružnici $k_3$ obvodový úhel $\sphericalangle CAM$. Přitom je $CA \perp BM$, $AM \perp CB$ a proto jsou úhly $\sphericalangle CBM$, $\sphericalangle CAM$ stejné. Odpovídají tedy společné tětivě $CM$ kružnic $k_2$, $k_3$ stejně velké obvodové úhly a proto mají kružnice $k_2$, $k_3$ stejně velké poloměry. K témuž výsledku bychom došli i v případě kružnic $k_3$ a $k_1$, kde $k_1$ je kružnice opsaná trojúhelníku $ABM$. Můžeme tedy shrnout: množinou všech bodů $M$, pro které mají kružnice opsané trojúhelníkům $ABM$, $BCM$, $CAM$ stejné poloměry, je množina bodů kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ a průsečík výšek trojúhelníku $ABC$ s výjimkou bodů $A$, $B$, $C$.

## KATEGORIE Z

### Z — I — 1

Zjistěte, zda mezi čísly

10001, 100001, 1000001, ...

(první a poslední číslice je 1, ostatní jsou vesměs nuly) jsou násobky čísla 1001. Jsou-li taková čísla, najděte nejmenší z nich.

**Řešení.** Uvědomíme si rozklad čísla 1001 v prvočinitele.

$$1001 = 7 . 11 . 13 \tag{1}$$

Dále sestavíme tabulku zbytků při dělení mocnin deseti čísly 7, 11 a 13; označíme $z_7$, $z_{11}$, $z_{13}$ zbytek při dělení čísla $10^n$ číslem 7, 11, 13:

| exponent $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_7$ | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | ... |
| $z_{11}$ | | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | ... |
| $z_{13}$ | | 9 | 12 | 3 | 4 | 1 | 10 | 9 | 12 | 3 | 4 | 1 | 10 | ... |

Číslo $10^n + 1$ má zbytek o 1 větší než číslo $10^n$. Hledáme *první* takový případ, kdy zbytky budou 0, 0, 0 neboli 7, 11, 13, neboť v tomto případě dostaneme první číslo tvaru $10^n + 1$ $(n > 3)$, dělitelné číslem 1001. Tento první případ je v zarámovaném sloupci, kdy číslo $10^n + 1$ dává zbytky $6 + 1 = 7$, $10 + 1 = 11$, $12 + 1 = 13$. Příslušné $n$ je 9, hledané číslo 1 000 000 001.

## Z — I — 2

Z místa $A$ vyjely současně po téže trase dva nákladní vozy: první jel průměrnou rychlostí 40 km/h, druhý 50 km/h. Po jisté době vyrazilo za nimi osobní auto jedoucí průměrnou rychlostí 70 km/h. Nejprve předjelo pomalejší vůz, půl hodiny potom předjelo rychlejší vůz. Oč později vyjelo z místa $A$ osobní auto než oba nákladní vozy?

**Řešení.** Označíme 0 hod. okamžik, kdy vyrazí na cestu oba nákladní vozy $N_1$, $N_2$, $x$ (v hod.) okamžik, kdy vyrazí osobní vůz $V$, $y$ (v hod.) okamžik, kdy $V$ předjíždí pomalejší vůz $N_1$, $y + \frac{1}{2}$ (v hod.) okamžik, kdy $V$ předjíždí rychlejší nákladní vůz $N_2$. Tabulka udává v km vzdálenosti od výchozího místa $A$, které každý z vozů urazil v daném okamžiku.

| Čas | $N_1$ | $N_2$ | $V$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x$ | $40\,x$ | $50\,x$ | 0 |
| $y$ | $\boxed{40\,y}$ | $50\,y$ | $\boxed{70(y - x)}$ |
| $y + \dfrac{1}{2}$ | $40\left(y + \dfrac{1}{2}\right)$ | $\boxed{50\left(y + \dfrac{1}{2}\right)}$ | $\boxed{70\left(y - x + \dfrac{1}{2}\right)}$ |

Podle podmínek úlohy (předjíždění) jsou si rovny údaje v orámovaných polích téhož řádku, tj.

$$\begin{aligned} 40\,y &= 70(y - x) \\ 50\,(y + \tfrac{1}{2}) &= 70(y - x + \tfrac{1}{2})\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Po jednoduchých úpravách přejde soustava (1) v soustavu

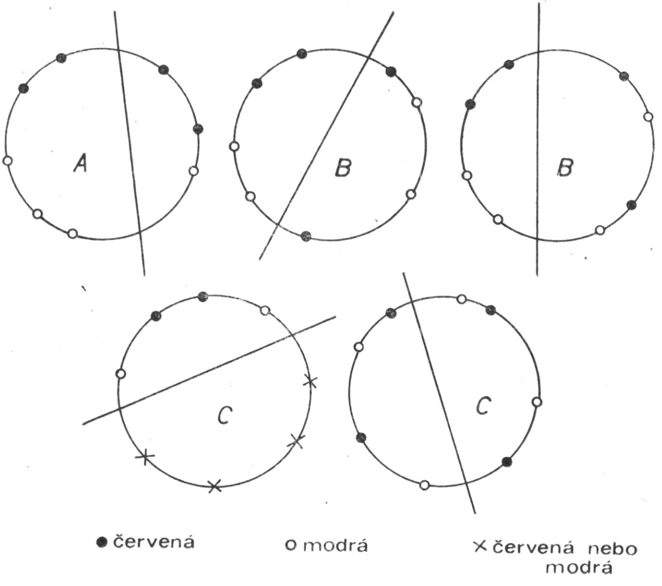
$$3y = 7x\,, \quad 2y = 7x - 1\,. \tag{2}$$

Z (2) vyloučíme neznámou $y$ (text úlohy žádá výpočet $x$); vyjde $x = \frac{3}{7}$ (hod.), tj. $x \doteq 26$ minut. Z (2) dostaneme $y = 1$ (hod.).

