24. ročník matematické olympiády

VII. Zpráva o XVII. mezinárodní matematické olympiádě

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 24. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1974-1975. 17. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. pp. 163–184.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404684

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

VII. Zpráva o XVII. mezinárodní matematické olympiádě

V pořadí již *sedmnáctá mezinárodní matematická olympiáda* (*MMO*) se konala ve dnech 3. – 16. července 1975 v Bulharsku, v Burgasu a v Sofii. Zúčastnilo se jí celkem 17 zemí: Rakousko (A), Bulharsko (BG), Československo (CS), NDR (DDR), Francie (F), Velká Británie (GB), Řecko (GR), Maďarsko (H), Mongolsko (M), Holandsko (NL), Polsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Sovětský svaz (SU), Spojené státy (USA), Vietnam (VN) a Jugoslávie (YU). Z tradičních účastníků tedy tentokráte chyběla Kuba; Řecko přijelo na *MMO* poprvé.

Každá země byla na *XVII. MMO* zastoupena delegací složenou z vedoucího a jeho zástupce a z osmičlenného žákovského družstva. Československé družstvo tvořili tito žáci: *Martin Baumann* z Prahy, *Vlastimil Klíma* z Benešova u Prahy, *Jan Kratochvíl* z Pardubic, *Jan Malý* z Litoměřic, *Jiří Navrátil* z Olomouce, *Ján Slodička* z Bratislavy, *Michael Valášek* z Prahy a *Josef Voldřich* z Vimperka. Vedoucím delegace byl *dr. František Zítek, CSc.*, z Matematického ústavu ČSAV v Praze a *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.*, z Vysoké školy dopravní v Žilině.

Průběh *XVII. MMO* odpovídal vcelku ustáleným zvyklostem. Nejprve se 3. července sjeli do Burgasu vedoucí jednotlivých delegací a vytvořili zde mezinárodní jury, která pak pod předsednictvím *prof. I. R. Prodanova* ze Sofie řídila vlastní soutěž *MMO*. Prvním úkolem jury bylo vybrat šest soutěžních úloh. Z návrhů, které do Bulharska zaslalo 11 ze 17 zúčastněných zemí, připravili bulharští organizátoři předběžný návrh 15 úloh; jedna z nich byla také československého původu.

Práce jury postupovala poměrně rychle a výsledný výběr reprezentoval patrně skutečně optimum za daných možností: mezi zaslanými návrhy byl zjevný nedostatek vhodných úloh s geometrickou tematikou, chyběla zejména stereometrie. Pro soutěž byla vybrána tato šestice úloh (jejich řešení uvádíme na str. 170–183).

1. Nechť x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou reálná čísla

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n\,,$$
$$y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n\,.$$

Dokažte, že pro libovolnou permutaci $z_1, z_2, \ldots, z_n$ čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\,.$$

2. Nechť

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

je nekonečná posloupnost přirozených čísel taková, že

$$0 < a_k < a_{k+1} \qquad \text{pro} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dokažte, že nekonečně mnoho členů a_m této posloupnosti lze vyjádřit ve tvaru

$$a_m = xa_p + ya_q\,, \qquad p \neq q\,,$$

kde x, y jsou celá kladná čísla.

3. Je dán trojúhelník ABC. Vně tohoto trojúhelníku sestrojíme (v téže rovině) trojúhelníky ABR, BPC, CQA takové, že

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45^\circ\,,$$

$$\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30^\circ\,,$$

$$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15^\circ\,.$$

Dokažte, že

1. $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$,
2. $\quad PR = QR$.

4. Nechť A je součet cifer čísla 4444^{4444}; nechť B je součet cifer čísla A. Určete součet cifer čísla B. (Všechna čísla jsou zapsána v desítkové soustavě.)

5. Zjistěte, zda na kružnici s poloměrem 1 existuje 1975 bodů takových, že délky všech jimi určených tětiv jsou racionální čísla.

6. Najděte všechny mnohočleny P dvou proměnných s těmito vlastnostmi:

1. P je homogenní mnohočlen stupně n (n je přirozené číslo), tzn. že pro všechna reálná čísla t, c, y platí

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y)\,;$$

2. pro všechna reálná čísla a, b, c platí

$$P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a) = 0\,;$$

3. $$P(1, 0) = 1\,.$$

Vybrané úlohy pocházely z návrhů Československa (č. 1), Velké Británie (č. 2 a č. 6), Holandska (č. 3) a Sovětského svazu (č. 4 a č. 5); text úlohy č. 4 byl při jednáních jury pozměněn proti původnímu návrhu, který byl snazší a připouštěl mechanické řešení přímým numerickým výpočtem.

