21. ročník matematické olympiády

IV. Súťažné úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 21. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1971-1972. 14. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. pp. 125–155.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404625

IV. Súťažné úlohy II. kola

1. *KATEGÓRIA A*

A–II–1a

1a. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n > 1$ platí

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\right)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=\frac{(n+1)^2}{4n}. \quad \text{(6 bodov)}$$

RIEŠENIE. Označme $p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^3}\right)$.

Zrejme platí:

$$1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^3}=\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Preto je $p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\left(1-\frac{1}{k}\right)=$

$$=\left[\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^2\cdot\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Označme $r_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $s_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Platí:
$$r_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{n} (k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} =$$
$$= \frac{n+1}{2}.$$

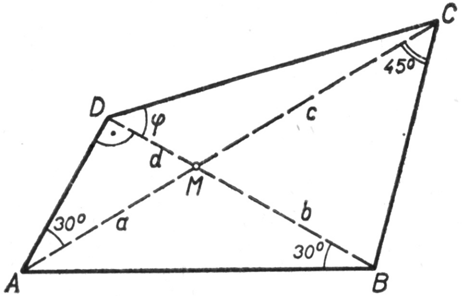
Analogickým výpočtom dostaneme $s_n = \frac{1}{n}$. Z toho konečne máme

$$p_n = r_n^2 . s_n = \frac{(n+1)^2}{4n},$$

čo sme mali dokázať.

A-II-1b

1b. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v bodě M. Jsou dány velikosti úhlů $\sphericalangle DAM = 30°$, $\sphericalangle ADM = 90°$, $\sphericalangle ABM = 30°$, $\sphericalangle BCM = 45°$. Vypočtěte velikosti všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka $ABCD$. (6 bodů)



Obr. 39

ŘEŠENÍ (obr. 39). Označíme délky úseček $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$, $DM = d$. Dále označíme $\sphericalangle\ CDM = \varphi$ a vypočteme $\sphericalangle\ DCM = 60° - \varphi$, $\sphericalangle\ CBM = 75°$, $\sphericalangle\ BAM = 30°$. Z $\triangle\ ADM$, $\triangle\ ABM$ plyne

$$a = 2d, \quad b = a. \tag{1}$$

Sinová věta pro $\triangle\ CDM$ dá

$$\frac{d}{c} = \frac{\sin(60° - \varphi)}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Sinová věta pro $\triangle\ BCM$ dá

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 75°}{\sin 45°}. \tag{3}$$

Znásobením (2), (3) dostaneme vzhledem k (1)

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin(60° - \varphi)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin 75°}{\sin 45°}$$

a dále vzhledem k (1)

$$\frac{1}{2} = (\sin 60° . \operatorname{cotg}\varphi - \cos 60°) \cdot \frac{\sin 75°}{\sin 45°}$$

čili

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg}\varphi - \frac{1}{2}\right)(\sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°)$$

čili

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{3} . \operatorname{cotg}\varphi - 1)(1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

čili

$$\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})\operatorname{cotg}\varphi = 1 + \sqrt{3} + 2$$

čili

$$(3 + \sqrt{3}) \operatorname{cotg} \varphi = 3 + \sqrt{3}\,.$$

Protože je $0 < \varphi < 180°$ a $\operatorname{cotg} \varphi = 1$, je $\varphi = 45°$. Velikosti vnitřních úhlů jsou $\alpha = 60°$, $\beta = 105°$, $\gamma = 60°$, $\delta = 135°$.

A–II–2a

2a. V rovině je dán kruh **K**. Určete množinu vrcholů A všech vypuklých čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC \leqq BD$ a že celá úhlopříčka BD leží v kruhu **K**. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. Nejprve dokážeme *pomocnou větu*:

Nechť $ABCD$ je vypuklý čtyřúhelník takový, že $AC \leqq BD$. Nechť X je nejbližší bod úsečky BD k vrcholu A [podrobněji: je-li pata Y kolmice spuštěné z bodu A na přímku BD na úsečce BD, je $X = Y$; padne-li Y na prodloužení úsečky BD za bod B (popř. D), je $X = B$ (popř. $X = D$).] Potom je $AX < BD$.

Důkaz. Je-li P průsečík úhlopříček AC a BD, pak je $AX \leqq AP < AC \leqq BD$.

Je-li nyní $ABCD$ čtyřúhelník splňující podmínky úlohy, je $BD \leqq 2r$, kde r je poloměr kruhu **K**. Protože celá úhlopříčka BD leží v **K**, je bod X z pomocné věty v kruhu **K**. Má proto podle této věty bod A od obvodu kruhu **K** vzdálenost menší než $2r$, tedy od středu S kruhu **K** vzdálenost menší než $3r$.

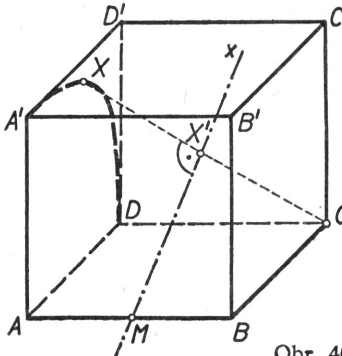
Je-li *obráceně* A takový bod, že $AS < 3r$, pak sestrojíme čtyřúhelník $ABCD$ splňující podmínky úlohy např. takto: Pro $A = S$ stačí zvolit čtverec o straně $\frac{1}{2} r$ s vrcholem v A. Nechť nyní $A \neq S$. Kruh **K**$'$ se středem A a poloměrem $2r$ má s **K** společný nějaký bod P, který je vnitřní i pro **K** i pro **K**$'$ a který neleží na přímce AS. Přímka SP protne hranici kruhu **K** ve dvou protějších bodech B a D, polopřímka AP protne hranici kruhu **K**$'$ v bodě C. Je pak $ABCD$ vypuklý čtyřúhelník s průsečíkem úhlopříček P, zřejmě splňující podmínky úlohy.

ZÁVĚR. Hledaná množina je vnitřek kruhu, který je soustředný s **K** a má trojnásobný poloměr.

