26. ročník matematické olympiády

VIII. Správa o XIX. medzinárodnej matematickej olympiáde

In: Jan Vyšín (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); Lev Bukovský (editor): 26. ročník matematické olympiády. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 167–198.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404691

VIII. Správa o XIX. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

XIX. medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v dňoch 1.—13. 7. 1977 v Juhoslávii. Vlastná súťaž i jej rámcový program sa uskutočnili len na území Zväzovej republiky srbskej a jej poriadateľmi boli Savez družstva matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije a Družstvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije. Členovia týchto spoločností tvorili prakticky organizačný výbor i celý organizačný štáb súťaže. Predsedom organizačného výboru XIX. MMO bol *prof. dr. Vojin Dajovič*, profesor belehradskej univerzity.

V SFRJ sa konala r. 1967 IX. MMO známa tým, že sa súťaže matematických nádejí po prvý raz zúčastnili družstvá západoeurópskych krajín (Veľkej Británie, Francúzska, Talianska a Švédska). Juhoslovanskí hostitelia zostali i tentoraz verní svojim snahám o rozširovanie počtu zúčastnených zemí a poslali pozvanie na XIX. MMO do 27 krajín. Pozvanie prijali *Rakúsko* (A), *Belgicko* (B), *Bulharsko* (BG), *Kuba* (C), *ČSSR* (CS), *NSR* (D), *NDR* (DDR), *Alžírska republika* (DZ), *Francúzsko* (F), *Velká Británia* (GB), *Maďarsko* (H), *Taliansko* (I), *Mongolsko* (M), *Holandsko* (NL), *Polsko* (PL), *Rumunsko* (R), *Švédsko* (S), *Fínsko* (SF), *ZSSR*

(SU), *USA* a súťažé se zúčastnilo samozrejme družstvo domácej *Juhoslávie* (YU). Všetky uvedené družstvá boli osemčlenné, okrem štyroch, ktoré z rôznych dôvodov vyslali menší počet žiakov: B — 7, C — 4, DZ — 3, I — 5. Popri rekordnej účasti 21 krajín sa teda XIX. MMO zúčastnil aj rekordný počet — 155 riešiteľov. Pôvodne prijala pozvanie tiež Vietnamská socialistická republika, ktorá poslala aj návrh úloh pre súťaž, ale deň pred otvorením olympiády sa ospravedlnila, práve tak ako Grécko. Brazília vyslala na XIX. MMO svojho pozorovateľa, lepšie rečeno pozorovateľku, ktorá sa zúčastnila niektorých rokovaní jury a slávnostného otvorenia súťaže. Pozvanie neprijali, resp. naň nereagovali, India, Nórsko a Albánsko.

Predsedom medzinárodnej jury súťaže, ktorú tvorili vedúci delegácií zúčastnených krajín, bola *dr. Milica Ilič-Dajovičová*, profesorka belehradskej univerzity, ktorá vykonávala rovnakú funkciu už pri MMO pred desiatimi rokmi.

Vedúci delegácií sa schádzali do Belehradu v piatok 1. 7. 1977, skadiaľ ich organizátori po skupinách odviezli mikrobusom do kúpeľného mestečka *Arandjelovac*, centra srbskej Šumadije, ležiaceho 86 km juhovýchodne od hlavného mesta SFRJ. Tamejší hotel „Staro zdanje" zriadený v niekdejšom sídle kniežaťa Miloša Obrenoviča sa stal na desať dní nielen bydliskom, ale aj miestom práce jury XIX. MMO. Okrem už tradičnej izolácie vedúcich delegácií od členov družstiev sledovali tak organizátori vytvorenie optimálnych podmienok pre náročnú prácu spojenú s výberom súťažných úloh a hodnotením riešení, čo sa im v plnej miere podarilo.

Už pri IX. MMO urobili juhoslovanskí hostitelia prvý pokus zorganizovať malé sympózium o vyučovaní matematiky, ktoré aj napriek značnej improvizácii bolo vcelku pozitívne hodnotené. Za 9 predchádzajúcich rokov nenašli následovníka v tomto smere, ale myšlienke konania sympózií pri príležitosti MMO nedali zaspať a do rámcového programu XIX. MMO zaradili nielen sympózium učiteľov, ale aj malé sympózium žiakov.

Sympóziu „*Mládež a matematika*" bola venovaná celá sobota 2. 7. 1977. Konalo sa v Arandjelovci a okrem vedúcich zahraničných delegácií sa ho zúčastnil celý rad domácich učiteľov a odborníkov z oblasti vyučovania matematiky. Odznelo na ňom 12 referátov, ktoré priniesli celý rad cenných poznatkov z oblasti vyučovania matematiky a starostlivosti o matematické talenty.

G. Burosch (DDR) hovoril o školskom systéme v NDR a formách práce s matematickými talentami. *A. P. Savin* (SU) sa zaoberal mimoškolskými formami práce s talentami v ZSSR a poslaním populárno-vedeckého časopisu Kvant. *E. Hódi* (H) informoval o cieľoch a obsahu reformy vyučovania matematiky na základnej škole v Maďarsku uskutočňovanej v rokoch 1974/75 až 1985/86. *P. Kenderov* (BG) predložil výsledky analýzy kolektívu bulharských matematikov o tom, ako olympiáda vplýva na zlepšovanie vyučovania matematiky na strednej škole. *I. Orlov* (YU) vo svojom referáte uvádzal konkrétne príklady toho, ako numerická matematika pomáha získávať zaujem mládeže o matematiku. *R. C. Lynnes* (GB) rozoberal vplyv olympiády na úroveň vyučovania matematiky v britských stredných školách a najmä na výber matematických talentov.

D. Gerll (F) informoval o zásadách súťaže „Concours général“ pravidelne poriadanej vo Francúzsku a o obsahu vyučovania matematiky na francúzskych stredných školách.

T. Mühlgassner (A) stručne informoval o výsledkoch práce skupiny odborníkov, ktorá pripravovala návrh nového obsahu vyučovania matematiky v rakúskych stredných školách. *J. Moravčík* (CS) hovoril o niektorých formách objavovania a vedenia matematických talentov v ČSSR a o obsahu vyučovania matematiky v triedach s rozšíreným vyučovaním matematiky. *I. Cuculescu* (R) sa zaoberal otázkami vyučovania teórie pravdepodobnosti v strednej škole. *S. L. Greitzer* (USA) hovoril o formách a metódach výberu družstva USA pro MMO a význame olympiád pre vyučovanie matematiky. *M. Ilič-Dajovičová*, ktorá sympóziu predsedala, v záverečnom referáte zdôraznila, že si treba všímať obsah a úroveň vyučovania matematiky všetkých žiakov a nielen budúcich matematikov. S odvolaním sa na sovietskeho akademika Kolmogorova podčierkla, že by bylo zle, ak by sme pre štúdium matematiky získali len tých, ktorí sa zúčastňujú na súťažiach v riešení úloh. V záverečnom slove vyslovila nádej, že za týmto sympóziom budú každoročne nasledovať ďalšie, aby prispeli k skvalitneniu vyučovania matematiky a starostlivosti o matematické talenty v účastnickych zemiach.

