23. ročník matematické olympiády

IV. Soutěžní úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 23. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976. pp. 163–205.

ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE A II. KOLA

A – II – 1a

Je dán libovolný trojúhelník ABC. Pro libovolný bod X roviny ABC označme $d(X)$ největší ze vzdáleností AX, BX, CX. Najděte takový bod X_0, pro nějž je $d(X_0)$ minimální.

ŘEŠENÍ

PRVNÍ ZPŮSOB. Dokážeme nejprve tuto pomocnou větu:

Je-li $A_1A_2A_3$ ostroúhlý trojúhelník a S jeho vnitřní bod, pak S je jediný bod průniku kruhů $\mathscr{K}_1 \cap \mathscr{K}_2 \cap \mathscr{K}_3$, kde kruh $\mathscr{K}_i$ má střed A_i a poloměr A_iS, $i = 1, 2, 3$.

Důkaz. Vnitřní bod X trojúhelníku lze charakterizovat např. tím, že každá otevřená polopřímka z X vycházející protne hranici trojúhelníku.

Předpokládejme, že bod $X \neq S$ je bodem průniku $\mathscr{K}_1 \cap \mathscr{K}_2 \cap \mathscr{K}_3$. Protože S je hraničním bodem kruhu $\mathscr{K}_1$ a X dalším bodem kruhu $\mathscr{K}_1$, je úhel A_1SX ostrý. Svírá tedy polopřímka SX ostrý úhel s polopřímkou SA_1 a obdobně s polopřímkou SA_2 i SA_3.

Označme σ^+ uzavřenou polorovinu obsahující bod X takovou, že její hranice prochází bodem S a je kolmá k SX. Podle předchozího leží všechny tři vrcholy A_i v σ^+, tedy celý trojúhelník $A_1A_2A_3$ leží v σ^+. Proto nemůže mít otevřená polopřímka opačná k polopřímce SX společný bod s hranicí trojúhelníka $A_1A_2A_3$, což odporuje charakterizaci vnitřního bodu uvedené na začátku důkazu.

Nyní přejdeme k vlastnímu řešení úlohy. Budeme rozlišovat dva případy:

A. Trojúhelník ABC je ostroúhlý.

Ukážeme, že pak o středu X_0 kružnice opsané trojúhelníku ABC platí, že $d(X_0) < d(X)$ pro každý bod $X \neq X_0$:

Jak známo, v případě ostroúhlého trojúhelníka je X_0 vnitřní bod tohoto trojúhelníka. Je-li nyní bod X různý od X_0, pak X není podle uvedené pomocné věty obsažen v alespoň jednom z tří kruhů o středech A, B a C a stejných poloměrech $d(X_0)$. Tedy $d(X)$ je větší než $d(X_0)$.

V tomto případě je tedy jediný bod X_0 s minimálním $d(X_0)$, a to střed kružnice danému trojúhelníku opsané.

B. Trojúhelník ABC není ostroúhlý. Ukážeme, že střed X_0 nejdelší strany trojúhelníka má vlastnost, že $d(X_0) < d(X)$ pro každý bod $X \neq X_0$. Můžeme předpokládat, že označení je zvoleno tak, že AB je nejdelší strana, takže X_0 je střed úsečky AB a $d(X_0) = \frac{1}{2}AB$. Je-li $X \neq X_0$, je zřejmě

$$d(X) \geqq XA\,, \qquad d(X) \geqq XB\,,$$

tedy také

$$d(X) \geqq \tfrac{1}{2}(XA + XB) \geqq \tfrac{1}{2}AB = d(X_0).$$

Přitom $d(X)$ se nemůže rovnat $d(X_0)$, neboť pak by $d(X) = XA$, $d(X) = XB$, a také

$$XA + XB = AB,$$

tj. bod X by splynul s X_0.

V tomto případě je tedy střed nejdelší strany trojúhelníka jediným bodem X_0, pro který je $d(X_0)$ minimální.

Úloha je rozřešena.

DRUHÝ ZPŮSOB. Číslo $d(X)$ je zřejmě poloměr nejmenšího kruhu se středem X, který obsahuje celý trojúhelník ABC. Nejmenší kruh vůbec obsahující celý trojúhelník ABC má proto střed X_0, pro který je $d(X_0)$ minimální.

Z názoru je patrné, že takový nejmenší kruh existuje (dokázat to přesahuje možnosti tohoto řešení). Označme $\mathscr{K}$ tento kruh, X_0 jeho střed a K hraniční kružnici kruhu $\mathscr{K}$. Kružnice K zřejmě prochází alespoň jedním z vrcholů A, B, C, např. bodem A. Kdyby neprocházela ani B, ani C, pak malou změnou bodu X_0 do nového bodu X_1 na úsečce X_0A bychom dosáhli toho, že $d(X_1) = AX_1 < AX_0 = d(X_0)$, což odporuje minimálnosti $d(X_0)$. Tedy K prochází alespoň dvěma z vrcholů A, B, C, např. A a B. Pak X_0 leží na ose strany AB. Označme S střed úsečky AB. Je-li $X_0 \neq S$ a neprochází-li K bodem C, lze $d(X_0)$ opět změnit malým posunutím X_0 na úsečce X_0S.

Jsou tedy dvě možnosti:

Buď je $X_0 = S$, takže K je Thaletova kružnice s průměrem

AB, a pak $\sphericalangle ACB \geqq 90°$, anebo je $X_0 \neq S$, a kružnice K je opsaná kružnice trojúhelníku ABC. V tomto případě je ABC ostroúhlý trojúhelník, neboť jinak lze opět $d(X_0)$ zmenšit.

Závěr. Je-li ABC ostroúhlý trojúhelník, je bod X_0 střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Je-li ABC pravoúhlý nebo tupoúhlý, pak X_0 je střed nejdelší strany trojúhelníka ABC.

A – II – 1b

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, x, y platí

$$|a \sin x + b \sin y| \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(x + y)}\,.$$

Kdy nastane rovnost?

ŘEŠENÍ

Položme $A = a \sin x + b \sin y$, $B = a \cos x - b \cos y$; bude potom

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(x + y)\,.$$

Poněvadž zřejmě $B^2 \geqq 0$, je $A^2 \leqq A^2 + B^2$, a tedy také

$$|A| \leqq \sqrt{A^2 + B^2}\,,$$

což je právě dokazovaná nerovnost.

Rovnost zde nastane, právě když je $B = 0$, tzn. když

$$a \cos x = b \cos y\,.$$

A – II – 2a

Dokážte, že pre všetky prirodzené n platí

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

ŘEŠENÍ

Zřejmě platí pro každé přirozené číslo k:

$$\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4k^2 + 4k + 1} < \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{4k+4},$$

a tedy

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} <$$

$$< \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{4n-4} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+4}.$$

Snadnou úpravou dostaneme

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} < \frac{1}{4},$$

což jsme měli dokázat.

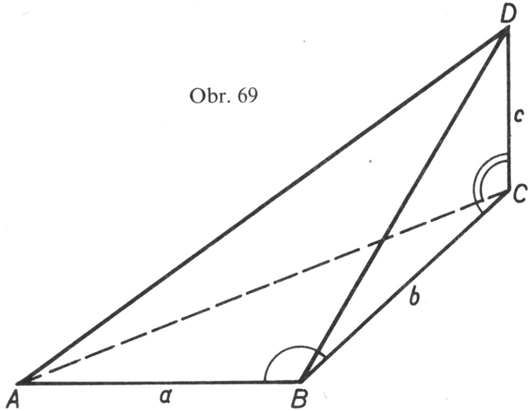
Je dán čtyřstěn $ABCD$, jehož hrany AB, BC, CD jsou po dvou navzájem kolmé. Vyjádřete pomocí délek a, b, c hran AB, BC, CD poloměr r kulové plochy vepsané čtyřstěnu $ABCD$.

