II. Přípravné úlohy I. kola

(Komentář a řešení)

1. KATEGÓRIA A

A–P–1

Určite všetky prirodzené čísla x, pre ktoré je výraz $x^4 - 23x^2 + 42$ delitelný číslom 83.

Tato úloha má tematiku na první pohled běžnou, ale je tu přece něco nového, totiž tzv. *kvadratické zbytky.* Daný trojčlen

$$x^4 - 23x^2 + 42 \tag{1}$$

rozložíme v součin

$$(x^2 - 21)(x^2 - 2);$$

protože 83 je prvočíslo, je číslo (1) násobkem 83, právě když je aspoň jedno z čísel $x^2 - 21$, $x^2 - 2$ násobkem 83. Zřejmě stačí vyšetřovat čísla $x = 0$ až $x = 82$, tj. hledat, jaké zbytky dává číslo x^2 při dělení číslem 83. Mohli bychom pomocí tabulky druhých mocnin přezkoušet všech 83 případů. To je však příliš pracné, proto se snažíme počet vyšetřovaných případů snížit; tím zároveň vnikneme trochu do teorie tzv. *kvadratických zbytků.*

Předně dokážeme pomocnou větu (*lemma L_1*):

(L_1) Jsou-li x_1, x_2 dvě různá celá čísla z intervalu $\langle 0; 82 \rangle$ taková, že $x_1^2 - 21$, $x_2^2 - 21$ jsou násobky prvočísla 83, pak je $x_1 + x_2 = 83$.

Obráceně: Je-li x celé číslo z intervalu $\langle 0; 82 \rangle$, pro které je $x^2 - 21$ násobkem 83, pak je také $(83 - x)^2 - 21$ násobkem 83.

DŮKAZ: a) Nechť je $x_1^2 - 21 = 83k_1$, $x_2^2 - 21 = 83k_2$, kde $0 \leqq x_2 < x_1 \leqq 82$. Pak je

$$(x_1^2 - 21) - (x_2^2 - 21) = 83(k_1 - k_2)\,,$$

tj.

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 83\,(k_1 - k_2)\,.$$

Protože je $0 < x_1 - x_2 \leqq 82$, je 83 dělitelem čísla $x_1 + x_2$; protože je $x_1 + x_2 < 2 \,.\, 82 = 164$, je $x_1 + x_2 = 83$.

b) Nechť je $x^2 - 21 = 83k$, kde $0 \leqq x \leqq 82$. Pak platí

$$(83 - x)^2 - 21 = 83^2 - 2 \,.\, 83 \,.\, x + x^2 - 21 =$$
$$= 83(83 - 2x) + 83k = 83m,$$

tj. $(83 - x)^2 - 21$ je násobkem čísla 83.

Je zřejmé, že v *lemmatu* (L_1) můžeme nahradit číslo 21 libovolným přirozeným číslem, např. číslem 2; také prvočíslo 83 můžeme nahradit jiným prvočíslem.

Druhé *lemma* zní:

(L_2) Platí-li pro přirozená čísla x, x_1, x_2 vztah $x = x_1x_2$ a dávají-li při dělení číslem 83 čísla x^2, x_1^2, x_2^2 po řadě zbytky z, z_1, z_2, je číslo $z - z_1z_2$ násobkem čísla 83*).

DŮKAZ: Nechť je $x_1^2 = 83k_1 + z_1$, $x_2^2 = 83k_2 + z_2$, $x^2 = 83k + z$; pak je $x^2 = x_1^2 \,.\, x_2^2 = 83(83k_1k_2 + k_1z_2 + k_2z_1) + z_1z_2$, tj.

---

*) Obě lemmata se vysloví mnohem přehledněji, užijeme-li pojmu „kongruence".

$$83k + z = 83m + z_1 z_2 ,$$

tj.

$$83(m - k) = z - z_1 z_2 .$$

Z lemmatu (L_1) vyplývá, že stačí vyšetřovat kvadratické zbytky čísel 0 až 41. Další možné zjednodušení dostaneme tak, že vypočteme kvadratické zbytky prvočísel menších než 42 při dělení číslem 83. Jsou uvedeny v tabulce:

(T_1)

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
z	4	9	25	49	38	3	40	29	31	11	48	41	21

(z je zbytek při dělení čísla x^2 číslem 83). Pak můžeme (s použitím tabulky T_1) počítat zbytky zbývajících složených čísel od 1 do 20, takže dostaneme tabulku (T_2):

(T_2)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z	1	4	9	16	25	36	49	64	81	17	38	61	3	30	59	7	40	75	29	68

A dále s pomocí tabulky (T_2) určíme ostatní kvadratické zbytky. Např. $36 = 2 \,.\, 18$, tj. $36^2 = 2^2 \,.\, 18^2$; zbytek z je týž jako pro $4 \,.\, 75 = 300$, tj. 51. Anebo $26 = 2 \,.\, 13$, $26^2 = 2^2 \,.\, 13^2$; zbytek z je týž jako pro $4 \,.\, 3 = 12$. Nebo $39 = 3 \,.\, 13$, $39^2 = 3^2 \,.\, 13^2$; zbytek je týž jako pro $9 \,.\, 3 = 27$ atd.

ZÁVĚR: Kvadratický zbytek 2 nedostaneme pro žádné číslo x z intervalu $\langle 0, 82 \rangle$ a kvadratický zbytek 21 dostaneme jen pro čísla $x = 41, 42$.

Úloha má tedy dvě třídy řešení:

$$\begin{aligned} x_1 &= 41 + 83n , \\ x_2 &= 42 + 83n , \end{aligned} \tag{2}$$

kde n probíhá všecka nezáporná celá čísla. Je třeba ještě provést ZKOUŠKU, že všechna čísla (2) skutečně mají tu vlastnost, že číslo (1) je násobkem čísla 83.

Pro předvedení postupu by bylo asi vhodné zvolit místo prvočísla 83 menší prvočíslo, např. 41. Pak by se ovšem měl změnit i daný trojčlen; ÚLOHA by mohla znít např. takto:

Určete všecka přirozená čísla x, pro která je výraz $x^4 - 35x^2 + 66$ dělitelný číslem 41.

A–P–2

Určete všechna reálná čísla x, která splňují rovnici

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3},$$

přičemž symbol $[a]$ znamená *celou část* reálného čísla a, to je celé číslo, pro které platí

$$[a] \leqq a < [a] + 1 .$$

Tato úloha patří do skupiny úloh o funkci „*celá část z čísla*...“. Úloha téže tematiky je také mezi přípravnými úlohami kategorie C (C–P–1). Při řešení úlohy A–P–2 uvažte, že číslo $\frac{5x-4}{3}$ je celé; řešení x lze tedy hledat jen mezi racionálními čísly. Použijeme substituce

$$\frac{5x-4}{3} = y; \quad (y \text{ celé}) \tag{3}$$

z (3) dostaneme

$$x = \frac{3y+4}{5} . \tag{4}$$

Vyjádříme

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{2y+1}{5}, \quad \frac{4x+1}{6} = \frac{4y+7}{10}.$$

Místo dané rovnice pro x máme pak řešit rovnici

$$\left[\frac{2y+1}{5}\right] + \left[\frac{4y+7}{10}\right] = y, \tag{5}$$

a to v množině **C** všech celých čísel. Při řešení můžeme kombinovat (tak jako při C–P–1) pokusy s deduktivní úvahou. Pokusy nám dají tuto tabulku:

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\left[\frac{2y+1}{5}\right]$	-2	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	2	2
$\left[\frac{4y+7}{10}\right]$	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	2	2	3

Tabulka nám dá pět řešení rovnice (5), která jsou tlustě zarámována. Rovnice (4) dá pět řešení dané rovnice (o správnosti výpočtu se přesvědčíme zkouškou)

$$x_1 = -0{,}4; \; x_2 = 0{,}2; \; x_3 = 0{,}8; \; x_4 = 1{,}4; \; x_5 = 2\,.$$

Zbývá dokázat to, co naznačuje horní tabulka, že totiž daná rovnice, resp. rovnice (5), nemá jiné řešení. Tabulku doplníme úvahou: Pro $y \geqq 5$ je

$$\left[\frac{2y+1}{5}\right] \leqq \frac{2y+1}{5} = \frac{4y+2}{10} \quad \text{a} \quad \left[\frac{4y+7}{10}\right] \leqq \frac{4y+7}{10}$$

a dále

$$\left[\frac{2y+1}{5}\right] + \left[\frac{4y+7}{10}\right] \leqq \frac{8y+9}{10} = \frac{4}{5}y + \frac{9}{10} <$$

$$< \frac{4}{5}y + \frac{1}{5}y = y .$$

Rovnice (5) tedy skutečně nemá žádné řešení $y \geqq 5$. Obdobný důkaz provedeme pro $y \leqq -5$.

Doporučujeme, abyste řešili rovnici (5) graficky. K tomu účelu je výhodné odvodit POMOCNOU VĚTU:

(L) Pro každé $c \in \mathbf{C}$ a $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{C}$ (tj. pro každé celé číslo c a reálné nikoli celé číslo t) platí vzorec:

$$c - [t] = [c + 1 - t] .$$

DŮKAZ: Vyjdeme z definice „*celé části z A*". Lze to zapsat dvojím způsobem; buď $[A] \leqq A < [A] + 1$, nebo $A - 1 < [A] \leqq A$. Z této definice plyne

$$c - t < [c + 1 - t] \leqq c - t + 1 . \tag{6}$$

Na druhé straně však platí

$$-[t] - 1 < -t \leqq -[t] ,$$

tj.

$$c - t \leqq c - [t] < c - t + 1 . \tag{7}$$

Vzhledem k předpokladu o čísle t nemůže nastat rovnost ani v (6) ani (7); obě tyto podmínky jsou tedy totožné. Protože však v otevřeném intervalu $(c - t, c - t + 1)$ leží právě jedno celé číslo, je *lemma* (L) dokázáno.