Aj napriek tomu, že niektoré z prednesených referátov boli viac-menej improvizované, možno sympózium hodnotiť ako úspešné. Ukázalo, že by bolo účelné v organizovaní podobných podujatí pokračovať aj pri budúcich MMO, zvlášť pri vzrastajúcom počte zúčastnených krajín.

Bolo by však potrebné, aby sa tematika sympózia vopred užšie tématicky vymedzila.

Organizátori XIX. MMO prisľúbili, že budú všetky prednesené referáty publikovať v osobitnej publikácii, ktorú rozošlú všetkým účastníkom sympózia i ďalším záujemcom.

Večer po skončení sympózia sa uskutočnilo malé spoločenské stretnutie vedúcich delegácií s členmi organizačného výboru XIX. MMO, na ktorom predseda organizačného výboru *prof. dr. V. Dajovič* zaprial členom jury veľa úspechov v ich zodpovednej práci a príjemný pobyt v socialistickej Juhoslávii.

Poriadatelia MMO dostali z 12 krajín do 27. 6. 1977 (kedy prišiel návrh z ČSSR) celkom 54 návrhov úloh pre súťaž, z ktorých komisia pre úlohy vybrala a spracovala 16 ako základ pre prácu jury. Do tohto výberu sa nedostala žiadna zo 6 úloh sovietskeho návrhu, ktorý vedúci delegácie SU priviezol do Belehradu až pri svojom príchode 1. 7. Vybraných 16 úloh s riešeniami dostali členovia jury ešte pred začiatkom sympózia 2. 7. a prvé dve zasednutia jury v nedeľu 3. 7. slúžili k tomu, aby se z tohto širšieho výberu zostavil najvhodnejší celok 6 úloh pre súťaž. Rokovanie jury bolo náročné a zdĺhavé nielen preto, že sa každé vystúpenie prekladalo do všetkých rokovacích jazykov (ruština, nemčina, angličtina, francúzština), ale aj z toho dôvodu, že sa pomerne často hlasovalo. Aj napriek tomu sa však jury podarilo už na druhom zasadnutí v nedeľu večer schváliť nielen výber 6 úloh, ale aj ich rozdelenie na oba súťažné dni. Čas, ktorý sa tým oproti plánovanému programu získal, si však vzhľadom na technické podmienky (bola k dispozícii prakticky len jediná tabuľa) vyžiadalo formulovanie textov vybraných úloh v oficiálnych jazykoch. Tejto práci bol venovaný celý pondelok 4. 7. a siahodlhému rokovaniu o maximálnom počte bodov za úplné riešenie úloh padla dokonca za obeť aj plánovaná účasť členov jury na divadelnom predstavení v rámci festivalu „Mermer a zvuci", každoročne poriadanom v Arandjelovci.

V pondelok 4. 7. pricestovali do Belehradu družstvá zúčastnených krajín vedené zástupcami vedúcich delegácií. Žiakov na celý čas trvania XIX. MMO ubytovali v Pionierskom mestečku na okraji Belehradu a zástupcov vedúcich delegácií vo večerných hodinách autobus dopravil do hotela „Staro zdanje" v Arandjelovci, aby sa až do konca olympiády podieľali na práci jury. Tá sa už za ich účasti v utorok 5. 7. predpoludním venovala prekladu textov úloh do materčiny súťažiacich žiakov a naklepaniu prekladov na stroji. Tým sa skončila prvá časť práce jury. Aktívnemu oddychu jej členov mala slúžiť popoludňajšia exkurzia autobusom do Resavskej jaskyne a do kláštora Manasija.

Slávnostné otvorenie XIX. MMO sa uskutočnilo v stredu 6. 7. ráno v aule areálu Pionierskeho mestečka, v priestoroch ktorého sa konala tiež vlastná súťaž. Po krátkych prejavoch predsedu organizačného výboru *prof. dr. V. Dajoviča* a predsedkyne jury *prof. dr. M. Ilič-Dajovičovej* sa účastníci súťaže rozišli do ôsmich tried, aby si zmerali sily v riešení prvej trojice nasledujúceho súboru úloh, ktorý im jury pripravila.

PRVÝ DEŇ SÚŤAŽE — 6. JÚLA 1977

vnitř

1. Vo vnútri daného štvorca $ABCD$ sú zostrojené rovnostranné trojuholníky ABK, BCL, CDM, DAN. Dokážte, že stredy štyroch úsečiek KL, LM, MN, NK spolu se stredmi ôsmich úsečiek AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN jsou vrcholy ~~tvoria množinu vrcholov~~ pravidelného dvanásťuholníka. (Holandsko, 6 bodov.)

2. V konečnej postupnosti reálnych čísel je súčet každých siedmich za sebou nasledujúcich členov záporný a súčet každých jedenástich za sebou nasledujúcich členov kladný. Rozhodnite, aký je maximálny počet členov takej postupnosti. (Vietnamská socialistická republika, 6 bodov.) posloup

Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Označme

3. ~~Nech $n > 2$ je dané prirodzené číslo a nech~~ V_n ~~je~~ množina prirodzených čísel tvaru

všech

$$1 + k\,n\,,$$

kde $k = 1, 2, \ldots$. Číslo $c \in V_n$ nazveme nerozložiteľným vo V_n, ak neexistujú -li čísla $p, q \in V_n$ také, že $c = p\,q$. Dokážte, že existuje číslo $r \in V_n$, ktoré možno vyjadriť ako súčin čísel nerozložiteľných vo V_n viac než jedným spôsobom. (Rozklady lišiace sa len poradím faktorov z V_n sa považujú za rovnaké.) (Holandsko, 7 bodov.) lze více stejné

DRUHÝ DEŇ SÚŤAŽE — 7. JÚLA 1797

Uvažujme funkci

4. ~~Nech~~ a, b, A, B sú dané reálne čísla ~~a nech~~

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x\,,$$

kde

Je-li

Ak $f(x) \geqq 0$ pre každé reálne x, potom

$$a^2 + b^2 \leqq 2 \quad \text{a} \quad A^2 + B^2 \leqq 1 .$$

Dokážte. ~~(Veľká Británia, 6 bodov.)~~

Jsou-li dána přirozená čísla a, b, označme

5. ~~Nech a a b sú prirodzené čísla. Nech~~ q ~~je~~ podiel a r zvyšok, ktoré dostaneme při delení čísla $a^2 + b^2$ číslom $a + b$. Nájdite všetky dvojice a, b, pre ktoré platí $q^2 + r = 1977$. ~~(NSR, 7 bodov.)~~

zbytek

6. Nech f je funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel, ktorej hodnoty sú prirodzené čísla. Ak pre každé prirodzené číslo n platí

jejíž

Jestliže

$$f(n + 1) > f(f(n)),$$

potom $f(n) = n$ pre každé prirodzené číslo n. Dokážte. ~~(Bulharsko, 8 bodov.)~~

V zátvorke za textom úlohy je uvedené, ktorá krajina úlohu navrhla, a maximálny počet bodov, ktorý mohol žiak získať za jej úplné riešenie. Tieto údaje však žiaci pri súťaži nepoznali. Dozvedeli sa len, že na riešenie každej trojice súťažných úloh majú 4 hodiny čistého času. Rovnako ako na predchádzajúcich troch MMO sa po oba súťažné dni najneskoršie pol hodiny po obdržení textov úloh mohli na pripravených lístkoch písomne spýtať na prípadné nejasnosti v texte. Na ich otázky po predchádzajúcom prerokovaní v jury písomne odpovedali vedúci delegácií.

