24. ročník matematické olympiády

IV. Soutěžní úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 24. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1974-1975. 17. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977. pp. 93–132.

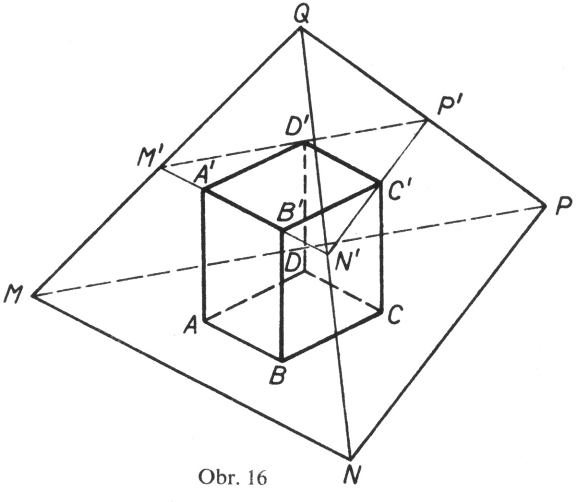
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404661

IV. Soutěžní úlohy II. kola

KATEGORIE A

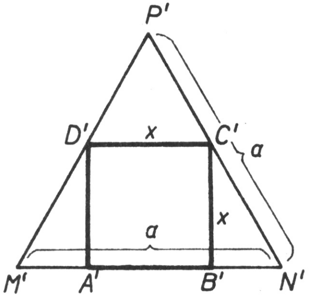
A – II – 1a

Je dán pravidelný čtyřstěn $MNPQ$ o hraně délky 1. Dokažte, že každá krychle, jejíž čtyři vrcholy leží ve stěně MNP a zbývající čtyři v dalších stěnách čtyřstěnu, má hranu menší než $\frac{1}{3}$.



Obr. 16

Řešení. Nechť krychle $ABCDA'B'C'D'$ splňuje v textu uvedené podmínky; ve stěně MNP nechť leží její stěna $ABCD$. Pak rovina $A'B'C'$ je rovnoběžná s rovinou MNP, takže daný čtyřstěn protíná v rovnostranném trojúhelníku; jeho vrcholy označme M', N', P' (obr. 16). Čtverec $A'B'C'D'$ je zřejmě trojúhelníku $M'N'P'$ vepsán. To je možné jedině



Obr. 17

tak, že jedna ze stran čtverce $A'B'C'D'$ je částí jedné ze stran $\triangle M'N'P'$. Nechť např. $A'B' \subset M'N'$ (obr. 17). Označme a velikost úsečky $M'N'$ a x velikost hrany vepsané krychle. Pak z $\triangle B'N'C'$ plyne

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{0{,}5(a - x)},$$

tj.

$$\sqrt{3}(a - x) = 2x,$$

odkud plyne

$$x = (2 - \sqrt{3})\, a \sqrt{3}. \tag{1}$$

Snadno lze spočítat, že pravidelný čtyřstěn o hraně délky

d má tělesovou výšku $k = d\,.\sqrt{\frac{2}{3}}$; výška čtyřstěnu $MNPQ$ je tedy

$$v = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,. \tag{2}$$

Čtyřstěn $M'N'P'Q$ je zřejmě také pravidelný, a proto je jeho výška

$$v' = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,. \tag{3}$$

Z rovností (2) a (3) vyplývá, že

$$x = (1 - a)\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,. \tag{4}$$

Z (1) a (4) dostáváme rovnici pro a:

$$(2 - \sqrt{3})\,a\sqrt{3} = (1 - a)\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,,$$

z níž plyne

$$a = \frac{\sqrt{2}}{6 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}}\,.$$

Podle (1) pak dostáváme

$$x = \frac{(2 - \sqrt{3})\sqrt{6}}{6 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3}}\,. \tag{5}$$

Zřejmě $x > 0$. Z našich úvah plyne, že způsobem popsaným v textu úlohy lze danému čtyřstěnu vepsat právě tři různé navzájem shodné krychle, jejichž hrany mají délku (5).

Máme dokázat, že platí $x < \frac{1}{3}$. Podle (5) je

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \tfrac{1}{6}(6 + \sqrt{2} - 3\sqrt{3})\sqrt{6}(2 + \sqrt{3}) = \\ &= \tfrac{1}{6}(3\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 6) > 3\,.\end{aligned}$$

Tedy $x < \frac{1}{3}$.

A – II – 1b

Riešte sústavu rovníc s neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4 a s parametrami c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= c_1\,, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= c_2\,, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= c_3\,, \\ -x_3 + 2x_4 &= c_4\,. \end{aligned}$$

Řešení. Z první rovnice je

$$x_1 - x_2 = c_1 - x_1\,,$$

ze součtu prvních dvou rovnic

$$x_2 - x_3 = c_1 + c_2 - x_1\,,$$

ze součtu prvních tří rovnic

$$x_3 - x_4 = c_1 + c_2 + c_3 - x_1\,,$$

ze součtu všech čtyř rovnic

$$x_4 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - x_1\,.$$

Sečtením posledních dvou rovnic

$$x_3 = 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 - 2x_1\,,$$

dále

$$x_2 = 3c_1 + 3c_2 + 2c_3 + c_4 - 3x_1\,,$$

a konečně

$$x_1 = 4c_1 + 3c_2 + 2c_3 + c_4 - 4x_1\,.$$

Proto je

$$x_1 = \tfrac{4}{5}c_1 + \tfrac{3}{5}c_2 + \tfrac{2}{5}c_3 + \tfrac{1}{5}c_4\,,$$

$$x_2 = \tfrac{3}{5}c_1 + \tfrac{6}{5}c_2 + \tfrac{4}{5}c_3 + \tfrac{2}{5}c_4\,,$$

$$x_3 = \tfrac{2}{5}c_1 + \tfrac{4}{5}c_2 + \tfrac{6}{5}c_3 + \tfrac{3}{5}c_4\,,$$

$$x_4 = \tfrac{1}{5}c_1 + \tfrac{2}{5}c_2 + \tfrac{3}{5}c_3 + \tfrac{4}{5}c_4\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že toto řešení soustavě skutečně vyhovuje.

Diskuse: Řešení je jediné, na hodnotách parametrů c_1, c_2, c_3, c_4 přitom nezáleží, mohou to být libovolná čtyři reálná čísla.

A – II – 2a

Je dána množina funkcí $f(x) = x^2 + b|x| + c$, kde b, c jsou reálné parametry. Najděte všechny funkce z této množiny, které mají v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 1\rangle$ největší hodnotu 2 a nejmenší hodnotu 1.

Řešení. Graf Γ každé funkce f lze složit z částí grafů Γ_1, Γ_2 funkcí

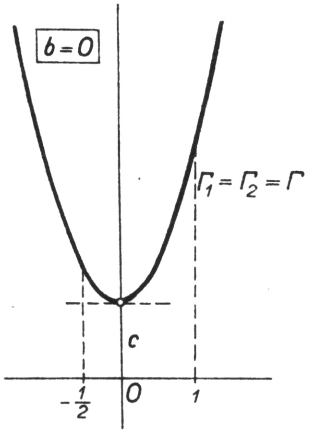
$$f_1(x) = x^2 + bx + c\,,$$

$$f_2(x) = x^2 - bx + c\,.$$

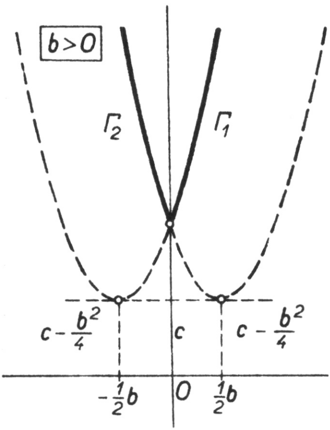
Funkce f_1 má minimum pro $x = -\frac{1}{2}b$, funkce f_2 pro $x = \frac{1}{2}b$; v obou případech je minimum $c - \frac{1}{4}b^2$. Pro $b = 0$ je $f_1 = f_2$, $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$. Pro $b > 0$ je graf Γ složen pro $x \geqq 0$ z části grafu Γ_1, pro $x \leqq 0$ z části grafu Γ_2, a to z těch částí, které neobsahují vrcholy parabol Γ_1, Γ_2. Také pro

