25. ročník matematické olympiády

III. Soutěžní úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 25. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1975-1976. 18. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. pp. 44–83.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404678

III. Soutěžní úlohy I. kola

KATEGORIE A

A – I – 1

Nájdite všetky usporiadané dvojice (x, y) nezáporných reálnych čísel, pre ktoré platí:

$$\frac{64x^2y^2}{4x^2 + y^2} = (x + 1)(y + 2)(2x + y).$$

Komentár. Riešenie tejto rovnice s dvoma neznámymi, ktorá má zmysel pre všetky dvojice $(x, y) \neq (0, 0)$ reálnych čísel, je založené na použití Cauchyho nerovnosti o aritmetickom a geometrickom priemere nezáporných reálnych čísel. Pre $(x, y) \neq (0, 0)$ je daná rovnica ekvivalentná s rovnicou

$$(x + 1)(y + 2)(2x + y)(4x^2 + y^2) = 64x^2y^2 \tag{1}$$

a pri $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ možno na všetky štyri faktory ľavej strany rovnice (1) aplikovať Cauchyho nerovnosť – najlepšie vo formulácii: Pre ľubovoľnú dvojicu a, b nezáporných reálnych čísel platí $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$, pričom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď $a = b$.

To vedie hneď k záveru, že pre všetky $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ platí

$$(x+1)(y+2)(2x+y)(4x^2+y^2) \geqq$$
$$\geqq 16 \,.\, \sqrt{x} \,.\, \sqrt{2y} \,.\, \sqrt{2xy} \,.\, \sqrt{4x^2y^2} = 64x^2y^2 \,.$$

Riešenie $x = 1$, $y = 2$ dostaneme z podmienky pre rovnosť.

A – I – 2

Nech n a k sú prirodzené čísla a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladné reálne čísla, pre ktoré platí $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

Dokážte, že platí

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \ldots + a_n^{-k} \geqq n^{k+1} \,.$$

Komentár. Na dôkaz tvrdenia úlohy sa priamo núka metóda úplnej indukcie podľa n. Pre $n = 1$ je $a_1 = 1$ a pre každé prirodzené číslo k zrejme platí rovnosť.

Ťažisko riešenia úlohy je vo vhodnom využití indukčného predpokladu pri dôkaze správnosti tvrdenia pre $n + 1$. Stačí si však uvedomiť, že ak

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$$

sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1 \,,$$

potom $0 < a_{n+1} < 1$ a ľahko dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{1 - a_{n+1}} = 1 \,.$$

Ak použijeme indukčný predpoklad pre

$$b_j = \frac{a_j}{1 - a_{n+1}}, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

dostaneme nerovnosť

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j^{-k} \geqq \frac{n^{k+1}}{(1 - a_{n+1})^k} + \frac{1}{a_{n+1}^k}. \qquad (2)$$

K úplnosti dôkazu zostáva ukázať, že pravá strana nerovnosti (2) je pre každé reálne číslo $0 < a_{n+1} < 1$ nie menšia než $(n + 1)^{k+1}$. Možno to urobiť napr. tak, že nájdeme minimum funkcie f:

$$f\colon (0, 1) \mapsto (-\infty, \infty)$$

definovanej predpisom

$$f\colon x \mapsto \frac{n^{k+1}}{(1 - x)^k} + \frac{1}{x^k}.$$

Použijúc prvú a druhú deriváciu, dostaneme, že funkcia dosahuje minimum v bode

$$\frac{1}{n + 1}.$$

A – I – 3

Dané sú prirodzené čísla k a n, $k \leqq n$, $n \geqq 3$. Určete v intervale $(0, \pi)$ množinu všetkých takých hodnot, ktoré môže nadobúdať veľkosť k-tého najväčšieho vnútorného uhla konvexného n-uholníka. (Pod k-tym najväčším vnútorným uhlom n-uholníka rozumieme k-ty člen nerastúcej n-člennej postupnosti veľkosti jeho uhlov.)

Komentár. Kvôli zjednodušeniu úvah možno označiť vnútorné uhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ konvexného n-uholníka tak, aby platilo

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n .$$

K odvodeniu príslušných odhadov pre α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ vyjdeme z toho, že α_k nemôže byť menšie ako aritmetický priemer veľkostí uhlov $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ a nemôže byť väčšie ako aritmetický priemer veľkosti uhlov $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, pričom využijeme základné vzťahy, ktorým vyhovujú veľkosti vnútorných uhlov konvexného n-uholníka:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi , \qquad \alpha_1 < \pi , \quad \alpha_n > 0 .$$

Takým spôsobom možno ľahko získať nasledujúce odhady:

$$\frac{n-2}{n}\pi \leqq \alpha_1 < \pi ,$$

$$\frac{n-k-1}{n-k+1}\pi < \alpha_k < \pi , \qquad k = 2, \ldots, n-2 ; \tag{3}$$

$$0 < \alpha_{n-1} < \frac{n-2}{n-1}\pi , \qquad 0 < \alpha_n \leqq \frac{n-2}{n}\pi .$$

Zostáva ukázať, že existujú konvexné n-uholníky, veľkosti vnútorných uhlov, ktoré vyhovujú nerovnostiam

(3) tak, že je splnená podmienka

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \, .$$

K tomu stačí uviesť príklad n-uholníka uvedených vlastností pre každý jednotlivý prípad.

Na ukázku se budeme zabývat jen podmínkou α_k. Zvolme libovolné přirozené číslo $n \geqq 4$ a číslo $k \in \{2, 3, \ldots, n - 2\}$. Dále zvolme libovolné reálné číslo x splňující nerovnosti

$$\frac{n - k - 1}{n - k + 1} \pi < x < \pi \, .$$

Nejdříve dokážeme, že pro uvažovaná čísla n a k platí

$$\frac{n - k - 1}{n - k + 1} \pi < \frac{n - 2}{n} \pi < \pi \, . \tag{4}$$

Pravá nerovnost je zřejmá, druhou dokážeme nepřímo. Nechť

$$\frac{n - k - 1}{n - k + 1} \geqq \frac{n - 2}{n} \, . \tag{5}$$

Pak

$$n(n - k - 1) \geqq (n - 2)(n - k + 1) \, ,$$

odkud plyne

$$-n \geqq n - 2n + 2k - 2 \, ,$$

tj.

$$k \leqq 1 \, ,$$

což je spor. Tedy nerovnost (5) neplatí a platí (4).

Dále rozlišme tři případy:

a) Nechť $x = \dfrac{n-2}{n}\pi$. Pak položíme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{n-2}{n}\pi\,.$$

Odtud plyne, že n-úhelník s k-tým největším úhlem o velikosti x existuje a je jím např. pravidelný n-úhelník.

b) Nechť $\dfrac{n-k-1}{n-k+1}\pi < x < \dfrac{n-2}{n}\pi$. Potom položíme

$$\alpha_k = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = x$$

a

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = \frac{(n-2)\pi - (n-k+1)x}{k-1}\,.$$

Snadno se dokáže, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi\,, \tag{6}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} > \alpha_k = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n\,.$$

Odtud již plyne existence n-úhelníka, jehož k-tý největší úhel má velikost x.

c) Nechť $\dfrac{n-2}{n}\pi < x < \pi$. Potom položíme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = x$$

a

$$\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots = \alpha_n = \frac{(n-2)\pi - k\,.\,x}{n-k}\,.$$

Snadno se dokáže, že platí (6) a že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n > 0 .$$

Z těchto vztahů již vyplývá existence n-úhelníka, jehož k-tý největší úhel má velikost x.

A – I – 4

V rovině je dán čtverec $P_1P_2P_3P_4$. Určete množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC = BD$, přičemž celá úhlopříčka BD leží ve čtverci $P_1P_2P_3P_4$.