V prvý súťažný deň po splnení tejto úlohy dostali vedúci delegácií a ich zástupcovia možnosť hodinovej prechádzky v centre Belehradu a presne na poludnie ich v priestoroch rektorátu belehradskej univerzity v zástúpení rektora prof.

Jankoviča prijal jeden z prorektorov, ktorý v krátkom privítacom prejave zaželal plný úspech XIX. MMO a o. i. uviedol, že na 23 fakultách univerzity študuje viac než 50 tisíc študentov.

Popoludní po návrate do Arandjelovca sa jury zišla na prvú spoločnú poradu s koordinátormi, ktorými boli prevažne bývalí juhoslovanskí účastníci MMO. Pre každú úlohu boli určení dvaja: 1 — L. Čukiči, S. Jankovič; 2 — M. D. Ašič, V. V. Kovačevič; 3 — V. Jankovič, M. Božič; 4 — D. P. Dugošija, M. Jevtič; 5 — M. Mrševič, S. Ogujanovič; 6 — D. Vukomanovič, E. Udovičič. Títo predložili návrhy zásad hodnotenia riešení jednotlivých úloh, ktoré jury po dlhšej diskusii s niektorými úpravami prijala. Jury taktiež rozhodla, aby hodnotenie riešení domáceho družstva koordinovali vedúci delegácií týchto krajín: 1 — NL, 2 — CS, 3 — PL, 4 — GB, 5 — D, 6 — BG. Ide o krajiny, ktoré príslušnú úlohu navrhli, s výnimkou úlohy č. 2, zaslanej VSR (CS bola vybraná preto, lebo československá úloha navrhnutá v širšom výbere sa ako posledná nedostala do definitívnej šestice), a úlohy č. 3 navrhnutej NL (PL bolo určené preto, aby vedúci delegácie NL nemusel koordinovať riešenia dvoch úloh).

Po skončení porady dostali vedúci delegácií z rúk starostlivej predsedníčky jury riešenia svojho družstva a začala sa neľahká práca spojená s hodnotením riešení a ich koordináciou.

Vo štvrtok 7. 7. pri návrate z Belehradu sa vedúci delegácií krátko zastavili v medzinárodnom pionierskom tábore Gorane pod Avalou, kde sa konala letná matematická škola pre vybraných žiakov základných škôl. Popoludní sa začalo s koordináciou hodnotení riešení podľa presne zostaveného plánu, v ktorom sa na družstvo a úlohu počítalo s jednou hodinou. Koordinácia pokračovala po celý piatok (8. 7.) i sobotu (9. 7.). Po skončení koordinácie v sobotu podvečer sa jury zišla na svoje záverečné zasadnutie. Na tomto sa najskôr riešili otázky hodnotenia riešení v tých prípadoch, keď nedošlo k dohode koordinátorov a vedúcich delegácií. Keďže bolo takýchto prípadov tentoraz nezvyčajne veľa a na sobotu večer bola plánovaná spoločná večera za účasti predstaviteľov mesta Arandjelovac, muselo byť zasadnutie jury prerušené a aj napriek často až příliš rezolútnemu počínaniu predsedníčky jury mu padlo za obeť ešte celé nedeľné predpoludnie. Po vyriešení sporných otázok a schválení hodnotení prikročila jury k rozhodnutiu o určení hraníc pre ceny. Po dlhšej diskusii a niekoľkých hlasovaniach dospela jury k nasledujúcemu záveru: *I. cena* 40—34 bodov, *II. cena* 33—24 bodov a *III. cena* 23—17 bodov. To znamenalo, že I. cenu dostane 13, II. cenu 29 a III. cenu 35 účastníkov XIX. MMO, čím bola dodržaná aj zásada stanovená poriadateľmi v štatúte olympiády, aby celkový počet odmenených neprekročil polovicu všetkých účastníkov, pretože zo 155 účastníkov dostalo cenu 77.

V závere zasadnutia jury rokovala o návrhoch koordinátorov na udelenie špeciálnych cien za zvlášť elegantné riešenia, resp. zovšeobecnenia súťažných úloh. Boli schválené návrhy na udelenie špeciálnej ceny za elegantné riešenie 2. úlohy československému žiakovi *Martinu Čadkovi* a za jej zovšeobecnenie anglickému žiakovi *Johnovi Robertovi Rickardovi*, ktorý dostal špeciálnu cenu tiež za elegantné riešenie 3. úlohy. Z celkom 5 návrhov na špeciálne ceny za riešenie 3. úlohy schválilo jury ešte ďalšie tri: pre jedného bulharského, maďarského a sovietskeho účastníka. Za riešenie 6. úlohy bol koordinátormi na špeciálnu cenu navrhnutý jeden sovietsky účastník a jedného zo svojich žiakov navrhoval vedúci holandskej delegácie. Návrh koordinátorov pri hlasovaní neprešiel a o holandskom návrhu *prof. dr. M. Ilič-Dajovičová* vôbec nedala hlasovať. Za riešenie 1., 4. a 5. úlohy sa žiadne špeciálne ceny nenavrhovali.

Po skončení pracovnej časti zasadnutia dostal slovo vedúci delegácie Rumunska *prof. I. Cuculescu*, ktorý v mene zahraničných delegácií poďakoval organizátorom za starostlivosť a vytvorenie veľmi dobrých podmienok pre prácu jury XIX. MMO a v závere svojho vystúpenia pozval všetky zúčastnené delegácie na XX. MMO do Rumunska.

Ihneď po skončení zasadnutia sa členovia jury rozlúčili s hotelom „Staro zdanje“ a mestečkom Arandjelovac, kde našli príjemné prostredie pre svoju prácu a po tretí (zároveň však aj posledný) raz sa vydali na pomerne únavnú cestu autobusom do Belehradu, kde boli pre zvyšok svojho pobytu v Juhoslávii ubytovaní v hoteli Metropol na Bulvare Revoluciji v centre mesta.