A–II–2b

2b. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Určete množinu **M** všech bodů na povrchu krychle, které jsou souměrně sdružené s vrcholem C podle některé přímky, která prochází středem úsečky AB a je kolmá k AB. (5 bodů)

ŘEŠENÍ (obr. 40). Označme M střed hrany AB, x přímku procházející bodem M a kolmou k AB. Bod X sestrojíme tak, aby střed X' úsečky (dvojice) CX ležel na přímce x, a aby bylo $x \perp CX$; pak $MC = MX$. Body X leží tedy na kulové ploše $\varkappa$ se středem M a poloměrem $CM = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, kde a značí délku hrany dané krychle. Přímky x vyplňují rovinu souměrnosti úsečky AB. Body X proto leží v rovině ADA', tedy na kružnici se středem A a poloměrem a v rovině ADA'. Protože X má ležet na povrchu krychle, je X na čtvrtkružnici DA' této kružnice.



Obr. 40

Ukažme, že *obráceně* každý bod X této čtvrtkružnice vyhovuje úloze.

Je totiž skutečně $MX = \frac{a}{2}\sqrt{5} = MC$, takže trojúhelník MXC je rovnoramenný. O středu X' úsečky CX tedy platí, že MX' je kolmé k XC a je tedy MX' osa souměrnosti úsečky CX.

Protože X leží v rovině ADA' a $CX' = \frac{1}{2} CX$, leží střed X' v rovině souměrnosti úsečky AB. Proto MX'($X' \neq M$, protože X leží ve stěně $ADD'A'$) je kolmá k AB. Bod X tedy leží v hledané množině $\mathbf{M}$.

ZÁVĚR. Množina $\mathbf{M}$ je čtvrtkružnice s krajními body A' a D kružnice o středu A a s poloměrem AD ve stěně $ADD'A'$.

A–II–3a

3a. Dokážte, že neexistuje trojica reálnych čísel a, b, c taká, aby rovnica

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

mala práve dva rôzne korene x_1, x_2 a súčasne rovnica

$$bx^2 + cx + a = 0 \tag{2}$$

mala práve dva rôzne korene x_2, x_3 a rovnica

$$cx^2 + ax + b = 0 \tag{3}$$

práve dva rôzne korene x_3, x_1. (7 bodov)

RIEŠENIE. Predpokladejme, že existuje trojica reálnych čísel a, b, c taká, že (1) má korene x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$; (2) má korene x_2, x_3; $x_2 \neq x_3$ a (3) má korene x_3, x_1; $x_3 \neq x_1$. Z toho vyplýva, že musí byť $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Ďalej stadiaľ vyplýva, že čísla x_1, x_2, x_3 musia byť reálne. Ak by napr. x_1 bolo nereálne komplexné číslo, potom musí byť $x_2 = \overline{x_1}$ ($\overline{x}$ znamená číslo komplexne združené k číslu x), pretože sú kořeňmi rovnice s reálnymi koeficientami. Potom však tiež $x_3 = \overline{x_2} = \overline{\overline{x_1}} = x_1$, čo je v spore s tým, že $x_3 \neq x_1$.

Zo známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami kvadratickej rovnice pre reálne čísla x_1, x_2, x_3 dostaneme:

$$\begin{aligned} &b = -a(x_1 + x_2), \quad && c = a\, x_1x_2, \quad && c = -b(x_2 + x_3), \\ &a = bx_2x_3, && a = -c(x_3 + x_1), && b = cx_3x_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Vylúčením čísel a, b, c vždy z dvoch rovníc, ktoré sú v (4) napísané pod sebou, dostaneme

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + 1 &= 0\,, \\ x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + 1 &= 0\,, \\ x_1x_2x_3 + x_3^2x_1 + 1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Vynásobením druhej, štvrtej a šiestej rovnice zo (4) dostaneme $x_1^2x_2^2x_3^2 = 1$ čiže buď $x_1x_2x_3 = 1$, alebo $x_1x_2x_3 = -1$.

Ak do (5) dosadíme $x_1x_2x_3 = 1$, dostaneme, že musí byť $x_3 < 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < 0$, z čoho $x_1x_2x_3 < 0$, ale to je spor.

Ak do (5) dosadíme $x_1x_2x_3 = -1$, dostaneme, že aspoň jedno z čísel x_1, x_2, x_3 sa rovná nule, čo opäť vedie k sporu.

Tým sme dokázali, že trojica reálnych čísel a, b, c uvedených vlastností nemôže existovať.

A–II–3b

3b. Určete všechny nekonečné aritmetické posloupnosti celých čísel

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

takové, aby posloupnost

$$a_0, -a_1, a_2, -a_3, \ldots, (-1)^n a_n, \ldots$$

obsahovala právě 1972 dvojic stejných členů (čísel). (7 bodů)

ŘEŠENÍ. Poněvadž $\{a_n\}$ je aritmetická posloupnost, platí $a_n = a_0 + nd$, kde d je diference.

Budiž p, q, $(p \neq q)$ dvojice indexů taková, že

$$(-1)^p a_p = (-1)^q a_q\,,$$

tj.

$$(-1)^p\,[a_0 + pd] = (-1)^q\,[a_0 + qd]\,. \tag{1}$$

Kdyby bylo $p + q$ sudé, plynulo by z (1)

$$pd = qd,$$

což je možné, jen když $d = 0$ (neboť $p \neq q$). Potom však jsou všechna a_n sobě rovna a tedy v posloupnosti čísel $(-1)^n a_n$ existuje *nekonečně mnoho* dvojic stejných čísel.

Nechť tedy $p + q = s$ je liché. Z (1) pak plyne

$$a_0 + pd = -a_0 - qd\,,$$

tj.

$$2a_0 = -(p + q)\,d = -sd\,.$$

Poněvadž s je liché, musí $a_0 = rs$, kde r je celé, takže

$$d = -2r\,.$$

Přitom nutně $a_0 \neq 0$, a tedy i $r \neq 0$, jinak by bylo $d = 0$; viz předchozí případ.