Komentář. Nejprve uvážíme, jaká je množina $\mathbf{V}(B, D)$ vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, pro které $AC = BD$, jsou-li oba body B a D pevné. (Výsledkem je množina bodů, které mají od úsečky BD vzdálenost menší než BD, a přitom neleží na přímce BD.) Pak stačí zjistit, co je sjednocení všech množin $\mathbf{V}(B, D)$, probíhají-li body B a D všechny možné dvojice navzájem různých bodů čtverce $P_1P_2P_3P_4$. Z rozboru vyplývá, že výsledkem je sjednocení $\mathbf{V}(P_1, P_3) \cup \mathbf{V}(P_2, P_4)$, což je sjednocení čtyř shodných otevřených kruhů o středech P_1, P_2, P_3, P_4 a poloměrech P_1P_3.

A – I – 5

V rovině jsou dány dva trojúhelníky $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$. Sestrojte takový rovnoběžník $ABCD$, jehož vrcholy A a C leží na hranici trojúhelníku $\mathbf{T}_1$ a rozdělují ji na dvě stejně dlouhé části a zároveň vrcholy B a D leží na hranici trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, kterou také rozdělují na dvě stejně dlouhé části.

Komentář. K řešení užijeme výsledku 3. přípravné úlohy kategorie A. Je-li totiž $ABCD$ některý rovnoběžník vyhovující úloze, pak střed tohoto rovnoběžníku je obsažen jak v množině středů všech úseček, jejichž krajní body půlí obvod trojúhelníku $\mathbf{T}_1$, tak i v obdobné množině trojúhelníku $\mathbf{T}_2$. Pro středy hledaných rovnoběžníků proto padají v úvahu jen průsečíky hranic trojúhelníků $\mathbf{T}'_1$ a $\mathbf{T}'_2$, které jsou řešením zmíněné přípravné úlohy. Z takto vzniklých průsečíků je třeba odstranit ty, které nevedou k rovnoběžníku (jsou-li úsečky, které půlí obvody trojúhelníků, obsaženy v přímce). Ze zbylých středů najdeme řešení. Množina středů může obsahovat i nekonečně mnoho bodů (mají-li hranice trojúhelníků $\mathbf{T}'_1$ a $\mathbf{T}'_2$ společnou úsečku). Může proto i množina hledaných rovnoběžníků být nekonečná.

A – I – 6

V rovině jsou dány dva trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$ této vlastnosti: Ke každému rovnoramennému trojúhelníku $\mathbf{T}_1$, který obsahuje $\triangle_1$, resp. $\triangle_2$, existuje trojúhelník $\mathbf{T}_2$ shodný s $\mathbf{T}_1$, který obsahuje $\triangle_2$, resp. $\triangle_1$. Dokažte, že trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$ jsou shodné.

Komentář. Základní myšlenkou řešení je volit k jednomu z daných trojúhelníků $\triangle_1$ (o stranách $a \leqq b \leqq c$) a $\triangle_2$ (o stranách $a' \leqq b' \leqq c'$) opsaný rovnoramenný trojúhelník určité vlastnosti (s nejmenší maximální stranou apod.).

Druhý trojúhelník pak nutně má opsaný rovnoramenný trojúhelník téže vlastnosti, který je s předchozím rovnoramenným trojúhelníkem shodný. Přitom užijeme 4. přípravné úlohy kategorie A.

Všimněme si, že trojúhelník $\triangle_1$ je obsažen v rovnoramenném trojúhelníku s rameny délky c, která svírají úhel α (je $\alpha \leqq 60°$), ale není obsažen podle (1) zmíněné přípravné úlohy v žádném rovnoramenném trojúhelníku s rameny délky menší než c, svírajícími úhel α, ani v žádném rovnoramenném trojúhelníku s rameny délky c, svírajícími úhel menší než α.

Protože podobný výrok platí i o trojúhelníku $\triangle_2$, je nutně $c' = c$ a $\alpha' = \alpha$.

Uvědomíme-li si, že k $\triangle_1$ existuje rovnoramenný trojúhelník, jehož nejmenší výška je rovna v_c, pak z (2) zmíněné přípravné úlohy vyplývá obdobnou úvahou $v_c = v'_c$. Odtud snadno plyne shodnost obou trojúhelníků $\triangle_1$ a $\triangle_2$.

KATEGORIE B

B – I – 1

Nech a, b, c sú ľubovoľné kladné reálne čísla. Potom neexistuje trojuholník, ktorého strany by mali dĺžky

$$a\sqrt{c^2 - b^2}, \quad b\sqrt{c^2 - a^2}, \quad c^2 .$$

Dokážte.

Komentár. Je zrejmé, že sa stačí obmedziť na prípad $c > a$, $c > b$. Formulácia úlohy nabáda k tomu, aby si riešiteľ zvolil metódu nepriamého dôkazu. Ak predpokladáme, že trojuholník so stranami daných dĺžok existuje, bude to znamenať, že dané čísla musia vyhovovať trojuholníkovým nerovnostiam. K dôkazu daného tvrdenia bude stačiť, ak z niektorej z nich odvodíme spor.

Je prirodzené najskôr to skúsiť s nerovnosťou

$$c^2 < a\sqrt{c^2 - b^2} + b\sqrt{c^2 - a^2}\,. \tag{1}$$

K ďalšej úprave nerovnosti (1) je treba preskúmať vzájomný vzťah čísel c^2 a $a\sqrt{c^2 - b^2}$, resp. c^2 a $b\sqrt{c^2 - a^2}$. Z daných podmienok ľahko odvodíme, že $c^2 > a\sqrt{c^2 - b^2}$, čo nám umožní (1) upraviť na tvar

$$0 < c^2 - a\sqrt{c^2 - b^2} < b\sqrt{c^2 - a^2}\,,$$

z ktorého po umocnení a jednoduchých úpravách už ľahko dostaneme $(a - \sqrt{c^2 - b^2})^2 < 0$.

B – I – 2

Je daný konvexný deväťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$. Päť z jeho vrcholov zafarbíme na červeno, zostávajúce štyri na modro. Koľkými spôsobmi možno realizovať takéto zafarbenie vrcholov, ak má práve trinásť uhlopriečok deväťuholníka spájať vrcholy rovnakej farby?

Komentár. Ide o jednoduchú kombinatorickú úlohu, ktorú možno riešiť najjednoduchšie úplným výčtom a rozborom možností.

Uvedomime si, koľkými úsečkami možno spojiť vrcholy rovnakej farby. Ľahko sa vidí, že červené vrcholy spája celkom 10 úsečiek, modré vrcholy 6 úsečiek. Z týchto úsečiek sú však niektoré stranami daného deväťuholníka, zatiaľ čo nás zaujímajú len jeho uhlopriečky. Treba si uvedomiť, že k tomu, aby úsečka spájajúca vrcholy rovnakej farby bola stranou, je nutné a stačí, aby tieto vrcholy boli susednými vrcholmi daného deväťuholníka.