Členovia súťažných družstiev od svojho príchodu do Belehradu (v pondelok 4. 7.) trávili väčšinu voľného času na športoviskách Pionierskeho mestečka, v ktorom boli ubytovaní. Do ulíc hlavného mesta Juhoslávie sa dostali prakticky až po súťaži, keď v piatok 8. 7. predpoludním absolvovali prehliadku Belehradu, navštívili známy Kelemegdan (opevnená časť mesta nad sútokom Sávy a Dunaja) a Múzeum súčasného umenia. Popoludní sa v areáli Pionierskeho mestečka mohli zúčastniť na šachovej simultánke s jedným z početných juhoslovanských šachových majstrov a večer sa stretli s predstaviteľmi belehradskej mládeže na koncerte študentov hudobnej školy.

V sobotu 9. 7. absolvovali celodenný autokarový zájazd do Resavskej jaskyne a kláštora Manasija a nedeľa 10. 7. bola venovaná *malému sympóziu účastníkov XIX. MMO.* Predpoludním v dvoch sekciách odznelo celkom 10 vystúpení mladých matematických talentov, medzi ktorými bol aj československý žiak *J. Kratochvíl*, ktorý hovoril na tému „*Použitie matematickej indukcie pri riešení niektorých úloh*“. Jeho vystúpenie sa stretlo s úspechom a zaslúženou pozornosťou. Popoludňajšej časti sympózia sa zúčastnili už aj vedúci delegácií a ich zástupcovia. V rámci „nej“ všetkých 5 nositeľov špeciálnych cien prednieslo riešenia úloh, za ktoré boli odmenení. Značný úspech v tejto časti sympózia nielen medzi účastníkmi súťaže, ale najmä u členov jury si vyslúžili Angličan *John Robert Rickard* a náš *Martin Čadek.*

Po skončení sympózia sa uskutočnilo prvé stretnutie vedúcich delegácií a ich zástupcov s členmi družstiev po absolvovaní súťaže, pri ktorom došlo k zhodnoteniu výsledkov, rozboru chýb, zaslúženým pochvalám i výčitkám.

V pondelok 11. 7. podnikli všetci účastníci XIX. MMO (členovia jury, žiaci i organizátori) celodenný výlet 3 loďami typu Raketa (Beograd, Smederevo, Novi Sad) po prúde Dunaja až do Tekije pri Železných vrátach, kde si prezreli hydroelektráreň Djerdap s 12 Kaplanovými turbínami, vybudovanú ako spoločné dielo Rumunska a Juhoslávie. Po spoločnom obede v hoteli Djerdap v Kladove sa plavili naspäť do Belehradu a počas takmer štvorhodinovej plavby si krátili čas pozorovaním dunajských brehov a stretávaných plavidiel.

V utorok 12. 7. predpoludním mali žiaci voľno, členov jury krátko pred poludním prijal predseda mestskej skupštiny hlavného mesta SFRJ. Večer o 18.00 hod. sa v aule Pionierskeho mestečka konalo slávnostné zakončenie súťaže, vyhlásenie výsledkov a odovzdanie diplomov odmeneným žiakom. Na zasadnutí, ktoré viedol *prof. dr. Dajovič* predniesli krátke prejavy *Salich Nuši*, predseda Socialistického zväzu Juhoslávie, *Bora Stankovič*, predseda Zväzu spoločnosti matematikov, fyzikov a astronómov Juhoslávie a vedúci rumunskej delegácie *prof. dr. Ioan Cuculescu*, ktorý v závere svojho vystúpenia zopakoval svoje pozvanie zúčastnených krajín na XX. MMO do Rumunska. Na rozdiel od predchádzajúcich MMO nevystúpil tentoraz nik z účastníkov súťaže. Diplomy odmeneným odovzdala predsedníčka jury *prof. dr. Milica Ilič-Dajovičová.*

Ihneď po skončení slávnosti sa v jedálni Pionierskeho mestečka konala rozlúčková večera na záver XIX. MMO. Poľská delegácia odcestovala z Belehradu už pred slávnostným zakončením 12. 7. a ostatné delegácie sa postupne lúčili s dejiskom XIX. MMO od včasného rána v stredu 13. 7. Ako jednu z posledných odvážalo lietadlo juhoslovanského JAT o 15.00 hod. z belehradského letiska cez Záhreb do Prahy aj československú delegáciu.

XIX. MMO bola organizačne dobre pripravená a mala predovšetkým pracovný charakter. Sympóziom vedúcich delegácií a malým sympóziom žiakov priniesla nový moment, ktorý by si zaslúžil nasledníkov medzi organizátormi budúcich MMO. Jednoznačne možno konštatovať, že to bola v prvom rade srdečná záležitosť srbských matematikov, ktorí urobili všetko pre to, aby nezostali nič dlžni tradičnej slovanskej pohostinnosti.

2. *VÝSLEDKY SÚŤAŽE*

So svojou najdôležitejšou a dá sa povedať, že aj najťažšou úlohou — výberom šestice súťažných úloh — si tentoraz jury poradila pomerne rýchle a zdá sa, že vcelku úspešne. Nedostatok vhodných úloh z geometrie sice spôsobil, že sa

Počet získaných bodov	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4	Úloha č. 5	Úloha č. 6
8	—	—	—	—	—	29
7	—	—	39	—	28	1
6	99	31	13	43	14	2
5	16	1	1	3	11	2
4	13	4	1	4	17	13
3	9	34	4	6	5	16
2	4	4	2	7	2	7
1	9	42	11	36	34	18
0	5	39	84	56	44	67

do výberu dostala značne staromódna a nenáročná holandská úloha o pravidelnom dvanásťuholníku, ale zostávajúcich päť úloh tvorilo čo do obťažnosti relatívne vyrovnaný a tematicky pestrý celok, o čom svedčí aj v nasledujúcej tabuľke uvedený prehľad o počte účastníkov olympiády, ktorí získali ten-ktorý počet bodov za riešenie jednotlivých úloh.

Z toho vychádza táto relatívna úspešnosť účastníkov XIX. MMO pri riešení jednotlivých súťažných úloh:

1. 82,8 %, 2. 38,6 %, 3. 35,7 %, 4. 38,4 %, 5. 44,8 %, 6. 31,7 %.

S jednotlivými úlohami si najlepšie poradili nižšie uvedené súťažné družstvá: 1. BG a YU, ktoré stratili len 1 bod, 2. GB so ziskom 32 bodov zo 48 možných, 3. H so ziskom 42 bodov z 56 možných, 4. družstvo SU získalo 32 bodov zo 48 možných, 5. USA pri zisku 46 bodov z 56 možných a 6. PL, ktoré získalo 41 bodov zo 64 možných.