ŘEŠENÍ

Střed S kulové plochy čtyřstěnu vepsané je vnitřní bod čtyřstěnu. Proto je objem čtyřstěnu $ABCD$ roven součtu objemů čtyř čtyřstěnů $SABC$, $SABD$, $SACD$ a $SBCD$, které mají stejnou výšku z vrcholu S, rovnou poloměru r vepsané kulové plochy. O objemech platí (obr. 69):

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc$, neboť CD je výška čtyřstěnu ke stěně ABC, která je pravoúhlý trojúhelník, dále

Obr. 69



$$V_{SABC} = \tfrac{1}{6}rab\,,$$

$$V_{SACD} = \tfrac{1}{6}rc\sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

$$V_{SBCD} = \tfrac{1}{6}rbc\,,$$

a konečně

$$V_{SABD} = \tfrac{1}{6}ra\sqrt{b^2 + c^2}\,,$$

neboť hrana AB je kolmá ke dvěma přímkám BC, CD roviny BCD, tedy i k přímce BD, a trojúhelník ABD je proto pravoúhlý.

Celkem dostáváme

$$\tfrac{1}{6}abc = \tfrac{1}{6}rab + \tfrac{1}{6}rc\sqrt{a^2 + b^2} + \tfrac{1}{6}rbc + \tfrac{1}{6}ra\sqrt{b^2 + c^2}\,,$$

odkud

$$r = \frac{abc}{a\left(b + \sqrt{b^2 + c^2}\right) + c\left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\,.$$

A – II – 3a

V téže rovině leží kružnice $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geqq 1)$.

a) Najděte vzorec pro největší možný počet a_n oblastí, na které tyto kružnice rozdělí rovinu. Popište konstrukci n kružnic, které rozdělí rovinu na tento počet a_n oblastí. Jaký má odvozený výsledek význam pro Vennovy diagramy?

b) Budiž $n = 4$; popíšeme symbolem (1010) každou z oblastí, která leží uvnitř k_1, k_3 a vně k_2, k_4, symbolem (0100) každou z oblastí, která leží uvnitř k_2 a vně k_1, k_3, k_4 a obdobně dále. Ukažte, že je možné zvolit kružnice tak, že dělí rovinu na a_4 oblastí a každá z nich má jiný popis. Narýsujte obrázek.

ŘEŠENÍ

a) Pro a_n platí rekurentní vzorec

$$a_n = a_{n-1} + 2(n - 1). \qquad (1)$$

Neboť zvolíme-li n-tou kružnici tak, aby protínala každou z předchozích $n - 1$ kružnic ve dvou bodech, dostaneme na ní maximální počet, tj. $2(n - 1)$ průsečíků. Tím vznikne na k_n $2(n - 1)$ oblouků, z nichž každý rozdělí některou z předchozích a_{n-1} oblastí na dvě. Vzhledem k tomu, že je $a_1 = 2$, je podle (1)

$$a_n = 2 + 2(1 + 2 + \ldots + n - 1),$$

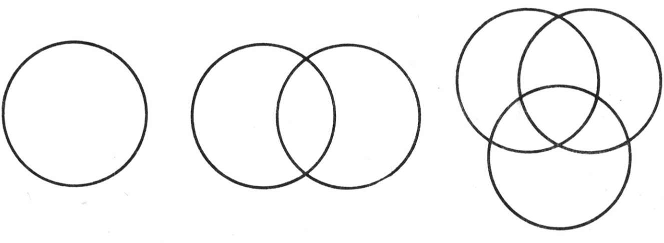
po úpravě

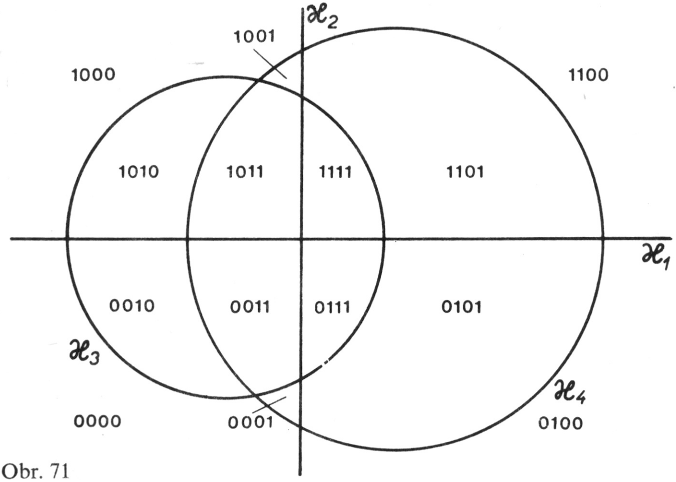
$$a_n = n^2 - n + 2. \qquad (2)$$

Pro $n \geqq 4$ je $a_n < 2^n$, proto pro znázornění všech průniků n množin a jejich doplňků nemůžeme kreslit kruhové Vennovy diagramy. Pro $n = 1, 2, 3$ jsou kruhové Vennovy diagramy známé obrazce; viz obr. 70.

Zbývá dokázat, že pro každé $n > 3$ je maximální počet oblastí a_n dosažitelný při vhodné volbě kružnic $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Obr. 70





Obr. 71

Dokážeme indukcí **lemma**: *V rovině lze sestrojit pro každé $n \geqq 2$ n kružnic tak, že průnik všech jejich vnitřků je neprázdný a že každé dvě se protínají ve dvou bodech.*

Předpokládejme, že věta platí pro $n - 1$. V průniku $\mathscr{P}$ všech vnitřků kružnic $k_1, \ldots, k_{n-1}$, zvolme bod A, vně všech kružnic zvolme bod B. Body A, B veďme takovou kružnicí k_n, aby neprocházela žádným z průsečíků kružnic $k_1, \ldots, k_{n-1}$. Kružnice k_n zřejmě protne každou z kružnic $k_1, \ldots, k_{n-1}$ ve dvou bodech a průnik jejího vnitřku s množinou $\mathscr{P}$ je neprázdný. Protože lemma platí pro $n = 2$, je dokázáno.

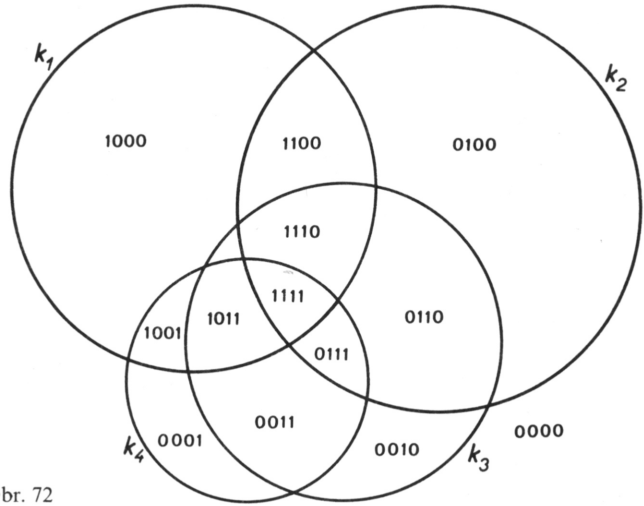
b) V rovině sestrojme situaci podle obr. 71; každou z oblastí, na něž rozdělí přímky $\varkappa_1, \varkappa_2$ a kružnice $\varkappa_3, \varkappa_4$ rovinu, popišme podle obdobné úmluvy, jaká je v textu b) – závorky jsou vynechány.

Na obr. 71 je 14 různých popisů ze 16 možných; chybějí jen 0110 a 1110.