Ďalej možno uvažovať napr. tak, že modré vrcholy rozdelia obvod konvexného 9-uholníka na 4 časti, v ktorých je určitým spôsobom rozmiestených 5 červených vrcholov. Analýzou jednotlivých prípadov sa možno ľahko presvedčiť, že počet uhlopriečok spájajúcich červené vrcholy je vždy o 3 väčší než počet uhlopriečok spájajúcich vrcholy modré. Z toho vyplýva, že 13 uhlopriečok spájajúcich vrcholy rovnakej farby sa dostane práve vtedy, keď bude 8 červených a 5 modrých. Zo 6 modrých úsečiek môže byť teda len jedna stranou 9-uholníka. Tú možno vybrať práve 9 spôsobmi. Medzi vrcholmi, ktoré spája táto strana neleží ani jeden červený vrchol. Zostáva teda zistiť, koľkými spôsobmi možno 5 červených vrcholov rozdeliť do troch častí obvodu deväťuholníka určených modrými vrcholmi, pričom je zrejmé, že žiadna z týchto častí nemôže zostať prázdna. Každý riešiteľ už ľahko môže zistiť, že to ide práve 6 spôsobmi (3,1,1; 1,3,1; 1,1,3; 2,2,1; 2,1,2; 1,2,2). Z toho priamo vyplýva, že zafarbenie vrcholov s požadovanými vlastnosťami možno realizovať $9 . 6 = 54$ spôsobmi.

Pre všetky reálne čísla x je definovaná reálna funkcia f takto:

$$f\colon x \mapsto \frac{x^2 + 2px - 2}{x^2 - 2x + 2}, \qquad (2)$$

kde p je parameter.

Určte všetky reálne čísla p, pre ktoré platí

$$|f(x)| < 2 \qquad (3)$$

pre všetky reálne čísla x.

Komentár. Ľahko sa presvedčíme, že diskriminant trojčlena $x^2 - 2x + 2$ je záporný, čo znamená, že predpisom (2) je funkcia f definovaná pre všetky reálne x. Keďže $x^2 - 2x + 2 > 0$ pre $x \in (-\infty, \infty)$, ľahko možno získať sústavu nerovností ekvivalentnú s (3):

$$3x^2 + 2(p - 2)x + 2 > 0, \quad x^2 - 2(p + 2)x + 6 > 0. \qquad (4)$$

Ak dojdeme k tejto sústave, stačí si uvedomiť, za akých podmienok pre p budú nerovnosti (4) súčasne splnené pre všetky reálne x. Bude to zrejme vtedy, keď kvadratické funkcie na ľavých stranách nerovností nebudú mať reálne korene. To dáva podmienky pre diskriminanty

$$(p - 2)^2 - 6 < 0 \quad \text{a} \quad (p + 2)^2 - 6 < 0,$$

z ktorých pre p dostávame sústavu nerovností. Jej riešenie by už nemalo byť problémom. Znázornením získaných vzťahov na číselnej osi dostaneme pre p podmienku

$$2 - \sqrt{6} < p < -2 + \sqrt{6}. \tag{5}$$

Obrátením postupu sa ľahko presvedčíme, že všecky p určené (5) vyhovujú podmienkam úlohy.

B – I – 4

V rovině jsou dány dva tupoúhlé trojúhelníky takové, že v každém případě, když jeden z nich je obsažen v nějakém pravoúhelníku $\mathbf{P}_1$, pak existuje pravoúhelník $\mathbf{P}_2$, který je shodný s $\mathbf{P}_1$ a obsahuje druhý z daných trojúhelníků. Dokažte, že oba dané trojúhelníky jsou shodné.

Komentář. Cesta k řešení je volit takové pravoúhelníky opsané daným trojúhelníkům $\triangle_1$ (o stranách $a \leqq b \leqq c$) a $\triangle_2$ (o stranách $a' \leqq b' \leqq c'$), které mají určité vlastnosti (např. nejmenší obsah apod.) a které jsou trojúhelníky $\triangle_1$ a $\triangle_2$ jednoznačně určeny. Přitom užijeme výsledku 3. přípravné úlohy kategorie B.

Podle výsledku této úlohy existuje k tupoúhlému trojúhelníku $\triangle_1$ jediný opsaný pravoúhelník $\mathbf{P}$, který má obsah rovný dvojnásobku obsahu trojúhelníku $\triangle_1$ (všechny ostatní mají obsah větší). Tento pravoúhelník má jednu stranu délky c a druhou délky v_c, která je (proč?) menší než c.

Obdobně existuje k tupoúhlému trojúhelníku $\triangle_2$ jediný opsaný pravoúhelník $\mathbf{P}'$ nejmenšího obsahu a jeho strany mají délky c' a $v_c' < c'$.

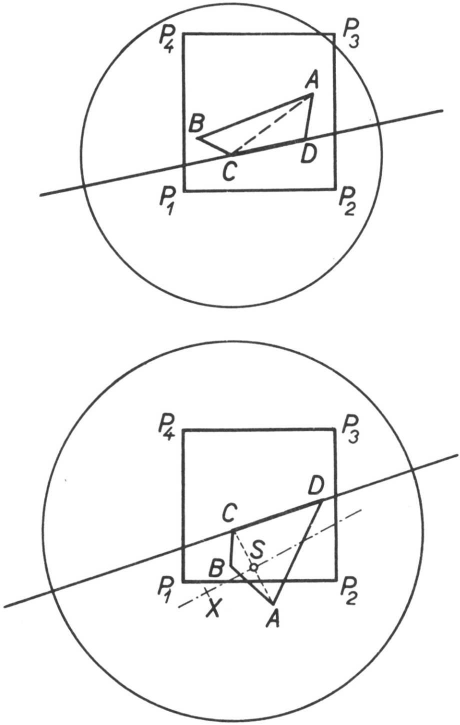
Z předpokladu úlohy snadno plyne, že pravoúhelník $\mathbf{P}$ je shodný s pravoúhelníkem $\mathbf{P}'$. Tedy je $c = c'$ a $v_c = v_c'$, neboť c a c' jsou větší ze stran. K dokončení důkazu shodnosti trojúhelníků $\triangle_1$ a $\triangle_2$ stačí ukázat, že o nejmenších úhlech platí $\alpha = \alpha'$. Kdyby bylo např. $\alpha < \alpha'$, pak by k pravoúhelníku $\mathbf{P}_1$ obsahujícímu $\triangle_1$, jehož úhlopříčka je stranou délky c trojúhelníku $\triangle_1$ a jehož úhel úhlopříčky a strany je α, neexistoval shodný pravoúhelník obsahující $\triangle_2$.

B – I – 5

V rovině je dán čtverec $P_1P_2P_3P_4$. Najděte množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, jejichž strana CD je celá obsažena ve čtverci $P_1P_2P_3P_4$ a je druhou nejdelší stranou čtyřúhelníku $ABCD$.

Komentář. Nejprve najdeme pro pevné body C a D množinu $\mathbf{M}(C, D)$ vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, u nichž je CD druhou nejdelší stranou (to znamená, že jsou-li p, q, r, s délky stran a $p \geqq q \geqq r \geqq s$, pak $CD = q$). Z názoru dojdeme k domněnce, že $\mathbf{M}(C, D)$ je otevřený kruh $\mathbf{K}$ (tj. kruh bez hraniční kružnice) se středem C a poloměrem rovným dvojnásobku délky CD, z něhož jsou vyňaty body přímky CD. Důkaz pak probíhá např. takto: Je-li $ABCD$ čtyřúhelník uvedených vlastností (obr. 3a, b), pak je buď $AD \leqq CD$, a pak $AC < AD + CD \leqq 2 \,.\, CD$, anebo $AD > CD$, ale pak nutně $BC \leqq CD$ i $AB \leqq CD$, tedy $AC < AB + BC \leqq 2 \,.\, CD$. Tedy A leží uvnitř kruhu $\mathbf{K}$ a mimo přímku CD.