Najúspešnejším účastníkom XIX. MMO bol jednoznačne Angličan *John Robert Rickard*, ktorý získal plný počet 40 bodov a špeciálne ceny za riešenie 2. i 3. úlohy. Okrem neho plný počet bodov získali ešte 2 členovia družstva USA, jeden sovietsky a jeden rakúsky žiak. So stratou jediného bodu absolvoval náročnú súťaž najlepší príslušník holandského družstva, ktoré sa stalo najväčším prekvapením tohtoročnej olympiády, keď na doterajších MMO sa vyskytovalo v tabuľke spravidla vždy medzi poslednými. Vedúci holandskej delegácie *prof. dr. J. van de Craats*

Celkové výsledky XIX. MMO sú zhrnuté
v tejto prehľadnej tabulke:

Krajina	Počet získaných cien				Počet špec. cien	Súčet bodov	Neoficiálne poradie	Pozn.
	I.	II.	III.	Spolu				
A	1	1	2	4	—	151	12.	
B	—	—	—	—	—	33		7 žiakov
BG	—	3	3	6	1	172	6.	
C	—	—	—	—	—	41		4 žiaci
CS	—	3	2	5	1	161	9.	
D	1	1	4	6	—	165	7.	
DDR	2	1	1	4	—	163	8.	
DZ	—	—	—	—	—	17		3 žiaci
F	1	—	—	1	—	126	14.	
GB	1	3	3	7	2	190	3.—4.	
H	1	3	2	6	1	190	3.—4.	
I	—	—	—	—	—	22		5 žiakov
M	—	—	—	—	—	49	17.	
NL	1	2	3	6	—	185	5.	
PL	1	2	2	5	—	157	11.	
R	—	1	2	3	—	122	15.	
S	1	1	2	4	—	137	13.	
SF	—	—	1	1	—	88	16.	
SU	1	2	4	7	1	192	2.	
USA	2	3	1	6	—	202	1.	
YU	—	3	3	6	—	159	10.	

vysvetľoval tento nečekaný úspech nebývale dôkladnou a svedomitou prípravou, ktorú tohtoročné družstvo absolvovalo. Bodové rozdiely medzi jednotlivými družstvami nie sú tentoraz príliš veľké. Medzi družstvom USA (v neoficiálnom hodnotení 1.) a družstvom Rakúska (12.) je rozdiel len 51 bodov, kým napr. na XVIII. MMO medzi družstvom ZSSR (1. so ziskom 250 bodov) a družstvom USA (3. so 188 bodmi) bol rozdiel až 62 bodov. V porovnaní s vlaňajškom popri už spomínanom družstve Holandska zaznamenali znateľné zlepšenie najmä družstvá ČSSR, Juhoslávie a Maďarska. Lepší výsledok než na XVIII. MMO dosiahli tiež družstvá USA, NDR, Poľska, Švédska a Fínska. Relatívne slabšie bolo tohto roku družstvo ZSSR. Dobrý štandard, i keď s určitou stratou, potvrdilo družstvo Veľkej Británie. V solídnych výkonoch pokračovalo družstvo Bulharska a na nováčka veľmi pekný výsledok dosiahlo družstvo NSR. Určitým sklamaním je výsledok francúzskeho a čiastočne tiež rakúskeho družstva, hoci obe mali v svojom strede po jednom vynikajúcom jednotlivcovi, ktorý získal prvú cenu.

Prácu jury možno hodnotiť celkove ako úspešnú, i keď bola v niektorých momentoch poznamenaná prílišnou autoritatívnosťou jej predsedníčky *prof. dr. Milice Ilič-Dajovičovej,* spôsobenou pravdepodobne aj nedostatkom poznatkov o metódach práce používaných pri rokovaniach jury MMO. V zložení jury okrem vedúcich družstiev zúčastňujúcich sa MMO po prvý raz (DZ) resp. po viacročnej absencii (B, I) k podstatnejším zmenám nedošlo, o čom svedčí aj nižšie uvedený prehľad:

Krajina	*Vedúci delegácie — člen jury*	*Jeho zástupca*
A	prof. Thomas Mühlgassner	prof. Wolfgang Ratzinger
B	Frederic Burvenich	Buy Halin
BG	dr. Petar Kenderov	Dimo Seraf. Angelov
BR	prof. dr. Rosa Feldmannová (pozorovateľka)	—
C	Felix Recio	—
CS	doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.	dr. František Zítek, CSc.
D	prof. Arthur Engel	Horst Sewerin
DDR	prof. Gustav Burosch	dr. Monika Noacková
DZ	Mohamed Bekada	Amokrane Calou
F	prof. Denis Gerll	prof. Christian Gautier
GB	Robert Cranston Lyness	Terence J. Heard
H	prof. Endre Hódi	doc. dr. István Reiman
I	I. Volčič	G. Felician
M	prof. Uršincerengin Sanžmjatav	Sagdarača Gombyn
NL	prof. dr. Jan van de Craats	prof. Bert Boon
PL	mgr. Andrzej Mąkowski	dr. Maciej Bryński
R	prof. dr. Ioan Cuculescu	prof. Uran Canstantiri
S	dr. Lars-Åke Lindahl	—
SF	dr. Matti Lehtinen	prof. Hetkki Valkams
SU	Anatolij Pavlovič Savin	Vladimír Alexej. Orlov
USA	prof. dr. Samuel L. Greitzer	prof. Murray S. Klamkin
YU	Zoran Kadelburg	prof. Lazar Milin

3. PODROBNEJŠIE O ČESKOSLOVENSKEJ ÚČASTI

Československé družstvo pro XIX. MMO vybralo predsedníctvo ÚVMO predovšetkým na základe výsledkov II. a III. kola kategórie A XXVI. ročníka MO. Pri nominácii však prihliedlo tiež k poznatkom z dvoch sústredení širšieho výberu, ktoré sa konali v Štiříně od 28. 3. do 2. 4., resp. 13.—25. 6. 1977, k poznatkom z korešpondenčného seminára a predchádzajúcej účasti členov širšieho výberu na MMO. Príležitosť zmerať si sily s matematickými talentami 20 krajín zo 4 svetadielov dostala táto osmička žiakov (v tabuľke zároveň uvádzame výsledky, ktoré v riešení úloh XIX. MMO dosiahli). Tab. na násl. straně.

Bolo to družstvo, ktoré možno označiť za jedno najskúsenejších, ktoré za posledné roky ČSSR na MMO reprezentovali, ak uvážime, že J. Navrátil šiel na MMO po štvrtý, J. Kratochvíl po tretí a P. Quittner s P. Takáčom po druhý raz, pričom I. Turek úspešne reprezentoval už na MFO, kde získal 3. cenu. Celkový výsledok, ktorý družstvo dosiahlo v počte získaných cien i v neoficiálnom hodnotení krajín treba rozhodne považovať za úspech — je najlepší, ktorý družstvo ČSSR dosiahlo na MMO od r. 1968 v Moskve. Zároveň však treba po pravde povedať, že v silách družstva bolo tentoraz podstatne viac. Pre psychickú labilitu nečekane sklamali víťaz XXVI. roč. MO J. Kratochvíl, ktorý na XVIII. MMO v Rakúsku získal II. cenu, ale najmä víťaz XXV. ročníka MO P. Takáč, ktorý si z XVIII. MMO priviezol III. cenu. Svoj štandardný výkon podal J. Navrátil, ktorého zisk jediného bodu