Promítneme situaci z obr. 71 na kulovou plochu Γ z některého jejího bodu (stereograficky), dostaneme na kulové ploše Γ 4 kružnice $\varkappa'_1, \varkappa'_2, \varkappa'_3, \varkappa'_4$, které tam omezí 14 oblastí s vesměs různými popisy. Promítneme-li do roviny kružnice $\varkappa'_1, \varkappa'_2, \varkappa'_3, \varkappa'_4$ z bodu kulové plochy Γ, který neleží na žádné z těchto kružnic, dostaneme kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 žádané vlastnosti. Situace je na obr. 72.

A – II – 3b

V rovině je dáno $3n$ bodů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{3n}$ $(n \geqq 1)$, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Potom je možno



Obr. 72

sestrojit n trojúhelníků, z nichž žádné dva nemají společný bod a takových, že všechny vrcholy těchto trojúhelníků leží v bodech A_i. Dokažte.

ŘEŠENÍ

Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení je už dokázáno pro některé přirozené číslo n a uvažujme $3n + 3$ body $A_1, A_2, \ldots, A_{3n+3}$, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Sestrojme nejmenší vypuklý mnohoúhelník, který obsahuje všechny body A_i $(i = 1, 2, \ldots, 3n + 3)$. Dejme tomu, že tento vypuklý mnohoúhelník, jemuž se též říká *konvexní obal* uvedené množiny bodů, má k vrcholů, jež bez újmy obecnosti lze po řadě označit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$. Úsečka A_1A_3 je pro $k > 3$ úhlopříčkou mnohoúhelníka, pro $k = 3$ je to jeho strana. Všimněme si trojúhelníka $A_1A_2A_3$ a rozlišujme dva případy.

První případ je ten, že uvnitř trojúhelníka $A_1A_2A_3$ neleží žádný bod A_i (pro $i = k + 1, k + 2, \ldots, 3n + 3$). Pak přímka A_1A_3 rozdělí rovinu na dvě poloroviny tak, že uvnitř jedné leží bod A_2, uvnitř druhé je $3n$ bodů $A_4, A_5, \ldots, A_{3n+3}$. Podle indukčního předpokladu lze ve druhé polorovině sestrojit n trojúhelníků, jež splňují požadavky úlohy. Připojíme-li k nim ještě trojúhelník $A_1A_2A_3$, je tím sestrojen $n + 1$ trojúhelník a druhý indukční krok je hotov.

Ve *druhém případě* připusťme, že uvnitř trojúhelníka $A_1A_2A_3$ leží některé body A_i (pro $i = k + 1, k + 2, \ldots, 3n + 3$). Sestrojme úhly $A_iA_1A_2$ a vyberme z nich ten, který má nejmenší velikost. Označme tento bod bez újmy obecnosti A_{k+1}.

Bod A_{k+1} je určen jednoznačně, neboť žádné tři body A_i neleží v jedné přímce. Nyní přímka A_1A_{k+1} oddělí bod A_2 od zbývajících $3n$ bodů A_i. Podle indukčního předpokladu sestrojíme tedy v jedné polorovině n trojúhelníků požadovaných vlastností a připojíme k nim ještě trojúhelník $A_1A_2A_{k+1}$. Tím je důkaz podán.

B – II – 1a

V rovine je daná úsečka AB a bod M, ktorý na nej neleží. Nech p, q sú ľubovoľné dve priamky týchto vlastností:

1. $A \in p$, $B \in q$;
2. žiadna z nich neobsahuje úsečku AB ani bod M;
3. $p \perp q$.

Nech P, Q sú v uvedenom poradí päty kolmíc z bodu M na priamky p, q. Určite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov MPQ.

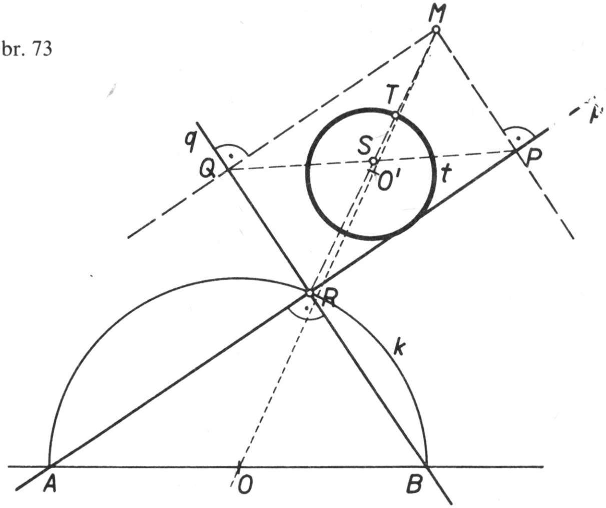
ŘEŠENÍ

Průsečík přímek p a q označme R. Poněvadž $p \perp q$, leží body R na Thaletově kružnici k s průměrem AB (obr. 73).

Trojúhelník PMQ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M, obrazec $MPRQ$ je obdélník. Středy všech takto vzniklých obdélníků leží na kružnici h, stejnolehlé s k podle středu M a koeficientu $\frac{1}{2}$. Poněvadž těžiště T trojúhelníků MPQ leží na úsečce SM a platí $MT = \frac{2}{3}MS = \frac{1}{3}RM$, plyne odtud, že množinou těžišť všech trojúhelníků PMQ je kružnice t, která je stejnolehlá s kružnicí k podle středu stejnolehlosti M a koeficientu stejnolehlosti $k = \frac{1}{3}$.

Je-li T' libovolný bod kružnice t, je tento bod těžištěm trojúhelníka, který sestrojíme takto:

Obr. 73



K bodu T' sestrojíme bod R' na přímce MT', aby $MR' = 3MT'$; bod R' leží zřejmě na kružnici k. Na přímkách AR' a BR' sestrojíme paty P', Q' kolmic z bodu M na tyto přímky. Trojúhelník $MP'Q'$ má své těžiště bod T'.

Je tudíž kružnice t hledanou množinou bodů, těžišť všech trojúhelníků, které splňují podmínky úlohy.

B – II – 1b

Zistite, pre ktoré dvojice reálnych čísel x, y z intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ je splnená nerovnosť:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x + y) + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(x + y) \geqq 2\,.$$

Výsledok znázornite graficky v pravouhlom súradnicovom systéme. Pre ktoré dvojice reálnych čísel x, y z daného intervalu platí rovnosť?

RIEŠENIE

Daná nerovnosť nie je definovaná pre tie dvojice x, y, pre ktoré je $y = -x + k\pi$, kde k je celé číslo, pretože funkcia tangens nie je definovaná pre uhly, ktoré sú nepárnym násobkom $\frac{1}{2}\pi$, teda v našom prípade pre $y = -x + (2k + 1)\pi$, kde k je celé číslo, a funkcia kotangens nie je definovaná pre uhly, ktoré sú párnym násobkom čísla $\frac{1}{2}\pi$, teda pre $y = -x + 2k\pi$. Spojením definičných oborov jednotlivých funkcií dostávame definičný obor celej nerovnosti. Danému intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ čísel x, y zodpovedajú tie k, pre ktoré je $|k| \leqq 4$. Danú nerovnosť môžeme písať aj v tvare:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(x + y)}{\cos \frac{1}{2}(x + y)} + \frac{\cos \frac{1}{2}(x + y)}{\sin \frac{1}{2}(x + y)} \geqq 2 .$$

Po jednoduchej úprave dostaneme

$$\frac{[\sin \frac{1}{2}(x + y) - \cos \frac{1}{2}(x + y)]^2}{\sin \frac{1}{2}(x + y) . \cos \frac{1}{2}(x + y)} \geqq 0 .$$

Daná nerovnosť je teda splnená pre všetky dvojice x, y, pre ktoré je:

$$\sin \tfrac{1}{2}(x + y) . \cos \tfrac{1}{2}(x + y) > 0 .$$

Keďže je $\sin\frac{1}{2}(x+y) \,.\, \cos\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}\sin(x+y)$, stačí zistiť, kedy je $\sin(x+y) > 0$. Tak tomu je pre všetky dvojice reálnych čísel, pre ktoré platí:

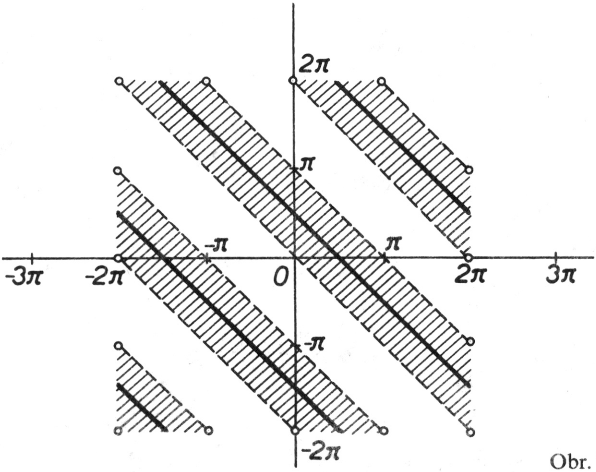
$$2k\pi < x + y < 2k\pi + \pi\,.$$

Odtiaľ je:

$$-x + 2k\pi < y < -x + (2k+1)\pi\,.$$

Ľahko sa presvedčíme, že danému intervalu vyhovujú tieto čísla k: $-2, -1, 0, 1$. Grafickým znázornením nerovností dostávame 4 pásy štvorca (vyšrafované), do ktorých spadajú dvojice čísel x, y, pre ktoré je daná nerovnosť splnená (obr. 74).

Je zrejmé, že rovnosť nastane vtedy, ak $\sin\frac{1}{2}(x+y) = \cos\frac{1}{2}(x+y)$. Použitím vety o doplnkových uhloch



Obr. 74

a vlastnosti periodicity funkcie sinus je: $\sin\frac{1}{2}(x+y) = \sin\left[2k\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(x+y)\right]$. To znamená, že $\frac{1}{2}(x+y) = 2k\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(x+y)$. Odtiaľ je $y = -x + 2k\pi + \frac{1}{2}\pi$. Pre daný štvorec je k: $1, 0, -1, -2$. Sú to stredy pásov (na grafe zvýraznené čiary). Ak dosadíme do pôvodnej rovnice za $y = -x + 2k\pi + \frac{1}{2}\pi$, dostaneme:

$$\operatorname{tg}\left(k\pi + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \operatorname{cotg}\left(k\pi + \tfrac{1}{4}\pi\right) = 2\,,$$

čo skutočne platí.

B – II – 2a

Je dán čtyřboký jehlan $V(ABCD)$ se čtvercovou podstavou $ABCD$ a na jeho hraně VC bod E; poměr délek $VE : VC$ nechť je q, $0 < q < 1$. Rovina ABE protne hranu VD v bodě F. Určete poměr objemů těles $VABEF$ a $AFDBEC$, na něž rovina ABE daný jehlan rozdělí.

ŘEŠENÍ

PRVNÍ ZPŮSOB. Označme a délku strany čtverce $ABCD$ a v výšku jehlanu $V(ABCD)$. Objem celého jehlanu je tedy $\frac{1}{3}a^2v$.

Poněvadž $AB \parallel CD$, je také $EF \parallel AB$, takže také $VF : VD = q$. Vzdálenost přímky EF od (rovnoběžné) roviny $ABCD$ je právě $(1-q)\,v$. Kromě toho je také $EF : CD = q$, a tedy $EF = aq$.

Nyní vypočteme objem tělesa $AFDBEC$. Bodem F vedeme rovinu rovnoběžnou s rovinou BEC; ta protne úsečku

AB v bodě G a úsečku CD v bodě H, přičemž $BG = CH = = EF = aq$. Těleso $BECGFH$ je tedy trojboký hranol; jeho objem je $\frac{1}{2}aaq(1-q)\,v = \frac{1}{2}a^2vq(1-q)$. Těleso $FAGHD$ je čtyřboký jehlan s objemem $\frac{1}{3}a(1-q)\,a(1-q)\,v = = \frac{1}{3}a^2v(1-q)^2$. Objem celého tělesa $AFDBEC$ dostaneme sečtením

$$\frac{1}{2}a^2vq(1-q) + \frac{1}{3}a^2v(1-q)^2 = \frac{1}{6}a^2v(1-q)\,[3q + 2(1-q)] = \\ = \frac{1}{6}a^2v(1-q)\,(q+2)\,.$$

Odečtením od objemu $\frac{1}{3}a^2v$ celého daného jehlanu $V(ABCD)$ získáme objem jehlanu $V(ABEF)$:

$$\frac{1}{3}a^2v - \frac{1}{6}a^2v(1-q)\,(q+2) = \\ = \frac{1}{6}a^2v[2 - (1-q)\,(q+2)] = \frac{1}{6}a^2vq(1+q)\,.$$

Hledaný poměr objemů těles $VABEF$ a $AFDBEC$ je tedy

$$\frac{\frac{1}{6}a^2vq(1+q)}{\frac{1}{6}a^2v(1-q)\,(q+2)} = \frac{q(1+q)}{(1-q)\,(2+q)}\,.$$

DRUHÝ ZPŮSOB. Uveďme ještě stručně jiné řešení založené na využití *Cavalieriho principu*, resp. na výpočtu objemu tělesa „rozřezáním na tenké hranolky".

Označme opět v výšku daného jehlanu a a délku strany čtverce $ABCD$. Jehlan protneme rovinou ϱ rovnoběžnou s podstavou; vzdálenost ϱ od V nechť je hv, $0 < h < 1$. Rovina ϱ protne jehlan ve čtverci o straně ah. Je-li $h < q$, rovina ϱ neprotne těleso $AFDBEC$. Je-li $h > q$, protne ϱ

těleso $AFDBEC$ v obdélníku o stranách ah, $a\dfrac{h-q}{1-q}$.

Nyní následuje ono „rozřezání tělesa $AFDBEC$ na tenké hranolky", což není nic jiného nežli vyjádření objemu tělesa $AFDBEC$ integrálem

$$\int_q^1 ah\, a\frac{h-q}{1-q}\, v\, \mathrm{d}h\,.$$

Snadným výpočtem zjistíme výsledek

$$\tfrac{1}{6}a^2v(1-q)(2+q)\,.$$

Další postup je stejný jako v původním řešení.

B – II – 2b

Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$x^2 + (a+1)x + a = \operatorname{sign}\left[x^2 + (a+1)x\right] \qquad (1)$$

o neznámé x, přičemž a je reálný parametr. Proveďte diskusi.

ŘEŠENÍ

V dané rovnici se vyskytuje funkce signum, a proto je třeba rozlišit tři případy.

1. Jestliže

$$x^2 + (a+1)x = 0\,, \qquad (2)$$

pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + (a+1)x + a = 0\,. \qquad (3)$$

Soustava rovnic (2) a (3) může mít zřejmě řešení jen tehdy, je-li

$$a = 0\,.$$

V tomto případě řešení existuje. Kořeny jsou 0 a -1.