Při řešení rovnice (5) rozlišíme nyní dva případy:

$$\text{a)} \quad \frac{2y + 1}{5} \in \mathbf{C}, \qquad \text{b)} \quad \frac{2y + 1}{5} \notin \mathbf{C} .$$

V případě a) zjistíme, že musí být $y = 5n + 2$ ($n \in \mathbf{C}$). Vypočteme $\frac{2y + 1}{5} = 2n + 1$, $\frac{4y + 7}{10} = 2n + \frac{3}{2}$.

Rovnici (5) pak přepíšeme do tvaru

$$[2n + 1] + \left[2n + \frac{3}{2}\right] = 5n + 2\,.$$

Odtud dostaneme $n = 0$, což dává jedno řešení $y = 2$. V případě b) užijeme pomocné věty (L) a dostaneme místo (5)

$$\left[\frac{4y + 7}{10}\right] = \left[y + 1 - \frac{2y + 1}{5}\right],$$

čili

$$\left[\frac{4y + 7}{10}\right] = \left[\frac{3y + 4}{5}\right]; \tag{8}$$

odtud dostaneme zbývající řešení $y = -2, -1, 0, 1$.

Rovnici (8) si snadno rozřešíte sami.

A–P–3

Ak platí v trojúholníku ABC vzťah $\alpha = 2\beta$, potom platí $a^2 = b^2 + bc$. Dokážte a zistite, či platí aj obrátená veta.

Úloha A–P–3 je v pravém slova smyslu „cvičná"; nevyžaduje v podstatě žádný nápad. Z podmínky $\alpha = 2\beta$ odvodíme ihned $\gamma = \pi - 3\beta$ a podle známých vět

$$\frac{a}{b} = 2\cos\beta, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = 3 - 4\sin^2\beta = 4\cos^2\beta - 1\,.$$

Odtud dostaneme eliminací

$$\frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{c}{b}, \tag{9}$$

neboli

$$a^2 = b^2 + bc\,. \tag{10}$$

Obráceně z podmínky (10) plyne (9) a odtud podle sinové věty

$$\sin(\alpha + \beta)\sin\beta = (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta)$$

neboli

$$\sin(\alpha + \beta)\sin\beta =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

neboli

$$\sin(\alpha + \beta)\,.\,\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)\,.\,\sin(\alpha - \beta)\,.$$

Protože $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma \neq 0$, je

$$\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)\,.$$

Odtud plyne buď $\beta = \alpha - \beta$, nebo $\pi - \beta = \alpha - \beta$. Druhá rovnost vede ke sporu $\alpha = \pi$; je tedy $\beta = \alpha - \beta$, tj. $\alpha = 2\beta$.

Tuto úlohu můžete řešit bez pomoci. Bylo by vhodné doplnit ji otázkou: *Které trojúhelníky s celočíselnými délkami stran mají vlastnost „$\alpha = 2\beta$“?*

Ze vztahu $a^2 = b^2 + bc$ neboli $a^2 = b(b + c)$ snadno dokážeme, že číslo b je druhá mocnina celého čísla, pokud ovšem předpokládáme, že čísla a, b, c nemají společného dělitele většího než 1. (Je-li p prvočinitel čísla a, pak $p/b \vee p/(b + c)$; kdyby bylo $p/b \wedge p/(b + c)$*), bylo by p dělitelem všech tří čísel a, b, c. Je tedy

$$b = u^2,\ b + c = v^2\,,$$

tj.

$$a = uv,\ b = u^2,\ c = v^2 - u^2\,. \tag{11}$$

*) Symbol p/b se čte „p dělí b“, tj. číslo p je dělitelem čísla b.

Obráceně zvolíme-li dvě nesoudělná čísla u, v, pro která platí

$$1 \leqq u < v < 2u\,,$$

dají vzorce (11) řešení úlohy. Podmínka $v < 2u$ vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti $a + b > c$. Podrobné řešení doplňkové úlohy je velmi poučné.

A–P–4

Na průměru MN kružnice $k = (S; r)$ jsou dány body $A \neq S$, $B \neq S$, které leží na opačných polopřímkách vyťatých na MN bodem S. Na kružnici k určete všechny body X takové, aby osa úhlu AXB procházela bodem S.

Také tato úloha je velmi jednoduchá a má jediné poslání: připomenout řešitelům tzv. *Apolloniovu kružnici* (Apolloniovo vytvoření kružnice) spolu s jistou vlastností osy úhlu trojúhelníka. Tato vlastnost je vyslovena *větou:*

(L_1) Je-li U takovým bodem strany AB trojúhelníka ABC, že $\sphericalangle ACU = \sphericalangle BCU$, pak platí $\dfrac{AU}{BU} = \dfrac{AC}{BC}$.

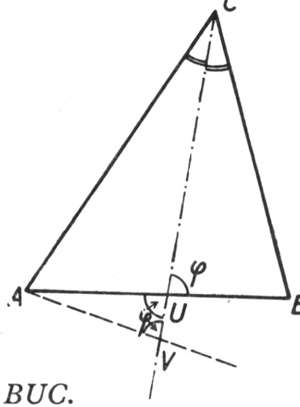
Věta o Apolloniově kružnici zní:

(L_2). Jsou-li P, Q dva různé body roviny ϱ a $\lambda \neq 1$ kladné číslo, pak množina všech bodů $X \in \varrho$, pro které platí $\dfrac{PX}{QX} = \lambda$, je kružnice, jejíž střed leží na přímce PQ.

Věta (L_1) se dokáže snadno sinovou větou nebo z podobných trojúhelníků. Na obr. 1 je CU osa úhlu $\sphericalangle ACB$;

V je takový bod, že $\sphericalangle CAV =$ $= \sphericalangle CBU$, pak je $\sphericalangle CUB = \sphericalangle AUV =$ $= \sphericalangle AVU = \varphi$.

Obr. 1



Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ACV \sim \triangle BCU$ plyne

$$\frac{AC}{AV} = \frac{BC}{BU};$$

protože $AV = AU$, je $\frac{AC}{BC} =$ $= \frac{AU}{BU}$. Jinak je věta (L_1) evidentním důsledkem použití sinové věty na $\triangle AUC$, $\triangle BUC$.

Lemna (L_2) se dokáže metodou souřadnic nebo použitím věty (L_1). Důkaz obou vět (L_1), (L_2) i doplnění (L_2) otázkou o případě $\lambda = 1$ přenecháváme čtenářům.

Při řešení úlohy A–P–4 rozlišíme dva případy; bod S je středem úsečky AB; bod S není středem úsečky AB. V druhém případě užijeme věty (L_2), hledané body jsou průsečíky dané kružnice s Apolloniovou kružnicí. V prvním případě je Apolloniova kružnice nahražena přímkou. Musíme ovšem v obou případech dokázat, že vzniknou dva průsečíky.

Přehlédneme-li tedy soubor přípravných úloh pro kategorii A, vidíme, že se tu klade důraz na číselnou teorii (úlohy A–P–1, A–P–2 a doplněk k úloze A–P–3); geometrické úlohy jsou zcela jednoduché.

B–P–1

Tři konečné množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ mají po řadě n_1, n_2, n_3 prvků; množina $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$ má s prvků.
Dokažte: a) Je-li $n_1 + n_2 + n_3 \geqq 2s + 1$, má průnik všech tří množin alespoň jeden prvek.

b) Má-li průnik všech tří množin alespoň jeden prvek, je $n_1 + n_2 + n_3 \geqq s + 2$.

Dokažte dále, že podmínka b) není postačující pro to, aby tři množiny měly neprázdný průnik.

Tato úloha zahajuje sérii úloh, jejichž tematika je čerpána z nového obsahu učiva. Již několik let se učí na gymnasiích podle komentářů k učebnicím matematiky, a tím proniká nové učivo ze strukturální matematiky do vyučování. Začínáme proto zařazovat úlohy s tematikou z naivní teorie množin, která poskytuje mnoho příležitosti k manipulacím s Vennovými diagramy. Pokud jde o konečné množiny, narážíme velmi často na vzorce o počtu prvků konečných množin, jež jsou speciálními případy vzorců z teorie míry. Zvyknete-li si s nimi pracovat, absolvujete tak propedeutiku pro výpočet obsahů a objemů geometrických útvarů i pro základy pravděpodobnosti. Máme na mysli zejména tyto tři vzorce: Nechť jsou $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ tři konečné množiny, které mají po řadě n_1, n_2, n_3 prvků. Označíme s_{12}, s_{23}, s_{31}, s_{123} počty prvků množin $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$ a dále p_{12}, p_{23}, p_{31}, p_{123} počty prvků množin $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_3 \cap \mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
n_1 + n_2 &= s_{12} + p_{12}\,, \\
s_{123} &= s_{12} + s_{23} + s_{31} - (n_1 + n_2 + n_3) + p_{123}\,, \qquad (1) \\
s_{123} &= n_1 + n_2 + n_3 - (p_{12} + p_{23} + p_{31}) + p_{123}\,.
\end{aligned}
$$

Příslušný Vennův diagram, pomocí kterého si můžeme ověřit vzorce (1), je znázorněn na obr. 2; počty prvků s_{12}, s_{23}, s_{31}, s_{123} nejsou k příslušným množinám připsány.