Algebraicky „jednodušší" by byla soustava, kdybychom zvolili neznámé $y$, $y - x = z$ (doba jízdy vozu $V$ až do předjíždění $N_1$). Příslušná soustava by zněla

$$4y = 7z\,, \quad 5y = 7z + 1\,.$$

Odtud dostaneme $y = 1$, $z = \frac{4}{7}$ a $x = y - z = \frac{3}{7}$ jako dříve.




Obr. 19

## Z — I — 3

Na kružnici $k$ leží 8 různých bodů, z nichž jsou 4 červené a 4 modré. Zjistěte, zda lze vždy sestrojit takovou přímku $p$, že uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou $p$ leží po 2 červených a po 2 modrých bodech.

**Řešení.** Úloha vyžaduje systematický výčet všech možností (dichotomické třídění) a experimentální zjištění existence přímky $p$ v každém případě.

Třídění můžeme zaznamenat do schématu zvaného *strom:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | existuje aspoň jedna čtveřice stejnobarevných „sousedů" | neexistuje žádná čtveřice stejnobarevných „sousedů" | |
| B | existuje aspoň jedna trojice stejnobarevných „sousedů" | neexistuje žádná trojice stejnobarevných „sousedů" | |
| C | existuje aspoň jedna dvojice stejnobarevných „sousedů" | neexistuje žádná dvojice stejnobarevných „sousedů" | D |

Zakreslíme koncové případy $A$, $B$, $C$, $D$; (obr. 19 ● značí červené body, ○ modré).

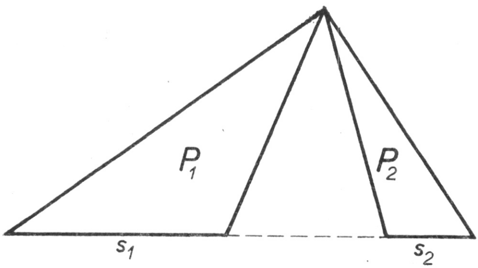
V případě $B$ jsou dvě možnosti, naznačené na obr. 19

V případě $C$ musí být sousedi dvou červených dva modré; na uspořádání zbývajících čtyř nezáleží.

Na obr. 19 jsou už také naznačeny polohy přímky $p$.

## Z — I — 4

V trojúhelníku $ABC$ sestrojte těžnici $t_c$ procházející vrcholem $C$, její střed označte $D$. Přímka $AD$ a těžnice




Obr. 20

$t_c$ rozdělí trojúhelník na tři trojúhelníky a čtyřúhelník. Vyjádřete obsahy těchto čtyř obrazců pomocí obsahu daného trojúhelníka.

**Řešení.** Řešení úlohy Z-I-4 se opírá v podstatě o větu **V**, že poměr obsahů $P_1$, $P_2$ dvou trojúhelníků se společným vrcholem, jejichž protější strany $s_1$, $s_2$ leží v téže přímce, je $\frac{s_1}{s_2}$ (obr. 20). Platí tedy $\frac{s_1}{s_2} = \frac{P_1}{P_2}$.

Úlohu rozřešíme za pomoci obr. 21. Podle textu úlohy máme vyjádřit pomocí obsahu $P$ trojúhelníku $ABC$ tyto obsahy:

$$P_1, P_2, P_3 \quad \text{a} \quad P_4 + P_5 .$$

Podle věty **V** je $P(\triangle AEC) + P(\triangle BEC) = P$, $P(\triangle AEC) = P(\triangle BEC) = \dfrac{P}{2}$. Podle téže věty **V** je

$$P(\triangle ADE) + P(\triangle ACD) = \frac{P}{2},$$

$$P(\triangle ADE) = P(\triangle ACD) = \frac{P}{4}.$$

Je tedy

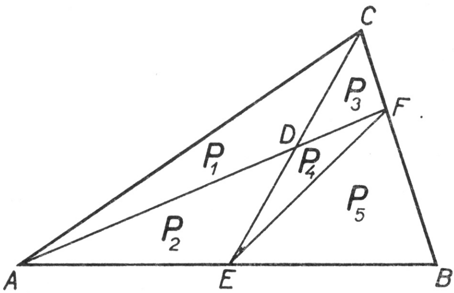
$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{4}P \ \text{ a zároveň } \ P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + P_5 \tag{1}$$

Použijeme-li věty **V** na $\triangle ABF$, dostaneme

$$P_2 + P_4 = P_5 ; \tag{2}$$

Použijeme-li věty **V** na $\triangle CEF$, dostaneme

$$P_3 = P_4. \tag{3}$$




Obr. 21

Z (1), (2), (3) vyjde

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{4}P\,, \quad P_3 = P_4 = \tfrac{1}{12}P\,, \quad P_5 = \tfrac{1}{3}P\,.$$

Specielně obsah čtyřúhelníka $BEDF$ je $\dfrac{P}{12} + \dfrac{P}{3} = \dfrac{5}{12}\,P$.