2. Jestliže

$$x^2 + (a + 1)\,x > 0\,, \tag{4}$$

pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + (a + 1)\,x + (a - 1) = 0\,. \tag{5}$$

Soustava tvořená nerovnicí (4) a rovnicí (5) je zřejmě ekvivalentní s rovnicí (5) doplněnou podmínkou

$$a - 1 < 0\,. \tag{6}$$

Rovnice (5) má řešení v oboru reálných čísel, právě když

$$D = (a + 1)^2 - 4(a - 1) \geqq 0\,,$$

což pro každé a splňující podmínku (6) platí. (Dokonce pro každé číslo a platí $D \geqq 0$, neboť $D = (a - 1)^2 + 4$.) Tedy pro $a < 1$ má rovnice (1) kořeny

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left[-(a + 1) \pm \sqrt{(a - 1)^2 + 4}\right].$$

3. Jestliže

$$x^2 + (a + 1)\,x < 0\,, \tag{7}$$

pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$x^2 + (a + 1)\,x + (a + 1) = 0\,. \tag{8}$$

Soustava tvořená nerovnicí (7) a rovnicí (8) je ekvivalentní s rovnicí (8) doplněnou podmínkou

$$a + 1 > 0\,. \tag{9}$$

Rovnice (8) má řešení v oboru reálných čísel, právě když

$$D' = (a + 1)^2 - 4(a + 1) \geqq 0\,,$$

tj.

$$(a + 1)(a - 3) \geqq 0\,,$$

což vzhledem k tomu, že platí (9), nastane, právě když

$$a - 3 \geqq 0\,. \tag{10}$$

Podmínky (9) a (10) jsou splněny, právě když platí nerovnost (10). Pro $a \geqq 3$ má rovnice (1) kořeny

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left[-(a + 1) \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}\right].$$

Všechny možnosti pro řešení rovnice (1) v oboru reálných čísel jsou zachyceny v následující tabulce:

Parametr a	Kořeny
$(-\infty, 1)$	$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-(a + 1) \pm \sqrt{(a - 1)^2 + 4}\right]$
$\langle 1, 0)$	neexistují
0	$x_1 = 0,\ x_2 = -1$
$(0, 3)$	neexistují
3	$x_{1,2} = -2$
$(3, \infty)$	$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-(a + 1) \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}\right]$.

B – II – 3a

Je dána kružnice k a přirozené číslo n. Zjistěte největší a nejmenší počet částí, na které lze vnitřek kružnice k rozdělit n tětivami.

ŘEŠENÍ

Největší počet dílů vznikne, když se každé dvě tětivy budou protínat uvnitř kruhu, nejmenší počet částí pak vznikne, když tětivy nemají uvnitř kruhu žádný společný bod.

1. Označme a_n nejmenší počet částí vnitřku kružnice k, které lze určit n tětivami $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Zřejmě $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ atd. $(n + 1)$-ní tětivu musíme vést tak, aby neprotla žádnou z tětiv $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$. Ta pak rozdělí jedinou z existujících částí na dvě, takže platí:

$$a_{n+1} = a_n + 1 \tag{1}$$

pro každé přirozené n. Podle (1) určíme snadno a_n jako funkci n:

$$a_n = a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 1 + 1 = a_{n-2} + 2 =$$
$$= a_{n-(n-1)} + n - 1 = a_1 + n - 1 .$$

Avšak $a_1 = 2$, takže

$$a_n = n + 1 . \tag{2}$$

2. Označme b_n největší počet částí vnitřku kružnice k, kterého lze dosáhnout n tětivami $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Zřejmě $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ atd. $(n + 1)$-ní tětivu t_{n+1} musíme vést tak, aby protla každou z tětiv $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Je pak jimi rozdělena na $n + 1$ úseček. Každá z nich rozděluje některou z existujících částí na dvě, takže přibylo $n + 1$ částí. Platí tedy

$$b_{n+1} = b_n + n + 1\,, \tag{3}$$

pro každé $n \geqq 1$.

Stejným postupem jako v odst. 1 vypočteme b_n:

$$b_n = b_{n-1} + n$$

$$b_n = b_{n-2} + 2n - 1$$

$$b_n = b_{n-n+1} + (n-1)\,n - (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2))$$

$$b_n = b_1 + (n-1)\,n - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$b_n = 2 + \tfrac{1}{2}(n-1)(n+2) \tag{4}$$

Tento vztah můžeme ještě dále upravit na konečný tvar:

$$b_n = \tfrac{1}{2}n(n+1) + 1\,. \tag{4'}$$

B – II – 3b

Nechť $\mathscr{M} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ je množina bodů v prostoru taková, že $X_iX_k \leqq 1$ pro všechna $i, k = 1, 2, \ldots, n$, přičemž $X_1X_2 = 1$.

Dokažte:

a) Existuje kvádr, jehož všechny hrany mají délku nejvýše rovnou 1 a který obsahuje množinu $\mathscr{M}$.

b) Každý kvádr, který obsahuje množinu $\mathscr{M}$, má aspoň jednu hranu délky větší než 0,57.

a) Množina $\mathcal{M}$ má následující vlastnost: Zvolíme-li libovolnou rovinu ϱ, pak existuje rovinová vrstva s hraničními rovinami rovnoběžnými s rovinou ϱ a o výšce nejvýše 1, která obsahuje množinu $\mathcal{M}$.

Důkaz. Nechť ϱ je libovolná rovina. V množině $\mathcal{M}$ zvolme libovolný bod, např. X_1. Veďme bodem X_1 rovinu ϱ_1 rovnoběžnou s rovinou ϱ. Rovina ϱ_1 pak určuje dva poloprostory. Body ležící v rovině ϱ_1 považujeme za body patřící do každého z těchto poloprostorů. Nechť $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{M}''$ jsou po řadě množiny všech bodů z množiny $\mathcal{M}$, které leží v jednom a ve druhém z uvažovaných poloprostorů. Množiny $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{M}''$ jsou neprázdné, neboť $X_1 \in \mathcal{M}'$ a $X_1 \in \mathcal{M}''$. V každé z množin $\mathcal{M}'$ a $\mathcal{M}''$ nalezneme bod, který má od roviny ϱ_1 maximální vzdálenost. Nechť v množině $\mathcal{M}'$ je takovým bodem bod X_j a v množině $\mathcal{M}''$ bod X_k. Nyní rozlišme dvě možnosti.

α) Nechť $X_j \in \varrho_1$ a $X_k \in \varrho_1$. Pak zřejmě $\mathcal{M} \subset \varrho_1$. Tudíž $\mathcal{M}$ leží v rovinové vrstvě s hraničními rovinami ϱ_1 a ϱ', kde $\varrho' \parallel \varrho$ a vzdálenost rovin ϱ' a ϱ_1 je 1.

β) Nechť $X_j \notin \varrho_1$ nebo $X_k \notin \varrho_1$. Pak roviny ϱ_j a ϱ_k, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ a procházejí po řadě body X_j a X_k, určují rovinovou vrstvu obsahující všechny body množiny $\mathcal{M}$. Protože $X_jX_k \leqq 1$, je výška rovinové vrstvy určené rovinami ϱ_j a ϱ_k menší nebo rovna 1.

Výše uvedená vlastnost množiny $\mathcal{M}$ je zcela dokázána.

Zvolme v prostoru tři roviny π, ν, μ, které jsou po dvou k sobě kolmé. Pak existují rovinové vrstvy obsahující množinu $\mathcal{M}$, jež mají hraniční roviny po řadě rovnoběžné s rovinami π, ν, μ a jejichž výšky jsou menší nebo rovné 1. Průnikem těchto tří rovinových vrstev je kvádr, jehož existenci jsme měli dokázat.

b) Toto tvrzení dokážeme nepřímo. Nechť existuje kvádr $\mathcal{K}$, který obsahuje množinu $\mathcal{M}$ a přitom žádná jeho hrana není větší než 0,57. Zvolme dva libovolné body U, V kvádru $\mathcal{K}$. Zvolme ortonormální soustavu souřadnic s počátkem v jednom z vrcholů kvádru $\mathcal{K}$. Každá z os souřadnic nechť obsahuje jednu hranu kvádru $\mathcal{K}$. Nechť

$$U \equiv [u_1, u_2, u_3], \qquad V \equiv [v_1, v_2, v_3].$$

Pak pro každé $i = 1, 2, 3$ je

$$|u_i - v_i| \leqq 0{,}57 .$$

Tudíž

$$UV = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (u_i - v_i)^2} \leqq \sqrt{3 \,.\, 0{,}57^2} ,$$

tj.

$$UV \leqq \sqrt{3 \,.\, 0{,}3249} < 1 .$$

Tedy v kvádru $\mathcal{K}$ neleží body X_1 a X_2, neboť $X_1X_2 = 1$. Dospěli jsme tedy ke sporu s předpokladem, že $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$. Tím je tvrzení b) dokázáno.

ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE C
II. KOLA

C – II – 1a

V rovině je dána konečná množina bodů, z nichž každé dva mají vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že existuje jednotkový čtverec, který danou množinu obsahuje.

ŘEŠENÍ

1. Je-li daná množina bodů prázdná, pak zřejmě dokazované tvrzení platí.

2. Nechť je daná množina bodů neprázdná. Každým bodem dané množiny vedeme přímky libovolného směru p a směru q k němu kolmého. Krajní přímky obou osnov označme p_1, p_2 a q_1, q_2. Vzdálenost přímek p_1, p_2 i přímek q_1, q_2 je nejvýš 1. Tyto čtyři přímky určují pravoúhelník (ve zvláštním případě úsečku nebo bod) o stranách délky $d \leqq 1$, takže zřejmě existuje jednotkový čtverec, který jej obsahuje.

C – II – 1b

Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c takových, že zároveň platí:

(1) $a^2 + b^2 = c^2$;

(2) číslo c je dělitelné číslem a i číslem b.

ŘEŠENÍ

Podle (2) existují taková dvě přirozená čísla m, n, že $c = ma$ a $c = nb$.

Dosadíme-li do (1) dostaneme

$$\frac{c^2}{m^2} + \frac{c^2}{n^2} = c^2 ,$$

z čehož vyplývá

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = 1 ,$$

a tedy

$$m^2(n^2 - 1) = n^2 .$$

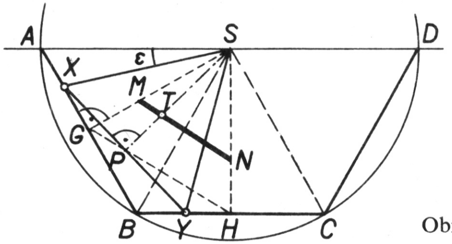
Tato rovnice však nemůže platit, neboť by muselo $(n^2 - 1)$ být dělitelem n^2, což je možné jen pro $n^2 = 2$ a tedy pro $n = \sqrt{2}$, což není přirozené číslo. Úloha tedy nemá řešení.

C – II – 2a

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S. Určete množinu těžišť všech rovnostranných trojúhelníků XSY, když bod X probíhá obvod daného šestiúhelníku.

ŘEŠENÍ

Těžiště $\triangle ASB$ je bod M, těžiště $\triangle BSC$ je bod N. Jestliže bod X proběhne úsečku AB a Y úsečku BC, pak těžiště uvažovaných trojúhelníků XSY vyplní úsečku MN. Úhly $\sphericalangle XGS$ a $\sphericalangle XPS$ jsou pravé a čtyřúhelník $XGPS$ je tětivový

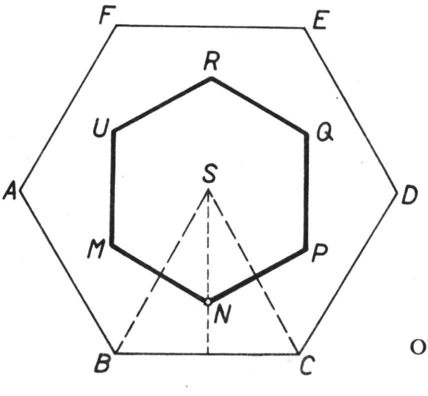


Obr. 75

a poněvadž $\sphericalangle XSP = 30°$, je $\sphericalangle XGP = 150°$ (označení viz obr. 75, 76). Odtud plyne, že středy stran XY leží na úsečce GH, která s úsečkou AB svírá úhel 30°.

Těžiště T trojúhelníku XYS pak odpovídá bodu P ve stejnolehlosti podle středu S a s koef. $\frac{2}{3}$. Poněvadž body P vyplňují úsečku GH, vyplňují body T úsečku MN, která je stejnolehlá k úsečce GH v uvedené stejnolehlosti.

Je-li obráceně T libovolný bod úsečky MN, snadno sestrojíme trojúhelník, mající v bodě T své těžiště. Nejprve určíme průsečík P přímky ST s úsečkou GH a v tomto



Obr. 76

bodě sestrojíme úsečku $XY \perp SP$ s krajními body na obvodě šestiúhelníku. Dokážeme, že $XY = XS = SY$.

Z tětivového čtyřúhelníku $XGPS$ plyne, že $\sphericalangle XSP = 180° - 150° = 30°$, z tětivového čtyřúhelníku $PSHY$ plyne, že $\sphericalangle PHY = 30° = \sphericalangle PSY$ (obvodové úhly nad týmž obloukem kružnice čtyřúhelníku opsané). Z vlastnosti úhlu $\sphericalangle XSP$, jehož velikost je 30° pak plyne: $SX = 2 . XP = 2 . PY$ a dále je $XP = PY$. Je tudíž trojúhelník takto sestrojený rovnostranný a jeho těžiště je bod T. Je-li velikost úsečky $AB = a$, je velikost úsečky $MN = \frac{2}{3} . \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Hledanou množinou všech těžišť trojúhelníků splňujících podmínky úlohy je pravidelný šestiúhelník $MNPQRU$, jehož vrcholy jsou těžiště rovnostranných trojúhelníků SAB, SBC, SCD, SDE, SEF, SFA.

C – II – 2b

Určete všechny dvojice přirozených čísel A, B s těmito vlastnostmi:

1. Obě jsou dvouciferná (v desítkové soustavě), přičemž B vznikne z A vzájemnou záměnou cifer.

2. Číslo $\sqrt{A^2 - B^2}$ je přirozené.

ŘEŠENÍ

Danou úlohu lze převést na tuto úlohu: Určete taková čísla $x, y \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, že existuje přirozené číslo a, pro které platí

$$a^2 = (10x + y)^2 - (10y + x)^2 .$$

Po úpravě dostáváme

$$a^2 = 99(x^2 - y^2) = 3^2 . 11(x + y)(x - y) . \tag{1}$$

Odtud vyplývá, že

$$x > y . \tag{2}$$

Z rovnosti (1) dále plyne, že aspoň jedno z čísel $x + y, x - y$ je násobkem čísla 11. Protože je

$$x - y \leqq 9 - 1 = 8 ,$$

může být násobkem 11 jedině číslo $x + y$. Vzhledem k tomu, že

$$x + y \leqq 9 + 9 = 18 ,$$

dostáváme pro hledaná čísla x, y rovnici

$$x + y = 11 . \tag{3}$$

Pro naši úlohu mohou mít ovšem smysl jen ta řešení (x, y) rovnice (3), pro něž platí nerovnost (2) a $x, y \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Takovými řešeními rovnice (3) jsou pouze dvojice

$$(9, 2) , \quad (8, 3) , \quad (7, 4) , \quad (6, 5) . \tag{4}$$

Z rovnice (3) a rovnosti (1) plyne pro čísla x a y další podmínka: Číslo $x - y$ musí být druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Tuto podmínku splňuje z dvojic (4) jedině dvojice (6, 5). Řešením úlohy mohou tedy být jedině čísla $A = 65$ a $B = 56$. Skutečně

$$65^2 - 56^2 = 9 \,.\, 121 = 33^2 \,.$$

Závěr: Úloha má jediné řešení $A = 65$, $B = 56$.