Je-li obráceně A vnitřní bod kruhu $\mathbf{K}$, neležící na přímce CD, pak dostaneme čtvrtý vrchol B čtyřúhelníku $ABCD$ uvedených vlastností, např. takto: Je-li $AD < CD$, volíme jako bod B čtvrtý vrchol rovnoběžníku $ABCD$. Je-li $AD \geqq CD$, označíme S střed úsečky AC a SX tu polopřímku v ose úsečky AC, která neobsahuje vnitřní body



a)

b)

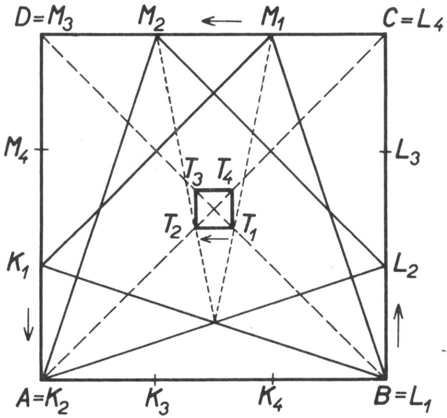
Obr. 3

trojúhelníku ACD. Jako bod B pak volíme nějaký bod polopřímky SX, dostatečně blízký k bodu S a různý od S.

Odtud již snadno vyplývá, že řešením úlohy je sjednocení čtyř otevřených kruhů o středech P_1, P_2, P_3 a P_4 a poloměrech rovných dvojnásobku délky P_1P_3. Toto sjednocení skutečně obsahuje každou množinu $\mathbf{M}(C, D)$, probíhají-li body C a D body daného čtverce $P_1P_2P_3P_4$.

B – I – 6

V rovině je dán čtverec. Najděte množinu těžišť všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží na hranici čtverce tak, že dělí jeho obvod na tři části stejné délky.



Obr. 4

Komentář. K řešení této úlohy lze např. užít metody analytické geometrie. Postupným vyšetřením těch částí hledané množiny, u nichž všechny tři vrcholy proměnného trojúhelníku probíhají úsečky, dostáváme výsledek. Hledanou množinou je hranice čtverce, který má společný střed a přímky úhlopříček s daným čtvercem a jehož strana má délku rovnou devítině délky strany daného čtverce (obr. 4).

KATEGORIE C

C–I–1

Je dáno 7 navzájem různých prvočísel. Pak součin všech jejich kladných rozdílů je dělitelný číslem 163 840. Dokažte.

Komentář. Upozorňujeme, že mezi danými prvočísly může být jediné sudé prvočíslo 2, které působí jisté potíže, a proto budeme pracovat jen s 6 lichými prvočísly, která uspořádáme vzestupně

$$2 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 .$$

Kladných rozdílů prvočísel $p_1, \ldots, p_6$ je $\binom{6}{2} = 15$. Součin s kladných rozdílů daných prvočísel obsahuje tedy 15 sudých činitelů a je dělitelný číslem $2^{15} = 32\,768$. Přezkoumáme vztah mezi čísly 163 840 a 32 768 a zjistíme, že je

$$32\,768 \,.\, 5 = 163\,840 \,.$$

Tato malá analýza nás dovedla k závěru: Je třeba dokázat, že aspoň jeden činitel čísla s je 5. Přitom používáme jedné věty z elementární číselné teorie: Jsou-li čísla x, y nesoudělná, pak číslo N je dělitelné součinem $x \,.\, y$, právě když je dělitelné každým z čísel x, y.

Důkaz dělitelnosti čísla s číslem 5 je trochu náročnější; opírá se o metodu velmi typickou, které by se měla věnovat pozornost; jde v podstatě o zbytkové třídy – neboli zbytky čísel při dělení číslem 5.

Utvoříme 5 kladných rozdílů

$$p_2 - p_1 , \quad p_3 - p_1 , \quad p_4 - p_1 , \quad p_5 - p_1 , \quad p_6 - p_1 . \qquad (1)$$

a) Jsou-li zbytky modulo 5 u pěti kladných rozdílů (1) vesměs navzájem různé, musí se mezi nimi vyskytovat také zbytek 0; příslušný rozdíl je pak násobek pěti a naše tvrzení je v případě a) dokázáno.

b) Připusťme tedy, že aspoň dva z rozdílů (1) dávají tentýž zbytek z modulo 5; např.

$$p_2 - p_1 = 5\alpha + z , \qquad p_5 - p_1 = 5\beta + z ; \qquad (2)$$

přitom α, β jsou navzájem různá nezáporná celá čísla, $\alpha < \beta$. Vypočteme z (2) kladný rozdíl $p_5 - p_2$;

$$p_5 - p_2 = 5(\beta - \alpha) ,$$

kde $\beta - \alpha$ je kladné číslo. Proto je $p_5 - p_2$ násobek pěti a naše tvrzení je dokázáno také v případě b).

C – I – 2

Dokažte, že každé přirozené číslo $x > 1$ lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = \frac{n(n + 1)}{2} + y ,$$

kde $1 \leqq y \leqq n + 1$.

Komentář. Formulace úlohy není právě nejšťastnější. Úloha by se měla přeformulovat takto:

Ke každému přirozenému číslu $x > 1$ existuje právě jedna dvojice přirozených čísel (n, y) tak, že platí

$$x = \tfrac{1}{2}n(n + 1) + y$$

a zároveň

$$1 \leqq y \leqq n + 1 .$$

Z této nové formulace lze utvořit kultivovanější text bez zbytečné proměnné y; zní takto:

Ke každému přirozenému číslu $x > 1$ existuje jediné přirozené číslo n tak, že platí

$$1 \leqq x - \tfrac{1}{2}n(n + 1) \leqq n + 1 . \tag{1}$$

Přičtením čísla $\frac{1}{2}n(n + 1)$ ke všem stranám nerovnosti (1) dostaneme ekvivalentní nerovnosti

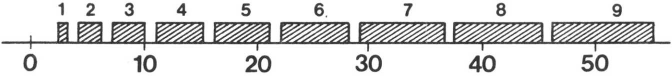
$$\tfrac{1}{2}n(n + 1) + 1 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2) . \tag{2}$$

Doporučujeme sestrojit tabulku dolních a horních mezí intervalů (2) pro $n = 1$ až 12.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{2}n(n + 1) + 1$	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91

Doporučujeme dále znázornit na číselné ose tyto intervaly (jejichž hranice jsou v předchozí tabulce v sloupcích); obr. 5.

Na obr. jsou připsány i délky intervalů. Z názoru je patrné, že každé přirozené číslo x náleží do jediného z těchto intervalů. Příčinou tohoto faktu je, že dolní hranice



Obr. 5

$(n + 1)$-ho intervalu je právě o 1 větší než horní hranice n-tého intervalu. Skutečně:

$$\tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2) + 1 - \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = 1\,.$$

Ověříme ještě, že předpoklad „n je přirozené číslo“ je nezbytný. Zvolíme-li např. $x = 4$, vyhovuje $n = 2$ (interval $\langle 4;\ 6\rangle$), ale také např. $n = \frac{3}{2}$ (interval $\langle \frac{23}{8};\ \frac{35}{8}\rangle$). Nepožadujeme-li, aby n bylo přirozené číslo, má úloha více řešení.

C – I – 3

Pro která reálná m má rovnice

$$\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + mx} = \frac{2}{1 + x} \tag{1}$$

celočíselné kořeny? Určete je.

Komentář. Stává se pomalu tradicí, že v komentáři upozorňujeme na nutnost zabývat se textem úlohy, objasnit ho, vyslovit úlohu určitěji, popřípadě hledat jiné její formulace.

Tato činnost je velmi užitečná pro matematickou erudici; z tohoto hlediska je taková „škola formulací“ vítaná; vždyť praxe nedává matematikovi také zcela přesně formulované úlohy.