Jury rovněž posoudila obtížnost vybraných úloh a určila maximální počty bodů, které bylo možno získat za úplné řešení úlohy. Úlohy č. 1, 4 a 5 ohodnotila šesti body, úlohy č. 2 a 3 sedmi body a úlohu č. 6 osmi body. Celkem tedy mohl každý žák získat nejvýše 40 bodů.

Za nejtěžší úlohu byla – zřejmě právem – považována úloha č. 6, jednak proto, že se v ní operuje pojmem homogenní mnohočlen, s nímž žáci středních škol nemají obvykle velké zkušenosti, jednak proto, že její řešení vyžadovalo jistou dávku tvořivosti. Za nejlehčí považovala jury před soutěží úlohu č. 4.

Výběrem úloh a překladem jejich textů do jazyků žáků skončila přípravná etapa práce jury. Mezitím se již do Burgasu dostavila všechna zúčastněná družstva a s nimi i zástupci vedoucích delegací, kteří se připojili k jury a pomáhali s překlady. Žáci byli ihned po příjezdu přísně izolováni od jury, aby byla zachována regulérnost soutěže; tato izolace trvala až do konce vyhodnocení výsledků soutěže. Žáci byli ubytováni v internátě na okraji Burgasu;

jejich program byl s výjimkou dvou půldnů, kdy se konala soutěž, věnován hlavně exkurzím, koupání a rekreaci.

Vlastní soutěž se konala ve střední škole P. Berona v Burgasu. Dopoledne dne 7. a 8. července 1975 řešili žáci vždy po třech úlohách; na každé tři úlohy měli čtyři hodiny čistého času.

Ve dnech 9.—11. července probíhaly opravy, klasifikace a koordinace klasifikace žákovských řešení. Bulharští organizátoři připravili podrobný harmonogram koordinace, který se vcelku podařilo dodržet, takže práce probíhala poměrně rychle a hladce. Z mezí normálu vybočil jen případ úlohy č. 2 u holandské delegace; holandští vedoucí přeložili text úlohy nepřesně, takže žáci řešili jinou, poněkud snazší úlohu. Z rozhodnutí bulharských koordinátorů, které nakonec vedení holandské delegace akceptovalo, nezískali žáci za řešení této snazší úlohy žádné body. (Výjimku tvoří jeden holandský žák, který podal řešení úlohy ve správném znění.)

Závěrečné zasedání jury dne 11. července jednalo pak už jen o hranicích jednotlivých cen. Bylo rozhodnuto udělit první ceny žákům, kteří získali 40 nebo 39 bodů; k získání druhé ceny bylo potřeba mít alespoň 32 bodů, na třetí cenu stačilo 23 bodů. Celkem tak bylo uděleno 8 prvních, 25 druhých a 36 třetích cen.

Vedle těchto hlavních cen byly uděleny ještě tři zvláštní ceny za elegantní a originální řešení jednotlivých úloh. Získali je dva žáci z Rumunska a jeden z USA.

Celkové výsledky jednotlivých delegací na XVII. MMO jsou patrny z následující tabulky:

Země	Součet bodů celého družstva	Počet získaných cen			
		1.	2.	3.	zvláštních
A	192	1	1	2	–
BG	186	–	1	4	–
CS	162	–	–	2	–
DDR	249	–	4	4	–
F	176	1	1	1	–
GB	239	2	2	3	–
GR	95	–	1	–	–
H	258	–	5	3	–
M	75	–	–	1	–
NL	67*)	–	–	1	–
PL	124	–	1	1	–
R	180	–	1	3	2
S	160**)	–	2	–	–
SU	246	1	3	4	–
USA	247	3	1	3	1
VN	175***)	–	1	3	–
YU	163	–	1	1	–

*) Celkový výsledek holandského družstva byl ovlivněn chybným překladem jedné úlohy.