Při řešení úloh B–P–1 a) i b) potřebujeme ještě nerovnosti

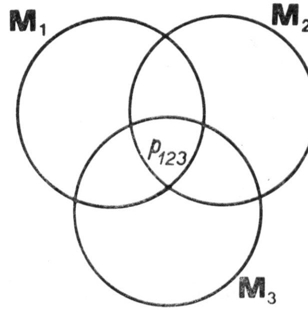
$$s_{12} \leqq s_{123}, \; s_{23} \leqq s_{123}, \; s_{31} \leqq s_{123} . \tag{2}$$

Je-li $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cap \mathbf{M}_3 \neq \emptyset$, je $p_{123} \geqq 1$ a obráceně. V úloze a) tedy vyjádříme p_{123}, např. z druhé formule (1), a pokusíme se dokázat, že $p_{123} \geqq 1$. Skutečně je

$$p_{123} = (s_{123} - s_{12}) + (s_{123} - s_{23}) + (s_{123} - s_{31}) + n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123} .$$

Podle (2) je tedy

$$p_{123} \geqq n_1 + n_2 + n_3 - 2s_{123} \geqq 1 .$$



Obr. 2

V úloze b) vycházíme z předpokladu $p_{123} \geqq 1$ a užijeme třetího vzorce (1) a vzorců

$$p_{12} \geqq p_{123}, \; p_{23} \geqq p_{123}, \; p_{31} \geqq p_{123} . \tag{3}$$

Dostaneme

$$s_{123} = n_1 + n_2 + n_3 + (p_{123} - p_{12}) + (p_{123} - p_{23}) + (p_{123} - p_{31}) - 2p_{123} .$$

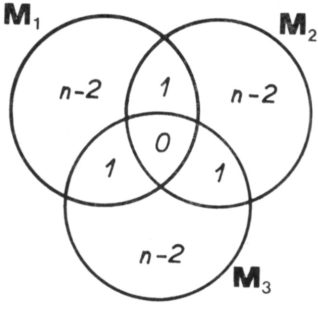
Podle (3) vyjde

$$s_{123} \leqq n_1 + n_2 + n_3 - 2p_{123};$$

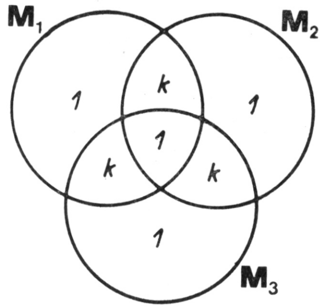
a tedy za předpokladu, že $p_{123} \geqq 1$, platí

$$2 \leqq 2p_{123} \leqq n_1 + n_2 + n_3 - s_{123} .$$

Protipříklad v úloze b) najdete sami, poradíme-li vám, abyste se snažili použít takové trojice množin, u kterých mají průniky co nejmenší počet prvků; všecky tři množiny mohou mít dokonce stejný počet prvků. Ale i na to vše můžete přijít sami. Příslušný Vennův diagram pak je znázorněn na obr. 3. Zde je $n_1 = n_2 = n_3 = n$:



Obr. 3



Obr. 4

$$p_{123} = 0,\ s_{123} = 3n - 3, \text{ tj.}$$
$$n_1 + n_2 + n_3 = 3n > 3n - 1 = s_{123} + 2\,.$$

Doplňkem k úloze B–P–1 může být zjištění, zda podmínka

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2s_{123} + 1$$

je nutná pro to, aby bylo $p \geqq 1$. Protipříklad zde vyžaduje situaci, za které mají průniky co největší počet prvků, např. (obr. 4): pak je $n_1 = n_2 = n_3 = 2k + 2$, $p_{123} = 1$, $s_{123} = 3k + 4$, a tedy

$$n_1 + n_2 + n_3 = 6k + 6 < 6k + 9 = 2s_{123} + 1\,.$$

B–P–2

Je dána funkcia

$$V_p(x) = \frac{(p + 4)x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4x + 2p}$$

reálnej premennej x. Nájděte všetky celé čísla p, pre ktoré funkcia $V_p(x)$ nadobúda každú z hodnot -2, -1 a 0.

Úloha B–P–2 je dost obtížná; týká se množiny funkcí o jedné proměnné x s parametrem p nebo funkce o dvou proměnných x, p. V textu úlohy nejsou explicitně uvedeny kvantifikátory, na nichž však velmi záleží. Bylo by asi užitečné formulovat úlohu množinově s příslušnými kvantifikátory. Označme $\mathbf{M}_0$ množinu všech celých čísel p, pro které funkce $V_p(x) = \dfrac{(p+4)x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4x + 2p}$ nabývá hodnoty 0, tj. pro které existuje aspoň jedno reálné číslo x tak, že $V_p(x) = 0$.

Symbolicky:

$$\mathbf{M}_0 = \{p \in \mathbf{C};\ \exists x \in \mathbf{R};\ V_p(x) = 0\}.$$

Obdobně zavedeme množiny $\mathbf{M}_{-1}$, $\mathbf{M}_{-2}$. Řešením úlohy je množina

$$\mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}_{-1} \cap \mathbf{M}_{-2}.$$

Hledejme nejprve množinu $\mathbf{M}_0$. Číslo $p \in \mathbf{C}$ náleží do $\mathbf{M}_0$, právě když existuje aspoň jedno číslo $x \in \mathbf{R}$ tak, že platí

$$(p+4)x^2 + 4x + 1 = 0 \tag{4}$$

a zároveň neplatí

$$x^2 - 4x + 2p = 0. \tag{5}$$

Snadno se lze přesvědčit, že $-4 \in \mathbf{M}_0$. Předpokládejme, že $p \neq -4$. Pak (4) je kvadratická rovnice a má aspoň jedno reálné řešení x, právě když je jejím diskriminantem nezáporné číslo, tj. když

$$16 - 4(p+4) \geqq 0,$$

neboli když

$$p \leqq 0.$$

Je-li $p < 0$ a $p \neq -4$, má rovnice (4) vždy dva různé kořeny, z nichž aspoň jeden není kořenem rovnice (5); jinak by totiž bylo $p + 4 = -1 \wedge 1 = -2p$, což je nemožné.

Je-li $p = 0$, má rovnice (4) jediný kořen $x = -\dfrac{1}{2}$ a ten není kořenem rovnice (5). Z toho vyplývá, že všecka nekladná celá čísla tvoří množinu $\mathbf{M}_0$;

$$\mathbf{M}_0 = \{p \in \mathbf{C};\ p \leqq 0\}\,.$$

Vyšetříme množinu $\mathbf{M}_{-1}$. Číslo $p \in \mathbf{C}$ náleží do $\mathbf{M}_{-1}$, právě když existuje aspoň jedno číslo $x \in \mathbf{R}$ tak, že platí

$$(p + 4)x^2 + 4x + 1 = -x^2 + 4x - 2p \tag{6}$$

a zároveň neplatí (5). Z (6) dostaneme

$$(p + 5)x^2 + 2p + 1 = 0\,. \tag{6'}$$

Rovnice (6′) má aspoň jeden reálný kořen, právě když $(p + 5)(2p + 1) \leqq 0$ a zároveň $p + 5 \neq 0$, neboli když

$$2p^2 + 11p + 5 \leqq 0\,,$$

neboli když

$$-5 < p \leqq -\frac{1}{2}\,. \tag{7}$$

Je-li p z intervalu (7), má rovnice (5) vždy dva různé kořeny *), z nichž aspoň jeden není kořenem rovnice (6′) neboli (6). Z toho vyplývá, že všecka celá čísla z intervalu (7) tvoří množinu $\mathbf{M}_{-1}$;

$$\mathbf{M}_{-1} = \{-1, -2, -3, -4\}\,.$$

Nakonec vyšetříme množinu $\mathbf{M}_{-2}$. Číslo $p \in \mathbf{C}$ náleží do $\mathbf{M}_{-2}$, právě když existuje aspoň jedno číslo $x \in \mathbf{R}$ tak, že platí

$$(p + 4)x^2 + 4x + 1 = -2x^2 + 8x - 4p \tag{8}$$

a zároveň neplatí (5). Z (8) dostaneme

$$(p + 6)x^2 - 4x + 4p + 1 = 0\,. \tag{8'}$$

Rovnice (8′) má aspoň jeden reálný kořen, právě když $16 - 4(p + 6)(4p + 1) \geqq 0$, neboli když

$$4p^2 + 25p + 2 \leqq 0\,,$$

---

*) Kořeny splynou jedině pro $p = 2$.

neboli když

$$-6{,}2 \doteq \frac{-25-\sqrt{593}}{8} \leqq p \leqq \frac{-25+\sqrt{593}}{8} \doteq -0{,}08. \tag{9}$$

Je-li p z intervalu (9) a je-li $p + 6 \neq 0$, má rovnice (5) vždy dva různé kořeny*), z nichž aspoň jeden není kořenem rovnice (8′), neboli (8). Je-li $p = -6$, má rovnice (8′) jediný kořen $x = -\frac{23}{4}$, který není kořenem rovnice (5). Z toho vyplývá, že všecka celá čísla z intervalu (9) tvoří množinu $\mathbf{M}_{-2}$;

$$\mathbf{M}_{-2} = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}\,.$$

Je tedy

$$\mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}_{-1} \cap \mathbf{M}_{-2} = \{-1, -2, -3, -4\}\,.$$