C – II – 3a

Je dán rovnoramenný $\triangle ABC$ se základnou AB. Sestrojte body P, Q ležící po řadě na stranách AC, BC, pro které platí

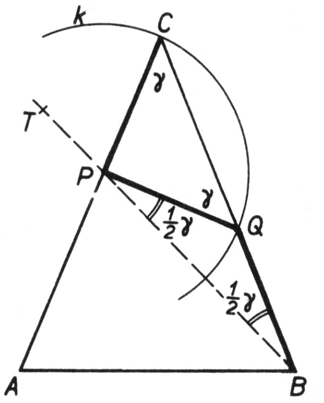
$$CP = PQ = QB \,. \tag{1}$$

Proveďte diskusi vzhledem k velikosti úhlu $\sphericalangle ACB$.

ŘEŠENÍ

Nejprve zjistíme, zda může platit $P = C$. V tomto případě by bylo $CP = 0$, takže z (1) by plynulo $Q = B$. Pak by však bylo $PQ = CB \neq 0$, tj. všechny rovnosti (1) by neplatily. Tedy $P \neq C$. Dále je třeba zjistit, zda je možné, aby bylo $P = A$. Pak z (1) a z toho, že $AC = BC$ plyne, že musí být $Q = C$. Pak $PQ = AC$, takže jedno řešení je nalezeno:

$$P = A \quad \text{a} \quad Q = C \,. \tag{2}$$



Obr. 77

Toto řešení vždy existuje. Hledejme řešení, kdy bod P leží uvnitř strany AC.

ROZBOR (viz obr. 77). Označme γ úhel $\sphericalangle ACB$. Podle podmínek úlohy je $CP = PQ$ a tedy také

$$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PQC = \gamma\,.$$

Dále je $PQ = QB$, a tedy

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle QBP = \tfrac{1}{2}\gamma\,,$$

protože $\sphericalangle PQC = \gamma$ je vnějším úhlem rovnoramenného $\triangle PQB$ se základnou PB.

Z rozboru vyplývá **konstrukce**. V polorovině BCA sestrojíme polopřímku BT takovou, že $\sphericalangle CBT = \frac{1}{2}\gamma$. Průsečíkem polopřímky BT a vnitřku úsečky AC je pak bod P. Sestrojíme kružnici $k = (P;\, r = PC)$. Její společný bod s úsečkou CB, jenž je různý od bodu C, je bod Q.

ZKOUŠKA. Z konstrukce plyne, že body P, Q leží po řadě na stranách AC, BC. Body C, Q leží na kružnici k se středem P, a proto $CP = PQ$. Dále v trojúhelníku CPB platí

$$\sphericalangle CPB = 180° - \gamma - \tfrac{1}{2}\gamma = 180° - \tfrac{3}{2}\gamma, \qquad (3)$$

v trojúhelníku CPQ je

$$\sphericalangle CPQ = 180° - 2\gamma. \qquad (4)$$

Dosadíme-li (3) a (4) do rovnosti

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle CPB - \sphericalangle CPQ,$$

dostaneme

$$\sphericalangle QPB = \tfrac{1}{2}\gamma = \sphericalangle QBP.$$

Odtud plyne $PQ = QB$.

Sestrojené body P a Q mají všechny vlastnosti požadované textem úlohy.

DISKUSE. Úloha má vždy řešení (2). Další řešení může existovat, existuje-li společný bod vnitřku úsečky AC a polopřímky BT. K tomu je nutné a stačí, aby platilo

$$\tfrac{1}{2}\gamma < \tfrac{1}{2}(180° - \gamma).$$

tj.

$$\gamma < 90°.$$

V tomto případě též existuje i průsečík $Q \neq C$ kružnice k a polopřímky CB. Zbývá ještě zjistit, zda tento bod Q je bodem úsečky CB. Bod Q je dokonce vnitřním bodem úsečky CB, neboť $\sphericalangle PQC > \sphericalangle PBC$.

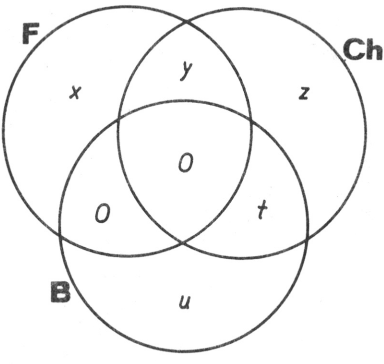
ZÁVĚR DISKUSE. V případě, že $\sphericalangle ACB = \gamma \geqq 90^\circ$, má úloha jediné řešení – řešení (2). V případě, že $\sphericalangle ACB = \gamma < 90^\circ$, má úloha dvě řešení – mimo řešení (2) ještě další řešení, které lze sestrojit výše uvedenou konstrukcí.

C – II – 3b

Žáci jedné školy se zúčastnili bilologické, fyzikální a chemické olympiády. Účastníků FO bylo dvakrát tolik jako účastníků ChO a účastníků ChO třikrát tolik co účastníků BO. Jen jedné z těchto olympiád se zúčastnilo 12 žáků, dvou olympiád 4 žáci, ale FO a zároveň BO žádný; těch, kteří řešili jen BO, bylo právě tolik jako těch, kteří řešili zároveň ChO a BO. Určete, kolik žáků se zúčastnilo každé z uvedených soutěží a kolik bylo všech účastníků olympiád dohromady.

ŘEŠENÍ

Při sestavování podmínek úlohy užijeme množinového diagramu, označení viz na obr. 78. Platí tedy:



Obr. 78

$$x + z + u = 12 \tag{1}$$

$$y + t = 4 \tag{2}$$

$$x + y = 2(y + z + t) \tag{3}$$

$$y + z + t = 3(u + t) \tag{4}$$

$$u = t\,. \tag{5}$$

Dosazením za u podle (5) do zbývajících rovnic a úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned} x + z + t &= 12 \\ y + t &= 4\,, \quad \text{z čehož} \quad y = 4 - t \\ x - y - 2z - 2t &= 0 \\ y + z - 5t &= 0\,. \end{aligned}$$

Dosadíme za y:

$$\begin{aligned} x + z + t &= 12\,, \quad \text{z čehož} \quad x = 12 - t - z \\ x - 2z - t &= 4 \\ z - 6t &= -4\,. \end{aligned}$$

Dosadíme za x:

$$\begin{aligned} 3z + 2t &= 8 \\ z - 6t &= -4\,, \quad \text{z čehož} \quad z = 6t - 4\,, \end{aligned}$$

takže

$$20t = 20\,,$$

tj.

$$t = 1\,.$$

Zpětným dosazením dostaneme:

$$z = 2, \qquad x = 9, \qquad y = 3, \qquad u = 1.$$

Zkouškou ověříme výpočet.

ODPOVĚĎ. FO se zúčastnilo 12 žáků, ChO 6 žáků a BO 2 žáci; všech účastníků bylo 16.

ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z
II. KOLA

Z – II – 1

Petr a Milan jeli tramvají do kina, které je v ulici na trati tramvaje mezi stanicemi A a B. Poměr vzdáleností vchodu do kina od stanic A a B je 3 : 2. Petr vystoupil na stanici A, Milan na stanici B. Šli stejnou průměrnou rychlostí a ke vchodu kina přišli oba v témže okamžiku.

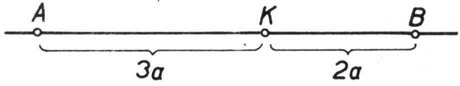
Vypočítejte, kolikrát byla průměrná rychlost jejich chůze menší než průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi A a B.

ŘEŠENÍ

Tramvaj zřejmě nejdříve přijela do stanice A. Jen tak je možné, aby chlapci přišli v týž okamžik ke vchodu kina.

Vzdálenost zastávek A a B v kilometrech nechť je $5a$ (obr. 79). Průměrnou rychlost chůze chlapců v km/h označme v. Je-li průměrná rychlost tramvaje x-krát větší než průměrná rychlost chůze chlapců, pak je její rychlost xv km/h.