V úloze C – I – 3 je na první pohled zřejmé, že daná rovnice (1) má celočíselný kořen $x = 0$ pro každé reálné m. Tím je vlastně zodpověděna první otázka. Úloha „určete je“ není dost jasná; jsou míněny celočíselné kořeny nebo reálná m nebo obojí? Měli bychom asi žádat a) nalezení množiny **M** všech hodnot parametru m, pro které má daná rovnice (1) aspoň jedno celočíselné nenulové řešení; b) vyjádření příslušných celočíselných kořenů pomocí m; c) vyjádření prvků m množiny **M**, která bude asi nekonečná, pomocí nějaké funkce f.

Z následujícího výčtu vyloučíme $x = 0, 1, -1$; neboť $x = 0$ je kořenem pro každé reálné m, pro $x = 1, -1$ pozbývá rovnice (1) smyslu. Z (1) pak dostaneme

$$(3m - 1)x = m - 3$$

a odtud

$$m = \frac{x - 3}{3x - 1} \tag{2}$$

a

$$x = \frac{m - 3}{3m - 1}. \tag{3}$$

Zvolíme-li v (2) za x libovolné celé číslo různé od 0, 1, –1, dostaneme všecka čísla z množiny **M**, neboli rovnice (2) udává funkci f. To zjistíme zkouškou – dosazením do (1) za m z (2); vyjde

$$\frac{1}{1-x} + \frac{3x-1}{3x-1+x^2-3x} = \frac{2}{1+x};$$

po úpravě

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{1+x}.$$

Otázka b) je zodpověděna rovnicí (3) s tím doplňkem, že ke každému reálnému m přísluší ještě $x = 0$ (z (3) dostaneme $x = 0$ jedině pro $m = 3$).

C – I – 4

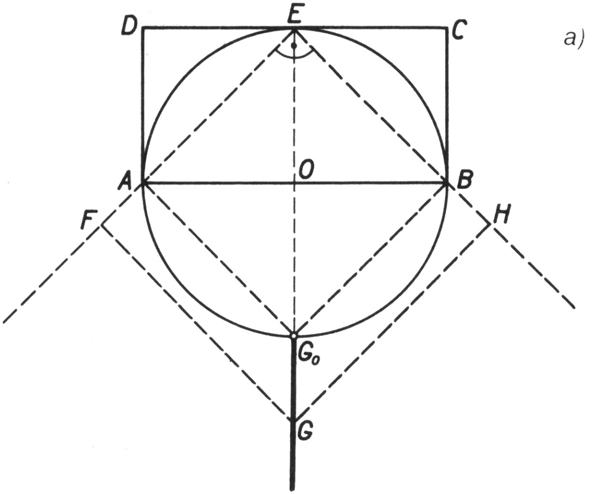
Je dán pravoúhelník $ABCD$. Sestrojte množinu vrcholů G všech takových čtverců $EFGH$, že bod E leží na úsečce CD a body F a H po řadě leží na prodlouženích úseček EA, EB za body A, B.

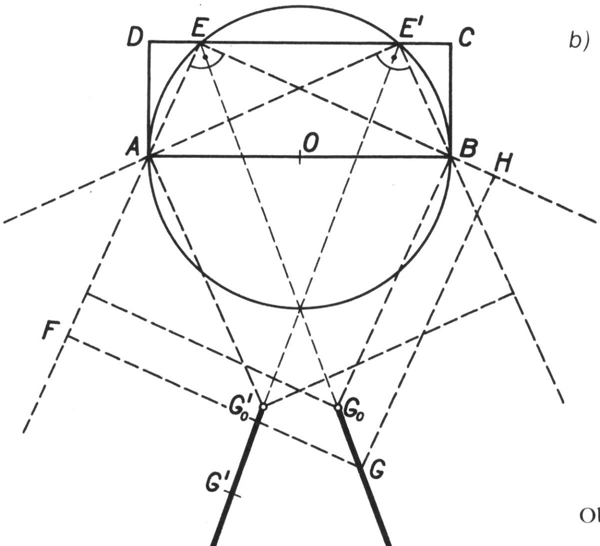
Komentář. Tato úloha je celkem nenáročná. Při jejím řešení plně vystačíte se znalostmi získanými v 7. a 8. roč. ZDŠ.

Řešení úlohy C – I – 4 má tři klíčové body:

1. Je třeba si všimnout, že $\sphericalangle AEB = 90°$, tj. že bod E leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem AB. Odtud je zřejmé, že pro $\frac{1}{2}AB < BC$ je hledaná množina prázdná a že bude vhodné v dalších úvahách rozlišit dva případy podle toho, zda $\frac{1}{2}AB = BC$ nebo $\frac{1}{2}AB > BC$ (obr. 6a a 6b).

2. Dále je třeba uvážit, že polopřímka EG je osou úhlu AEB. Body hledané množiny mohou tedy ležet jedině na osách pravých úhlů AEB, kde bod E leží na úsečce CD.





Obr. 6

3. Je třeba realizovat požadavek, aby body F a H po řadě ležely na prodlouženích úseček EA, EB za body A, B. Hledaná množina je znázorněna na obr. 6a a 6b. Na obr. 6a je to otevřená polopřímka G_0G, kdežto na obr. 6b sjednocení dvou otevřených polopřímek G_0G a G'_0G'.

Poznámka. Doporučujeme čtenářům, aby řešili zobecněné úlohy, v nichž je $EFGH$

a) obdélník s daným poměrem stran;

b) kosočtverec s daným vnitřním úhlem $\sphericalangle FEH$;

c) rovnoběžník s daným vnitřním úhlem $\sphericalangle FEH$ a s daným poměrem stran.

C – I – 5

Na dané kružnici se pohybují v témž smyslu stálými rychlostmi tři body A, B, C; první má dobu oběhu T, druhý $\frac{1}{2}T$, třetí $\frac{1}{3}T$. V čase $t = 0$ uvedené body splývaly. Kolikrát v časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$ tvořily body A, B, C vrcholy pravoúhlého trojúhelníku?

Komentář. V této úloze se seznámíte s matematickým popisem periodických dějů. Řešení úlohy vyžaduje znalost Thaletovy věty, výpočtu délky kružnice, zákona dráhy rovnoměrného pohybu, tedy látky probírané nejpozději v 8. ročníku ZDŠ.

K úvodnímu seznámení s problematikou periodických dějů mohou posloužit následující úlohy.

1. Po kružnici o poloměru 2 cm se pohybuje bod s periodou $T = 10$ s. Určete jeho dráhu za a) 1 s, 2 s, 5 s, 10 s,

16 s, 20 s; b) za dobu t; $t + T$, $t + \frac{1}{2}T$, $t + kT$, kde k je celé číslo.

2. Vypočtěte postupnou rychlost v bodu, který oběhne kružnici o poloměru r za dobu T.

3. Po kružnici se pohybuje bod X s periodou T. Průměr této kružnice je AB. Bod X prošel bodem A v okamžiku t_0. Určete:

a) čas bezprostředně předchozího a bezprostředně následujícího průchodu bodu X α) bodem A, β) bodem B;

b) čas prvních tří po sobě jdoucích průchodů bodu X, které následovaly po okamžiku t_0 α) bodem A, β) bodem B;

c) čas t_k, v němž bod X prošel po k-té od okamžiku t_0 α) bodem A, β) bodem B;

d) jakou dráhu urazil bod X od t_0 do t_k?

4. Po kružnici obíhají ve stejném smyslu dva body X a Y s periodami T_X a T_Y.

α) Kolikrát za dobu T_X body X a Y splynou, platí-li: a) $T_X : T_Y = 2 : 1$; b) $T_X : T_Y = 1 : 1$; c) $T_X : T_Y = 3 : 2$. Řešte též pro případ, že body X a Y obíhají v navzájem opačných smyslech. Záleží na tom, od jakého okamžiku měříme čas t?

β) Určete dobu jejich k-tého vzájemného splynutí od okamžiku $t = 0$, kdy se začaly pohybovat z téhož bodu.