Postup, kterého jsme použili, dává vlastně řešení obecnější úlohy. Jestliže v textu úlohy nahradíme slova „celá čísla p“ slovy „reálná čísla p“ a označíme-li příslušné množiny $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_{-1}$, $\mathbf{K}_{-2}$ místo $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_{-1}$, $\mathbf{M}_{-2}$, zůstane postup řešení beze změny jen s tím rozdílem, že místo množin $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_{-1}$, $\mathbf{M}_{-2}$ dostaneme intervaly $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_{-1}$, $\mathbf{K}_{-2}$;

$$\mathbf{K}_0 = \{p \in \mathbf{R};\ p \leqq 0\},\ \mathbf{K}_{-1} = \left\{p \in \mathbf{R};\ -5 < p \leqq -\frac{1}{2}\right\},$$

$$\mathbf{K}_{-2} = \left\{p \in \mathbf{R};\quad \frac{-25-\sqrt{593}}{8} \leqq p \leqq \frac{-25+\sqrt{593}}{8}\right\}.$$

Zřejmě je

$$\mathbf{K}_0 \cap \mathbf{K}_{-1} \cap \mathbf{K}_{-2} = \mathbf{K}_{-1} = (-5; -0{,}5\rangle$$

a to je řešení zobecněné úlohy.

Domníváme se, že vhodným uvedením do řešení úlohy by bylo např. řešení této varianty:

---

*) Kořeny splynou jedině pro $p = 2$.

Je dána funkce

$$V_p(x) = \frac{(p + 4)x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4x + 2p}$$

reálné proměnné x. Najděte všecka reálná čísla p, pro která funkce $V_p(x)$ nabývá každé z hodnot 0 a 1.

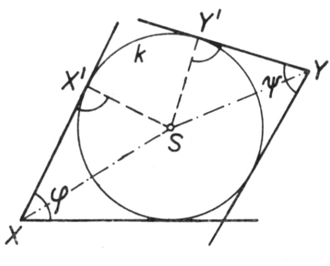
B–P–3

Najdlhšou a najkratšou stranou dotyčnicového lichobežníka sú jeho základne. Dokážte.

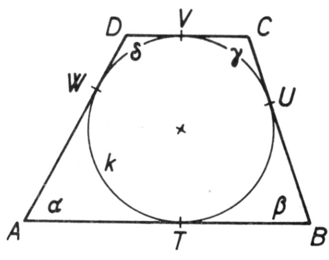
Úloha B–P–3 je svým výsledkem málo zajímavá; po sestrojení několika náčrtků lze nejen z názoru zjistit, že tvrzení věty je pravdivé, ale lze objevit i princip důkazu, který se opírá o následující *pomocnou větou*:

Nechť vidíme kružnici k se středem S z bodu X jejího vnějšku pod úhlem φ a z bodu Y jejího vnějšku pod úhlem ψ (obr. 5). Pak platí

$$SX > SY \Leftrightarrow \varphi < \psi\,.\text{*)}$$



Obr. 5



Obr. 6

*) Při označení podle obr. 5.

Domníváme se, že toto lemma je postačujícím impulsem pro řešení úlohy. Důkaz lemmatu lze provést trigonometricky nebo s použitím pravoúhlých trojúhelníků SXX', SYY' se shodnými odvěsnami $SX' = SY'$. Při vlastním odůvodnění (označení podle obr. 6) volíme označení úhlů při větší základně AB tak, aby platilo

$$\alpha \leqq \beta\,. \tag{10}$$

Mimo to je (protože $AB > CD$)

$$\alpha + \beta < \pi, \; \gamma = \pi - \beta, \; \delta = \pi - \alpha\,. \tag{11}$$

Z (10) a (11) plyne dále

$$\alpha < \pi - \beta = \gamma, \; \beta < \pi - \alpha = \delta\,. \tag{12}$$

Podle lemmatu dostaneme z (10) a (12)

$$\begin{aligned} AT = AW &\geqq BT = BU\,, \\ AT = AW &> CU = CV\,, \\ BT = BU &> DV = DW\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Z nerovností (13) plyne

$$\begin{aligned} AB = AT + BT &> AW + DW = AD\,, \\ AB = AT + BT &> CU + BU = BC\,, \\ CD = CV + DV &< CU + BU = BC\,, \\ CD = CV + DV &< DW + AW = AD\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Z (14) dostaneme

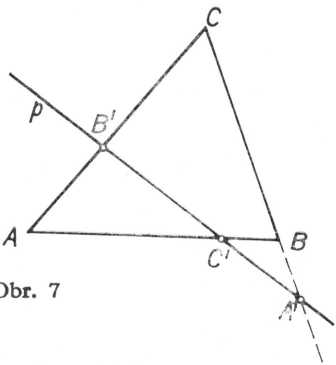
$$CD < BC < AB\,, \quad CD < AD < AB\,. \tag{15}$$

Nerovnosti (15) vyjadřují tvrzení úlohy B–P–3.

B–P–4

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body B', C' jsou po řadě středy hran BD, CD. Označme R bod polopřímky opačné k polopřímce AB, pro který platí $AR = n\,.\,AB$, kde n je přirozené číslo. Dále označme A' průsečík hrany AD s rovinou $B'C'R$. Vyjádřete objem čtyřstěnu $A'B'C'D$ pomocí objemu čtyřstěnu $ABCD$ a pomocí čísla n.

Úlohu B–P–4 lze řešit na základě *Menelaovy věty*. Snad by bylo vhodné, abyste se s touto větou seznámili, neboť má velmi široké uplatnění v mnoha geometrických úlohách. VĚTA zní (obr. 7):



Obr. 7

Je dán trojúhelník ABC, v jeho rovině přímka p, která protíná přímky AB, BC, CA po řadě v bodech C', A', B', z nichž žádný nesplyne s žádným z vrcholů A, B, C. Pak pro dělicí poměry platí:

$$(ABC') \, . \, (BCA') \, . \, (CAB') = 1 \, . \qquad (16)$$

(Stojí za upozornění, že dělicí poměry jsou „tvořeny cyklicky“.)

Nejelegantnější DŮKAZ Menelaovy věty se opírá o *Mongeovu větu* o skládání stejnolehlostí. Je třeba si ovšem uvědomit, že konstantu homotetie se středem S, která převádí bod $X \neq S$ do bodu $X' \neq S$, je dělicí poměr $(X'XS)$ (v tomto uspořádání bodů). Jak je vidět, předpokládá tato partie geometrie pevné zakotvení pojmu dělicího poměru a jeho vlastností.

Sestrojíme tedy dvě stejnolehlosti $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ dané středy a dvojicemi:

$$\mathbf{H}_1(C' \to C',\ B \to A),\ \mathbf{H}_2(B' \to B',\ A \to C);$$

jejich konstanty jsou $\varkappa_1 = (ABC')$, $\varkappa_2 = (CAB')$. Složením těchto dvou homotetií vznikne podle Mongeovy věty zobrazení $\mathbf{H}_1\,\mathbf{H}_2$, které je stejnolehlostí, neboť platí

$$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\,(A' \to A',\ B \to C)\,.$$

($\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ nemůže být ani identitou ani posunutím.)

Stejnolehlost $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ má konstantu $\varkappa_3 = (CBA')$, pro kterou podle Mongeovy věty platí

$$\varkappa_1 \,.\, \varkappa_2 = \varkappa_3\,.$$

Je tedy

$$(ABC')\,.\,(CAB') = (CBA')\,.$$

Protože však

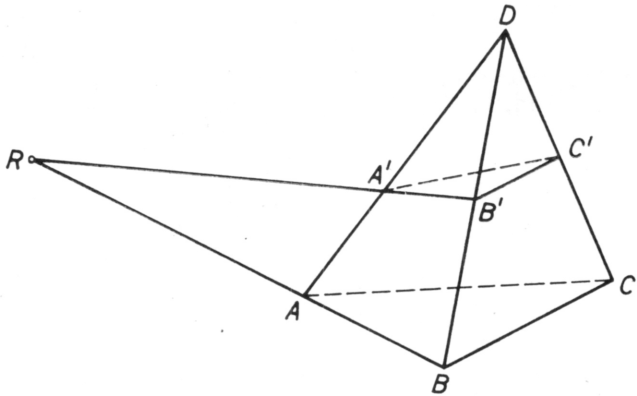
$$(CBA') = \frac{1}{(BCA')}\,,$$

platí (16) .

Důkaz Mongeovy věty lze provést snadno metodou souřadnic (nejlépe s komplexními čísly); méně vhodné jsou jiné důkazy, při kterých je třeba rozlišovat různé případy podle vzájemné polohy bodů (např. všechny tři body A', B', C' mohou ležet vně trojúhelníka ABC).

V dané stereometrické úloze vyjdeme při řešení z rozboru; viz obr. 8. Vyjdeme z takové stěny čtyřstěnu $A'B'C'D$, aby na ni kolmá výška byla v jednoduchém vztahu k některé z výšek daného čtyřstěnu $ABCD$. Je snadné přijít na to, že taková stěna je $A'B'D$. Označíme-li totiž v' velikost na ni kolmé výšky čtyřstěnu $A'B'C'D$ a označíme-li v velikost výšky čtyřstěnu $ABCD$ spuštěné z vrcholu C na stěnu ABD, platí

$$v' = \frac{1}{2}\,v\,, \tag{17}$$



Obr. 8

neboť C' je střed úsečky CD. Vzorec (17) si dokážete snadno z podobných trojúhelníků.