Budiž (j, k) jiná dvojice indexů taková, že

$$(-1)^j a_j = (-1)^k a_k\,.$$

Stejně jako výše dostaneme

$$2a_0 = -(j + k)\,d\,,$$

a tedy

$$j + k = s\,.$$

Dvojic přirozených čísel p, q s daným součtem s je $\frac{s+1}{2}$, to má být 1972 — tedy

$$s + 1 = 3944\,,$$

$$s = 3943\,.$$

Máme tak $\qquad a_0 = 3943\,r, \quad d = -2r.$

Všechny posloupnosti $\{a_n\}$ s požadovanými vlastnostmi mají tedy tvar

$$a_n = 3943r - 2rn\,,$$

kde r je libovolné celé číslo.

B–II–1a

1a. Do jednotkové kružnice je vepsán vypuklý pětiúhelník, pro jehož délky stran platí

$$a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e$$

a zároveň $a = 1$, $d = \sqrt{2}$. Vypočtěte b, c, e a zjistěte, zda takový pětiúhelník existuje.

ŘEŠENÍ. Označme α, β, γ, δ, ε velikosti středových úhlů příslušných po řadě k tětivám a, b, c, d, e. Podle textu úlohy je

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \varepsilon\,, \tag{1}$$

neboť všecky tyto úhly jsou duté. Zároveň platí

$$\alpha = 60°,\ \delta = 90°. \tag{2}$$

Je tedy podle (1), (2)

$$60° \leqq \beta \leqq \gamma \leqq 90° \leqq \varepsilon < 180°, \tag{3}$$

a mimoto

$$\beta + \gamma + \varepsilon = 360° - 60° - 90° = 210°. \tag{4}$$

Kdyby aspoň jeden z úhlů β, γ měl velikost $> 60°$, bylo by $\beta + \gamma > 120°$, tj. podle (3)

$$\beta + \gamma + \varepsilon > 120° + 90° = 210°,$$

což je ve sporu s (4). Je tedy

$$\beta = \gamma = 60°.$$

Z (4) pak plyne $\varepsilon = 90°$. Délky stran jsou $b = c = 1$, $e = \sqrt{2}$.

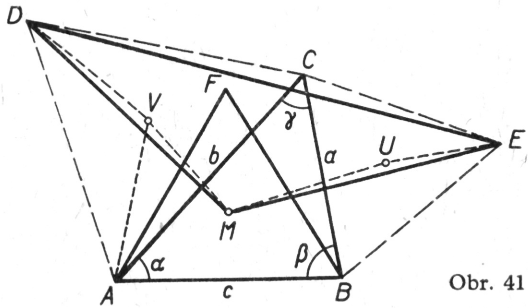
Existenci pětiúhelníka prokážeme konstrukcí. Sestrojíme rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s délkami stran $AB = BC =$

$= CD = 1$, $AD = 2$ (průměr kružnice) a v polorovině opačné k ADB k němu připojíme rovnoramenný trojúhelník ADE s pravým úhlem AED.

B–II–1b

1b. Je daný trojuholník ABC a nad jeho stranami AC, BC v polrovinách opačných k polrovinám ACB, BCA sú zostrojené rovnostranné trojuholníky ACD, BCE. Nad stranou AB v polrovine ABC je zostrojený rovnostranný trojuholník ABF.

Ak je M stred trojuholníka ABF, je trojuholník DME rovnoramenný a $\sphericalangle\, DME = 120°$. Dokážte. (6 bodov)



Obr. 41

RIEŠENIE (obr. 41). Označme obvyklým spôsobom dĺžky strán a veľkosti uhlov: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \sphericalangle\, CAB$, $\beta = \sphericalangle\, ABC$, $\gamma = \sphericalangle\, BCA$. Nech V je ťažisko (stred) trojuholníka ACD a U ťažisko trojuholníka BCE. Otočenie okolo bodu A o uhol veľkosti α prevedie polpriamku $\overrightarrow{AV}$ do polpriamky $\overrightarrow{AM}$. Otočenie okolo bodu B o uhol veľkosti β prevedie polpriamku $\overrightarrow{BM}$ do polpriamky $\overrightarrow{BU}$. Preto je

$$\sphericalangle\, VAM = \alpha, \qquad \sphericalangle\, MBU = \beta\,. \tag{1}$$

Ďalej platí

$$DV = AV = \frac{b}{\sqrt{3}}, AM = BM = \frac{c}{\sqrt{3}},$$

$$BU = EU = \frac{a}{\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Podľa vety $\frac{s}{s}$ u $\frac{s}{s}$ o podobnosti trojuholníkov vyplýva z (1), (2)

$$\triangle ABC \sim \triangle AMV \sim \triangle MBU. \qquad (3)$$

Z (3) dostaneme

$$VM = \frac{a}{\sqrt{3}} = EU, \quad MU = \frac{b}{\sqrt{3}} = DV. \qquad (4)$$

Ďalej je $\sphericalangle AVD = 120°$, $\sphericalangle AVM = \gamma$, $\sphericalangle EUB = 120°$, $\sphericalangle BUM = \gamma$ (pozri (3)). Sú tri možnosti:

I. $\gamma = 60°$. Potom leží V medzi D, M, U medzi E, M a platí podľa (4)

$$DM = DV + VM = EU + MU = EM.$$

Okrem toho je

$$\begin{aligned}\sphericalangle EMD &= 360° - \sphericalangle AMV - \sphericalangle BMU - \sphericalangle AMB = \\ &= 360° - \alpha - \beta - 120° = 240° - (\alpha + \beta) = \\ &= 240° - 180° + \gamma = 120°.\end{aligned}$$

II. $\gamma < 60°$ (pozri obr. 41). Potom je

$$\sphericalangle DVM = 120° + \gamma < 180°, \sphericalangle EUM = 120° + \gamma < 180°. \qquad (5)$$

Zo (4) a (5) vyplýva podľa vety *sus*

$$\triangle DVM \cong \triangle MUE \qquad (6)$$

a z toho $EM = DM$. Trojuholník DME je teda rovnoramenný, ako sme mali dokázať. Ďalej je

$$\begin{aligned}\sphericalangle EMD = 360° &- \sphericalangle AMV - \sphericalangle BMU - \sphericalangle AMB + \\ &+ (\sphericalangle DMV + \sphericalangle EMU) = 360° - \alpha - \beta - 120° + \\ &+ (180° - 120° - \gamma) = 120°.\end{aligned}$$

III. $\gamma > 60^\circ$. Postupujeme ako v prípade II s tým rozdielom, že je $\sphericalangle DVM = \sphericalangle EUM = 360^\circ - (120^\circ + \gamma) = 240^\circ - \gamma < 180^\circ$. Dokážeme opäť, že platí (6), z čoho hneď máme $EM = DM$. Ďalej počítame $\sphericalangle EMD$. Pritom však odčítame $\sphericalangle DMV + \sphericalangle EMU = 180^\circ - (240^\circ - \gamma) = -60^\circ + \gamma$, t. j. pripočítame $60^\circ - \gamma$, ako v prípade II. Výsledok je preto rovnaký ako v prípade II.