$b < 0$ je graf $\mathbf{\Gamma}$ složen pro $x \geqq 0$ z části grafu $\mathbf{\Gamma}_1$, pro $x \leqq 0$ z části grafu $\mathbf{\Gamma}_2$, ale z těch částí, které *obsahují* vrcholy parabol $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2$.

a) Je-li $b \geqq 0$, nastane minimum pro $x = 0$ (je tedy $c = 1$) a maximum pro $x = 1$. To naznačují obr. 18, 19 a lze to snadno prokázat výpočtem. Dostáváme pro $b = 0$ funkci



Obr. 18

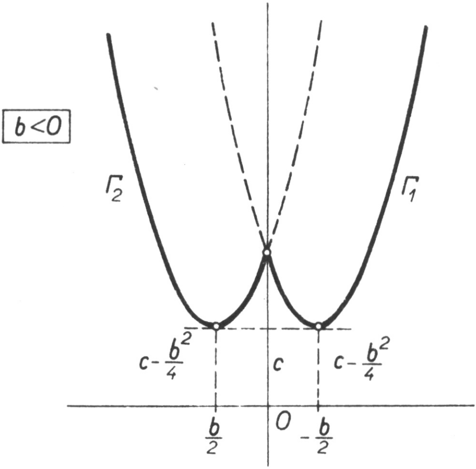


Obr. 19

$x \mapsto x^2 + 1$, která skutečně splňuje podmínky úlohy, pro $b > 0$ nedává rovnice $1 + b + 1 = 2$ řešení.

b) Je-li $b < 0$ (viz obr. 20), je třeba rozlišit dva případy: α) $-\frac{1}{2}b \leqq 1$ a β) $-\frac{1}{2}b > 1$.

V případě α) nastane minimum pro $x = -\frac{1}{2}b$, a platí tedy $c - \frac{1}{4}b^2 = 1$. Buď nastane maximum pro $x = 0$; pak je $c = 2$, $b = -2$ a dostaneme jako možné řešení funkci $x \mapsto x^2 - 2|x| + 2$, která skutečně vyhovuje. Nebo nastane maximum pro $x = 1$, což vede k rovnici $1 + b + c = 2$; spojením s rovnicí $c - \frac{1}{4}b^2 = 1$ dostaneme $b = -4$, což je ve sporu s předpokladem α).



Obr. 20

V případě β) nastane minimum pro $x = 1$ a maximum pro $x = 0$. Z toho plynou rovnice $1 + b + c = 1$ a $c = 2$, z nichž dostaneme $b = -2$, což je spor s předpokladem β).

Úloha má tedy dvě řešení $x \mapsto x^2 + 1$ a $x \mapsto x^2 - 2|x| + 2$.

A – II – 2b

Určte všetky reálné čísla x, pre ktoré platí

$$3[x]^2 + 6x - 4 = 0\,. \qquad (R)$$

$[x]$ znamená také celé číslo y, pre ktoré platí $y \leqq x < y + 1$.

Řešení. *1. způsob*: Označme $z = x - y$; pak je

$$0 \leqq z < 1\,. \tag{6}$$

Do dané rovnice dosadíme $x = y + z$. S použitím rovnosti $[x] = y$ dostaneme

$$6z = 4 - 3y^2 - 6y\,. \tag{7}$$

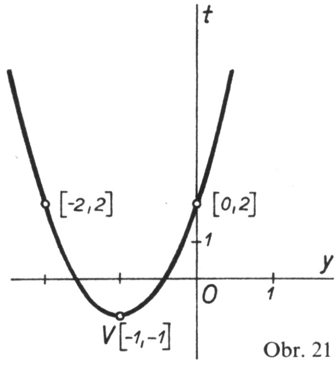
Vzhledem k (6) dostaneme z (7)

$$0 \leqq 4 - 3y^2 - 6y < 6\,. \tag{8}$$

Z (8) plyne

$$0 < 3y^2 + 6y + 2 \leqq 6\,. \tag{9}$$

Grafem funkce $t = 3y^2 + 6y + 2$ v souřadném systému (O, y, t) je „konvexní“ parabola, jejíž osa o je rovnoběžná



Obr. 21

s osou t a jejíž vrchol je v bodě $[-1; 1]$ (obr. 21). Je-li $y \leqq -3$ nebo $y \geqq 1$, je $t \geqq 11$, což je spor s pravou nerovností soustavy (9). Řešení soustavy (9) mohou být jedině ta celá čísla y, pro něž platí

$$-2 \leqq y \leqq 0 .$$

Příslušná tabulka je

y	-2	-1	0
t	2	-1	2

Vidíme, že $y = -1$ nevyhovuje vztahu (9). Pro $y = -2; 0$ dostaneme podle (7) $z = +\frac{2}{3}$ a dále $x = -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}$. Daná úloha má skutečně dvě řešení, jak se ověří zkouškou.

P o z n á m k a. Soustavu (9) lze vyřešit ještě tímto způsobem: Určíme obor pravdivosti **A** výrokové formy $A(y) \equiv$ $\equiv 3y^2 + 6y + 2 > 0$ a obor pravdivosti **B** výrokové formy $B(y) \equiv 3y^2 + 6y + 2 \leqq 6$.
Platí

$$\mathbf{A} = \left(-\infty;\ -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right),$$

$$\mathbf{B} = \left\langle -1 - \frac{\sqrt{21}}{3};\ -1 + \frac{\sqrt{21}}{3} \right\rangle .$$

V průniku $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ leží dvě celá čísla: -2 a 0. Další postup je stejný jako v prvním případě.

2. způsob: Má-li platit (R), musí být $6x$ celé číslo. Je tedy x nutně tvaru

$$x = q + \tfrac{1}{6}r ,$$

kde q je celé a $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Potom ovšem $[x] = q$, takže (R) lze psát ve tvaru

$$3q^2 + 6q + r - 4 = 0\,. \tag{10}$$

Odtud je vidět, že $r - 4$ musí být dělitelno 3. To je možné jenom tehdy, je-li buď $r = 1$, nebo $r = 4$. Tyto případy vyšetříme postupně.

a) $r = 1$. Potom z (10) dostáváme

$$3q(q + 2) = 3\,,$$

tzn.

$$q(q + 2) = 1\,,$$

ale takové celé q neexistuje.

b) $r = 4$. Z (10) vychází

$$3q(q + 2) = 0\,,$$

takže je buď $q = 0$, anebo $q = -2$. V prvém případě je

$$x = \tfrac{2}{3}\,,$$

ve druhém

$$x = -\tfrac{4}{3}\,;$$

dosazením do (R) se přesvědčíme, že to jsou skutečně řešení.

A – II – 3a

V rovině je dána kružnice k o poloměru 1 a jí vepsaný rovnoběžník $A_1B_1B_2A_2$, pro který platí $A_1B_1 = 1$. Dále je dáno $n - 1$ rovnoběžníků $A_1B_1B_iA_i$, $i = 3, 4, \ldots, n + 1$,