Označíme-li po řadě V, V' objemy čtyřstěnů $ABCD$, $A'B'C'D$, platí

$$V = \frac{1}{3}\,\Delta ABD\,.\,v, \quad V' = \frac{1}{3}\,\Delta A'B'D\,.\,v',$$

tj. podle (17)

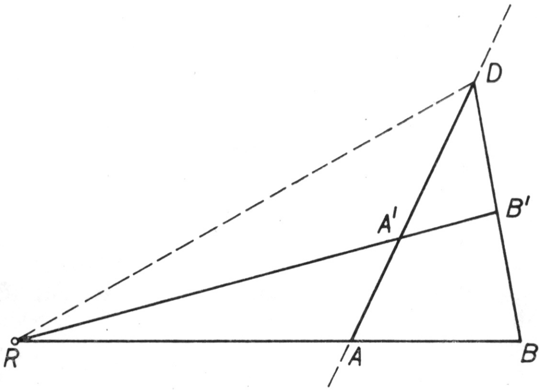
$$\frac{V'}{V} = \frac{\Delta A'B'D}{2\Delta ABD}; \tag{18}$$

přitom ΔABD, $\Delta A'B'D$ značí obsahy příslušných trojúhelníků. Použijeme věty Menelaovy (obr. 9), a to na $\Delta RBB'$ a přímku AD. Pak platí pro dělicí poměry:

$$(RBA)\,.\,(BB'D)\,.\,(B'RA') = 1\,,$$

tj.

$$(-n)\,.\,2\,.\,(B'RA') = 1\,,$$



Obr. 9

tj. podle vlastností dělicího poměru postupně

$$(B'RA') = -\frac{1}{2n},\ (RB'A') = -2n\,,$$

$$(RA'B') = 1 + 2n\,,$$

$$RB' = (2n + 1)\,.\,A'B'\,. \tag{19}$$

Dále je podle (19)

$$\frac{\Delta A'B'D}{\Delta RB'D} = \frac{A'B'}{RB'} = \frac{1}{2n + 1}\,,$$

$$\Delta A'B'D = \frac{1}{2n + 1}\,.\,\Delta RB'D = \frac{1}{2(2n + 1)}\,\Delta RBD =$$

$$= \frac{n + 1}{2(2n + 1)}\,\Delta ABD\,,$$

neboli

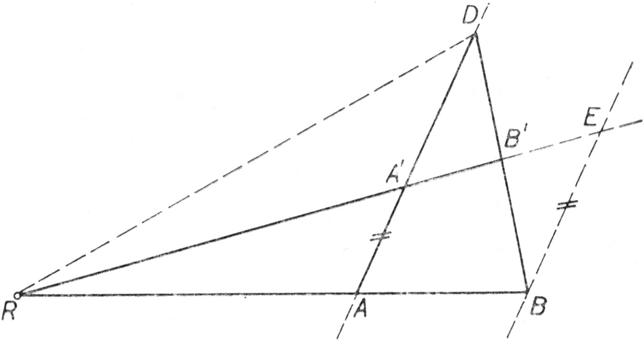
$$\frac{\Delta A'B'D}{\Delta ABD} = \frac{n+1}{2(2n+1)}. \tag{20}$$

Přitom užíváme stále VĚTY: Mají-li dva trojúhelníky strany délek s_1, s_2 ležící v téže přímce a mají-li společný vrchol proti těmto stranám, pak jejich obsahy jsou v poměru $s_1 : s_2$.

Spojením vzorců (18), (20) dostaneme výsledek.

Chceme-li se vyhnout Menelaově větě, odvodíme vzorec (19) způsobem obdobným odvození vlastností těžnic trojúhelníka; je užitečné provést ještě další zobecnění.

V naší situaci je postup následující (obr. 10) *): Protože je $AD \parallel BE$, $BB' = DB'$, je také $A'B' = B'E$. Na druhé



Obr. 10

*) Bod B nemusí být středem strany BD; *středovou symetrii* pak vystřídá *homotetie.*

straně plyne z předpokladu a z podobnosti trojúhelníků $\Delta RAA'$, ΔRBE vztah

$$\frac{RA'}{A'E} = \frac{RA}{AB} = n\,,$$

$$RA' = n\,.\,A'E = 2n\,.\,A'B'\,,$$
$$RB' = RA' + A'B' = (2n + 1)\,.\,A'B'\,,$$

což je vzorec (19).

Způsobem, který je naznačen na obr. 10, můžeme odvodit Menelaovu větu.

3. *KATEGORIE C*

C–P–1

a) Sestrojte graf funkce

$$y = [x + 2] + [2x - 1]\,.$$

b) Určete všechna řešení rovnice

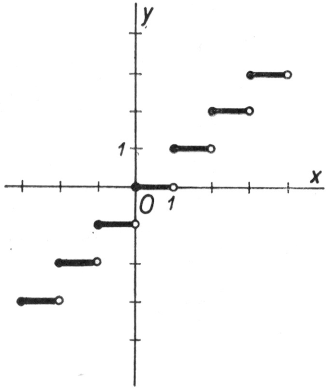
$$[x + 2] + [2x - 1] = [x]\,.$$

Přitom symbol $[a]$ značí „*celou část z čísla a*", tj. takové celé číslo b, pro které platí $b \leqq a < b + 1$.

Tato úloha otvírá tematiku funkce „celá část z reálného čísla". Je to tematika, která je na hranici funkční a číselné teorie.

Promyslete si definici funkce $x \mapsto [x]$; $[x]$ je celé číslo, pro které platí $[x] \leqq x < [x] + 1$. Tímto předpisem je každému reálnému číslu x přiřaděno jediné číslo $[x]$. Jde tedy o *relaci*, která je *funkcí* (zobrazením). Její definiční obor je **R** (tj. množina všech reálných čísel), obor jejích funkčních hodnot je množina všech celých čísel. Kartéz-

Obr. 11



ský graf funkce $x \mapsto [x]$ jsou známé „*schody*" (obr. 11).

Levý krajní bod každé úsečky náleží grafu funkce $x \mapsto [x]$, pravý nikoli. Ještě si uvědomíme, že moderní výklad matematické analýzy na střední škole by měl vycházet z topologických pojmů a zejména ze dvou důležitých typů funkcí: *schodových funkcí* (fonctions en escalier), které jsou zobecněním funkce $x \mapsto [x]$, a z nich odvozených *etážových funkcí* (fonctions étagées). Představa budoucího vyučování matematice nás nutí, abychom — aspoň v matematické olympiádě — věnovali pozornost funkci $x \mapsto [x]$.

Úlohy a), b) z C–P–1 na sebe navazují. V úloze a) nepředpokládáme, že byste uměli napsat formuli pro funkci $x \mapsto [x + 2] + [2x - 1]$ v intervalu $\left\langle \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha + 1}{2} \right)$. Je ovšem patrné, že „*schody*" budou mít délku $\frac{1}{2}$ a že v uvedených intervalech bude funkce konstantní. První úkol bude formulován asi takto: určete funkční hodnoty vyšetřované funkce v intervalech

$$\left\langle -\frac{5}{2}; -2 \right), \left\langle -2; \ -\frac{3}{2} \right), \left\langle -\frac{3}{2}; \ -1 \right),$$

$$\left\langle -1; \ -\frac{1}{2} \right), \left\langle -\frac{1}{2}, \ 0 \right),$$

$$\left\langle 0; \frac{1}{2}\right), \left\langle \frac{1}{2}, 1\right), \left\langle 1; \frac{3}{2}\right), \left\langle \frac{3}{2}; 2\right), \left\langle 2; \frac{5}{2}\right).$$

Snad bychom ještě mohli určit, kdy je „*skok*“ funkčních hodnot 1, kdy 2.

Pro řešení úlohy b) sestrojíme ještě do téhož obrázku graf funkce $x \mapsto [x]$ a zjistíme průnik obou grafů. Dostaneme všecky body $[x;-1]$ příslušící k intervalu $-\frac{1}{2} \leqq x < 0$.

Pak bychom měli dokázat, že mimo uvedený interval není žádné řešení rovnice z úlohy b). Výpočet vychází z definice funkce $x \mapsto [x]$ a je asi následující:

$$\begin{aligned} \Phi &= [x + 2] + [2x - 1] - [x] > \\ &> x + 1 + 2x - 2 - x = 2x - 1\,, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} -\Phi &= [x] - [x + 2] - [2x - 1] > \\ &> x - 1 - (x + 2) - (2x - 1) = -2x - 2\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Podle (1) pro všechna $x > \frac{1}{2}$ je $2x - 1 > 0$, tj. $\Phi > 0$.

Podle (2) pro všechna $x < -1$ je $-2x - 2 > 0$, tj. $-\Phi > 0$.