**) Jeden švédský žák se pro nemoc neúčastnil druhého dne soutěže.

***) Vietnamské družstvo soutěžilo v sedmi; osmý žák byl nemocen.

Po skončení této pracovní části *XVII. MMO* podnikli všichni účastníci ve dnech 12. a 13. července autokarový výlet z Burgasu do Sofie přes Starou Zagoru, Kazanlak, Šipku, Gabrovo, Veliko Trnovo a Pleven. Ve všech městech, kde se autokary s účastníky *MMO* zastavily, bylo připraveno slavnostní uvítání. Návštěva místních pamětihodností (thrácká hrobka v Kazanlaku, památník na Šipce, Dům humoru a satiry v Gabrovu, citadela ve Velikom Trnovu, muzeum v Plevnu) spolu s velice přátelským a srdečným přijetím všude zanechala nutně nesmazatelné dojmy ve všech účastnících.

V Sofii, kam výprava dorazila 13. července večer, byla pak *XVII. MMO* zakončena. Dne 14. července si účastníci prohlédli město; 15. července odpoledne bylo v sále Domu sovětské vědy a kultury slavnostní rozdílení cen. Na závěr byla téhož dne večer uspořádána slavnostní večeře ve známém restaurantu Kopito v horách nad Sofií.

Československá delegace se vrátila do Prahy letadlem dne 16. července krátce po 14. h. Přivážela si s sebou dvě třetí ceny, které získali žáci *M. Valášek* a *J. Navrátil*. Podrobné výsledky československého družstva jsou obsaženy v tabulce:

Jméno	Počet bodů získaných za úlohu č.						Celkem
	1	2	3	4	5	6	
M. Baumann	6	0	7	4	0	1	18
V. Klíma	2	0	7	3	0	1	13
J. Kratochvíl	6	7	1	0	0	2	16
J. Malý	6	7	0	3	0	2	18
J. Navrátil	6	7	0	0	6	8	27
J. Slodička	6	7	0	0	6	1	20
M. Valášek	6	5	7	0	6	6	30
J. Voldřich	6	7	1	2	2	2	20
družstvo celkem	44	40	23	12	20	23	162

Vcelku lze konstatovat, že ani tentokráte nepřekročily výsledky čs. družstva hranici průměrnosti. Zkušenosti několika posledních let nasvědčují tomu, že jde o jev trvalý. Zdá se, že chybějí především vynikající jednotlivci schopní podat špičkový výkon, a to zcela spolehlivě bez náhodných výkyvů. Tato situace si vyžádá hlubší analýzu a přijetí účinných opatření ke zlepšení přípravy našich reprezentantů.

ŘEŠENÍ ÚLOH XVII. MMO

1. Dokazovanou nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \tag{1}$$

přepíšeme na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i .$$

Poněvadž zřejmě

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 ,$$

je nerovnost (1) ekvivalentní nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \tag{2}$$

Označme

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} y_i , \qquad T_k = \sum_{i=1}^{k} z_i$$

pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a položme $S_0 = T_0 = 0$. Bude pak

$$y_k = S_k - S_{k-1}, \qquad z_k = T_k - T_{k-1}$$

pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Můžeme tedy psát

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} S_k =$$

$$= x_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k - x_1 S_0 . \tag{3}$$

Obdobně je také

$$\sum_{k=1}^{n} x_k z_k = x_n T_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) T_k - x_1 T_0 . \tag{4}$$

Poněvadž však čísla $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tvoří jen permutaci čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$, je nutně $S_n = T_n$. Pro $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ pak platí $S_k \geqq T_k$, neboť je $y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n$. Dále je též $x_k \geqq x_{k+1}$, a tedy $x_k - x_{k+1} \geqq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, takže

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k \geqq \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) T_k .$$

Odtud a z rovností (3) a (4) již vyplývá dokazovaná nerovnost (2), a tedy i (1).

Jiné řešení této úlohy je založeno na přímém důkazu nerovností (1), tj. bez redukce na (2), a to indukcí podle n. Místo indukčního kroku je ostatně možné odvolat se na známou skutečnost, že každou permutaci lze složit z transpozic.

2. Členy posloupnosti

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

s výjimkou a_1 rozdělíme do a_1 tříd podle zbytků při dělení číselm a_1. V každé neprázdné třídě vezmeme nejmenší číslo a_q; všechny další členy a_m posloupnosti (1) patřící do téže třídy jako a_q se od a_q liší o násobek čísla a_1, takže je lze psát ve tvaru

$$a_m = a_q + ya_1 \, ,$$

kde y je celé kladné číslo. Poněvadž všech tříd je a_1, tzn. konečný počet, vidíme, že nejen nekonečně mnoho členů posloupnosti (1), ale dokonce všechny členy až na nejvýše $a_1 + 1$ výjimku lze vyjádřit v požadovaném tvaru, přičemž se navíc (aspoň) jedno z čísel x, y rovná 1.