$n > 1$ tak, že všechny vrcholy $A_3, B_3, A_4, B_4, \ldots, A_{n+1}, B_{n+1}$ leží uvnitř kružnice k. Označme s součet obsahů všech rovnoběžníků, které lze zapsat ve tvaru $A_iB_iB_kA_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n + 1, i < k$. Dokažte, že platí

$$n\sqrt{3} \leqq s < \tfrac{1}{2}(n^2 - n + 2)\sqrt{3}\,.$$

Řešení. Rovnoběžník $A_1B_1B_2A_2$ má obsah $\sqrt{3}$, neboť to je vzdálenost dvou navzájem rovnoběžných tětiv A_1B_1, A_2B_2 kružnice k, které mají délku 1. Všechny ostatní úsečky A_iB_i, $i = 3, 4, \ldots, n + 1$, leží uvnitř pásu roviny s hranicemi A_1B_1 a A_2B_2. Leží-li všechny body A_i, B_i, $i = 3, 4, \ldots, n + 1$, v přímce, vznikne mimo rovnoběžník $A_1B_1B_2A_2$ ještě $2(n-1)$ rovnoběžníků $A_1B_1B_iA_i$ a $A_2B_2B_iA_i$, $i = 3, 4, \ldots, n + 1$, z nichž vždy dva odpovídající $A_1B_1B_iA_i$ a $A_2B_2B_iA_i$ mají obsahy se součtem $\sqrt{3}$. Pro číslo s máme v tomto případě rovnost

$$s_0 = \sqrt{3} + (n - 1)\sqrt{3} = n\sqrt{3}\,. \tag{11}$$

V jiných případech přistoupí k uvedeným $2n - 1$ rovnoběžníkům nejvýše r rovnoběžníků, které lze zapsat ve tvaru $A_iB_iB_kA_k$, $i, k = 3, 4, \ldots, n + 1$, $i < k$. Zřejmě je

$$r \leqq \binom{n-1}{2} = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2)\,.$$

Každý z těchto rovnoběžníků má obsah menší než $\sqrt{3}$; pro součet s' jejich obsahů tedy platí

$$s' < r\sqrt{3} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(n^2 - 3n + 2)\,.$$

S použitím (11) dostaneme

$$s = s_0 + s' < n\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(n^2 - 3n + 2),$$

tj.

$$s < \tfrac{1}{2}(n^2 - n + 2)\sqrt{3};$$

úhrnem

$$n\sqrt{3} \leqq s < \tfrac{1}{2}(n^2 - n + 2)\sqrt{3}.$$

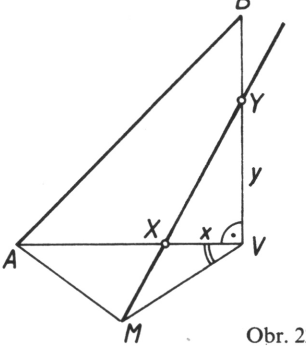
A – II – 3b

Je dáno kladné číslo s a konvexní čtyřúhelník $ABVM$, v němž je úhel $\sphericalangle AVB$ pravý. Určete takové body X, Y ramen VA, VB, aby přímka XY procházela bodem M a aby platilo $VX + VY = s$.

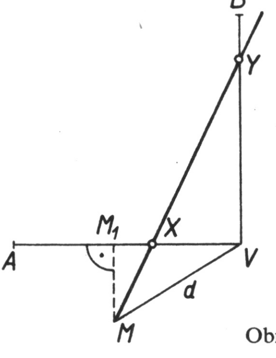
a) Vyjádřete VX pomocí délek s, $d = VM$ a velikosti úhlu $\omega = \sphericalangle AVM$.

b) Stanovte podmínku řešitelnosti úlohy.

Řešení. Na obr. 22 je označeno $VX = x$, $VY = y$. Zřejmě je $\omega < \frac{1}{2}\pi$.



Obr. 22



Obr. 23

Pro obsahy trojúhelníků platí

$$\triangle VXY + \triangle VXM = \triangle MVY,$$

neboli

$$\tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}dx \sin \omega = \tfrac{1}{2}dy \cos \omega\,,$$

tj.

$$y = \frac{dx \sin \omega}{d \cos \omega - x}\,. \tag{12}$$

Protože $VX + VY = s$, plyne z (12)

$$x + \frac{dx \sin \omega}{d \cos \omega - x} = s\,,$$

tj.

$$x^2 - (d \cos \omega + d \sin \omega + s)\, x + ds \cos \omega = 0\,. \tag{13}$$

Podle obr. 23 je úloha řešitelná právě tehdy, má-li rovnice (13) kladný kořen, pro který platí $x < VM_1$ (M_1 je pravoúhlý průmět bodu M do polopřímky VA), neboli

$$x < d \cos \omega\,. \tag{14}$$

Diskriminant rovnice (13) je

$$D = (d \cos \omega + d \sin \omega + s)^2 - 4ds \cos \omega\,,$$

po úpravě

$$D = d^2 \sin^2 \omega + 2d \sin \omega\,(d \cos \omega + s) + (d \cos \omega - s)^2\,. \tag{15}$$

Protože $d > 0$, $\cos \omega > 0$, $s > 0$, $\sin\ \omega > 0$, je $D > 0$, tj. rovnice (13) má dva reálné kořeny x_1, x_2. Protože jejich součet i součin jsou kladná čísla (viz (13)), jsou oba kořeny x_1, x_2 kladné.

Nutná a postačující podmínka řešitelnosti úlohy je, aby *menší* z obou kořenů x_1, x_2 rovnice (13) byl menší než $d \cos \omega$. Menší kořen x_1 je dán vzorcem

$$x_1 = \frac{d \cos \omega + d \sin \omega + s - \sqrt{D}}{2}.$$

Podmínka řešitelnosti je po úpravě

$$d \sin \omega + s - d \cos \omega < \sqrt{D}. \tag{16}$$

Je-li $d \sin \omega + s - d \cos \omega \geqq 0$, plyne z (16) po úpravě vzhledem k (15)

$$0 < 4d^2 \sin \omega \cos \omega. \tag{17}$$

Protože postup lze obrátit (v případě $d \sin \omega + s - d \cos \omega \geqq 0$), je $x_1 < d \cos \omega$ a úloha je řešitelná.

Vyšetřme tedy ještě případ $d \sin \omega + s - d \cos \omega < 0$. V tomto případě platí (16) bez dalších podmínek. Po přičtení $2d \cos \omega$ na obou stranách (16) zjistíme, že opět platí $x_1 < d \cos \omega$, a úloha je tedy opět řešitelná.

Úloha má tedy v každém případě aspoň jedno řešení.

KATEGORIE B

B – II – 1a

Zostrojte $\triangle ABC$, v ktorom pre veľkosť t_c ťažnice z vrcholu C na stranu AB a pre veľkosť a strany BC platí

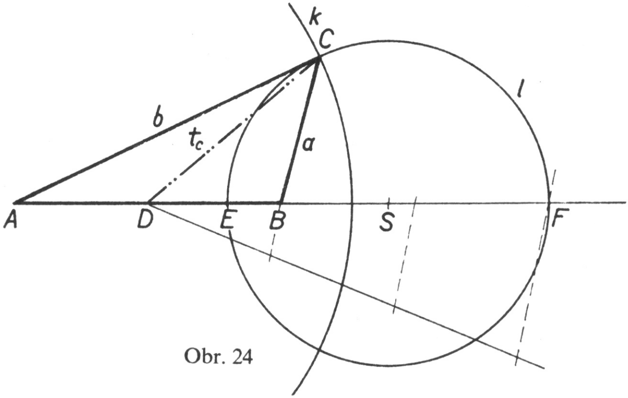
$$t_c = \tfrac{3}{2}a,$$

ak sú dané veľkosti b, c strán AC a AB.

Riešenie. *Rozbor.* Označme D stred strany AB. Potom platí

$$BC : DC = a : t_c = 2 : 3\,.$$

Ďalej bod C leží na kružnici $k \equiv (A; b)$.



Obr. 24

Konštrukcia: (obr. 24). Najskôr zostrojíme stranu AB s veľkosťou c, jej stred D a kružnicu $k = (A; b)$. Potom zostrojíme bod E ležiaci vo vnútri úsečky BD, pre ktorý platí $BE : DE = 2 : 3$, a taký bod F na predĺžení úsečky DB za bod B, že $BF = 2 \,.\, BD$, tj. $BF : DF = 2 : 3$. Potom opíšeme kružnici l nad priemerom EF. Určíme $k \cap l$. Zvoľme bod $C \in k \cap l$. V prípade, že C neleží na priamke AB, je $\triangle ABC$ hľadaným trojuholníkom.

Skúška. Z konštrukcie vyplýva, že strany AB a AC majú skutočne v uvedenom poradí veľkosti c a b. Kružnica l je zrejme Apolloniovou kružnicou pre body B, D a pomer $BX : DX = 2 : 3$, takže $a : t_c = 2 : 3$, tj. $t_c = \frac{3}{2}a$.