B–II–2a

2a. Nalezněte všechna taková reálná čísla a, která mají tu vlastnost, že pro každé reálné číslo x platí

$$\left| \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \right| < a\,. \tag{1}$$

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Z definice absolutní hodnoty plyne, že (1) lze přepsat jako dvě nerovnosti:

$$-a < \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} < a\,. \tag{2}$$

Pro každé x je $x^2 - x + 1 > 0$, a proto (2) je ekvivalentní současné platnosti nerovností:

$$x^2(a - 2) - x(a + 1) + (a + 1) > 0, \tag{3}$$

$$x^2(a + 2) - x(a - 1) + (a - 1) > 0. \tag{4}$$

Nyní rozlišme tři případy:

a) Nechť $a - 2 = 0$, tj. $a = 2$. Pak (3) má tvar

$$-3x + 3 > 0\,,$$

což neplatí pro každé x. Tedy hledané $a \neq 2$.

b) Nechť $a + 2 = 0$, tj. $a = -2$. Pak (4) má tvar

$$3x - 3 > 0\,,$$

což neplatí pro každé x. Tedy hledané $a \neq -2$. (Podíváme-li se na (1), vidíme, že $a \neq -2$ je samozřejmé, neboť je zřejmě $a > 0$.)

c) Nechť $a \neq 2$ a $a \neq -2$. Pak na levých stranách nerovností (3) a (4) jsou kvadratické trojčleny proměnné x. Nerovnosti (3) a (4) jsou splněny pro každé reálné číslo x, právě když

$$a - 2 > 0 \text{ a } (a + 1)^2 - 4(a - 2)(a + 1) < 0 \qquad \text{(5a, b)}$$

a zároveň

$$a + 2 > 0 \text{ a } (a - 1)^2 - 4(a + 2)(a - 1) < 0\,. \qquad \text{(6a, b)}$$

Z (5a) a (6a) plyne, že

$$a > 2\,. \qquad (7)$$

Pak z (5b) plyne

$$(a + 1) - 4(a - 2) < 0,$$

tj.

$$a > 3. \qquad (8)$$

Dále z (6b) dostáváme

$$(a - 1) - 4(a + 2) < 0\,,$$

tj.

$$a > -3\,. \qquad (9)$$

Z podmínek (7), (8), (9) plyne, že nerovnost (1) platí pro každé x právě když $a > 3$.

B–II–2b

2b. Najděte řešení soustavy lineárních rovnic

$$x - a^3y + a^2z = 1\,, \tag{1}$$

$$a^3x - y + az = -1\,, \tag{2}$$

$$a^2x - ay + z = 1 \tag{3}$$

s neznámými x, y, z a reálným parametrem a. Proveďte diskusi řešitelnosti soustavy vzhledem k parametru a. (7 bodů)

ŘEŠENÍ. Eliminujeme z rovnic (1), (2), (3); z (3) plyne $z = 1 - a^2x + ay$. Po dosazení do (1), (2) dostaneme

$$(1 - a^4)x = 1 - a^2, \tag{1'}$$

$$(1 - a^2)y = 1 + a\,. \tag{2'}$$

Platí $1 - a^4 = (1 + a^2)(1 - a^2)$; protože je $1 + a^2 > 0$ pro všechna reálná a, rozlišíme dva případy

I) $1 - a^2 \neq 0$, II) $1 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = \pm 1$.

V případě I) vypočteme z (1'), (2')

$$x = \frac{1}{1 + a^2}, \tag{4}$$

$$y = \frac{1}{1 - a} \tag{5}$$

a dále z (3)

$$z = \frac{a^3 + 1}{(1 - a)(1 + a^2)}\,. \tag{6}$$

ZKOUŠKA ukáže, že (4), (5), (6) dává řešení soustavy (1), (2), (3) pro každé reálné a, pro které je $1 - a^2 \neq 0$.

V případě II) dostaneme soustavy pro

$$a = 1:\quad \begin{aligned} x - y + z &= 1\,, \\ x - y + z &= -1\,, \\ x - y + z &= 1\,; \end{aligned} \qquad a = -1:\quad \begin{aligned} x + y + z &= 1\,, \\ x + y + z &= 1\,, \\ x + y + z &= 1\,. \end{aligned}$$

Z nich první je *neřešitelná*, druhá má *nekonečně mnoho řešení.*

B–II–3a

3a. Jsou-li a, b, c tři taková přirozená čísla, že $a^3 + b^3 + c^3$ je násobek sedmi, je aspoň jedno z nich násobkem sedmi. Dokažte. (6 bodů)

ŘEŠENÍ. Dělíme-li přirozené číslo x sedmi, je zbytek některé z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dělíme-li číslo x^3 sedmi, je zbytek týž jako při dělení čísel 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3 6^3, tj. některé z čísel 0, 1, 6.

Dělíme-li součet $a^3 + b^3 + c^3$ sedmi, jsou pro zbytky jednotlivých členů tyto možnosti

$$\begin{matrix} 0;0;0\,; & 0;0;1\,; & 0;0;6\,; & 0;1;1\,; & 0;6;6\,; \\ 0;1;6\,; & 1;1;1\,; & 1;1;6\,; & 1;6;6\,; & 6;6;6\,. \end{matrix}$$

Poslední čtyři případy jsou nemožné, neboť pak by zbytek při dělení sedmi byl týž jako u součtu

$$1 + 1 + 1\,,\ \text{tj. } 3\,,$$

$$1 + 1 + 6\,,\ \text{tj. } 1\,,$$

$$1 + 6 + 6\,,\ \text{tj. } 6\,,$$

$$6 + 6 + 6\,,\ \text{tj. } 4\,.$$

Nastane tedy některý z prvních šesti případů, tj. aspoň jedno z čísel a, b, c je násobkem sedmi.

