

24. ročník matematické olympiády

VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 24. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1974-1975. 17. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. pp. 154–162.

Terms of use.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z

Praha a Západočeský kraj

1. Určete, pro které koeficienty a, b, c, d, e je mnohočlen $x^5 + ax^3 + bx - 1$ roven součinu mnohočlenů $x^2 + bx - 1$ a $x^3 + cx^2 + dx + e$.

2. a) Určete s přesností na sekundy, kdy hodinové ručičky mezi 0 h až 3 h stojí přesně proti sobě (svírají úhel 180°).

b) Kdy nastane nejdříve tento okamžik po odbití n -té hodiny ($0 \leq n < 6$).

3. Je dán kruh o středu S a poloměru $r = 6$ (cm) omezený kružnicí k . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC , který leží v tomto kruhu a jehož strana AB má délku 4 (cm) a je tětivou kružnice k . Přímku AB označme p . Trojúhelník ABC se pohybuje tak, že splňuje tyto podmínky:

- pohybující se trojúhelník ABC leží celý v kruhu;
- aspoň jeden vrchol trojúhelníku leží na kružnici k ;
- strana AB je stále rovnoběžná s přímkou p .

Narýsujte, přesně určete a odůvodněte dráhu, kterou vykoná bod A , než se opět pohybující trojúhelník dostane do své původní polohy. Totéž proveďte pro body B a C .

4. Rotační kužel, jehož podstava má poloměr $r = 6$ (cm) a jehož výška je $v = 8$ (cm), protněte rovinou ρ rovnoběžnou s podstavou kužele v kruhu (o poloměru x), který je zároveň podstavou seříznutého kužele a horní podstavou vepsaného válce. Určete poloměr x a vzdálenost roviny ρ od roviny podstavy, je-li obsah pláště rotačního válce roven obsahu pláště seříznutého kužele.

Středočeský kraj

1. Vědecké porady o využití ropy se zúčastní šest expertů ze socialistických zemí. Vědce označíme písmeny A, B, C, D, E, F . Tři z nich se mohou zúčastnit exkurze do přečerpávací stanice ropovodu Družba. Rozhodněte, která trojice může jet, jestliže:

- a) D nepojede s A , ale pojede jen, pojede-li také F .
- b) A pojede jen, pojede-li E .
- c) C pojede jen, pojede-li D zároveň s B .
- d) F pojede jen v přítomnosti B nebo C .

2. V bytě jsou dvoje hodiny. Jedny se předbíhají o jednu minutu za tři hodiny a druhé se zpožďují o jednu minutu za šest hodin. Oboje hodiny byly nařizeny na správný čas v sobotu přesně v poledne. Kdy se poprvé budou tyto hodiny rozcházet právě o 20 minut 45 sekund? (Udejte, v kolik hodin a který den to bude a kolik budou ukazovat první a kolik druhé hodiny.)

3. Buďte a, b, c tři libovolná čísla. Potom číslo

$$x = 4(a^2 + b^2 + c^2) - [(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2]$$

je číslo nezáporné; dokažte. Dále udejte všechny trojice čísel a, b, c , pro které je číslo x rovno nule.

4. Je dán obdélník $ABCD$, M je střed strany AB . Uvnitř úseček BC, AD sestrojte body E, F tak, aby pětiúhelníku $MECDF$ bylo možno opsat kružnici. Vyjádřete poloměr této kružnice i obsah pětiúhelníku pomocí délek stran obdélníku $ABCD$. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.

5. Je dán trojúhelník MNP , ve kterém $PM = 5,5$ cm, $PN = 4$ cm, $MN = 5$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li M střed strany AC , N střed strany BC a bod P

- pata výšky v_c ,
- pata výšky v_a .

Jihočeský kraj

1. Je-li n libovolné přirozené liché číslo, je číslo $(n^2 - 1)(n + 3)$ dělitelné číslem 24. Dokažte.

2. Je dán výraz:

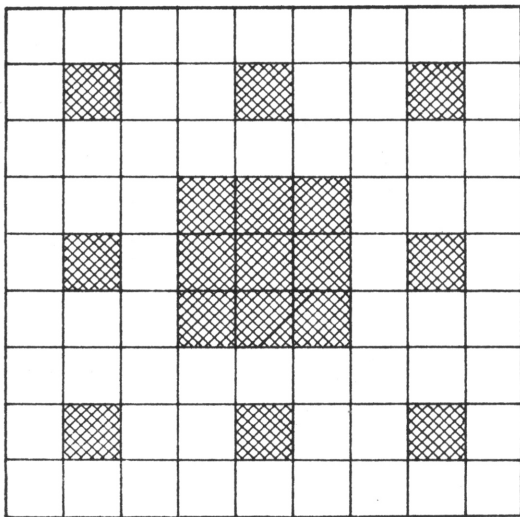
$$V = \left(\frac{a+b}{2a-2b} - \frac{a-b}{2a+2b} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \right) : \frac{4b}{(a^2+b^2)(a-b)}.$$