Diskusia. Úloha bude mať riešenie práve vtedy, keď sa budú kružnice k a l pretínať čiže práve vtedy, keď kružnica k bude mať spoločný bod s vnútrom úsečky EF, tj. práve vtedy keď

$$AE < b < AF. \tag{18}$$

Platí $AE = AB - EB = c - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}c = \frac{4}{5}c$, $AF = AB + BF = 2c$. Podmienka (18) teda znie

$$\tfrac{4}{5}c < b < 2c. \tag{19}$$

Kružnice k a l majú síce v prípade (19) dva priesečníky, ale úloha je nepolohová, takže sa uvažuje len o jednom z nich. Teda, ak platí (19), má úloha jediné riešenie. Ak neplatí (19), potom úloha nemá riešenie.

B – II – 1b

Je daný ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom uhol BAC má veľkosť α. Obsah trojuholníka je P. Označme B_1 pätu výšky z vrcholu B na stranu AC a C_1 pätu výšky z vrcholu C na stranu AB. Vyjadrite obsah štvoruholníka BCB_1C_1 pomocou P a α.

Riešenie. Z pravouhlých trojuholníkov ACC_1 a ABB_1 dostávame (obr. 25)

$$AC_1 = AC \cos\alpha,$$

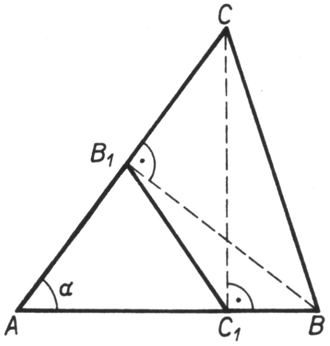
$$AB_1 = AB \cos\alpha.$$

Podľa vety *sus* pre podobnosť trojuholníkov je teda

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$$

s pomerom podobnosti $AB_1 : AB = \cos\alpha$. Pre obsah P_1 trojuholníka AB_1C_1 teda platí

$$P_1 = P\cos^2\alpha\,.$$



Obr. 25

Pre obsah P' štvoruholníka BCB_1C_1 potom dostávame

$$P' = P - P\cos^2\alpha = P(1 - \cos^2\alpha) = P\sin^2\alpha\,.$$

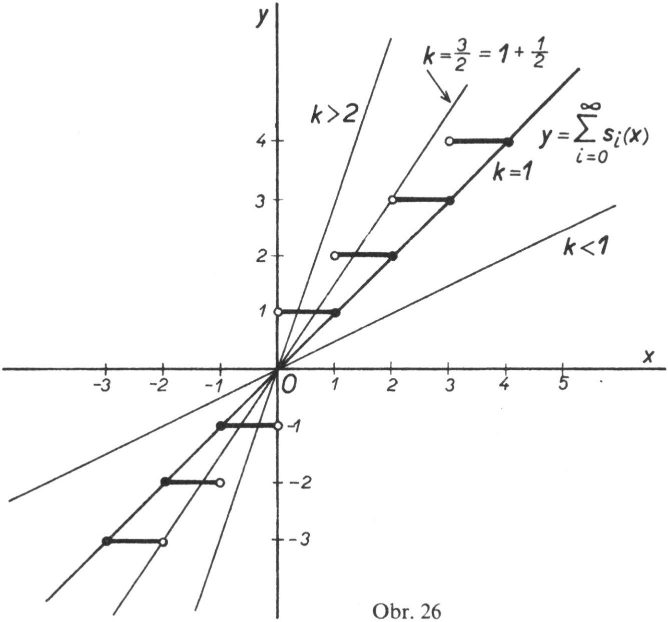
B – II – 2a

Nech a je nezáporné reálne číslo. Definujme funkciu $s_a(x)$ takto:

$$s_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x > a\,, \\ 0 & \text{pre } |x| \leqq a\,, \\ -1 & \text{pre } x < -a\,. \end{cases}$$

Riešte rovnicu $\sum\limits_{i=0}^{\infty} s_i(x) = kx$, kde k je reálny parameter.

Riešenie. Označme $S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(x)$ a skúmajme podrobnejšie vlastnosti funkcie $S(x)$. Predovšetkým je vidieť, že ide o funkciu nepárnu, pretože pre každé reálne x platí $S(-x) = -S(x)$. Vzhľadom na to, že pravá strana danej



Obr. 26

rovnice je tiež nepárna funkcia (platí: $k(-x) = -kx$), stačí sa obmedziť len na interval $\langle 0; \infty)$. Ak bude koreňom našej rovnice nejaké číslo $x \geqq 0$, potom jej bude vyhovovať aj číslo $-x$.

Vráťme sa k funkcii $S(x)$. Pre $x = 0$ je $S(x) = 0$. Pre $x \in (m - 1; m\rangle$, kde m je prirodzené číslo, je

$$S(x) = \sum_{i=0}^{m-1} s_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} s_i(x).$$

Pre každé $i \leqq m - 1$ je pre x z uvedeného intervalu $s(x) = 1$ a prvý sčítanec tohto súčtu je teda rovný m. Druhý sčítanec je rovný nule, pretože tu $|x| \leqq i$ pre všetky i. $S(x)$ je teda stupňovitá funkcia, ktorá na intervale $(m - 1; m\rangle$ nadobúda hodnotu m. Jej graf je na obr. 26.

Pre $k = 1$ je riešením danej rovnice v intervale $\langle 0; \infty)$ každé prirodzené číslo a nula a v obore všetkých reálnych čísel je teda jej riešením každé celé číslo. Pre $k < 1$ nemá okrem riešenia $x = 0$ daná rovnica žiadne ďalšie riešenie. Pre $k \in \left\langle 1 + \frac{1}{m}; 1 + \frac{1}{m - 1}\right)$, kde $m = 2, 3, 4, \ldots$, je riešením každé číslo $x = \frac{i}{k}$, kde $i = -m, -m + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m$. Pre $k \geqq 2$ má rovnica korene $-\frac{1}{k}; 0; \frac{1}{k}$.

B – II – 2b

Je daná množina funkcií

$$x \mapsto 2x - |x| + a|x - a|,$$

kde a je reálny parameter. Určte všetky hodnoty a, pre ktoré graf príslušnej funkcie má s osou x spoločný aspoň jeden bod.

Riešenie. Budeme rozlišovať prípady $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$. Pre $a = 0$ ide o funkciu $x \mapsto 2x - |x|$, ktorej graf má s osou x spoločný jedine bod $[0; 0]$.

I. Ak $a > 0$, uvažujme o danej funkcii na intervaloch $J_1 = (-\infty, 0\rangle$, $J_2 = \langle 0; a\rangle$, $J_3 = \langle a, \infty)$. V týchto intervaloch sú funkčné rovnice funkcií danej množiny určené takto:

$$J_1\colon\ x \mapsto (3 - a)x + a^2\,,$$

$$J_2\colon\ x \mapsto (1 - a)x + a^2\,,$$

$$J_3\colon\ x \mapsto (1 + a)x - a^2\,.$$

V intervale J_2 nemá graf funkcie spoločný bod s osou x, pretože je to úsečka s krajnými bodmi $[0; a^2]$, $[a; a]$. Grafom uvažovanej funkcie v intervale J_3 je polpriamka vychádzajúca z bodu $[a; a]$ a prechádzajúca bodom $[2a; 2a + a^2]$, ktorá nemá taktiež spoločný bod s osou x. Iba graf funkcie v intervale J_1 môže mať s osou x spoločný bod, a to práve vtedy, keď $3 - a > 0$ čiže ak

$$0 < a < 3\,. \tag{20}$$

II. Ak je $a < 0$, budeme uvažovať o danej funkcii na intervaloch $J_4 = (-\infty; a\rangle$, $J_5 = \langle a; 0\rangle$, $J_6 = \langle 0; \infty)$, v ktorých sú funkčné rovnice:

$$J_4\colon\ x \mapsto (3 - a)x + a^2\,,$$

$$J_5\colon\ x \mapsto (3 + a)x - a^2\,,$$

$$J_6\colon\ x \mapsto (1 + a)x - a^2\,.$$

Analogicky ako v prípade **I** sa ukáže, že v intervale J_4, J_5 nemá graf danej funkcie spoločný bod s osou x. Spoločný bod s osou x môže mať len v intervale J_6, a to práve vtedy, keď $1 + a > 0$ čiže $a > -1$. Keďže je zároveň $a < 0$, dostávame

$$-1 < a < 0. \tag{21}$$

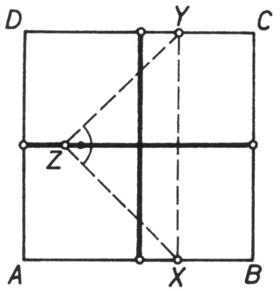
Ak k podmienkam (20), (21) pripojíme ešte prípad $a = 0$, dostaneme nutnú a postačujúcu podmienku riešiteľnosti úlohy:

$$-1 < a < 3.$$

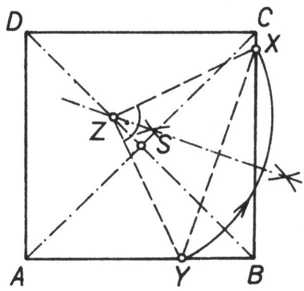
B – II – 3a

Je daný štvorec $ABCD$, ktorého strana má dĺžku a. Vo vnútri tohto štvorca nájdite množinu vrcholov Z všetkých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov XYZ s preponou $XY = a$, ktorých vrcholy X, Y ležia na obvode daného štvorca.

Riešenie. 1. Najskôr vyšetrujeme prípad, keď vrcholy X a Y ležia vo dvoch protiľahlých stranách daného štvorca (obr. 27). Potom sa ľahko zistí, že v tomto prípade množinou



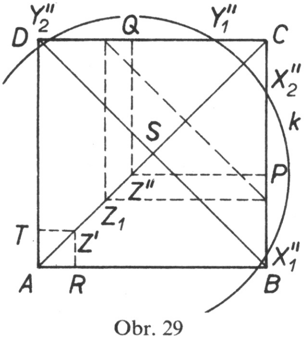
Obr. 27



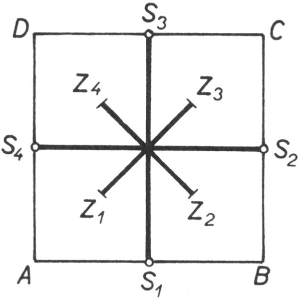
Obr. 28

všetkých vrcholov Z ležiacich vo vnútri štvorca $ABCD$ je množina $\mathbf{M}_1$ všetkých vnútorných bodov stredných priečok štvorca $ABCD$.

2. Zaoberajme sa prípadom, keď vrcholy X a Y ležia vo vnútri oboch susedných strán daného štvorca. Pre tento prípad označme $\mathbf{M}_2$ množinu všetkých vrcholov Z ležiacich vo vnútri daného štvorca. Bod X je zrejme obrazom bodu Y pri otočení okolo bodu Z o uhol $90°$ v kladnom alebo zápornom zmysle (obr. 28). Bod Z je vnútorným bodom štvorca $ABCD$ a každé dve susedné strany štvorca sú navzájom kolmé. Preto množina $\mathbf{M}_2$ je časťou množiny všetkých vnútorných bodov uhlopriečok daného štvorca.



Obr. 29



Obr. 30

Označme S priesečník uhlopriečok daného štvorca (obr. 29). Uvažujme o úsečke AS. Nech Z_1 je taký bod tejto úsečky, ktorý má od strán BC a CD vzdialenosť $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Zrejme $Z_1 \in \mathbf{M}_2$. Ak zvolíme ľubovoľný bod Z' ležiaci vo vnútri úsečky AZ_1, potom príslušné body X' a Y' môžu ležať buď na stranách DC a BD, alebo AB a AD. Na stranách

DC a BC také body neexistujú, pretože vzdialenosť bodu Z' od týchto strán je väčšia než $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Dokážme, že ani na stranách AB a AD nemôžu ležať také body. Označme R a T v uvedenom poradí pravouhlé priemety bodu Z' na strany AB a AD. Ďalej je $AZ' < AS = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, takže pokiaľ by existovali na stranách AB a AD body X' a Y', patrili by úsečkám RB a TD, tj. $\sphericalangle X'Z'Y'$ by bol väčší než 90°. Teda $Z' \notin \mathbf{M}_2$.

Nech bod Z'' je ľubovoľným vnútorným bodom (obr. 30) úsečky SZ_1. Označme P, Q v uvedenom poradí päty kolmíc z bodu Z'' na strany BC a CD. Zrejme $Z''P = Z''Q < \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Zostrojme kružnicu $k \equiv (Z''; \frac{1}{2}a\sqrt{2})$. Táto kružnica má s priamkou BC dva spoločné body X_1'' a X_2'' a s priamkou CD spoločné body Y_1'' a Y_2''. Všetky tieto body ležia na obvode štvorca a nesplývajú s jeho vrcholmi, pretože P a Q sú vnútorné body úsečiek BC a CD, $Z''C > SC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ a $Z''B = Z''D > SD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ (vyplýva z $\triangle Z''SD$). Zo zhodnosti trojuholníkov $Z''PX_1''$ a $Z''QY_1''$ a z toho, že $\sphericalangle PZ''Q = 90°$ vyplýva, že trojuholník $X_1''Z''Y_1''$ je pravouhlý a rovnoramenný s preponou $X_1''Y_1''$. Teda $Z'' \in \mathbf{M}$.

Závěr. Hľadanou množinou je množina $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, ktorá je na obr. 30 hrubo vytiahnutá ($S_1, S_2, S_3, S_4 \notin \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$).

B – II – 3b

V jednotkovej štvorcovej sieti je zakreslená sústava súradníc, ktorej osi ležia v priamkách siete. Nech (p, q) je bod siete, kde p a q sú prirodzené čísla, $p \leqq q$. Dokážte matematickou indukciou podľa čísla $n = p + q$, že po priamkach siete sa možno dostať zo začiatku súradnicovej sústavy do bodu $(p; q)$ cestou dĺžky $p + q$ práve

$$\frac{(p+q)(p+q-1)\dots(q+2)(q+1)}{p(p-1)\dots 2.1}$$

spôsobmi.

Riešenie. Všimnime si najskôr, že cesta dĺžky $p + q$ z bodu $(0; 0)$ do bodu $(p; q)$ má vlastnosť, že je najkratšia, a preto z každého svojho bodu $(u; v)$ pokračuje buď do bodu $(u + 1; v)$, alebo do bodu $(u; v + 1)$.

Dôkaz úplnou indukciou urobíme teraz takto: Pretože p, q sú prirodzené čísla, je $n = p + q \geqq 2$. Ak je $n = 2$, je $p = 1, q = 1$. Sú zrejme dve cesty z $(0; 0)$ do $(1; 1)$ dĺžky 2. Vzorec dáva taktiež 2, takže pre tento prípad tvrdenie platí. Nech $n > 2$ a predpokladajme, že vzorec platí pre $n - 1$. Do bodu $(p; q)$ sa podľa predchádzajúcej úvahy dostaneme z dvoch bodov: $(p - 1; q)$ a $(p; q - 1)$.

Rozlišujeme nasledujúce prípady:

a) $p = q$; pretože počet ciest z $(0; 0)$ do $(p; p - 1)$ je rovnaký ako počet ciest z $(0; 0)$ do $(p - 1; p)$, je potom podľa indukčného predpokladu počet ciest z bodu $(0; 0)$ do $(p; p)$ rovný

$$2\frac{(2p-1)(2p-2)\dots(p+1)}{(p-1)(p-2)\dots 2.1} = \frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{p(p-1)\dots 2.1},$$

čo je práve číslo dané vzorcom.

b) $1 = p < q$. Do bodu $(1; q)$ sa opäť dostaneme z bodu $(0; q)$ alebo z bodu $(1; q - 1)$. Pretože do bodu $(0; q)$ vedie z bodu $(0; 0)$ jediná cesta (dĺžky $p + q - 1$) a podľa indukčného predpokladu je počet ciest do $(1; q - 1)$ rovný q, je počet ciest do $(1; q)$ rovný $q + 1$, ako udáva aj vzorec.

c) $1 < p < q$. Počet ciest do $(p; q)$ je opäť súčtom ciest do $(p - 1; q)$ a $(p; q - 1)$, ktoré sú podľa indukčného predpokladu rovné

$$\frac{(p + q - 1)(p + q - 2) \dots (q + 1)}{(p - 1)(p - 2) \dots 2 . 1}$$

a

$$\frac{(p + q - 1)(p + q - 2) \dots q}{p(p - 1) \dots 2 . 1}.$$

Ich súčet je

$$\frac{(p + q)(p + q - 1) \dots (q + 1)}{p(p - 1) \dots 2 . 1}$$

ako zodpovedá vzorcu. Tým je tvrdenie dokázané.