3. Označme

$$\sphericalangle ABC = \beta \, , \qquad \sphericalangle BAC = \alpha \, , \qquad \sphericalangle ACB = \gamma \, ,$$

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AR = BR = y$, $AQ = x$, $QC = t$, $BP = z$, $PC = v$. Podle sinové věty je

$$x : b = \sin 30^\circ : \sin 105^\circ \, ,$$

takže

$$x = \frac{b}{2 \cos 15^\circ}$$

a obdobně

$$z = \frac{a}{2 \cos 15^\circ} \, .$$

Dále je

$$y = \frac{c}{2\cos 15^\circ}$$

a

$$t = x\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = x\sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2}\cos 15^\circ},$$

$$v = t\frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 15^\circ}.$$

K vyjádření délek stran trojúhelníku PQR užijeme kosinové věty:

$$QR^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\alpha + 60^\circ),$$
$$PR^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(\beta + 60^\circ),$$
$$PQ^2 = t^2 + v^2 - 2tv\cos(\gamma + 60^\circ).$$

Tyto rovnosti platí, i když některý z úhlů α, β, γ je větší nebo roven 120°.

Podle sinové věty je ovšem

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

a tedy

$$a\sin\beta - b\sin\alpha = 0,$$

takže

$$\sqrt{3}\,.\,c(a\sin\beta - b\sin\alpha) = 0 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(b^2 - c^2 + a^2 - 2a^2 + a^2 + c^2 - b^2).$$

Odtud plyne dále rovnost

$$b^2 - \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + bc\sqrt{3}\,.\,\sin\alpha =$$
$$= a^2 - \tfrac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) + ac\sqrt{3}\,.\,\sin\beta,$$

neboli

$$b^2 - \tfrac{1}{2}(2bc\cos\alpha) + bc\sqrt{3}\,.\sin\alpha =$$
$$= a^2 - \tfrac{1}{2}(2ac\cos\beta) + ac\sqrt{3}\,.\sin\beta\,,$$

$$b^2 - 2bc(\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\,.\sqrt{3}\,.\sin\alpha) =$$
$$= a^2 - 2ac(\tfrac{1}{2}\cos\beta - \tfrac{1}{2}\,.\sqrt{3}\,.\sin\beta)\,,$$

což lze psát též jako

$$b^2 - 2bc\cos(\alpha + 60^\circ) = a^2 - 2ac\cos(\beta + 60^\circ)\,.$$

Nyní celou rovnost dělíme číslem $4\cos^2 15^\circ$ a dostaneme

$$\frac{b^2}{4\cos^2 15^\circ} - \frac{bc\cos(\alpha + 60^\circ)}{2\cos^2 15^\circ} = \frac{a^2}{4\cos^2 15^\circ} - \frac{ac\cos(\beta + 60^\circ)}{2\cos^2 15^\circ}\,,$$

neboli

$$x^2 - 2xy\cos(\alpha + 60^\circ) = z^2 - 2yz\cos(\beta + 60^\circ)\,.$$

To však znamená, že $PR^2 = QR^2$, čili $PR = QR$. Dokázali jsme tak *druhou* část úlohy: trojúhelník PQR je rovnoramenný.

První část, tj. rovnost $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$, dokážeme z Pythagorovy věty. Platí totiž

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2\,.$$

Poněvadž už víme, že

$$PR = QR\,,$$

je

$$PR^2 + QR^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4xy\cos(\alpha + 60^\circ)\,.$$

Zároveň je

$$PQ^2 = t^2 + v^2 - 2tv\cos(\gamma + 60°) .$$

Podle sinové věty je však

$$a\sin\gamma - c\sin\alpha = 0 ;$$

odtud stejným postupem jako v předchozím dostaneme rovnost

$$c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60°) = a^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°) . \quad (1)$$

Dosadíme-li do výrazů pro $PR^2 + QR^2$ a pro PQ^2 za x, y, t, v, dostaneme

$$PR^2 + QR^2 = \frac{b^2}{2\cos^2 15°} + \frac{c^2}{2\cos^2 15°} - \frac{bc\cos(\alpha + 60°)}{\cos^2 15°} ,$$

$$PQ^2 = \frac{b^2}{2\cos^2 15°} + \frac{a^2}{2\cos^2 15°} - \frac{ab\cos(\gamma + 60°)}{\cos^2 15°} .$$

Porovnáním s (1) dostáváme pak požadovanou rovnost:

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2 ;$$

trojúhelník PRQ je tedy pravoúhlý: $\sphericalangle PRQ = 90°$.