3b. a) Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů daného trojúhelníka. Dokažte, že platí

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta . \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha . \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha . \sin \beta} = 2 . \qquad (1)$$

b) Nechť α, β, γ jsou velikosti dutých úhlů a nechť platí (1). Existuje trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ?

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Jestliže žádné z čísel α, β, γ není násobkem π, pak vždy platí:

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha . \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{1}{2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} . [(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin 2\gamma] =$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} . [\sin(\alpha + \beta) . \cos(\alpha - \beta) + \sin \gamma . \cos \gamma] . \quad (2)$$

a) Jestliže α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů daného trojúhelníka, pak

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta) ,$$

takže z (2) plyne

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sin \alpha . \sin \beta} . (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) =$$

$$= \frac{2 . \sin \alpha . \sin \beta}{\sin \alpha . \sin \beta} = 2 ,$$

tj. (1) platí.

b) Nechť α, β, γ jsou velikosti dutých úhlů a nechť platí (1). Podle (2) pak

$$\sin(\alpha + \beta) . \cos(\alpha - \beta) + \sin \gamma . \cos \gamma = 2\sin \alpha \sin \beta . \sin \gamma ,$$

tj.

$$\sin(\alpha + \beta) . \cos(\alpha - \beta) + \sin\gamma . \cos\gamma =$$
$$= [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] . \sin\gamma .$$

Po úpravě odtud plyne

$$\cos(\alpha - \beta) . [\sin(\alpha + \beta) - \sin\gamma] + \sin\gamma\,[\cos\gamma +$$
$$+ \cos(\alpha + \beta)] = 0 ,$$

tj.

$$\cos\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} . \left[\cos(\alpha - \beta) . \sin\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} +\right.$$
$$\left. + \sin\gamma . \cos\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}\right] = 0 .$$

Tato rovnost zřejmě platí v případě, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Ovšem tato rovnost platí také pro čísla α, β, γ, která jsou řešením soustavy rovnic

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} , \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) = \frac{\pi}{2} .$$

Soustava (3) má např. řešení

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi, \quad \beta = \frac{1}{3}\pi . \quad \gamma = \frac{1}{6}\pi . \tag{4}$$

Úhly mající tyto velikosti jsou zřejmě duté. Snadno se lze přesvědčit, že (1) pro ně skutečně platí. Součet čísel (4) je však větší než π. Lze tedy vyslovit závěr:

Platí-li pro velikosti α, β, γ dutých úhlů rovnost (1), pak nemusí existovat trojúhelník, jehož vnitřní úhly by měly velikosti α, β, γ.

C–II–1a

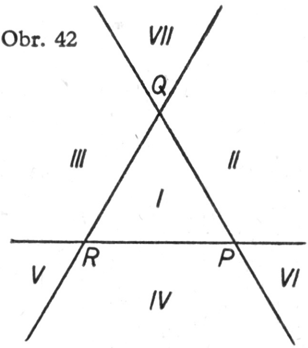
1a. Je daný rovnostranný trojuholník PQR. Určte množinu všetkých vrcholov A takých trojuholníkov ABC, ktorých strany AB, BC, CA obsahujú v uvedenom poradí vrcholy P, Q, R a pre dĺžky ich strán platí $AB \geqq AC \geqq BC$. (5 bodov)

ŘIEŠENIE. Priamky strán trojuholníka PQR rozdeľujú rovinu (okrem týchto priamok) na sedem častí (obr. 42). Ak by bod A ležal v časti I, ležal by B v VI, C v III a bod A v IV, čo je spor. Analogicky sa zistí, že v I nemôže ležať ani bod B, ani bod C.

Ak by bod A ležal v časti II, ležal by B v IV, C v VII a A v IV (I je podľa předcházdajúcej úvahy vylúčená), čo je spor. Napíšme výsledok tejto úvahy do tabuľky a analogicky preberme prípady, keď A leží v časti III, IV, V, VI, VII. Dostaneme:

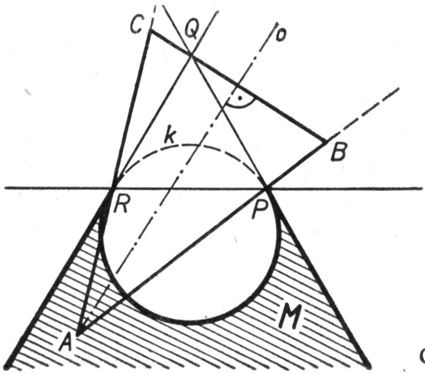
A	B	C	A
II	IV	VII	IV
III	VI	III	IV
IV	II	III	IV
V	II	III	IV
VI	III	II	V
VII	IV	VII	IV

Obr. 42



Z tabuľky vyplýva, že je možný len prípad, že A leží v časti IV. Analogicky sa zistí, že ak leží bod A na niektorej z priamok — strán trojuholníka PQR, ale nie vo vrchole, potom A leží buď na opačnej polpriamke k PQ alebo na opačnej polpriamke k RQ. Ak je konečne A niektorým z vrcholov $\triangle PQR$, potom môže byť buď $A = P$ alebo $A = R$, ale nemôže byť $A = Q$.

Z tejto úvahy vyplýva, že bod A môže ležať len v oblasti IV a jej dvoch hraničných polpriamkach (včítane začiatočných bodov).



Obr. 43

Ak vyhovuje $\triangle ABC$ ďalším požiadavkám úlohy, potom z $AB \geqq AC \geqq BC$ vyplýva, že $\gamma \geqq \beta \geqq \alpha$. Teda

$$3\alpha \leqq \alpha + \beta + \gamma = 180°, \text{ t. j. } \alpha \leqq 60°.$$

Leží teda bod A v oblasti IV mimo kružnice k prechádzajúcej bodmi P a R a dotýkajúcej sa priamok QR a PQ alebo na väčšom oblúku tejto kružnice (obr. 43).

Označme **M** množinu tých bodov časti IV so započítanými oboma hraničnými polpriamkami, ktoré ležia mimo kružnice k alebo na oblúku PR. Ako sme vyššie ukázali, leží bod A vždy v množine **M**.