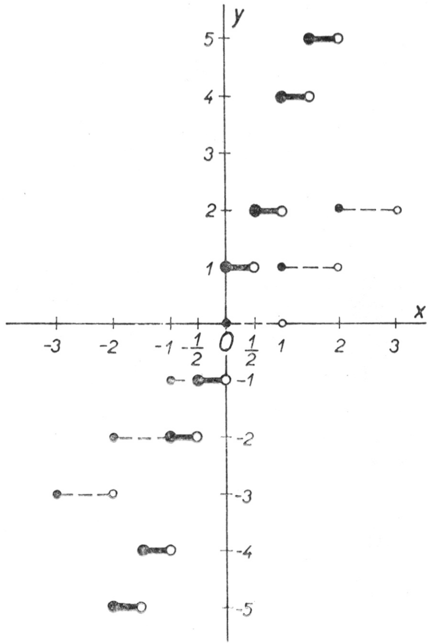
Řešení můžeme tedy hledat jen v intervalu $\left\langle -1; \frac{1}{2}\right\rangle$.

Grafické provedení je na obr. 12.

C–P–2

Určite všetky také kvadratické funkcie $f(x)$, ktoré pre všetky reálne čísla x splňujú podmienku

$$f(2x + 1) = 4f(-x)\,.$$



Obr. 12

Úloha C–P–2 se týká další důležité kategorie funkcí — funkcí polynomických. Máme nalézt všechny kvadratické funkce $f(x)$, vyhovující funkcionální rovnici

$$f(2x + 1) = 4f(-x) . \qquad (3)$$

Impulsem k řešení je zopakování věty o rovnosti dvou polynomických funkcí. Rovnost

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

platí pro všecka x, právě když

$$n = p,\ a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots,\ a_n = b_p\ .$$

Budiž $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

Podmínka (3) zní pak po úpravě (nahradíme x postupně výrazy $2x + 1$, $-x$)

$$(4a + 6b)x + (a + b - 3c) = 0\ .$$

Řešením je množina funkcí $x \mapsto c\,.\,(9x^2 - 6x + 1)$, $c \neq 0$.

Nezapomeňte na ZKOUŠKU! Bylo by užitečné řešit i variantu funkcionální rovnice (3), např. $f(2x + 1) = f(x - 1) + x^2$.

C–P–3

a) Zjistěte, kolikrát připadl, resp. připadne, v letech 1601 až 2000 Nový rok na jednotlivé dny týdne.

b) Najděte stejné údaje pro léta 1801—2200. (Předpokládáme, že nedojde k reformě kalendáře.)

Tato úloha je v podstatě hrou s kalendářem — matematicky se zbytkovými třídami *modulo* 7. Označme x den v týdnu, na který připadl 1. leden 1601 (rok 1601 je už po zavedení gregoriánského kalendáře, tj. 15. 10. 1582). Další dny v týdnu budeme označovat $x + 1, \ldots, x + 6$. Např. je-li x pondělí (a tak tomu skutečně bylo), platí tabulka:

x	$x+1$	$x+2$	$x+3$	$x+4$	$x+5$	$x+6$
Po	Ú	St	Č	Pá	So	N

Počet dní v nepřestupném roce je $365 = 7 . 52 + 1$, v přestupném roce $366 = 7 . 52 + 2$. Proto *„umístění“* Nového roku v letech 1601 až 1628 bylo následující:

(T_1)

1601	x	1605	$x+5$	1609	$x+3$	1613	$x+1$	1617	$x+6$	1621	$x+4$	1625	$x+2$
1602	$x+1$	1606	$x+6$	1610	$x+4$	1614	$x+2$	1618	x	1622	$x+5$	1626	$x+3$
1603	$x+2$	1607	x	1611	$x+5$	1615	$x+3$	1619	$x+1$	1623	$x+6$	1627	$x+4$
1604	$x+3$	1608	$x+1$	1612	$x+6$	1616	$x+4$	1620	$x+2$	1624	x	1628	$x+5$

Doporučujeme vypsat tuto tabulku. Pro další skupiny po 28 letech 17. století se „umístění“ Nového roku opakuje. Protože $100 = 3 . 28 + 16$, dostali bychom při rozepsání pro celé 17. století tři shodné tabulky $(\mathbf{T}_1)$ a ještě první čtyři sloupce — ovšem s upravenými zápisy letopočtů. (Poslední čtyři sloupce by zahrnovaly roky 1685 až 1700.)

V každé tabulce $(\mathbf{T}_1)$ se vyskytuje každý z dní x až $x + 6$ právě čtyřikrát; připojíme-li ještě první čtyři sloupce tabulky $(\mathbf{T}_1)$, tj. léta 1685 až 1700 — je výskyt dní x, $x + 1, \ldots, x + 6$ jako Nových roků v 17. století dán tabulkou $(\mathbf{T}_2)$.

(T_2)

	x	$x + 1$	$x + 2$	$x + 3$	$x + 4$	$x + 5$	$x + 6$
1601 – 1684	12	12	12	12	12	12	12
1685 – 1700	2	3	2	3	2	2	2
1601 – 1700	14	15	14	15	14	14	14

Začíná-li rok 1601 dnem x, začíná rok 1701 dnem $x + 5$, rok 1801 dnem $x + 3$, rok 1901 dnem $x + 1$; to vyčteme z tabulky ($\mathbf{T}_1$). Je tedy umístění Nového roku v letech 1601 až 2000 toto (x je Nový rok 1601):

(T_3)

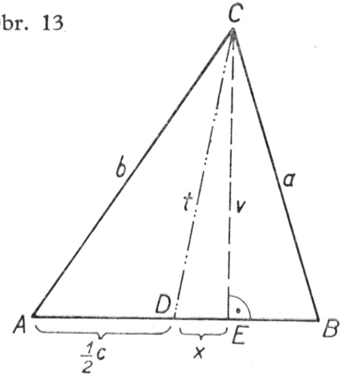
Nový rok / Století	x	$x + 1$	$x + 2$	$x + 3$	$x + 4$	$x + 5$	$x + 6$
17.	14	15	14	15	14	14	14
18.	14	15	14	14	14	14	15
19.	14	14	14	14	15	14	15
20.	14	14	15	14	15	14	14
Celkem	56	58	57	57	58	56	58

Zbývá zjistit, který den v týdnu je x. Určíme 1.1. 1901; je to den $x + 1$. Proto také 1. 1. 1957 je $x + 1$. Podle tabulky (T_1) jsou Novými roky 1957 až 72 postupně dny: $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$ | $x + 6$, x, $x + 1$, $x + 2$ | $x + 4$, $x + 5$, $x + 6$, x | $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$, $x + 5$. Protože podle kalendáře pro rok 1972 je $x + 5$ sobota, je x pondělí.

ODPOVĚĎ podle tabulky (T_3): V letech 1601 až 2000 je Nový rok 56krát v pondělí a v sobotu, 57krát ve středu a ve čtvrtek a 58krát v úterý, pátek a v neděli.

Domníváme se, že úloha, která se řeší spojením pokusů a dedukce je velmi vhodná pro kategorii C. Impulsy bylo třeba dát pro tabelování částečných výsledků (viz tabulky T_1, T_2, T_3). Snad by bylo i užitečné seznámit se s mechanismem, pomocí něhož můžeme určit den v týdnu, na který padne libovolné datum v minulosti i budoucnosti (platí dokonce i pro data juliánského kalendáře). V každém případě je úloha C–P–3 vhodnou příležitostí k zopakování nejdůležitějších znalostí o kalendáři (např. přechod od juliánského kalendáře ke kalendáři gregoriánskému 15. října 1582 a důvody k tomu).

Obr. 13



C–P–4

Ak pre dĺžky strán a úhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABCD$ platí

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2,$$

potom je tento štvoruholník rovnobežníkom. Dokážte.

Průpravou pro řešení této úlohy by asi mělo být uvedení formule pro délku těžnice trojúhelníka, což je zvláštní případ *věty Stuartovy*. Na obr. 13 je $a < b$, úsečkami CD, CE jsou znázorněny těžnice a výška trojúhelníka ABC. Platí

$$AE = \frac{c}{2} + x,\ BE = \left|\frac{c}{2} - x\right|. \qquad (4)$$

Vztahy (4) platí, i když je $\sphericalangle ABC \geqq 90°$. Podle Pythagorovy věty je

$$t^2 = v^2 + x^2,\ a^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2,\ b^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2} + x\right)^2. \tag{5}$$

Sečtením druhé a třetí rovnosti (5) dostaneme

$$a^2 + b^2 = 2v^2 + \frac{c^2}{2} + 2x^2\,. \tag{6}$$

Spojením první rovnosti (5) a (6) vyjde

$$a^2 + b^2 = 2t^2 + \frac{c^2}{2}$$

a odtud hledaná formule

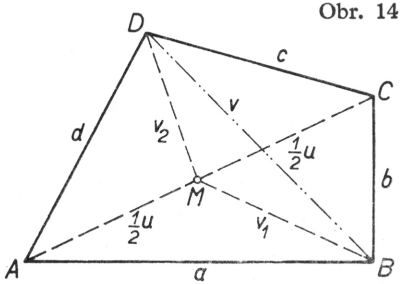
$$t^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2\,. \tag{7}$$

Ověříme ještě, že (7) platí i pro $a > b$, $a = b$ (výměna a, b, resp. výška rovnoramenného trojúhelníka).

Pomocí formule (7) můžeme např. vyšetřovat množinu všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů (A, B) stálý součet druhých mocnin vzdáleností.

Formule (7) a obr. 14 mohou být dostatečným podnětem pro řešení úlohy C–P–4. Na obr. 14 je $AM = CM = \dfrac{u}{2}$,

Obr. 14



$BM = v_1$, $DM = v_2$, $BD = v$. Podle (7) dostaneme

$$v_1^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}u^2, \quad v_2^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2) - \frac{1}{4}u^2;$$

sečtením

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \frac{1}{2}u^2 . \tag{8}$$

Podle předpokladu je

$$u^2 + v^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2; \tag{9}$$

spojením (8) a (9)

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{2}v^2 . \tag{10}$$

Podle neostré trojúhelníkové nerovnosti je $v_1 + v_2 \geqq v$, tj.