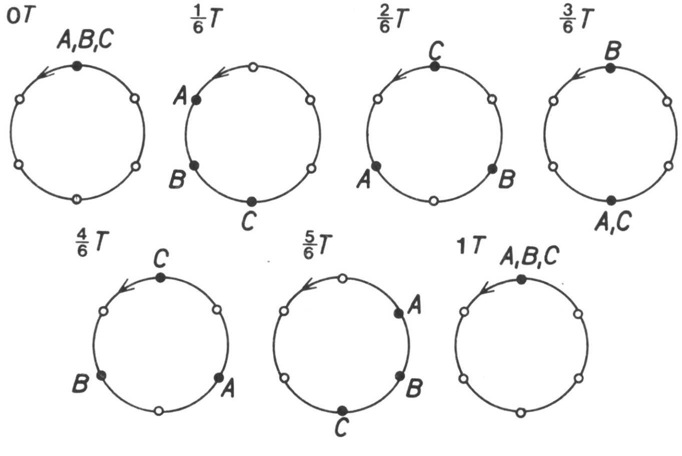
Přistupme k naší úloze. Body A, B, C tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku, právě když dva z nich jsou krajními body téhož průměru dané kružnice, přičemž třetí bod nesplyne se žádným z nich. Jsou tedy celkem tři možnosti (které?).

Úloha C – I – 5 i přípravné úlohy jsou v podstatě úlohy geometrické; proto by bylo nevhodné, kdybychom je řešili jen algebraicky, bez obrázků.

Úloha C – I – 5 se dá řešit experimentálně pomocí obrázků, znázorňujících fáze pohybů všech tří bodů A, B, C pro

$$0,\ \tfrac{1}{6}T,\ \tfrac{2}{6}T,\ \tfrac{3}{6}T,\ \tfrac{4}{6}T,\ \tfrac{5}{6}T,\ T\,.$$

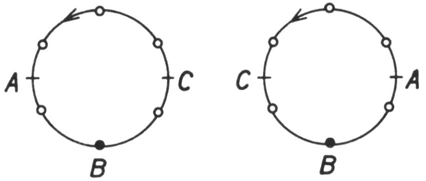
Provedení je patrné z obr. 7, který lze nahradit pohyblivým modelem. Z tohoto obrázku lze snadno vyčíst, že dvo-



Obr. 7

jice A, B a dvojice B, C jsou v intervalu $\langle 0,\ T\rangle$ krajními body průměru jen pro $A = C$, naproti tomu u dvojice A, C nastane tato situace dvakrát a bod B přitom nesplyne se žádným z bodů A, C (viz obr. 8).

Při kreslení náčrtů stále užíváme faktu, že bod B, resp. C se pohybuje dvakrát, resp. třikrát rychleji než bod A. Výsledky získané intuitivně kontrolujeme výpočty.



Obr. 8

Probereme podrobněji případ, kdy úsečka AB je průměrem dané kružnice. To nastane, právě když rozdíl drah s_B bodu B a s_A bodu A (měřených od okamžiku $t = 0$) je roven lichému násobku délky půlkružnice, tj. $(2k - 1)\pi r$, jde k je celé kladné číslo. Platí tedy

$$2vt - vt = (2k - 1)\pi r\,.$$

Dosadíme

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

a po úpravě máme

$$t = (2k - 1)\,.\,\tfrac{1}{2}T\,.$$

V intervalu $\langle 0;\, T\rangle$ však leží jediné t splňující poslední rovnici, totiž $\frac{1}{2}T$.

Nyní určíme polohu bodu C. Tento bod urazil za čas $\frac{1}{2}T$ dráhu

$$s_c = 3vt = 3\,.\,\frac{2\pi r}{T}\,.\,\tfrac{1}{2}T = 3\pi r\,,$$

takže splývá s bodem A. Body A, B, C tedy netvoří v žádném okamžiku vrcholy pravoúhlého trojúhelníku, jehož přeponou by byla úsečka AB.

Stejným způsobem postupujeme i v dalších případech. Ukáže se, že je nemožné, aby přeponou trojúhelníku byla úsečka BC.

Výpočet ukáže, že je možný jedině případ, kdy přeponou trojúhelníku je AC. Tento případ nastane v $\langle 0; T \rangle$ dvakrát.

Úlohu C – I – 5 můžeme obměnit např. tím, že změníme poměr period třeba na $1:3:4$, nebo ho zadáme obecněji. Jinou obměnu získáme tím, že budeme uvažovat trojúhelník rovnostranný či rovnoramenný apod. Body A, B, C se nemusí pohybovat po kružnici. Mohou probíhat obvod, např. trojúhelníku (rovnostranného, pravoúhlého aj.) nebo čtverce či jinou uzavřenou rovinnou křivku. Tak dostaneme další varianty úlohy.

C – I – 6

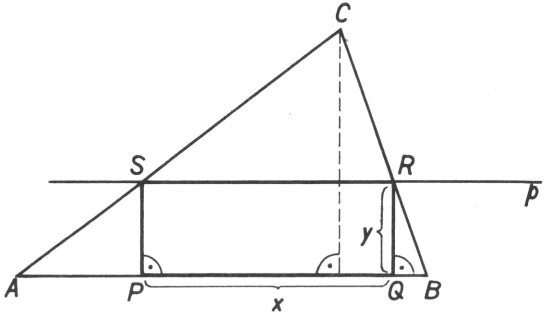
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme **M** množinu všech pravoúhelníků, jejichž dva vrcholy leží na straně AB a zbývající dva na stranách AC a BC.

a) Dokažte větu **V**: Jestliže dva různé pravoúhelníky z množiny **M** mají týž obvod o, pak všechny pravoúhelníky z množiny **M** mají obvod o.

b) Nalezněte aspoň jeden takový trojúhelník ABC, ve kterém je splněn předpoklad věty **V**.

Komentář. Každý řešitel by se měl nejdříve zamyslet nad tím, jak postupovat při vepisování pravoúhelníků danému

$\triangle ABC$, mají-li náležet do množiny **M**. S tímto problémem se bylo možno setkat již při řešení úlohy C – P – 3. Nejprve sestrojíme uvnitř poloroviny ABC rovnoběžku p s přímkou AB, jejíž vzdálenost od AB je menší než výška v trojúhelníku ABC na stranu AB (obr. 9). Průsečíky přímky p se



Obr. 9

stranami AC a BC označme po řadě S a R. Z bodů S a R spusťme kolmice na přímku AB a označme jejich paty po řadě P a Q. Trojúhelník ABC je ostroúhlý, a proto body P a Q jsou vnitřními body úsečky AB. Pak pravoúhelník $PQRS$ je zřejmě prvkem množiny **M**.

Dalším problémem, na který asi každý řešitel narazí, je vyjádření velikosti strany PQ vepsaného pravoúhelníku $PQRS$ pomocí vzdálenosti QP přímky p od strany AB a pomocí nějakých prvků daného $\triangle ABC$. Charakter problému odpovídá užití velikosti strany AB.