Por. čís.	Meno a priezvisko, trieda, škola	Počet bodov získaný za riešenie							Cena
		ú.1	ú.2	ú.3	ú.4	ú.5	ú.6	Spolu	
1.	*Martin Čadek*, 4. tr. G Brno	5	6	0	6	2	0	19	III. špec. za 2. ú.
2.	*Zdeněk Kalousek*, 3. tr. G Jablonec n. N.	6	6	6	0	7	3	28	II.
3.	*Jan Kratochvíl*, 3. tr. G Pardubice	6	1	6	1	1	1	16	
4.	*Jiří Navrátil*, 4. tr. G Olomouc	6	0	7	6	6	8	33	II.
5.	*Pavol Quittner*, 4. tr. G Prievidza	6	4	0	1	7	8	26	II.
6.	*Peter Takáč*, 4. tr. G Šafárikovo	3	0	0	0	0	0	3	
7.	*Josef Tkadlec*, 2. tr. G Bílovec	6	6	0	2	0	1	15	
8.	*Ilja Turek*, 3. tr. G Hradec Králové	6	3	0	6	6	0	21	III.
	Súčet družstva	44	26	19	22	29	21	161	

delil od I. ceny. Veľmi sme mu ju všetci priali a za svoj svedomitý prístup k reprezentácii by si ju bol opravdu zaslúžil, veď pre ČSSR získal III. cenu už na XVII. i XVIII. MMO. Za to si právom zaslúži poďakovanie a prianie aspoň rovnakých úspechov vo svojom vysokoškolskom štúdiu. Veľmi príjemne prekvapil Z. Kalousek i M. Čadek, zvlášť ziskom špeciálnej ceny, očakávaný výsledok dosiahli P. Quittner, I. Turek a nakoniec aj J. Tkadlec, hoci nezískal cenu. Bol však najmladším členom družstva a mimochodom prvým reprezentantom na MMO zo špeciálnych tried s rozšíreným vyučovaním matematiky.

I keď dosiahnutý výsledok netreba preceňovať, možno povedať, že je do určitej miery logickým dôsledkom zvýšenej pozornosti, ktorá sa v posledných rokoch širšiemu výberu pre MMO v ČSSR venuje. Máme tu na mysli predovšetkým dve sústredenia v celkovej dĺžke 3 týždňov v rokoch 1976 a 1977, tri ročníky korešpondenčného seminára a snahu o skvalitnenie tradičných podujatí organizovaných pre matematické talenty. Právom možno očakávať, že ďalšie skvalitnenie týchto podujatí prinesie ešte výraznejšie úspechy na medzinárodnom poli.

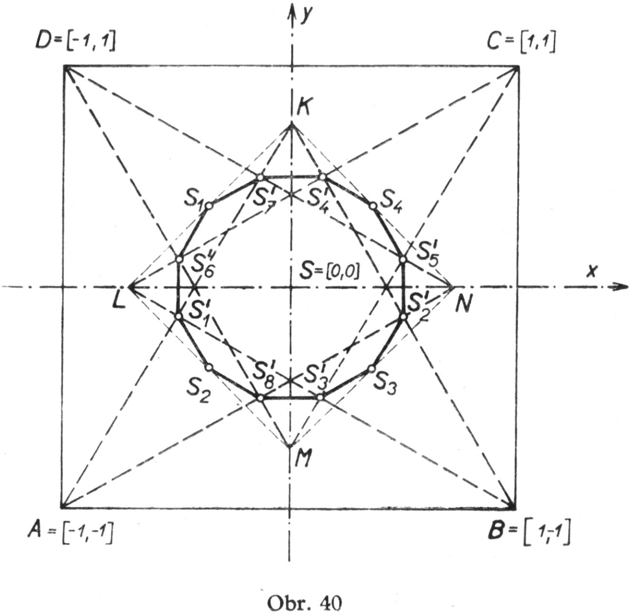
Po spoločenskej stránke družstvo reprezentovalo veľmi dobre a za úspech možno považovať aj vystúpenie J. Kratochvíla a M. Čadka na malom sympóziu účastníkov XIX. MMO.

S dobrým ohlasom sa stretlo tiež vystúpenie vedúceho čsl. delegácie na sympóziu „Mládež a matematika", o ktorom sme už hovorili vyššie. Jedna z úloh navrhnutých ČSSR, ktorá bola vybratá do širšieho výberu 16 úloh, našla pomerne dosť priaznivcov medzi členmi jury a chýbalo opravdu len málo k tomu, aby sa dostala do šestice vybraných úloh. Svojím konštruktívnym prístupom vedenie čs. delegácie pozitívne prispelo k práci jury i k práci koordinátorov a nedostalo sa do žiadnej spornej situácie, ktorých bolo na tohtoročnej MMO výnimočne veľa. Celkove možno teda účasť čs. delegácie na XIX. MMO hodnotiť ako úspešnú a priať si, aby sme mohli dospieť k aspoň takému konštatovaniu aj po budúcej — jubilejnej MMO.

4. RIEŠENIE SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

Riešenie 1. úlohy (spracované podľa riešenia *I. Tureka*).

Označme S stred štvorca $ABCD$ (obr. 40), S_1, S_2, S_3, S_4 v uvedenom poradí stredy úsečiek KL, LM, MN, NK a S_1', S_2', . . . , S_8' v uvedenom poradí stredy úsečiek AK,



Obr. 40

$BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$. Zvoľme v rovine štvorca $ABCD$ kartézsku súradnicovú sústavu tak, aby platilo: $S = [0; 0]$, $A = [-1; -1]$, $B = [1; -1]$, $C = [1; 1]$, $D = [-1; 1]$. Potom zrejme $K = [0; \sqrt{3} - 1]$, $L = [1 - \sqrt{3}; 0]$, $S_1 = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}); \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\right]$, $S_1' = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right]$.

Ľahko sa zistí, že $\overline{SS_1} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \overline{SS_1'} = \overline{S_1' S_1}$. Z toho vyplýva, že $\triangle SS_1S_1'$ je rovnostranný. Zo symetrie podľa osí AC, BD vyplýva, že tiež $\triangle SS_3S_8'$, $\triangle SS_1S_4'$ a $\triangle SS_3S_5'$ sú rovnostranné. Z toho je však zrejmé, že rovnakú vlastnosť majú tiež $\triangle SS_4'S_5'$ a $\triangle SS_1'S_8'$. Body S_1, S_1', S_8', S_3, S_5', S_4' sú teda vrcholmi pravidelného šesťuholníka so stredom S a stranou dĺžky $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Keďže $M = [0; 1 - \sqrt{3}]$, je $S_2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}); \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})\right]$, $S_3' = \left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right]$ a analogicky ako hore sa vypočíta, že $\overline{SS_2} = \overline{SS_3'} = \overline{S_2S_3'} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, z čoho vzhľadom na symetriu dostávame, že $S_2S_3'S_2'S_4S_7'S_6'$ je taktiež pravidelný šesťuholník so stredom S a stranou $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Keďže osi symetrie $S_1S_3 \equiv BD$ a $S_2S_4 \equiv AC$ oboch šesťuholníkov sú na seba kolmé, možno získať jeden šesťuholník z druhého otočením o 90° okolo stredu S. Z toho vyplýva, že ich vrcholy tvoria množinu vrcholov pravidelného dvanásťuholníka, čo sme mali dokázať.