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \geqq v^2 . \tag{11}$$

Spojením (10), (11) dostaneme

$$(v_1 - v_2)^2 \leqq 0 ,$$

tj. $v_1 - v_2 = 0$, a dále podle (10)

$$v_1 = v_2 = \frac{v}{2} .$$

Dokázali jsme, že úhlopříčky konvexního čtyřúhelníka *ABCD* se navzájem půlí; *ABCD* je tedy rovnoběžník. Měli byste sami zjistit, kterou charakteristickou vlastnost rovnoběžníka je třeba zvolit, abyste dokázali, že konvexním čtyřúhelníkem splňujícím podmínku (9) je rovnoběžník. Zjednodušení důkazu se dosáhne kosinovou větou, která však nepřichází v úvahu pro kategorii *C*.

Dejme si ještě otázku, zda platí *věta obrácená*, tj. zda každý rovnoběžník splňuje podmínku (9). Možná, že by bylo vhodné, začít touto otázkou.

Z–P–1

Nejmenší přirozené číslo x, pro které je $1260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

a) 1470, b) 1260^2, c) 7350.

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

Úloha Z–P–1 má připomenout význam rozkladu přirozeného čísla v součin provočinitelů pro řešení některých jednoduchých úloh z číselné teorie. Vyjdeme z VĚTY: Přirozené číslo $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n}$ je k-tou mocninou přirozeného čísla (k přirozené), kde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jsou navzájem různá prvočísla, právě když všecky exponenty λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou násobky čísla k.

V jednom směru je věta evidentní; její obrácení se dokáže následujícím způsobem: Je-li

$$p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n} = (q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \ldots q_m^{\mu_m})^k, \tag{1}$$

kde prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i prvočísla $q_1, q_2, \ldots, q_m$ jsou navzájem různá, upravíme (1) na tvar

$$p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n} = q_1^{k\mu_1} q_2^{k\mu_2} \ldots q_m^{k\mu_m} .$$

Z věty (V) o jednoznačném vyjádření přirozeného čísla jako součinu mocnin prvočinitelů vyplývá

$$n = m,\ p_1 = q_1,\ p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_m$$

(při vhodném označení)

$$\lambda_1 = k\mu_1,\ \lambda_2 = k\mu_2, \ldots, \lambda_n = k\mu_m .$$

Tím je dokázána obrácená věta.

Při této příležitosti věnujte trochu pozornosti větě (V), kterou znáte a které běžně užíváte např. při vyhledávání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku několika čísel.

Celkem snadno můžeme předvést obdobnou situaci, za které jednoznačnost vyjádření neplatí; tak se ukáže, že věta (V) není tak samozřejmá, jak se na první pohled zdá.

Množina $\mathbf{S}$ všech kladných sudých čísel obsahuje podmnožinu $\mathbf{Z}$ všech čísel tvaru $2k$, kde k je kladné liché číslo;

$$\mathbf{Z} = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots\} .$$

Prvky množiny $\mathbf{Z}$ nazveme základními čísly (je to obdoba prvočísel). Každé číslo $x \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{Z}$ je složené, tj. dá se vyjádřit jako součin aspoň dvou základních čísel. Toto vyjádření však není vždy jediné, jak ukazuje příklad:

$$60 \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{Z};\ 60 = 2 \,.\, 30 = 10 \,.\, 6 .$$

Můžeme ještě rozřešit obdobnou úlohu jako Z–P–1, např.: Máme určit nejmenší přirozené číslo x, pro které je $720 \,.\, x^3$ čtvrtou mocninou přirozeného čísla.

Platí $720 = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5$; má-li být číslo x co nejmenším číslem požadované vlastnosti, bude mít jen prvočinitele 2, 3 a 5. Nechť je $x = 2^a 3^b 5^c$; pak je $x^3 = 2^{3a} 3^{3b} 5^{3c}$ a dále

$$720x^3 = 2^{4+3a} \,.\, 3^{2+3b} \,.\, 5^{1+3c} . \tag{2}$$

Přitom a, b, c jsou nezápornými celými čísly, z nichž aspoň jedno je kladné. Na pravé straně (2) je čtvrtá mocnina přirozeného čísla, právě když každý z exponentů $4 + 3a$, $2 + 3b$, $1 + 3c$ je co nejmenším násobkem čtyř. Odtud dostaneme třeba experimentálně $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ a odtud $x = 45$. Skutečně je

$$720 \,.\, 45^3 = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, (3^2 \,.\, 5)^3 = 2^4 \,.\, 3^8 \,.\, 5^4 =$$
$$= (2 \,.\, 3^2 \,.\, 5)^4 = 90^4.$$

Úlohy tohoto druhu jsou i vhodnou příležitostí k procvičování výpočtů s mocninami.

Formulace úlohy Z–P–1 je dost obvyklá v zahraničí: z několika odpovědí se má vybrat správná, popřípadě odůvodnit nesprávnost ostatních. Někdy bývají mezi uvedenými odpověďmi dvě správné, někdy jsou všecky nesprávné. Některá odpověď svádí řešitele, aby ji chápal (neoprávněně) jako správnou, např. v úloze Z–P–1 odpověď b); číslo 1260^2 není nejmenší číslo požadované vlastnosti. Celkem rychle lze také zjistit nesprávnost odpovědi a): dekadické vyjádření součinu 1260 . 1470 končí trojčíslím 200; takové číslo však nemůže být třetí mocninou čísla, jehož dekadické vyjádření končí nulou.

Úloha Z–P–1 je podnětem k formulování úlohy obecnější a ke zjištění, zda je řešitelná. Jsou dána přirozená čísla N, r, s; máme zjistit, zda existují přirozená čísla x, y tak, že platí

$$N \,.\, x^r = y^s.$$

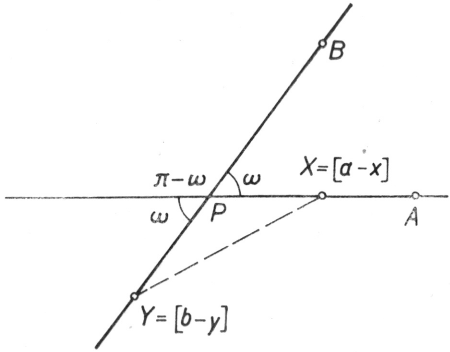
Z–P–2

Zdeněk a Jirka bydlí v domech A, B ve dvou navzájem kolmých ulicích; domy A, B jsou od křižovatky K obou ulic po řadě vzdáleny 500 m a 400 m. V témže okamžiku vyjedou oba chlapci na kolech od svého bydliště po ulicích AK, BK směrem ke křižovatce, kterou projedou.

Zdeněk jede průměrnou rychlostí 4 m/s, Jirka průměrnou rychlostí 3 m/s.

Za kolik vteřin od startu bude jejich vzdušná vzdálenost nejmenší a kolik metrů to bude?

Tato úloha je jednou z variant známé úlohy. Po dvou různoběžných přímkách se pohybují (zpravidla rovnoměrným pohybem) dva body; máme určit jejich vzdálenost v daném okamžiku. Na obr. 15 je znázorněna situ-



Obr. 15

ace; v čase $t = 0$ jsou oba pohybující se body X, Y v polohách A, B, jejichž vzdálenosti od průsečíku P daných přímek jsou $AP = a$, $BP = b$ ($a > 0$, $b > 0$). V čase t vykonal bod X dráhu $x > 0$, bod Y dráhu $y > 0$. Dané přímky pokládáme za osy souřadnic s počátkem P; pak je poloha bodu X, resp. Y, v čase t určena souřadnicemi $a - x$, resp. $b - y$. Označíme-li ω velikost úhlu $\sphericalangle APB$, je $\omega = 90°$ a podle Pythagorovy věty platí

$$z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 \ . \tag{3}$$

Vzorec (3) platí i v případě, kdy je jedno z čísel $a - x$, $b - y$ nekladné nebo kdy jsou obě nekladná; to si snadno ověříte, uvážíte-li, že úhel $\sphericalangle APB$ pak nahradíme úhlem vedlejším nebo vrcholovým.

Pohyb bodu X i pohyb bodu Y je rovnoměrný s rychlostí 4 m/s, popř. 3 m/s; proto platí $x = 4t$, $y = 3t$ (t je čas v sekundách) a po dosazení do (3) za $a = 500$ a $b = 400$ vyjde $z^2 = (500 - 4t)^2 + (400 - 3t)^2$ neboli $z^2 = (5t - 640)^2 + 400$. Funkce z^2 i z nabude nejmenší hodnoty pro $5t - 640 = 0$, tj. $t = 128$ vteřin. Nejmenší vzdálenost bodů X, Y je pak $z = \sqrt{400} = 20$ (metrů).