Položme $AB = c$, $PQ = x$ a $QR = y$. Z podobnosti trojúhelníků ABC a SRC plyne

$$x : c = (v - y) : v\,,$$

tj.

$$x = \frac{(v - y)\,c}{v}\,.$$

Pro obvod o vepsaného pravoúhelníku $PQRS$ pak dostáváme

$$o = 2\,.\left(\frac{(v - y)\,c}{v} + y\right),$$

$$o = \frac{2}{v}\,.\,\big((v - c)\,y + vc\big)\,. \tag{1}$$

Vzorec (1) otevírá cestu k řešení dané úlohy.

a) Nechť dva různé pravoúhelníky $PQRS$ a $P'Q'R'S'$ patřící do množiny **M** mají týž obvod o. Přitom nechť $PQ \subset AB$, $P'Q' \subset AB$, $QR = y$ a $Q'R' = y'$. Zřejmě $y \neq y'$. Ze vzorce (1) plyne

$$(v - c)\,y + vc = (v - c)\,y' + vc\,,$$

tj.

$$(y - y')\,(v - c) = 0\,.$$

Protože $y \neq y'$, je

$$v = c\,. \tag{2}$$

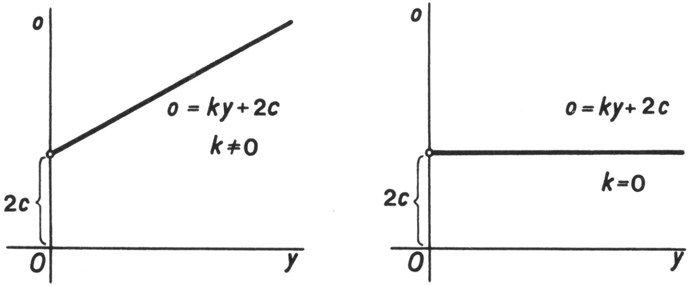
Podle vzorce (1) pak dostáváme, že v každém ostroúhlém $\triangle ABC$, v němž je splněn předpoklad věty **V**, je obvod každého pravoúhelníku z množiny **M** roven $2c$. Tím je věta **V** dokázána.

b) V předešlém odstavci jsme dokázali, že v každém ostroúhlém $\triangle ABC$, v němž platí (2), kde $AB = c$ a v je výška na stranu AB, mají všechny pravoúhelníky z množiny **M** týž obvod. Množina **M** má přitom nekonečně mnoho prvků. Tedy předpoklad věty **V** splňuje každý ostroúhlý $\triangle ABC$, v němž strana AB a výška na ni mají stejnou velikost.

Elegantnější řešení úlohy nabízí toto funkční pojetí vzorce (1). Označíme-li $\frac{2(v-c)}{v} = k$, zní (1)

$$o = ky + 2c\,. \tag{3}$$

Čísla k, $2c$ jsou konstanty, y, o proměnné; funkce (3) je lineární, jejím grafem je přímka buď různoběžná s osou y (je-li $k \neq 0$), nebo rovnoběžná s osou y (je-li $k = 0$); viz obr. 10.



Obr. 10

Úlohu C – I – 6 lze dále rozvíjet. Sama se nabízí otázka: Je prvkem množiny **M** vždy aspoň jeden čtverec? Docházíme tak ke známé úloze vepsat danému ostroúhlému trojúhelníku čtverec. Dále se lze zamyslet nad tím, zda by nebylo možno úlohu C – I – 6 zobecnit i pro případ, kdy $\triangle ABC$ není ostroúhlý.

Logickou strukturu úlohy C – I – 6 lze objevit také např. při řešení této úlohy:

Je dán ostroúhlý $\triangle ABC$.

a) Dokažte větu **P**: Jestliže uvnitř strany AB existují dva různé body, které mají týž součet d vzdáleností od stran AC a BC, pak každý vnitřní bod strany AB má součet vzdáleností od stran AC a BC roven číslu d.

b) Nalezněte aspoň jeden takový $\triangle ABC$, ve kterém je splněn předpoklad věty **P**.

KATEGORIE Z

Z – I – 1

Je dán výraz

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2 .$$

a) Dosadíme-li $a = 5$, $b = 7$, dostaneme zlomek, jehož jmenovatel i čitatel je druhou mocninou přirozeného čísla. Přesvědčte se o tom.

b) Dokažte, že vlastnost popsanou v odstavci a) má každá dvojice navzájem různých celých čísel a, b.

Komentář. Pro $a = 5$, $b = 7$ vypočteme $74 + (-\frac{35}{2})^2 = \frac{1521}{4} = (\frac{39}{2})^2$. Vlastní důkaz (úloha b) záleží v úpravě daného výrazu. Jakýsi „vtip“ důkazu je v tom, že nebudeme provádět všecky naznačené výkony, ale že budeme stále

„hlídat“, zda se nám při výpočtu neobjeví v čitateli druhá mocnina mnohočlenu.

Daný výraz můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left[(a^2+b^2)(a-b)^2 + a^2b^2\right].$$

Stačí upravit výraz v lomených závorkách takto:

$$(a^2+b^2)(a^2+b^2-2ab) + a^2b^2 =$$
$$= (a^2+b^2)^2 - 2ab(a^2+b^2) + a^2b^2 .$$

Při pozorném pohledu vidíme, že poslední výraz je druhou mocninou dvojčlenu

$$(a^2+b^2) - ab .$$

Z – I – 2

Dokažte, že každé přirozené číslo $n \geqq 6$ lze vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z nichž jedno je prvočíslo a druhé je číslo složené.

Komentář. Tato úloha je přiměřená žákům 8. ročníku. Jediný impuls, který stačí, je pokyn, aby člen součtu, který je prvočíslo, byl co nejmenší (2, 3). Druhý člen bude určitě složené číslo, bude-li to číslo sudé a větší než 2. Provedeme několik pokusů s prvočísly 2, 3.

$$10 = 2 + 8, \qquad 7 = 3 + 4, \qquad 26 = 2 + 24,$$
$$19 = 3 + 16, \ldots .$$

Z nich je patrné, že je třeba rozlišit případy, kdy dané číslo n je sudé a kdy je liché. Je-li číslo $n \geqq 6$, je

pro sudé n: $n - 2 \geqq 4$, $n - 2$ sudé ;

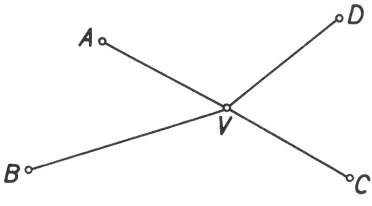
pro liché n: $n - 3 \geqq 4$, $n - 3$ sudé .

Z – I – 3

V rovině daného vypuklého čtyřúhelníku $ABCD$ nalezněte všechny body, jejichž součet vzdáleností od vrcholů A, B, C, D je nejmenší.

Komentář. Úlohu je možno formulovat také takto:

V polabské rovině se má vybudovat vodovod pro čtyři farmy státního statku, které leží ve vrcholech konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 11). Kde by bylo třeba postavit vodojem V, aby celková délka přípojek AV, BV, CV, DV byla co nejkratší?



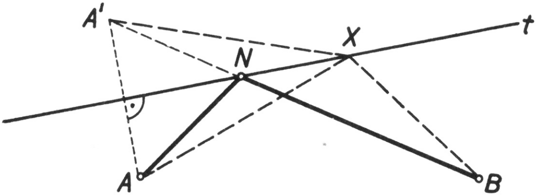
Obr. 11

Úlohy s obdobným námětem minimalizace se vyskytují dost často. Velmi známá je např. tato úloha:

Na obr. 12 znázorňují body A, B dvě vesnice a přímka t

železniční trať. Kde je třeba vybudovat společné nádraží N, aby celková délka silnic AN a BN byla minimální?