Jiné řešení. Vně trojúhelníku ABC sestrojme tři rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky $AQ'C$, $BP'C$, ABR' tak, aby

$$\sphericalangle Q'AC = \sphericalangle P'BC = \sphericalangle AR'B = 90° .$$

Tyto tři trojúhelníky jsou ovšem podobné, přičemž si body

P, Q, R vzájemně odpovídají. Nyní sestrojíme body K, L, M, N tak, aby

$$\begin{aligned} &K \in BC, \quad && PK \perp BC, \\ &L \in AC, && QL \perp AC, \\ &M \in AB, && KM \parallel AC, \\ &N \in AB, && LN \parallel BC. \end{aligned}$$

Z podobností plyne

$$\frac{KM}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{AL}{AC} = \frac{QL}{AC},$$

takže

$$QL = MK.$$

Obdobně dojdeme k rovnostem

$$LN = KP, \qquad NR = RM.$$

Navíc je

$$QL \perp MK, \qquad LN \perp KP, \qquad NR \perp RM.$$

Je tedy také (sčítání vektorů je asociativní a komutativní) $QR = PR$ a $\sphericalangle QRP = 90°$, c. b. d.

Další řešení, podstatně jednodušší, je založeno na znalosti pojmu podobnosti jakožto zobrazení roviny. Vezměme dvě taková zobrazení π_1 a π_2, definovaná takto: π_1 se skládá z otočení o 45° okolo bodu A a z homotetie se středem v A a s koeficientem $k = \dfrac{\sin 105°}{\sin 30°}$, takže $\pi_1(Q) = C$. Zobrazení π_2 se skládá z otočení o 45° okolo bodu B a z homotetie se středem v B a s koeficientem $k^{-1} = \dfrac{\sin 30°}{\sin 105°}$, takže

$\pi_2(C) = P$. Složením obou zobrazení π_1 a π_2 dostaneme zřejmě pouhé otočení o 90° a zbývá dokázat, že R je právě střed tohoto otočení. Snadno se však vidí, že $\pi_1(R) = S$, kde S je vrchol rovnostranného trojúhelníku ABS (ležícího v polorovině ABR), a že pak $\pi_2(S) = R$. Tím je úloha řešena.

4. Řešení úlohy se skládá ze *dvou* částí. *Nejprve* odhadneme shora součet cifer čísla B; označme ho C. Zřejmě je

$$4444 < 10\,000 = 10^4\,,$$

takže číslo 4444^{4444} má nanejvýš $4 \,.\, 4444 = 17\,776$ cifer. Každá z nich je nanejvýš rovna 9; pro jejich součet A tak dostáváme odhad

$$A \leqq 9 \,.\, 17\,776 = 159\,984\,.$$

Číslo B je tedy nejvýše rovno číslu

$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45\,.$$

Z přirozených čísel menších nebo rovných 45 má největší součet cifer číslo 39, totiž 12. Je tedy celkem

$$C \leqq 12\,.$$

Druhá část řešení spočívá ve využití známé skutečnosti, že každé číslo dává při dělení devíti týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet. Platí tedy

$$\begin{aligned} 4444^{4444} &\equiv A \mod 9\,,\\ A &\equiv B \mod 9\,,\\ B &\equiv C \mod 9\,. \end{aligned}$$

Avšak

$$4444 \equiv 7 \mod 9 \,,$$

a tedy také

$$4444 \equiv 1 \mod 3 \,.$$

Snadno si ověříme, že pro každé přirozené k je

$$7^{3k+1} \equiv 7 \mod 9 \,;$$

je tedy

$$4444^{4444} \equiv 7 \mod 9 \,.$$

To však znamená, že také

$$C \equiv 7 \mod 9 \,.$$

Poněvadž platí $C \leqq 12$, vidíme, že nutně $C = 7$. Hledaný součet cifer čísla B je tedy právě 7.