Ukážme obrátene, že každý bod množiny **M** je vrcholom A nejakého trojuholníka ABC vyhovujúceho podmienkam úlohy.

Ak je $A = P$, zvolíme $B = Q$, $C = R$ a $\triangle ABC$ vyhovuje. Ak je $A = R$, zvolíme $B = P$ a $C = Q$. Ak je $A \neq P$ i $A \neq R$, ale A leží v **M**, obsahuje dutý uhol $\sphericalangle PAR$ bod Q a jeho veľkosť $\alpha \leqq 60°$. Priamka vedená bodom Q kolmo k osi tohto uhla pretne polpriamku AP v bode, ktorý označíme B a polpriamku AR v bode, ktorý označíme C. Trojuholník ABC opäť splňuje požiadavky úlohy.

ZÁVER. Hľadaná množina je množina **M** vyšrafovaná v obr. 43.

C–II–1b

1b. Je dán pravoúhlý $\triangle ABC$, bod D je středem jeho přepony AB a bod S je středem jemu vepsané kružnice.

Dokažte: Jestliže $CS = DS$, pak jeden vnitřní úhel $\triangle ABC$ má velikost 30°.

ŘEŠENÍ. Označme M, N, P po řadě body dotyku vepsané kružnice a stran BC, AC a AB. Pak

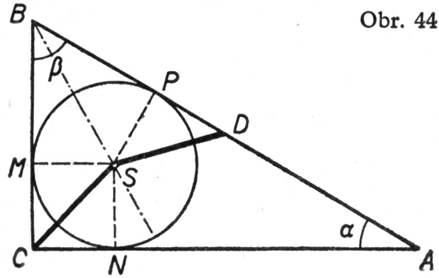
$$SM = SN = SP. \tag{1}$$

Z pravoúhlého $\triangle CNS$ plyne, že $CS > NS$, a proto též $DS > PS$, takže $P \neq D$. Bod S je vnitřním bodem $\triangle ABC$, a proto body S, D, P jsou vrcholy trojúhelníka. Podle předpokladu $CS = DS$, podle (1) je $NS = PS$, dále $\sphericalangle CNS = \sphericalangle DPS = 90°$, takže trojúhelníky CNS a DPS jsou shodné (*Ssu*). Přímka CS je osa $\sphericalangle ACB = 90°$, a proto $\sphericalangle SCN = 45°$, tj. také $\sphericalangle SDP = 45°$.

Bod P je vnitřním bodem úsečky AB a přitom $P \neq D$. Pro bod P tedy mohou nastat dvě možnosti: bod P leží buď mezi body B, D, nebo mezi body A, D.

Nechť P je vnitřním bodem úsečky BD (viz obr. 44). Pak $\sphericalangle BDS = 45° = \sphericalangle BCS$, dále $\sphericalangle CBS = \sphericalangle DBS = \frac{\beta}{2}$, neboť BS je osa $\sphericalangle ABC$. Podle předpokladu $CS = DS$, takže

$$\triangle CSB \cong \triangle DSB,$$



Obr. 44

tj.

$$BC = BD = \frac{1}{2} AB .$$

Pak $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, takže $\sphericalangle\ BAC = \alpha = 30°$.

Leží-li bod P mezi body D a A, pak se zcela obdobně dokáže, že

$$\triangle\ CSA \cong \triangle\ DSA ,$$

odtud plyne

$$AC = AD = \frac{1}{2} AB ,$$

takže

$$\sphericalangle\ ABC = 30° .$$

C–II–2a

2a. Je dán mnohočlen $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficienty. Nechť existuje celé číslo m tak, že čísla $f(m)$, $f(m + 1)$, $f(m + 2)$ jsou násobky tří. Dokažte, že pro každé celé číslo x je pak $f(x)$ násobek tří. (6 bodů)

ŘEŠENÍ. Buď m takové celé číslo, že $f(m), f(m + 1), f(m + 2)$

jsou násobky tří. Budiž x libovolné celé číslo různé od m, $m + 1$, $m + 2$. Pro každé číslo z platí

$$x^2 - z^2 = (x - z)(x + z),\ x^3 - z^3 = (x - z)(x^2 + xz + z^2)\,,$$

takže čísla

$$f(x) - f(m),\quad f(x) - f(m + 1),\quad f(x) - f(m + 2) \qquad (1)$$

jsou po řadě násobky čísel

$$x - m,\quad x - (m + 1),\quad x - (m + 2). \qquad (2)$$

Protože (2) jsou tři po sobě bezprostředně následující čísla, je právě jedno z nich násobkem tří a k němu příslušné číslo (1) je tedy násobkem tří. Protože však také čísla $f(m)$, $f(m + 1)$, $f(m + 2)$ jsou podle předpokladu násobky tří, je i $f(x)$ násobkem tří.

Tím je věta dokázána.

C–II–2b

2b. Určete všecky dvojice reálných čísel x, y, pro které platí

$$|\,x + 1\,| + |\,y + 1\,| = |\,x + y + 1\,|\,.$$

Řešte úlohu graficky i výpočtem. (6 bodů)

ŘEŠENÍ. Umocněním rovnice dostaneme:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 2\,|\,(x + 1)(y + 1)\,| = \\ = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y,$$

po úpravě

$$2\,|\,(x + 1)(y + 1)\,| = 2xy - 1\,. \qquad (1)$$

a) Pro $x + 1 \geqq 0$ a $y + 1 \geqq 0$ nebo $x + 1 \leqq 0$ a $y + 1 \leqq 0$ dostaneme $|\,(x + 1)(y + 1)\,| = (x + 1)(y + 1)$, tj. (1) nabude tvaru

$$2(x + 1)(y + 1) = 2xy - 1\,,$$

po úpravě

$$2x + 2y + 3 = 0\,. \tag{2}$$

K této rovnici ještě patří nerovnice

$$x + 1 \geqq 0,\ y + 1 \geqq 0 \text{ nebo } x + 1 \leqq 0,\ y + 1 \leqq 0\,. \tag{2'}$$

Z obráceného postupu vyplývá, že (2), (2′) udávají skutečně řešení dané rovnice.