- V zjednodušte a udejte, pro která a, b nemá smysl.
- Vypočítejte všechny dvojice celých a, b , pro které $V = 10$.

3. Při omezování odběru elektrického proudu v době špiček se 35 závodů zavázalo snížit spotřebu. Celkem byly tři skupiny těchto závodů. V první skupině dosáhl každý závod snížení o 50 % pravidelného odběru, v druhé skupině snížil každý závod spotřebu o $\frac{1}{3}$ a ve třetí skupině o $\frac{1}{4}$ pravi-

delného odběru. Tím se dosáhlo úspory 40% pravidelné celkové spotřeby. Přitom v první skupině byl počet závodů dvojnásobný než ve druhé. Kolik závodů bylo ve třetí skupině, jestliže každý z těchto 35 závodů měl původně stejnou pravidelnou spotřebu proudu?

4. Dílna v prvním týdnu splnila plán, tj. vyrobila n kusů výrobků. V druhém týdnu poklesl výkon proti prvnímu týdnu o $p\%$. O kolik procent musela dílna zvýšit svůj výkon z druhého týdne ve třetím týdnu, aby ke konci třetího týdne byl splněn třítýdenní plán? Na závěr proveďte výpočet pro $p = 10$.



Obr. 45

5. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d . Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC . Vyjádřete pomocí proměnné d objem a povrch jehlanu $ABCV$.

6. Krychle je sestavena ze 729 krychliček o hraně 1 cm. Určete objem tělesa, které vznikne odebráním krychliček, a tím vytvořením tunelů procházejících celou krychlí tak, že každá ze stěn původní krychle je znázorněna připojeným náčrtkem (šrafováním jsou vyznačeny tunely; viz obr. 45).

7. Je dán trojúhelník ABC . Sestrojte body X, Y tak, aby bod X ležel na straně AC a bod Y na straně BC trojúhelníku ABC a aby platilo $XY \parallel AB$, $AX + BY = XY$.

8. Body A, B, C, D dělí kružnici $k = (S; r)$ na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru

$$AB : BC : CD : DA = 1 : 2 : 4 : 5.$$

Přímky AD, BC se protnou v bodě Q . Vypočtete vzdálenosti QB a QD .

Severočeský kraj

1. Výraz $3x^4 - 4x^2 + 1$ rozložte a) na součin dvojčlenů
2. stupně, b) na součin dvojčlenů 1. stupně.

2. Ze dvou měst A, B vyšli současně proti sobě dva chodci. První došel z A do B za 5 hodin 24 minuty, druhý z B do A za 6 hodin 45 minut. Po kolika hodinách chůze se potkali, šel-li každý stále stejnou rychlostí?

3. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d . Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC . Pomocí proměnné d vyjádřete:

- objem jehlanu $ABCV$,
- povrch jehlanu $ABCV$.

4. Je dána přímka p a na ní body A a B . V bodech A a B sestrojte po řadě kolmice k_1, k_2 , které jsou geometrickým místem (množinou) středů všech kružnic dotýkajících se přímky p v bodech A nebo B . Co je geometrickým místem (množinou) všech vnějších bodů dotyku všech takových kružnic? Své tvrzení dokažte.

Východočeský kraj

1. Daný součet převedte na součin tří činitelů:

$$x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3.$$

2. Kolik hodin ukazují ručičky mezi 3. a 4. hodinou, když:

- se ručičky kryjí,
- stojí proti sobě.

Počítejte na desetiny vteřiny.

3. Je dán kruh o středu S a $r = 6$ cm omezený kružnicí k .

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC , který leží celý v kruhu a jehož strana AB má délku $a = 4$ cm a je tětivou kružnice k . Přímkou AB označme p . Trojúhelník ABC se pohybuje tak, že splňuje tyto podmínky:

- Pohybující se trojúhelník ABC leží celý v kruhu.

b) Aspoň jeden vrchol trojúhelníku ABC leží na kružnici k .

c) Strana AB je stále rovnoběžná s přímkou p .