KATEGORIE C

C – II – 1a

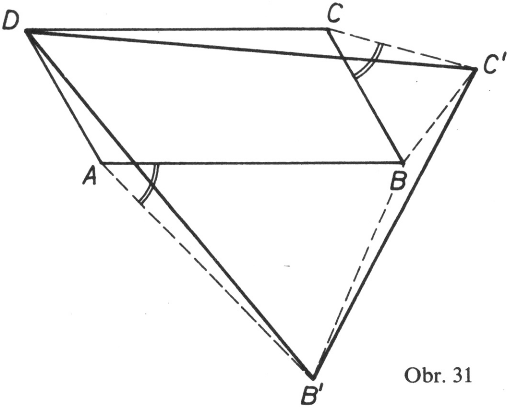
V rovine ϱ je daný rovnobežník $ABCD$. Z vonkajšej strany rovnobežníka sú zostrojené dva navzájom podobné rovnoramenné trojuholníky BAB' a BCC', pre ktoré platí: $AB' = AB$, $CC' = CB$ a uhol BAB' sa rovná uhlu BCC'. Dokážte, že trojuholník $B'C'D$ je podobný s trojuholníkmi BAB' a BCC'.

Riešenie (viď obr. 31). **1.** Dokážeme, že trojuholník $B'C'D$ je rovnoramenný.

a) platí: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ a $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle C'CB$, teda aj $\sphericalangle DAB' = \sphericalangle C'CD$.

b) $AB' = CD$, $DA = BC = C'C$.

Podľa vety *sus* platí, že $\triangle DAB' \cong C'CD$, teda aj $B'D = C'D$. Trojuholník $B'C'D$ je rovnoramenný.



Obr. 31

2. Dokážeme, že $\sphericalangle B'C'D = \alpha$, kde $\alpha = \sphericalangle CC'B$.

a) Dokážeme, že $\triangle C'BB' \sim \triangle DAB' \sim \triangle C'CD$.

Platí: $\sphericalangle CBC' = \sphericalangle CC'B = \sphericalangle AB'B = \sphericalangle ABB' = \alpha$, potom $\sphericalangle B'AD = \sphericalangle BAD + \sphericalangle B'AB = (2R - \sphericalangle ABC) + (2R - 2\alpha) = 4R - (2\alpha + \sphericalangle ABC) = \sphericalangle C'BB'$.

Ďalej platí: $AB' : AD = AB : BC = B'B : BC'$, teda $\triangle C'BB' \sim \triangle DAB' \sim \triangle C'CD$.

b) Z **2.** a) vyplýva, že $\sphericalangle B'C'B = \sphericalangle ADB' = \sphericalangle DC'C$, teda aj $\sphericalangle B'C'D = \sphericalangle B'C'B + \sphericalangle BC'D = \alpha$.

Záver. $\triangle B'C'D$ je rovnoramenný a $\sphericalangle B'C'D = \alpha$, teda $\triangle B'C'D \sim \triangle B'BA \sim \triangle BC'C$.

C – II – 1b

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž úhel BAC má velikost α. Obsah trojúhelníku je P. Označme B_1 patu výšky z vrcholu B na stranu AC a C_1 patu výšky z vrcholu C na stranu AB. Dokažte, že čtyřúhelník BCB_1C_1 má obsah $P \sin^2 \alpha$.

Řešení. Viz úlohu **B – II – 1b** na str. 108.

C – II – 2a

Najděte všechny dvojice (x, y) přirozených čísel x, y, které splňují rovnici

$$|x - 2| + |y - 3| = 3 - y .$$

Řešení. Je vždy

$$|x - 2| \geqq 0 ,$$

$$|y - 3| = |3 - y| \geqq 3 - y .$$

Odtud sečtením

$$|x - 2| + |y - 3| \geqq 3 - y ;$$

přitom rovnost nastane, právě když

$$|y - 3| = 3 - y$$

a zároveň

$$|x - 2| = 0 ,$$

tj. platí-li

$$y \leqq 3 \quad \text{a} \quad x = 2 .$$

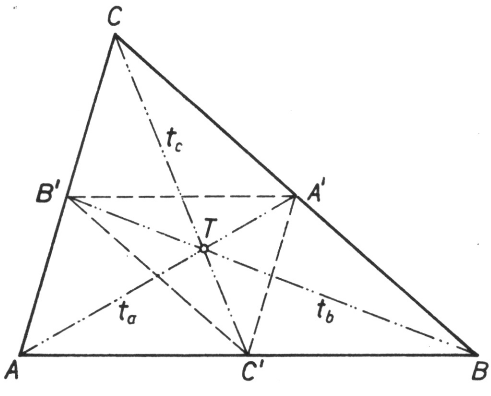
Danému vztahu vyhovují tři dvojice $(2, 1)$, $(2, 2)$ a $(2, 3)$, jak ověříme zkouškou.

C–II–2b

Při obvyklém označení dokažte, že v $\triangle ABC$ platí

$$\tfrac{3}{4}o < t_a + t_b + t_c < o\,.$$

Řešení úlohy vychází z použití trojúhelníkové nerovnosti, vlastností těžiště a stejnolehlosti. Označme A', B', C' po řadě středy stran a, b, c trojúhelníku ABC (viz obr. 32).



Obr. 32

Zřejmě platí

$$A'B' = \tfrac{1}{2}c\,,$$
$$B'C' = \tfrac{1}{2}a\,,$$
$$C'A' = \tfrac{1}{2}b\,.$$

Pravou nerovnost odvodíme z trojúhelníků $AA'C'$, $BB'A'$ a $CC'B'$ pomocí trojúhelníkové nerovnosti.

Platí:

$$t_a < \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}b\,,$$
$$t_b < \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c\,,$$
$$t_c < \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}a\,.$$

Sečtením těchto nerovností máme:

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c\,,$$

a tedy

$$t_a + t_b + t_c < o\,,$$

což jsme měli dokázat.

Levou nerovnost odvodíme analogicky z trojúhelníků *ATB*, *BTC* a *CTA*.

Platí

$$c < \tfrac{2}{3}t_a + \tfrac{2}{3}t_b\,,$$
$$a < \tfrac{2}{3}t_b + \tfrac{2}{3}t_c\,,$$
$$b < \tfrac{2}{3}t_a + \tfrac{2}{3}t_c\,.$$

Sečtením dostaneme

$$a + b + c < \tfrac{4}{3}(t_a + t_b + t_c)$$

a konečně

$$\tfrac{3}{4}o < t_a + t_b + t_c\,.$$

Tím je dvojice nerovností dokázána.

C – II – 3a

Riešte sústavu rovníc

$$\left.\begin{aligned} \frac{x(y+z)}{4} = \frac{y(z+x)}{9} = \frac{z(x+y)}{10}\,, \\ xy + yz + zx = \tfrac{23}{15}xyz\,. \end{aligned}\right. \qquad (22)$$

Riešenie. Jednoduchou úpravou sústavy (22) dostaneme

$$\begin{aligned} 9x(y+z) &= 4y(z+x)\,, \\ 10y(z+x) &= 9z(x+y)\,, \\ xy + yz + zx &= \tfrac{23}{15}xyz\,, \end{aligned}$$

z čoho

$$\left.\begin{aligned} 4yz - 9xz - 5xy &= 0\,, \\ -yz + 9xz - 10xy &= 0\,, \\ yz + xz + xy &= \tfrac{23}{15}xyz\,. \end{aligned}\right. \qquad (23)$$

Nech (x, y, z) je nejaké riešenie sústavy (23). Uvažujme o týchto 2 prípadoch: 1. $xyz \neq 0$, 2. $xyz = 0$.