Riešenie 2. úlohy (podľa riešenia *M. Čadeka* odmeneného špeciálnou cenou).

Uvažujme o postupnosti

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

reálnych čísel a označme $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Podľa textu úlohy musí platiť

$$\left.\begin{array}{ll} s_{k+7} < s_k & \text{pre každé } k = 1, 2, \ldots, n-7, \\ s_{k+11} > s_k & \text{pre každé } k = 1, 2, \ldots, n-11, \\ s_7 < 0, \; s_{11} > 0. & \end{array}\right\} \tag{2}$$

Nech $n \geqq 17$. Potom z (2) postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} s_{17} > s_6 > s_{13} > s_2 > s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 > \\ > s_{15} > s_4 > s_{11} > 0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10} > s_{17}, \end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že by malo platiť

$$s_{17} > s_{17},$$

čo je spor.

Musí preto byť $n \leqq 16$. Ak má postupnosť (1) so 16 členmi mať požadované vlastnosti, musí pre jej čiastočné súčty s_i, $i = 1, 2, \ldots, 16$ platiť

$$\begin{aligned} s_6 > s_{13} > s_2 > s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 > s_{15} > \\ > s_4 > s_{11} > 0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10}. \end{aligned} \tag{3}$$

V reťazci nerovností (3) sa z čísel s_1, $i = 1, 2, \ldots, 16$ vyskytuje každé práve raz. Existuje teda nekonečne mnoho 16-členných postupností s_i, $i = 1, 2, \ldots, 16$ reálnych čísel vyhovujúcich vzťahom (3). Ku každej z nich dostaneme postupnosť (1) požadovaných vlastností, ak položíme

$$a_1 = s_1\,,\ a_k = s_k - s_{k-1}\,,\ k = 2, 3, \ldots, 16\,. \quad (4)$$

Špeciálne pri voľbe

$$s_6 = 12, s_{13} = 11, s_2 = 10, s_9 = 9, s_{16} = 8, s_5 = 7, s_{12} = 6, s_1 = 5, s_8 = 4, s_{15} = 3, s_4 = 2, s_{11} = 1, s_7 = -1, s_{14} = -2, s_3 = -3, s_{10} = -4$$

dostaneme zo (4) postupnosť

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5,$$

ktorá má 16 členov a všetky požadované vlastnosti, ako sa ľahko presvedčíme.

Ukázali sme tak, že maximálny počet členov postupnosti (1) požadovaných vlastností je 16.

Riešenie 3. úlohy.

Ľahko sa vidí, že čísla $(n-1)^2$, $(2n-1)^2$ a $(n-1)\,.\,(2n-1)$ sú z V_n pre každé prirodzené číslo $n > 2$:
$(n-1)^2 = 1 + (n-2)n$, $(2n-1)^2 = 1 + (4n-4)n$,
$(n-1)(2n-1) = 1 + (2n-3)n$.
Preskúmajme tieto čísla z hľadiska rozložiteľnosti na súčin faktorov z V_n. Nech platí: $(n-1)^2 = (1+kn)(1+mn)$, kde k, m sú prirodzené čísla. Keďže $(1+kn)(1+mn) = 1 + (k+m+kmn)n$, je $(n-1)^2$ rozložiteľné vo V_n vtedy a len vtedy, keď $k + m + kmn = n - 2$ čiže

$$k + m + 2 = (1 - km)n\,. \quad (1)$$

Je zrejmé, že pre žiadne prirodzené číslo n nemôžu existovať prirodzené čísla k, m tak, aby platilo (1), pretože pre každé prirodzené číslo k, m je ľavá strana kladná, pravá strana nekladná. Zrejme

$(2n - 1)^2 = (1 + kn)(1 + mn)$ vtedy a len vtedy, keď

$$k + m + kmn = 4n - 4$$

čiže

$$k + m + 4 = (4 - km)n . \qquad (2)$$

K tomu, aby existovali prir. čísla k, m vyhovujúce (2), sú len tieto možnosti:

$k = m = 1$, z (2) máme $n = 2$, zatiaľ čo uvažujeme len o $n > 2$;

$k = 1, m = 2$ alebo $k = 2, m = 1$, kedy z (2) dostaneme $2n = 7$, čomu nevyhovuje žiadne prirodzené čísla n;

$k = 1, m = 3$ alebo $k = 3, m = 1$, kedy z (2) máme $n = 8$.

Vo V_8 však $(2n - 1)^2 = 15^2 = 225 = 9 . 25 = (1 + 1.8)(1 + 3.8)$ a čísla $1 + 1.8$, $1 + 3.8$ sú zrejme vo V_8 nerozložiteľné.

Číslo $(n - 1)(2n - 1)$ je vo V_n rozložiteľné vtedy a len vtedy, keď $k + m + kmn = 2n - 3$ čiže

$$k + m + 3 = (2 - km)n . \qquad (3)$$

Ľahko sa vidí, že (3) môžu vyhovovať len $k = m = 1$, a to pre $n = 5$. Vo V_5 však $(n - 1)(2n - 1) = 4 . 9 = 36 = (1 + 1.5)^2$, pričom číslo $1 + 1.5$ je už vo V_5 nerozložiteľné.

Zistili sme tedy, že číslo $r = (n - 1)^2 (2n - 1)^2$, ktoré zrejme patrí do V_n pre každé $n > 2$:

$$r = 1 + [(2n - 3)(2n^2 - 3n + 2)] . n ,$$

možno vo V_n rozložiť aspoň 2 spôsobmi na súčin faktorov nerozložiteľných vo V_n:

Pre $n \neq 5, 8$

$$r = (n - 1)^2 (2n - 1)^2 = [(n - 1)(2n - 1)]^2 .$$

Pre $n = 5 : r = 4^2 . 9^2$ možno rozložiť buď na súčin $r = (1 + 3.5)(1 + 16.5)$, alebo na súčin $r = (1 + 1.5)^4$, pričom faktory oboch rozkladov sú už vo V_5 nerozložiteľné.

Pre $n = 8 : r = 7^2 . 15^2$ a možné rozklady sú buď $r = (1 + 6.8)(1 + 1.8)(1 + 3.8)$, alebo $r = (1 + 13.8)^2$.

Riešenie 4. úlohy.