Doby cest chlapců ke vchodu kina měřme od okamžiku, kdy tramvaj zastavila ve stanici A. Pak platí



Obr. 79

$$t_A = \frac{3a}{v},$$

$$t_B = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v}.$$

Odtud plyne

$$\frac{3a}{v} = \frac{5a}{xv} + \frac{2a}{v},$$

tj.

$$3 = \frac{5}{x} + 2, \quad \text{takže} \quad x = 5.$$

Snadno ověříme, že chlapci přijdou ke vchodu kina v týž okamžik, má-li tramvaj pětkrát větší průměrnou rychlost než chlapci.

Závěr. Chlapci šli pětkrát menší průměrnou rychlostí, než byla průměrná rychlost tramvaje mezi stanicemi *A* a *B*.

Z – II – 2

Je dán pravý úhel s vrcholem *V* a jeho vnitřní bod *M*. Bodem *M* je proložena libovolná přímka *p* tak, že obě ramena pravého úhlu protíná v různých bodech *A* a *B*. Označíme-li S_1, resp. S_2, obsah trojúhelníka *VAM*, resp. *VBM*, potom číslo

$$k = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$$

je stejné při každé poloze přímky p uvedených vlastností; dokažte.

ŘEŠENÍ

Zavedeme toto označení: $a = BV$, $b = AV$, x a y jsou výšky trojúhelníka BMV (AMV) příslušné straně BV (AV) (viz obr. 80). Pak je

$$S_1 = \tfrac{1}{2}by\,, \qquad S_2 = \tfrac{1}{2}ax$$

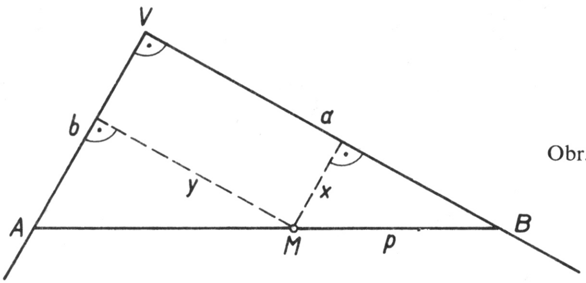
a

$$S = S_1 + S_2 = \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{2}ax = \tfrac{1}{2}ab\,.$$

Dále platí:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{2}{by} + \frac{2}{ax} = \frac{2(ax + by)}{abxy} = \frac{2\,.\,2S}{2S\,.\,xy} = \frac{2}{xy}\,.$$

Ale součin xy nezávisí na volbě přímky p.



Obr. 80

Z – II – 3

Sú dané celé čísla a, b, ktorých aritmetický priemer je celé číslo deliteľné troma. Dokážte, že potom číslo

$$a(3a^2 + b^2)(a^3 - 2b^3)^3$$

je násobkom čísla 108.

RIEŠENIE

Podľa textu úlohy je $\dfrac{a+b}{2} = 3k$, kde k je celé číslo. Potom však $b = 6k - a$, a teda

$$\begin{aligned} 3a^2 + b^2 &= 3a^2 + 36k^2 - 12ka + a^2 = \\ &= 4a^2 - 12ak + 36k^2 = 4(a^2 - 3ak + 9k^2), \\ a^3 - 2b^3 &= a^3 - 2(216k^3 - 108k^2a + 18ka^2 - a^3) = \\ &= 3(a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3), \end{aligned}$$

z čoho

$$a(3a^2 + b^2)(a^3 - 2b^3)^3 =$$

$$= 4 \,.\, 3^3 a(a^2 - 3ak + 9k^2)(a^3 - 12ka^2 + 72k^2a - 144k^3)^3,$$

čo je násobkom 108, ako bolo treba dokázať.

Z – II – 4

Je dán trojúhelník ABC, v němž má strana AB délku a. Na polopřímce opačné k polopřímce AB leží bod D tak, že

$DA = na$, kde n je dané přirozené číslo. Nechť E je střed strany BC a F průsečík přímky DE se stranou AC. Určete obsah trojúhelníka CEF, jestliže obsah trojúhelníka ABC se rovná číslu P. (Proveďte výpočet nejdříve pro $n = 1$ a $n = 2$, potom pro libovolné n.)

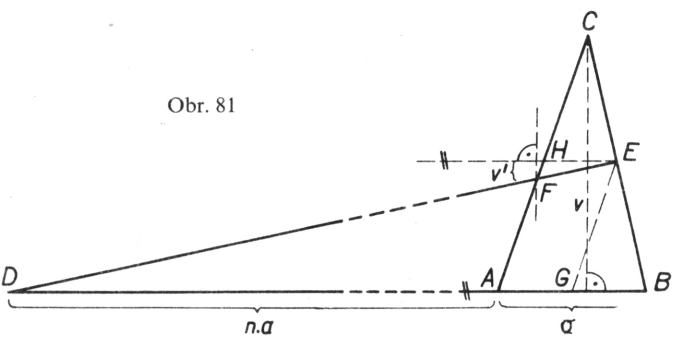
ŘEŠENÍ

Označme H střed strany AC (obr. 81). Úsečka HE je pak střední příčkou $\triangle ABC$, jež je rovnoběžná se stranou AB. Bod H je tedy vnitřní bod úsečky CF. Obsah $\triangle ECH$ je zřejmě $\frac{1}{4}P$. Pro obsah P' trojúhelníka CEF tedy platí

$$P' = \tfrac{1}{4}P + Q\,, \tag{1}$$

kde Q je obsah $\triangle EFH$. Úloha je tak převedena na úlohu určit obsah Q trojúhelníka EFH pomocí obsahu $\triangle ABC$. Protože víme, že $EH = \frac{1}{2}a$, je třeba určit výšku v' trojúhelníka EFH na stranu EH. Označme v výšku $\triangle ABC$ na stranu AB.

Obr. 81



a) Nechť $DA = a$. Podle věty *uu* je

$$\triangle EFH \sim \triangle DFA\,.$$

Bod F je těžištěm $\triangle DBC$, a proto pro výšku v_1 trojúhelníka DFA na stranu DA platí

$$v_1 = \tfrac{1}{3}v\,.$$

Tedy

$$v' = \tfrac{1}{3}v\,\frac{HE}{AD} = \tfrac{1}{3}v\,.\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6}v\,.$$

Pak

$$Q = \tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}a\,.\,\tfrac{1}{6}v = \tfrac{1}{12}P\,.$$

Podle (1) je

$$P' = \tfrac{1}{4}P + \tfrac{1}{12}P = \tfrac{1}{3}P\,.$$

b) Nechť $DA = 2a$. V tomto případě užijeme podobnosti trojúhelníků EFH a DEG (věta *uu*), kde G je střed strany AB. Trojúhelník DEG má zřejmě na stranu DG výšku $\frac{1}{2}v$. Platí tedy

$$v' = \tfrac{1}{2}v\,\frac{HE}{GD} = \tfrac{1}{2}v\,.\,\tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{10}v\,.$$

Tudíž

$$Q = \tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}a\,.\,\tfrac{1}{10}v = \tfrac{1}{20}P\,,$$

takže podle (1)

$$P' = \tfrac{1}{4}P + \tfrac{1}{20}P = \tfrac{3}{10}P\,.$$

c) Nechť $DA = na$, kde n je přirozené číslo. Podobně jako v části b) z podobnosti trojúhelníků EFH a DEG plyne

$$v' = \tfrac{1}{2}v\,\frac{HE}{GD} = \tfrac{1}{2}v\,\frac{1}{2n + 1}\,.$$

Tedy

$$Q = \tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{1}{2}a\,.\,\tfrac{1}{2}v\,\frac{1}{2n + 1}\,,$$

takže podle (1)

$$P' = \tfrac{1}{4}P + \frac{1}{4(2n + 1)}\,P = \frac{n + 1}{2(2n + 1)}\,P\,.$$