Pro vyspělejší čtenáře rozřešíme úlohu ještě v případě, kdy je $\omega \neq 90°$ (obr. 15). Pak platí podle kosinové věty

$$z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 - 2(a - x)(b - y)\cos\omega. \quad (3')$$

Je-li pohyb bodu X i pohyb bodu Y rovnoměrný s rychlostí v_1, resp. v_2, je $x = v_1 t$, $y = v_2 t$ a po dosazení do (3′) dostaneme

$$z^2 = k_1 t^2 + k_2 t + k_3\,, \quad (4)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\omega,\\ k_2 &= 2(av_2\cos\omega + bv_1\cos\omega - av_1 - bv_2)\,,\\ k_3 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega\,. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned} k_1 &= (v_1 - v_2)^2 + 2v_1 v_2(1 - \cos\omega) =\\ &= (v_1 - v_2)^2 + 4v_1 v_2 \sin^2\frac{\omega}{2}\,, \end{aligned}$$

je $k_1 = 0$, právě když $v_1 = v_2$ a $\sin\dfrac{\omega}{2} = 0$, což pro $0 < \omega < \pi$ nikdy nenastane. Je tedy funkce (4) vždy kvadratická (to je důležitý teoretický výsledek).

Můžeme rozřešit ještě jednodušší úlohu: dráhy bodů budou opět kolmé přímky, $AP = 500$(m), $B = P$, $v_1 = 4$(m/s), $v_2 = 3$ (m/s). Vyjde

$$z^2 = 250\,000 - 4\,000t + 25t^2$$

neboli

$$z^2 = 25[(t - 80)^2 + 3600]\,.$$

Minimum nastane pro $t = 80$ vteřin a je to $z = \sqrt{25\,.\,3600} = 5.60 = 300$ (metrů).

Z–P–3

Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 = (S; r_1)$ a $k_2 = (S; r_2)$, kde $r_1 < r_2$. Na kružnici k_1 zvolíme dva různé body A, P a sestrojíme přímku kolmou k AP procházející bodem P. Průsečíky téže přímky s kružnicí k_2 označme B, C.

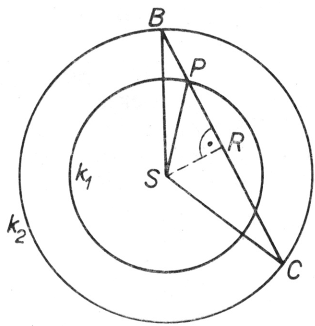
Vyjádřete

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

pomocí r_1 a r_2.

Úloha Z–P–3 přímo vybízí k podrobnějšímu vyšetřování tětiv dvou soustředných kružnic. Jsou-li dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 o poloměrech r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$, je-li BC tětiva kružnice k_2, která obsahuje bod P kružnice k_1, pak platí

$$PB \,.\, PC = r_2^2 - r_1^2 \,. \tag{6}$$



Obr. 16

Vzorec (6) plyne z určení mocnosti bodu P vzhledem ke kružnici k_2, ale lze ho odvodit primitivněji.

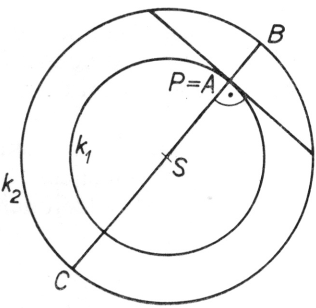
Platí při označení z obr. 16:

$PB = BR - PR$, $PC = CR + PR = BR + PR$,
$PB \,.\, PC = BR^2 - PR^2 = r_2^2 - SR^2 - (r_1^2 - SR^2) = r_2^2 - r_1^2$.

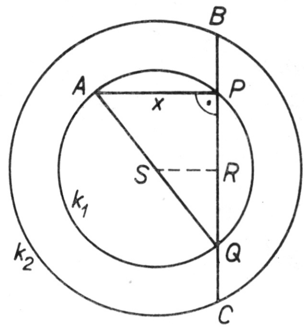
Vzorec (6) platí i v případě, kdy tětiva BC obsahuje střed S. Při řešení úlohy Z–P–3 byste měli zkoumat zvláštní případ, kdy $S \in AP$. Zde vyjde bezprostředně

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)\,. \tag{7}$$

Nemůže však být $S \in BC$, neboť by nemohly vzniknout dva různé body A, P na kružnici k_1, jak žádá text úlohy. Kdybychom však připustili $A = P$ a přímku AP nahradili tečnou kružnice k_1 v bodě P, bylo by $AP = 0$, $BP = r_2 - r_1$, $CP = r_2 + r_1$, platil by tedy opět vzorec (7). K tomuto případu bychom se měli na konci vrátit z hlediska spojitosti (obr. 17a).



Obr. 17a



Obr. 17b

V případě naznačeném na obr. 17b vznikne podle obrácení Thaletovy věty pravoúhlý trojúhelník APQ s přeponou AQ délky $2r_1$. Platí

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= AP^2 + (CP - BP)^2 + 2BP\,.\,CP = \\ &= AP^2 + (CP - CQ)^2 + 2BP\,.\,CP = \\ &= AP^2 + PQ^2 + 2BP\,.\,CP\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Podle Pythagorovy věty je $AP^2 + PQ^2 = AQ^2 = 4r_1^2$;

podle vzorce (6) je $BP \,.\, CP = r_2^2 - r_1^2$; dosadíme-li do (8), dostaneme

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 4r_1^2 + 2r_2^2 - 2r_1^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)\,,$$

což je opět vzorec (7).

Tím je dokázáno, že při libovolné poloze sečny AP kružnice k_1 platí (7); platí však (v důsledku spojitosti) i tehdy, když sečna AP přejde v tečnu kružnice k_1.

Tento způsob odvození vzorce (7) se zdá dosti umělý; při něm však získáme zajímavý vzorec (6) a přiučíme se často používanému obratu ve výpočtu (8). Máme-li postupovat takto, musíme vyčlenit lemma (6), uvědomit si trik (8) a vyšetřit speciální případy.

Primitivnějším způsobem je prostý výpočet pomocí souřadnic (to ovšem účastníci kategorie Z většinou neumějí) nebo je možno obejít tento postup prostým planimetrickým výpočtem.

Označíme R patu kolmice spuštěné z bodu S na přímku BC (R je střed úsečky PQ, viz obr. 17b). Označíme-li ještě $AP = x$, je podle vlastnosti střední příčky trojúhelníka $SR = \dfrac{x}{2}$. Dále je

$$PB = RB - PR,\ PC = RC + PR = RB + PR\,. \tag{9}$$

Pak je podle Pythagorovy věty

$$RB^2 = r_2^2 - SR^2,\ PR^2 = r_1^2 - SR^2. \tag{10}$$

Spojíme-li (9) a (10), dostaneme

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = x^2 + 2RB^2 + 2PR^2 =$$
$$= x^2 + 2r_2^2 - \frac{x^2}{2} + 2r_1^2 - \frac{x^2}{2}\,,$$

tj.

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2(r_1^2 + r_2^2)\,.$$

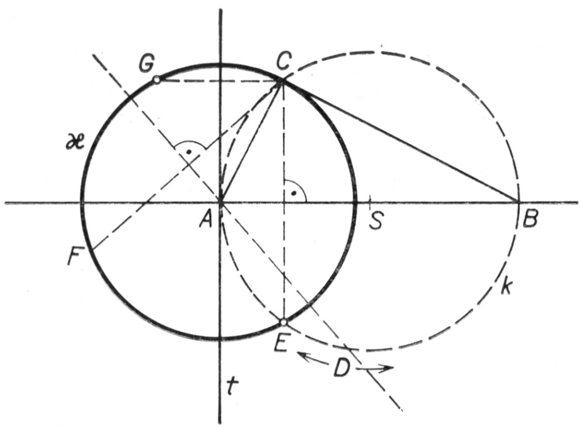
Nepoužijeme-li metody souřadnic, musíme ovšem zvlášť vyšetřit případ $S \in BC$, tj. $S = R$.

Z–P–4

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Ke každému bodu D kružnice opsané trojúhelníku ABC ($D \neq A$, $D \neq B$) sestrojíme bod E souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB a bod F souměrně sdružený s bodem C podle přímky AD.

Vyšetřte geometrické místo a) bodů E; b) bodů F.

Tuto snadnou úlohu můžete řešit v podstatě bez pomoci. Uvědomíte si, že přímka AB je pevná, a tudíž i bod E je pevný; naproti tomu přímka AD probíhá svazek se



Obr. 18

středem A s výjimkou přímky AB a tečny t vedené v bodě A ke kružnici k opsané trojúhelníku ABC. Bod F proběhne tedy kružnici $\varkappa$ se středem A a poloměrem AC s vyloučením dvou bodů: bodu E a bodu G souměrně sdruženého s bodem C podle přímky t (obr. 18).

Lze rozřešit i obdobnou úlohu: za stejné situace vyšetřit množiny všech bodů a) E', b) F', kde E', resp. F', jsou paty kolmic spuštěných z bodu C na přímku AB, resp. AD.

Ještě lepší by bylo ukázat si vyšetření takovéto úpatnice na úloze hodně zobecněné, např.: Je dán trojúhelník ABC, ve vnitřku poloroviny opačné k BCA je dána kružnice k_0. Vyšetřte množinu $\mathbf{M}$ všech pat kolmic X', spuštěných z vrcholu C na přímky AX, když bod X probíhá kružnici k_0.

Množina $\mathbf{M}$ je v tomto případě průnikem kružnice sestrojené nad průměrem AC s úhlem $\sphericalangle T_1AT_2$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku tečen vedených z vrcholu A ke kružnici k_0. Místo pat kolmic můžeme zvolit jako v úloze Z–P–4 body souměrně sdružené s vrcholem C podle přímek AX. Úloha připouští velké množství různých snadných variant.