b) Pro $x + 1 \geqq 0$ a $y + 1 \leqq 0$ nebo $x + 1 \leqq 0$ a $y + 1 \geqq 0$ dostaneme $|(x + 1)(y + 1)| = -(x + 1)(y + 1)$, tj. (1) nabude tvaru

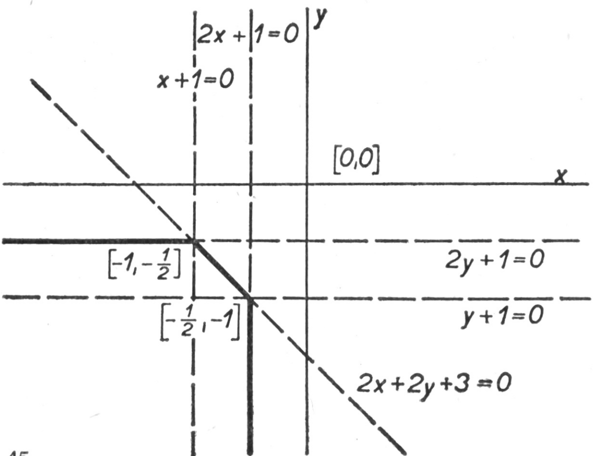
$$-2(x + 1)(y + 1) = 2xy - 1\,,$$

tj.

$$4xy + 2x + 2y + 1 = 0$$

neboli

$$(2x + 1)(2y + 1) = 0\,. \tag{3}$$



Obr. 45

Rovnice (3) však ve spojení s první i druhou soustavou nerovnic

$$x + 1 \geqq 0 \text{ a } y + 1 \leqq 0 \text{ nebo } x + 1 \leqq 0 \text{ a } y + 1 \geqq 0 \qquad (3')$$

dává řešení

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y \leqq -1, \quad \text{resp.}\ x \leqq -1, \quad y = -\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

c) Graficky (viz obr. 45). Řešení jsou znázorněna všemi body tlustě vytažené čáry.

C–II–3a

3a. Národný podnik má vyrobiť určitý tovar v troch rôznych typoch v celkovom množstve 10 000 kusov. Celkové výrobné náklady majú byť 4 300 000 Kčs. Z každého typu sa má vyrobiť aspoň 2400 kusov. Výrobné náklady jedného kusa typu *A* sú 450,— Kčs, typu *B* 420,— Kčs a typu *C* 400,— Kčs. Ceny výrobkov sú stanovené tak, že zisk podniku činí pri type *A* 16 %, pri type *B* 17 % a pri type *C* 18 % výrobných nákladov. Koľko kusov tovaru z jednotlivých typov má podnik vyrobiť, aby dosiahol maximálny zisk? (7 bodov)

RIEŠENIE. Označme x, y, z v uvedenom poradí počet výrobkov typu *A*, *B*, *C*. Potom platí

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10\,000, \\ 45x + 42y + 40z &= 430\,000. \end{aligned} \qquad (1)$$

Čísla x, y, z sú čísla prirodzené a platí o nich

$$\begin{aligned} 2\,400 &\leqq x < 10\,000, \\ 2\,400 &\leqq y < 10\,000, \\ 2\,400 &\leqq z < 10\,000. \end{aligned} \qquad (2)$$

Vylúčením neznámej z zo sústavy (1) dostaneme

$$5x + 2y = 30\,000.$$

Druhý člen na ľavej strane a pravá strana sú deliteľné dvoma, a preto aj číslo x musí byť nutne párne, t. j.

$$x = 2t,$$

kde t je zatiaľ bližšie neurčené prirodzené číslo. Pre y a z potom dostaneme

$$y = 15\,000 - 5t, \quad z = 3t - 5\,000.$$

Po dosadení do (2) a jednoduchých úpravách dostaneme

$$1\,200 \leqq t < 5\,000,$$
$$1\,000 < t \leqq 2\,520,$$
$$2\,466 < t < 5\,000.$$

Všetkým trom vyššie uvedeným nerovnostiam vyhovujú len tie čísla t, pre ktoré platí

$$2\,466 < t \leqq 2\,520.$$

Počítajme teraz zisk Z podniku:

$$Z = \frac{450\,.\,16}{100}\,2t + \frac{420\,.\,17}{100}\,(15\,000 - 5t) + $$
$$+ \frac{400\,.\,18}{100}\,(3t - 5\,000) = 3t + 711\,000.$$

Je zrejmé, že zisk bude maximálny pri $t = 2\,520$ a činí vtedy 718 560 Kčs. V takom prípade treba vyrobiť 5 040 kusov výrobkov typu A, 2 400 kusov výrobkov typu B a 2 560 kusov výrobkov typu C.

C–II–3b

3b. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$ o stranách délek a_1, a_2, a_3. Sestrojte množinu všech takových bodů M trojúhelníka $A_1A_2A_3$, že pro obsahy platí

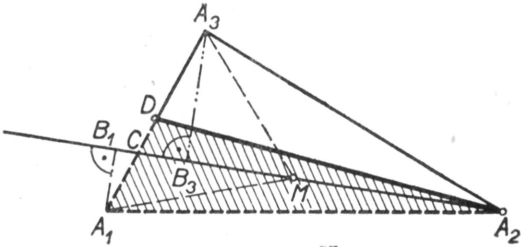
$$\triangle\, A_1A_2M \leqq \triangle\, A_2A_3M \leqq \triangle\, A_3A_1M. \quad \text{(7 bodů)}$$

ŘEŠENÍ. Hledanou množinu označme **M**. Zřejmě **M** obsahuje jen vnitřní body $\triangle A_1A_2A_3$, neboť jinak by aspoň jeden z trojúhelníků A_1A_2M, A_2A_3M, A_3A_1M neexistoval.