Tato úloha je velmi snadná, leží-li body A, B v opačných polorovinách s hranicí t. Leží-li body A, B v téže polorovině, pak nádraží bude v bodě N, který je průsečíkem



Obr. 12

přímky t a přímky BA', kde bod A' je obrazem bodu A v souměrnosti s osou t. Podle trojúhelníkové nerovnosti totiž pro každý bod $X \in t$ platí

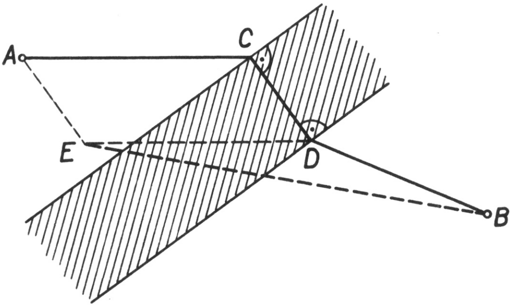
$$AX + BX = A'X + BX \geqq A'B =$$
$$= A'N + NB = AN + BN\,.$$

V knížce *Zajímavá geometrie* od J. I. Perelmana (Mladá fronta 1954, překlad z ruštiny) je na str. 67 další obdobná úloha:

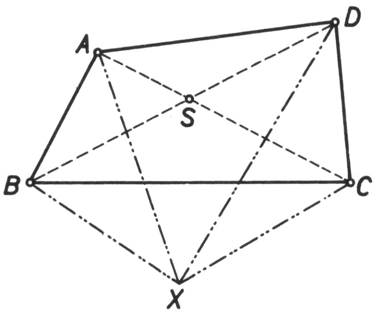
Mezi body A a B teče řeka (nebo je průplav) s přibližně rovnoběžnými břehy (obr. 13). Přes řeku se má postavit most v pravém úhlu k jejím břehům. Kde je třeba vybrat místo pro most, aby cesta z A do B byla nejkratší?

Při řešení vyjdeme z toho, že minimální má být součet $AC + DB$, tj. součet $ED + DB$, kde AE a CD jsou shodné a souhlasně orientované úsečky. Je tedy třeba, aby bod D ležel uvnitř úsečky EB.

Vraťme se k úloze Z–I–3. Hledaný bod je jediný a je průsečíkem S úhlopříček daného čtyřúhelníku $ABCD$



Obr. 13



Obr. 14

(obr. 14). Odhad, že řešením je bod S, je nejobtížnější krok při řešení dané úlohy. Důkaz správnosti tohoto odhadu je již snadný. Pro každý bod X roviny daného čtyřúhelníku totiž platí:

$$AX + BX + CX + DX =$$
$$= (AX + CX) + (BX + DX) \geqq AC + BD .$$

Rovnost nastává, právě když bod X leží zároveň uvnitř úsečky AC i BD, tj. právě když $X = S$.

Poznámka. Zobecněním úlohy Z–I–3 se velmi populárně zabývá na str. 78 knížka L. A. Ljusternika *Variační principy v geometrii a ve fyzice* (SNTL 1957, překlad z ruštiny). Uvedená knížka vznikla z přednášek pro účastníky moskevské MO.

Z–I–4

Je dán obdélník $ABCD$ a přirozené číslo n. Sestrojte vně obdélníku $ABCD$ po řadě na přímkách AB, BC, CD, DA body A', B', C', D' tak, aby platilo

$$AA' = CC' = \frac{1}{n} AB$$

a

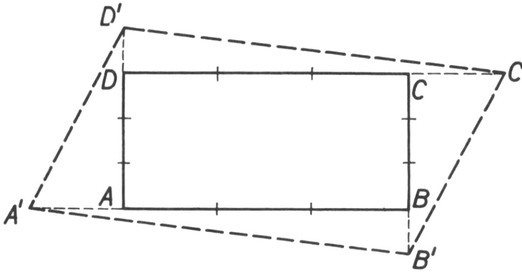
$$BB' = DD' = \frac{1}{n} BC .$$

a) Dokažte, že body A', B', C', D' jsou vrcholy rovnoběžníku.

b) Vypočtěte obsah rovnoběžníku $A'B'C'D'$ pomocí čísla n a obsahu P obdélníku $ABCD$.

c) Pro které přirozené číslo n má rovnoběžník $A'B'C'D'$ největší možný obsah?

Komentář. Úloha Z–I–4 by neměla působit ani žákům 8. ročníků větší potíže. Na obr. 15 je $n = 3$. Místo A', B', C', D' by bylo vhodnější označovat body A_n, B_n, C_n, D_n.



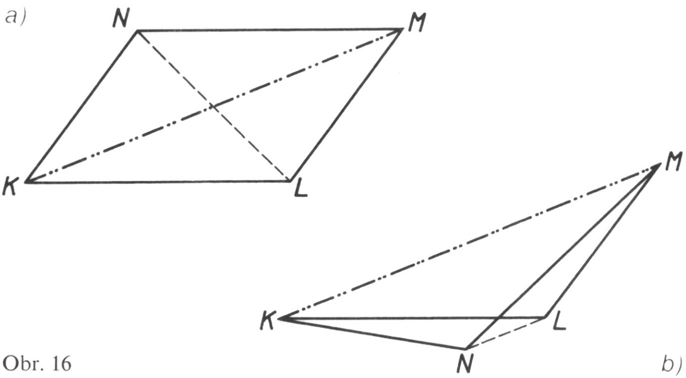
Obr. 15

Část a) plyne ze vztahů

$$\triangle A'B'B \cong \triangle C'D'D$$

a

$$\triangle CC'B' \cong \triangle AA'D' .$$



Obr. 16

K důkazu užijeme věty sus. Považujeme za vhodné upozornit, že k tomu, aby čtyři body K, L, M, N byly vrcholy rovnoběžníku, nestačí splnění podmínek $KL = MN$ a $LM = NK$ (obr. 16a, b). Buď je ještě třeba se zabývat rovnoběžností stran, nebo si povšimnout, zda úsečky KM a NL jsou skutečně úhlopříčkami. Proto by bylo lépe užít souměrnosti podle průsečíku úhlopříček AC, BD. Tato souměrnost vyměňuje body A', C' a B', D' a tvrzení a) je evidentní.

b) Označme a, b velikosti AB, BC. Pak pro obsah P_n rovnoběžníku $A'B'C'D'$ $(A_nB_nC_nD_n)$ platí

$$P_n = P + 2(P_{A'B'B} + P_{A'D'A}) =$$

$$= P + \left(1 + \frac{1}{n}\right) . a . \frac{b}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) . b . \frac{a}{n} =$$

$$= P + 2 . \frac{n+1}{n^2} . ab = \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2} . P .$$

c) Zkusme nejdříve vyšetřit, kdy $\triangle A'B'B$ má největší možný obsah. Odvěsny má zřejmě největší možné pro číslo $n = 1$. Tedy obsah $\triangle A'B'B$ je největší možný pro $n = 1$.

Obdobně zjistíme, že také $\triangle A'D'A$ má největší možný obsah pro $n = 1$. Tedy odpověď v části c) zní: $n = 1$.

Část c) by bylo možno také řešit hledáním maxima funkce

$$f\colon n \mapsto \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2}$$

v oboru přirozených čísel. Z rovnosti

$$\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}$$

plyne, že toto maximum nastává pro $n = 1$; lze totiž snadno dokázat, že $f(n)$ s rostoucím n klesá. To vyplývá z výpočtu

$$f(n) - f(n + 1) = \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n + 1}\right) + \left(\frac{2}{n^2} - \frac{2}{(n + 1)^2}\right) > 0\,.$$

Každý dvojčlen v závorkách je totiž kladné číslo, neboť ze dvou zlomků s týmiž čitateli je větší ten, který má menšího jmenovatele.

Jinak nejjednodušší odůvodnění tvrzení c) je geometrické: všechny body A_n, B_n, C_n, D_n $(n > 1)$ padnou zřejmě do vnitřku rovnoběžníku $A_1B_1C_1D_1$, a proto platí pro obsahy pro všechna $n > 1$

$$A_nB_nC_nD_n < A_1B_1C_1D_1\,.$$

Poznámka. Úlohy podobné úloze Z – I – 4 lze nalézt v kap. IV. na str. 152 v knížce Vyšín – Macháček: *Vybrané úlohy z MO kat. Z* (SPN 1971).