Narýsujte, přesně určete a odůvodněte dráhu, kterou vykoná bod A , než se opět pohybující se trojúhelník dostane do své původní polohy. Totéž proveďte pro body B a C .

4.a) V rovnoramenném lichoběžníku jsou základny $a = 17$ cm, $c = 7$ cm, rameno $b = 13$ cm. Rozdělte lichoběžník úsečkou x rovnoběžnou se základnami na dvě části, které mají stejný obsah. Vypočítejte délku úsečky x a její vzdálenost od delší základny. O správnosti výpočtu se přesvědčte zkouškou.

4.b) Trojúhelník o stranách $a = 8,5$ cm, $b = 12,5$ cm, $c = 14$ cm rozdělte úsečkou rovnoběžnou s nejdelší stranou na dvě části, které mají stejný obsah. Určete velikost hledané úsečky a zjistěte, v jaké vzdálenosti od bodu C protne kratší stranu. O správnosti výpočtu se přesvědčte zkouškou.

Jihomoravský kraj

1. Dokažte, že výraz

$$V = \frac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \frac{a+b}{ab+a-2b-2} - \frac{a-b}{ab-a-2b+2},$$

kde $a \neq 2$, $b \neq \pm 1$, je pro každá dvě čísla a, b roven nule.

2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně a . Středů jeho stran označte takto: E – střed AB , F – střed BC , G – střed CD , H – střed DA . Sestrojte trojúhelníky EFD a HGB .

Určete obsah šestiúhelníku $OPQRST$ (vrchol O je prů-

sečík přímek EF a BH , vrchol P je průsečík přímek EF a BG), který je společnou částí (průnikem) obou těchto trojúhelníků. (Správnost výpočtu zdůvodněte.)

3. Na kruhové dráze vyjedou z téhož místa a současně dva cyklisté

- v témže směru;
- proti sobě.

První objede dráhu za 1 min 52 s, druhý za 2 min 24 s. Po jaké době se a) dohoní; b) potkají?

4. V rovině jsou dány dvě kružnice k_1 (S_1 ; 25 mm), k_2 (S_2 ; 25 mm). Vzdálenost $S_1S_2 = 120$ mm.

Narýsujte všechny kružnice, které mají s každou z daných kružnic k_1, k_2 vnější dotyk a zároveň se dotýkají přímky S_1S_2 . Vypočtete poloměry sestrojených kružnic. Proveďte konstrukci též bez předběžného výpočtu.

Slovenská socialistická republika

1. Do kružnice k se středem S a poloměrem 5 cm je vpísaný pravidelný 6-uholník $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$. Označme A_2, A_4 priesečníky priamky A_1A_5 s priamkami A_3A_{11}, A_3A_7 ; A_6, A_8 priesečníky priamky A_5A_9 s priamkami A_3A_7, A_7A_{11} a A_{10}, A_{12} priesečníky priamky A_9A_1 s priamkami $A_7A_{11}, A_{11}A_3$.

a) Nakreslite množinu \mathbf{P} stredov všetkých kružnic s polomerom 1 cm, ktoré ležia v šesťcípej hviezde

$$\mathbf{H} = A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}.$$

b) Určte obvod útvaru \mathbf{P} .

2. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých súčin sa rovná štvorcifernému číslu s rovnakými číslicami.

3. Rýchlik dĺžky 200 m ide rýchlosťou 16 m/s. Po druhej koľaji tej istej trate prichádza opačným smerom nákladný vlak. Strojvedúci rýchlika zistil, že celý nákladný vlak minul lokomotívu rýchlika za 12 sekúnd. Ďalej zistil, že od okamihu, keď sa stretli lokomotívy oboch vlakov, až do chvíle, kedy sa minuli ich posledné vozne, uplynulo 20 sekúnd. Vypočítajte rýchlosť a dĺžku nákladného vlaku.

4. Je daný rovnostranný trojuholník ABC , ktorého strany majú dĺžku 2 cm. Bod K leží na priamke AB za bodom B .

a) Vypočítajte vzdialenosti bodu K od priamky AC a BC , ak $BK = 0,5$ cm.

b) Vypočítajte vzdialenosti bodu K od priamky AC a BC , ak $BK = d$ cm.

c) Dokážte, že rozdiel vzdialeností každého bodu polpriamky BK od priamok AC a BC v absolútnej hodnote je konštantný.