1. Ak $xyz \neq 0$, potom delením každej rovnice týmto číslom dostaneme:

$$\left.\begin{aligned} 4\frac{1}{x} - 9\frac{1}{y} - 5\frac{1}{z} &= 0\,, \\ -\frac{1}{x} + 9\frac{1}{y} - 10\frac{1}{z} &= 0\,, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{23}{15}\,; \end{aligned}\right. \qquad (24)$$

označme: $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = w$. Sústava (24) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} 4u - 9v - 5w &= 0\,, \\ -u + 9v - 10w &= 0\,, \\ u + v + w &= \tfrac{23}{15}\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Sčítaním prvých dvoch rovníc sústavy (25) dostaneme

$$3u = 15w \quad \text{čiže} \quad u = 5w \tag{26}$$

a po dosadení z (26) do niektorej z týchto rovníc máme

$$9v = 15w \quad \text{čiže} \quad v = \tfrac{5}{3}w\,. \tag{27}$$

Z tretej rovnice (25) po dosadení z (26) a (27) máme

$$5w + \tfrac{5}{3}w + w = \tfrac{23}{15}\,, \quad \text{z čoho} \quad w = \tfrac{1}{5}\,. \tag{28}$$

Z (26), (27) dostávame

$$u = 1\,, \qquad v = \tfrac{1}{3}\,. \tag{29}$$

Zo (28) a (29) vyplýva

$$x = 1\,, \qquad y = 3\,, \qquad z = 5\,. \tag{30}$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že (30) vyhovuje danej sústave.

2. Ak $xyz = 0$, potom môže nastať jeden z týchto prípadov: a) $x = 0$, b) $y = 0$, c) $z = 0$.

a) Ak $x = 0$, zo sústavy (23) máme: $yz = 0$, z čoho vyplýva, že buď $y = 0$, z ľubovoľné alebo $z = 0$, y ľubovoľné.

V tomto prípade teda vyhovujú danej sústave všetky usporiadané trojice reálnych čísel tvaru $(0, 0, \alpha)$, resp. $(0, \alpha, 0)$, kde α je ľubovoľné reálne číslo.

V prípadoch b), c) analogicky dostaneme, že danej sústave vyhovujú všetky usporiadané trojice reálnych čísel tvaru $(0, 0, \alpha)$ a $(\alpha, 0, 0)$, resp. $(0, \alpha, 0)$ a $(\alpha, 0, 0)$, kde α je ľubovoľné reálne číslo.

Záver. Sústave (22) vyhovuje usporiadaná trojica $(1, 3, 5)$ a všetky usporiadané trojice tvaru $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \alpha, 0)$, $(0, 0, \alpha)$, kde α je ľubovoľné reálne číslo.

C – II – 3b

Je daná sústava rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= p^2\,, \\ 10x + y &= p^3\,, \end{aligned} \tag{31}$$

kde x, y sú neznáme, p je prirodzené číslo.

a) Nájdite všetky čísla p, pre ktoré má sústava (31) celočíselné riešenie (tj. čísla x, y, ktoré vyhovujú sústave (31), sú celé).

b) Pre ktoré hodnoty p sú čísla x, y vyhovujúce sústave prirodzené?

Riešenie. a) Nech usporiadaná dvojica čísel (x, y) vyhovuje sústave (31). Potom odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme

$$9x = p^2(p - 1)\,. \tag{32}$$

Číslo x vyhovujúce rovnici (32) bude celé len vtedy, keď nastane jeden z týchto prípadov: I. $p - 1 = 9k$, II. $p = 3k$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

I. Ak $p = 9k + 1$, potom z (32) máme

$$x = (9k + 1)^2 k \tag{33}$$

a z prvej rovnice sústavy (31)

$$y = (9k + 1)^2 (1 - k) . \tag{34}$$

Vzťahmi (33), (34) je určené celočíselné riešenie sústavy (31), ale y zo (34) nemôže byť pre žiadne prirodzené k prirodzeným číslom.

II. Ak $p = 3k$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo, potom z (32) a prvej rovnice (31) máme

$$x = k^2(3k - 1) , \qquad y = k^2(10 - 3k) . \tag{35}$$

Čísla x, y z (35) vyhovujú sústave (31) a pre každé prirodzené k sú celé.

Záver. Sústava (31) má celočíselné riešenie práve vtedy, keď buď $p = 9k + 1$, alebo $p = 3k$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

b) V prípade I nemôžu byť čísla (x, y) vyhovujúce sústave (31) obe prirodzené.

V prípade II budú x, y prirodzenými číslami práve vtedy, keď súčasne platí

$$3k - 1 > 0 , \qquad 10 - 3k > 0 . \tag{36}$$

Prvá z nerovností (36) je splnená pre každé prirodzené číslo k, zatiaľ čo druhá platí pre $k < \frac{10}{3}$ čiže pre $k = 1, 2, 3$.

Záver. Sústava (31) má riešenie v prirodzených číslach len pre $p = 3, 6, 9,$ a to:

$$p = 3 \Rightarrow x = 2, \quad y = 7;$$
$$p = 6 \Rightarrow x = 20, \quad y = 16;$$
$$p = 9 \Rightarrow x = 72, \quad y = 9.$$

KATEGORIE Z

Z–II–1

Vyjádřete mnohočlen $x^8 + x^4 + 1$ aspoň jedním způsobem jako součin

a) dvou mnohočlenů čtvrtého stupně,

b) čtyř mnohočlenů druhého stupně.

Řešení. Daný mnohočlen rozložíme podle známých vzorců z algebry takto:

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 =$$
$$= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) =$$
$$= (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2) =$$
$$= [(x^2 + 1)^2 - x^2][(x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{3})^2] =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1).$$

Odpověď. a) $x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1),$

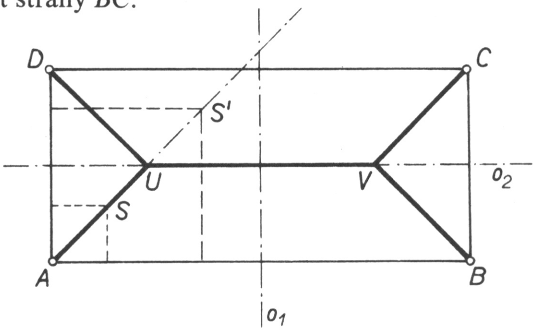
b) $x^8 + x^4 + 1 =$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1).$$

Z – II – 2

Je dán obdélník $ABCD$, v němž je $AB > BC$. Zvolte AB, BC a sestrojte geometrická místa středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se dvou jeho sousedních stran nebo dvou jeho protějších stran. Odůvodněte konstrukci.

Řešení (viz obr. 33). Označme a velikost strany AB a b velikost strany BC.



Obr. 33

a) Hledejme množinu $\mathbf{M}_1$ středů všech kružnic, které se dotýkají stran AD a BC a leží uvnitř obdélníku $ABCD$. Každá kružnice, jež se dotýká zároveň přímek AD a BC, má poloměr $\frac{1}{2}a$ a leží na ose o_1 stran AB a CD. Každá taková kružnice tedy vytíná na přímce o_1 tětivu délky a. Avšak $a > b$, a proto je $\mathbf{M}_1$ prázdná množina.

b) Hledejme množinu $\mathbf{M}_2$ středů všech kružnic, které se dotýkají stran AB a CD a leží uvnitř obdélníku $ABCD$. Každá kružnice, která se dotýká přímek AB a CD, má poloměr $\frac{1}{2}b$ a její střed leží na ose o_2 stran AD a BC.