5. V kružnici s poloměrem 1 má tětiva odpovídající středovému úhlu α délku $2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Nyní dokážeme dvě pomocná tvrzení:

1. Je-li δ úhel takový, že $\sin \delta$, $\cos \delta$ jsou racionální čísla, pak také $\sin k\delta$, $\cos k\delta$ jsou racionální čísla pro všechna přirozená k.

2. Existuje libovolně malý úhel δ takový, že $\sin \delta$ a $\cos \delta$ jsou racionální čísla.

První tvrzení dokážeme snadno indukcí podle k: pro $k = 1$ je triviální a pro indukční krok využijeme známých vzorců

$$\sin (k + 1)\, \delta = \sin k\delta \cos \delta + \cos k\delta \sin \delta \,,$$

$$\cos (k + 1)\, \delta = \cos k\delta \cos \delta - \sin k\delta \sin \delta \,.$$

K důkazu *druhého* tvrzení stačí např. vzít úhel δ takový, že je

$$\sin\delta = \frac{2t}{t^2+1}, \qquad \cos\delta = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

kde t je dostatečně velké přirozené číslo.

Budiž nyní δ úhel takový, že $\sin\delta$ i $\cos\delta$ jsou racionální čísla a že $1975 \, . \, \delta < \frac{1}{2}\pi$. Na dané kružnici nyní umístíme 1975 bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{1975}$ tak, aby středové úhly odpovídající tětivám A_kA_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots, 1974)$ byly všechny právě 2δ. Libovolné dvojici bodů A_jA_k $(j < k)$ bude odpovídat středový úhel $2(k - j)\,\delta$, příslušná tětiva bude mít délku $2\sin(k - j)\,\delta$, což je vždy racionální číslo.

Nad kružnici s poloměrem 1 je tedy možné umístit 1975 (a snadno se vidí, že i libovolný jiný konečný počet) bodů tak, aby všechny jimi určené tětivy měly racionální délky.

6. Nejprve probereme případ $n = 1$, tj. hledáme lineární homogenní mnohočlen

$$P(x, y) = Ax + Bx$$

vyhovující podmínkám 2 a 3. Položíme-li $a = 1$, $b = c = 0$, dostaneme z podmínky 2

$$P(0, 1) = -2P(1, 0)\,,$$

podle podmínky 3 je tedy $P(0, 1) = -2$. Odtud a z podmínky 3 vyplývá $A = 1$, $B = -2$, tzn.

$$P(x, y) = x - 2y\,.$$

Snadno ověříme, že tento lineární mnohočlen opravdu vyhovuje všem třem podmínkám úlohy; při $n = 1$ je to jediné řešení.

Nechť nyní $n > 1$. Platí opět $P(1,0) = 1$, $P(0,1) = -2$; položíme-li $a = 2$, $b = c = -1$, dostaneme z podmínky 2 rovnost

$$P(-2,2) = -2P(1,-1).$$

Z podmínky 1 však zároveň vyplývá, že platí

$$P(-2,2) = (-2)^n P(1,-1).$$

Jelikož je $n > 1$, je ovšem $(-2)^n \neq -2$, a tedy nutně

$$P(1,-1) = 0.$$

Vzhledem k homogenitě mnohočlenu P je pak také

$$P(x,-x) = 0$$

pro všechna reálná x. Odtud však již vyplývá, že polynom P lze psát ve tvaru

$$P(x,y) = (x+y)\,Q(x,y),$$

kde Q je polynom.

Ukážeme nyní, že také polynom Q vyhovuje podmínkám 1, 2 a 3. Skutečně, při $x + y \neq 0$ je

$$Q(tx,ty) = \frac{P(tx,ty)}{tx+ty} = \frac{t^n P(x,y)}{t(x+y)} = t^{n-1}Q(x,y),$$

takže Q je nutně homogenní polynom stupně $n-1$. Podobně je – při $a+b+c \neq 0$ – také

$$Q(a+b,c)+Q(a+c,b)+Q(b+c,a)=$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left[P(a+b,c)+P(a+c,b)+P(b+c,a)\right]=0\,.$$

Rovněž

$$Q(1,0)=\frac{P(1,0)}{1}=1\,.$$

Poněvadž při $n=1$ už řešení známe, vidíme, že řešením mohou být jen polynomy tvaru

$$P(x,y)=(x+y)^{n-1}(x-2y)\,;$$

snadno se ověří, že tyto polynomy skutečně vyhovují všem třem podmínkám úlohy (při každém přirozeném n).