Označme $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $R = \sqrt{A^2 + B^2}$. Stačí zrejme uvažovať o takom prípade, keď z každej dvojice čísel a, b, resp. A, B, je aspoň jedno číslo rôzne od nuly. V takom prípade však existujú reálne čísla φ, ψ tak, že

$$a = r \cos \varphi , \ b = r \sin \varphi ; \ A = R \cos 2\psi , \ B = R \sin 2\psi$$

a po dosadení do

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$$

dostaneme

$$f(x) = 1 - r \cos (x - \varphi) - R \cos 2(x - \psi) .$$

Nech $R > 1$. Potom z čísel

$$f(\psi) = 1 - r \cos (\psi - \varphi) - R ,$$
$$f(\psi + \pi) = 1 + r \cos (\psi - \varphi) - R$$

je pri ľubovoľných reálnych hodnotách φ, ψ aspoň jedno záporné, čo je spor s tým, že $f(x) \geq 0$ pre všetky reálne x .

Nech $r > \sqrt{2}$. Potom z čísel

$$f\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - r\frac{\sqrt{2}}{2} + R \sin 2(\varphi - \psi),$$

$$f\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - r\frac{\sqrt{2}}{2} - R \sin 2(\varphi - \psi)$$

je pri ľubovoľných φ, ψ aspoň jedno záporné, čo je opäť spor s nezápornosťou funkcie f.

Musí preto súčasne platiť $r \leqq \sqrt{2}$, $R \leqq 1$, čo je zrejme ekvivalentné nerovnostiam, ktorých správnosť sme mali dokázať.

Riešenie 5. úlohy.

Podľa textu úlohy má platiť

$$a^2 + b^2 = q(a + b) + r\,, 0 \leqq r < a + b; q, r \text{ celé}; \quad (1)$$

$$q^2 + r = 1977\,. \quad (2)$$

Keďže $1977 = 44^2 + 41$, musí byť $q \leqq 44$. Uvažujeme najskôr o prípade $q = 44$, $r = 41$. Po dosadení do (1) dostaneme

$$a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41\,,$$

z čoho po doplnení na úplné štvorce máme

$$(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009\,. \quad (3)$$

Položme

$$a - 22 = x\,, \qquad b - 22 = y\,, \quad (4)$$

kde x, y sú celé čísla. Potom (3) prejde do tvaru

$$x^2 + y^2 = 1009\,, \tag{5}$$

čo je rovnice symetrická vzhľadom na x a y. Môžeme preto bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $x \leqq y$. Keďže štvorec celého čísla môže končiť len niektorou z cifier 0, 1, 4, 5, 6, 9, môžu rovnici (5) vyhovovať len také dvojice celých čísel, ktorých štvorce sú zakončené buď ciframi 0 a 9, alebo ciframi 4 a 5. Uvažujme preto o číslach zakončených cifrou 0 alebo 5 so štvorcom menším než 1009 a zostavme tabuľku

z	0	5	10	15	20	25	30
z^2	0	25	100	225	400	625	900
$1009 - z^2$	1009	984	909	784	609	384	109

Z čísel v treťom riadku tabuľky má celočíselnú druhú odmocninu len číslo $784 = 28^2$.

Rovnici (5) vyhovujú tedy len tieto dvojice celých čísel x, y, pre ktoré platí $x \leqq y$:

x	15	-15	-28	-28
y	28	28	15	-15

Po dosadení do (4) prvé dve dvojice dávajú

$$a = 37\,,\ b = 50\,,\ \text{resp.}\ a = 7\,,\ b = 50\,, \tag{6}$$

kým tretia a štvrtá dvojica nedáva prirodzené a, b.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe dvojice (6) vyhovujú podmienkam úlohy:

$$37^2 + 50^2 = 3869\,, \qquad 3869 = 44\,.\,87 + 41\,,$$

$$7^2 + 50^2 = 2549\,, \qquad 2549 = 44\,.\,57 + 41\,.$$

Pre $q \leqq 43$ z (2) dostávame $r \geqq 128$. Z druhej strany však z nerovnosti $2ab \leqq a^2 + b^2$ a z (1) vyplýva

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leqq 2(a^2 + b^2) = 2q(a + b) + 2r$$

čiže

$$a + b \leqq 2q + \frac{2r}{a + b}\,. \qquad (7)$$

Keďže $r < a + b$, je $\dfrac{r}{a + b} < 1$ a zo (7) máme $a + b < < 2(q + 1)$. Pre $q \leqq 43$ však z toho vyplýva $r < a + + b < 88$, čo je spor.

Záver: Úloha má až na poradie čísel a, b práve dve rôzne riešenia určené v (6).

Riešenie 6. úlohy (spracované podľa riešenia *P. Quittnera*).

Najskôr úplnou indukciou dokážme, že ak k je dané prirodzené číslo, potom pre každé prirodzené číslo $n > k$ platí $f(n) > k$.

1. Nech $k = 1$, $n > 1$. Potom vzhľadom na

$$f(n + 1) > f(f(n)) \qquad (1)$$

platí: $f(n) > f(f(n - 1)) \geqq 1$, pretože $n - 1$ je prirodzené číslo a hodnoty funkcie f sú prirodzené čísla $\geqq 1$. Teda $f(n) > 1$.

2. Nech pre nejaké prirodzené číslo $k \geqq 1$ a pre každé prirodzené číslo n platí

$$n > k \Rightarrow f(n) > k . \tag{2}$$

Uvažujeme o $n > k + 1$. Potom $n - 1 > k$ a podľa (2) platí $f(n-1) > k$ čiže $f(n-1) = k + m$, kde $m \geqq 1$ je prirodzené číslo. Potom však podľa (1) $f(n) > f(f(n-1)) = f(k + m)$ a podľa (2) $f(k + m) > k$ čiže $f(k + m) \geqq k + 1$. Dostali sme tedy, že $f(n) > k + 1$, čím je platnosť (2) dokázaná pre každé prirodzené číslo k.

Z toho však už priamo vyplýva, že pre každé prirodzené číslo n

$$f(n) \geqq n . \tag{3}$$

Ak by totiž pre nejaké n platilo $f(n) < n$, potom podľa (2) by muselo platiť $f(n) > f(n)$, čo je spor.

Ďalej dokážeme, že funkcia f je rastúca pre všetky prirodzené n.

Ak by totiž pre nejaké prirodzené číslo m platilo

$$f(m) \geqq f(m + 1) ,$$

potom by vzhľadom na (3) muselo platiť $f(m) \geqq m + 1$ čiže $f(m) = m + p$, kde $p \geqq 1$ je prirodzené číslo. Teda

$$m + p = f(m) \geqq f(m + 1) > f(f(m)) = f(m + p) \geqq m + p,$$

čo je spor.

Platí teda pre každé prirodzené číslo n a q

$$f(n + q) > f(n) . \tag{4}$$

Teraz už ľahko dokážeme, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$f(n) = n .$$

Ak by totiž pre nejaké prirodzené číslo n_0 platilo $f(n_0) > > n_0$, potom by existovalo prirodzené číslo $k \geqq 1$ tak, že $f(n_0) = n_0 + \mathrm{k}$.

Podľa (1) však potom

$$f(n_0 + 1) > f(f(n_0)) = f(n_0 + k) ,$$

čo je spor so (4).

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.