Označme U vnitřní bod obdélníku $ABCD$, jenž leží na přímce o_2 a jehož vzdálenost od AD je rovna $\frac{1}{2}b$. Obdobně V je bod, který leží uvnitř obdélníku $ABCD$ na přímce o_2 a jehož vzdálenost od BC je $\frac{1}{2}b$. Zřejmě každý bod úsečky UV je středem kružnice o poloměru $\frac{1}{2}b$, která se dotýká stran AB a CD a leží v obdélníku $ABCD$. Vnější body úsečky UV na přímce o_2 tuto vlastnost nemají, neboť každá kružnice se středem v takovém bodu a mající poloměr $\frac{1}{2}b$ obsahuje aspoň jeden bod ležící vně rovnoběžkového pásu přímek AD a BC. Tedy množinou $\mathbf{M}_2$ je úsečka UV.

c) Hledejme množinu $\mathbf{M}_3$ středů všech kružnic, které leží v obdélníku $ABCD$ a dotýkají se jeho stran AB a AD. Úhel $\sphericalangle UAB = 45°$, a proto střed každé kružnice, jež se dotýká strany AB a strany AD, leží na polopřímce AU. Zřejmě $A \notin \mathbf{M}_3$ a $U \in \mathbf{M}_3$.

Nechť S je libovolný bod ležící mezi body A a U. Protože je $AS < AU$, je vzdálenost bodu S od strany AB menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice o středu S, jež se dotýká AB a AD, leží v daném obdélníku, tj. $S \in \mathbf{M}_3$.

Nechť S' je libovolný bod ležící na prodloužení úsečky AU za bod U. Pak $AS' > AU$, a proto vzdálenost bodu S' od přímky AB je větší než $\frac{1}{2}b$ a vzdálenost od přímky CD menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice se středem S', jež se dotýká přímek AB a AD, neleží v daném obdélníku, tj. $S' \notin \mathbf{M}_3$.

Množina $\mathbf{M}_3$ je tedy množinou všech bodů úsečky AU s výjimkou bodu A.

Z odstavců a), b) a c) plyne následující *závěr*:

Hledané geometrické místo bodů se skládá z úsečky UV a ze všech vnitřních bodů úseček AU, DU, BV, CV.

Z – II – 3

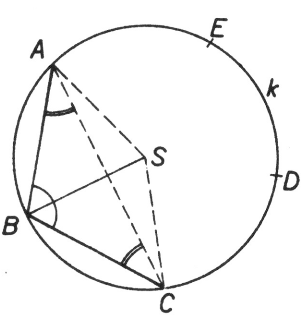
Po kružnici $k(S, r)$ se pohybují dva body X a Y rovnoměrným pohybem v navzájem opačných smyslech, rychlostmi v a qv, kde $q > 1$. Označme A, B a C body jejich tří bezprostředně po sobě jdoucích setkání.

a) Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ pro $q = 4$.

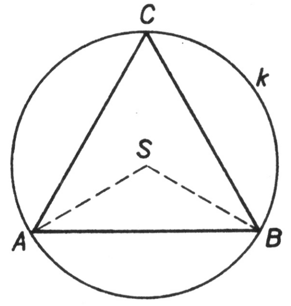
b) Určete q tak, aby $\triangle ABC$ byl α) rovnostranný, β) pravoúhlý.

Řešení. a) Kratší z oblouků AB je čtyřikrát menší než delší oblouk AB, má tedy délku $\frac{2}{5}\pi r$. Tutéž délku má i kratší z oblouků CD, neboť body X a Y se pohybují rovnoměrně. Body A, B, C jsou tedy vrcholy pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici k a $\sphericalangle ABC$ je jeho vnitřním úhlem (viz obr. 34). Platí: $\sphericalangle ABC = 2 . \sphericalangle ABS = 180° - \sphericalangle ASB = 180° - 72° = 108°$. Velikost ostatních vnitřních úhlů rovnoramenného $\triangle ABC$ určíme již takto:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \tfrac{1}{2}(180° - 108°) = 36° .$$

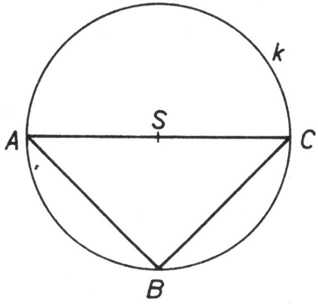


Obr. 34



Obr. 35

b) α) (viz obr. 35) $\triangle ABC$ je rovnostranný, *právě když* $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = 120°$. Mezi dvěma sousedními setkáními opíše bod X tedy třetinu kružnice, bod Y dvě třetiny kružnice. To nastane, *právě když* $q = 2$.



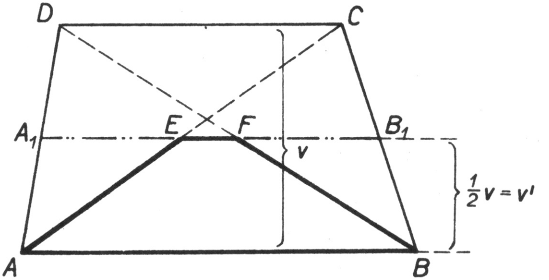
Obr. 36

b) β) (viz obr. 36). Jestliže $\triangle ABC$ je pravoúhlý, pak úsečka AC je průměrem kružnice k. Od prvního do třetího setkání opíše tedy bod X půlkružnici. Protože jeho rychlost je konstantní, opíše bod X mezi dvěma sousedními setkáními čtvrtkružnici. Z toho plyne, že bod Y opíše v této době tři čtvrtiny kružnice. Proto je nutně $q = 3$. Tím jsme našli číslo, které je „podezřelé" z toho, že vyhovuje naší úloze. Že tomu tak skutečně je, musíme dokázat.

Uvažujme tedy *obráceně*: Nechť $q = 3$. To znamená, že bod Y má třikrát větší rychlost než bod X. Mezi dvěma sousedními setkáními opíše tedy bod X čtvrtkružnici. Oblouk AC je pak půlkružnice, což znamená, že $\triangle ABC$ je pravoúhlý.

Z–II–4

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami $AB = 14$ cm, $CD = 10$ cm. Jeho úhlopříčky AC, BD protínají střední příčku po řadě v bodech E, F. Vypočtěte podíl obsahů lichoběžníků $ABCD$, $ABEF$. Zobecněte pro $AB = a$, $CD = c$.



Obr. 37

Řešení (viz obr. 37). Označme a velikost strany AB, c velikost strany CD a v výšku daného lichoběžníku. Pak obsah lichoběžníku $ABCD$ je

$$P_1 = \tfrac{1}{2}v(a + c).$$

Z toho, že $AB \parallel EF$ a že průsečík S úhlopříček AC a BD leží uvnitř poloroviny EFC, plyne, že $ABFE$ je lichoběžník se základnami $AB = a$ a EF. Jeho výška je

$$v' = \tfrac{1}{2}v.$$

Označme A_1 střed ramena AD a B_1 střed ramena BC. Pak A_1E je střední příčka v $\triangle DCA$, a tedy $A_1E = \tfrac{1}{2}c$.

Obdobně zjistíme, že $B_1F = \frac{1}{2}c$. Tudíž

$$c' = EF = A_1B_1 - 2 \,.\, \tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}(a + c) - c = \tfrac{1}{2}(a - c)\,.$$

Pro obsah lichoběžníku $ABFE$ tedy dostáváme:

$$P_2 = \tfrac{1}{2}v'(a + c') = \tfrac{1}{4}v[\tfrac{1}{2}(a - c) + a] = \tfrac{1}{8}v(3a - c)\,.$$

Nyní už můžeme určit, kolikrát je obsah P_1 větší než obsah P_2. Platí:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4(a + c)}{3a - c},$$

tj. v našem případě, kdy $a : c = 7 : 5$, je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4(a + \frac{5}{7}a)}{3a - \frac{5}{7}a} = \frac{4 \,.\, (14 + 10)}{3 \,.\, 14 - 10} = 3\,.$$

Závěr. a) Obsah lichoběžníku $ABCD$ je třikrát větší než obsah čtyřúhelníku $ABFE$.

b) Obecně: Jsou-li základny lichoběžníku $a > c$, pak

$$P_1 = P_2 \frac{4(a + c)}{3a - c}\,.$$