Jiné řešení. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:
Je-li polynom P řešením úlohy, potom

$$P(x,1-x)=3x-2$$

pro všechna reálná x.

Tvrzení dokážeme nejdříve jen pro celé hodnoty argumentu x, a to indukcí.

I. Tvrzení zřejmě platí pro $x=1$; podle podmínky 3 je totiž

$$P(1,0)=1=3\,.\,1-2\,.$$

II. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna celá čísla v mezích $1-k$ až $1+k$ (včetně), kde k je celé nezáporné číslo. Podle podmínky 2, kde položíme $a = -k$, $b = 0$, $c = 1 + k$, bude

$$P(-k, 1 + k) = -P(1, 0) - P(1 + k, -k).$$

Podle indukčního předpokladu se však pravá strana rovná

$$-1 - [3(1 + k) - 2] = 3(-k) - 2,$$

takže dokazovaná rovnost platí i pro $x = -k = 1 - (k + 1)$.

Nyní položme $a = k + 1$, $b = 1$, $c = -(k + 1)$; podle podmínky 2 bude

$$P(k + 2, -k - 1) = -P(0, 1) - P(-k, 1 + k).$$

Podle první části důkazu je však pravá strana rovna

$$-(3 . 0 - 2) - [3(-k) - 2] = 3k + 4 = 3(k + 2) - 2;$$

dokazované tvrzení tedy platí i pro $x = k + 2 = 1 + (k + 1)$.

Tvrzení tedy platí pro všechny celé hodnoty x; poněvadž však P je polynom, plyne odtud platnost tvrzení pro všechna reálná x vůbec.

Dále využijeme podmínky 1, tj. homogenity polynomu P, a napíšeme (pro $x + y \neq 0$)

$$P(x, y) = (x + y)^n P\left(\frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y}\right).$$

Avšak

$$\frac{y}{x + y} = 1 - \frac{x}{x + y},$$

takže podle pomocné věty je

$$P\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) = 3\frac{x}{x+y} - 2 = \frac{x-2y}{x+y}.$$

Celkem je tedy

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1}(x - 2y),$$

a to pro každé přirozené n. Ježto P je polynom, platí výsledek i při $x + y = 0$.

Snadno se ověří, že výsledný polynom skutečně vyhovuje všem třem podmínkám úlohy.

Poznámky k úlohám a jejich řešením

1. Uvedené řešení úlohy č. 1 je v podstatě shodné s řešením, které na *XVII. MMO* podal *J. Voldřich.*

2. Úlohu č. 2 lze řešit několika způsoby; nejkratší a nejekonomičtější se zdá být řešení, které zde uvádíme; až na drobné úpravy se shoduje s řešením, které při soutěži předložil *J. Kratochvíl.*

3. Úloha č. 3 byla na *MMO* jediná skutečně geometrická úloha. Řešení, které zde uvádíme jako první, se shoduje v podstatě s řešením, které na *MMO* podal *V. Klíma.* Druhé řešení je autorské. Třetí způsob řešení předložil na schůzi jury vedoucí francouzské delegace; odpovídá způsobu, jímž je geometrie roviny vykládána na francouzských školách.

4. Úloha č. 4 vznikla v této podobě až v průběhu jednání jury; v původním sovětském návrhu šlo o určení součtu cifer čísla 16^{16}. Je smutnou skutečností, že tuto nejlehčí úlohu nedokázal žádný z našich žáků vyřešit úplně.

5. Obtížnost úlohy č. 5 tkvěla spíše v logické struktuře tvrzení užívaných při řešení.

6. První z uvedených řešení úlohy č. 6 sleduje základní ideu, jíž užil na *XVII. MMO J. Navrátil*, který jako jediný z čs. družstva podal úplné řešení. Podobně ji ovšem řešila i většina ostatních úspěšných řešitelů. Druhé uvedené řešení, založené na pomocném tvrzení o hodnotách mnohočlenu P na přímce $x + y = 1$, podal na *XVII. MMO* jeden ze žáků z USA; dostal za ně zvláštní cenu.