Řešme nejdříve *dílčí úlohu*: Určete množinu **N** všech vnitřních bodů M trojúhelníka $A_1A_2A_3$ takových, že pro obsahy platí

$$\triangle A_1A_2M \leqq \triangle A_2A_3M. \tag{1}$$

Trojúhelníky A_1A_2M a A_2A_3M mají společnou stranu A_2M



Obr. 46

(viz obr. 46). Označme B_1, B_3 paty kolmic spuštěných z vrcholů A_1, A_3 na A_2M. Nerovnost (1) zřejmě platí, právě když

$$A_1B_1 \leqq A_3B_3. \tag{2}$$

Označme C průsečík A_2M a strany A_1A_3. Zřejmě je C vnitřní bod úsečky A_1A_3. Nechť $B_1 \neq B_3$. Pak vznikne $\triangle A_1CB_1$ a $\triangle A_3CB_3$. Podle věty *uu* je $\triangle A_1CB_1 \sim \triangle A_3CB_3$, takže

$$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1C}{A_3C}.$$

Nerovnost (2) tedy platí, právě když

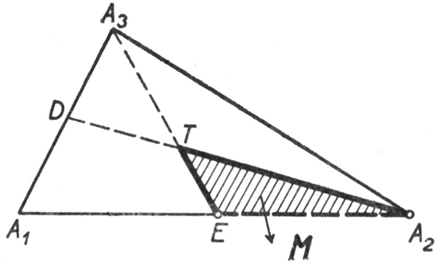
$$A_1C \leqq A_3C. \tag{3}$$

Ke stejnému závěru dojdeme i v případě, že $B_1 = B_3$.

Výše formulovaná dílčí úloha je tak převedena na *úlohu*:

Určete množinu **N** všech vnitřních bodů M trojúhelníka $A_1A_2A_3$ takových, že polopřímka A_2M protíná úsečku A_1A_3 v takovém bodě C, že platí (3). Množinou **N** je zřejmě vnitřek $\triangle A_1A_2D$ a vnitřek úsečky A_2D, kde D je střed strany A_1A_3.

Na základě řešení dílčí úlohy se snadno zjistí, že hledaná množina **M** je množina všech bodů trojúhelníka A_2TE s výjimkou bodů jeho strany A_2E, kde E je střed strany A_1A_2 a T je těžiště $\triangle A_1A_2A_3$, tj. $\mathbf{M} = \triangle A_2TE \setminus$ ús. A_2E (obr. 47).



Obr. 47

4. *KATEGORIE Z*

Z–II–1

1. a) Vyšetřete, kterou číslicí končí zápis druhé mocniny prvočísla v desítkové soustavě.

b) Je-li p prvočíslo větší než 3, pak čísla $p^2 + 14$ a $p^2 - 14$ nejsou obě zároveň prvočísla. Dokažte.

ŘEŠENÍ. a) Pro prvočíslo 2 máme $2^2 = 4$, a tedy poslední číslice je 4. Zvláštní postavení v našem vyšetřování má též prvočíslo 5. Platí $5^2 = 25$ a poslední číslice je tedy 5. Každé jiné prvočíslo končí buď číslicí 1, 3, 7, nebo 9. Končí-li číslicí 1, pak druhá mocnina též končí číslicí 1. Končí-li číslicí 3, je poslední číslice druhé mocniny 9. Končí-li číslicí 7, poslední číslice je též 9. Konečně končí-li číslicí 9, druhá mocnina má na konci 1.

Můžeme shrnout: ve dvou případech končí druhá mocnina číslicí 4, resp. 5, jinak druhá mocnina prvočísla končí buď číslicí 1, nebo 9.

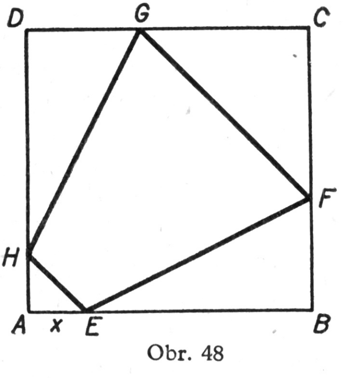
b) Nyní ke druhé otázce. Je-li $p = 5$, pak $p^2 + 14 = 39$, což není prvočíslo. Zvolíme-li libovolné prvočíslo p větší než 5, pak p^2 končí buď číslicí 1, nebo 9. Končí-li číslicí 1, pak $p^2 + 14$ končí číslicí 5 a je to číslo větší než 5. Tedy je $p^2 + 14$ složené. Končí-li p^2 číslicí 9, pak $p^2 - 14$ končí číslicí 5 a je větší než 5. Proto $p^2 - 14$ je číslo složené. Tím je důkaz podán.

Z–II–2

2. Je dán čtverec $ABCD$. Uvnitř stran AB, BC, CD, DA sestrojte po řadě body E, F, G, H tak, aby platilo

$$AE = \frac{1}{2}\,BF = \frac{1}{3}\,CG = \frac{1}{4}\,DH$$

a aby čtyřúhelník $EFGH$ byl lichoběžník.



Obr. 48

ŘEŠENÍ. Pro jednoduchost označme $AB = a$, $AE = x$, kde

$$0 < x < \frac{a}{4} \text{ (obr. 48).}$$

a) Předpokládejme nejprve, že $EH \parallel FG$. Potom

$$\sphericalangle AEH = \sphericalangle FGC,$$

takže z podobnosti $\triangle AEH$ a $\triangle CGF$ je ($x \neq 0$)

$$\frac{a - 4x}{x} = \frac{a - 2x}{3x} .$$

To vede k řešení

$$x = \frac{a}{5} .$$

b) Předpokládáme nyní, že $EF \parallel GH$. Potom je

$$\sphericalangle BEF = \sphericalangle HGD,$$

což vede k rovnici

$$\frac{2x}{a - x} = \frac{4x}{a - 3x} .$$

Tato rovnice má jediné nenulové řešení

$$x = -a,$$

které ovšem nevyhovuje.

ZÁVĚR. Jediné řešení je $AE = \frac{1}{5} AB$. *Konstrukce* je pak snadná.

$\boxed{\text{Z–II–3}}$

3. Dokážte, žc pre každú trojicu čísel a, b, c je výraz

$$V = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - abc(a + b + c)$$

nezáporný. Pre ktoré hodnoty čísel a, b, c sa tento výraz rovná nule?

RIEŠENIE. Zrejme platí

$$V = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2) =$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) +$$

$$+ (a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2)] =$$

$$= \frac{1}{2}[a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b^2)]\,,$$

čo je zrejme nezáporné pre každú trojicu čísel a, b, c. Rovnosť $V = 0$ nastane vtedy a len vtedy, keď súčasne platí:

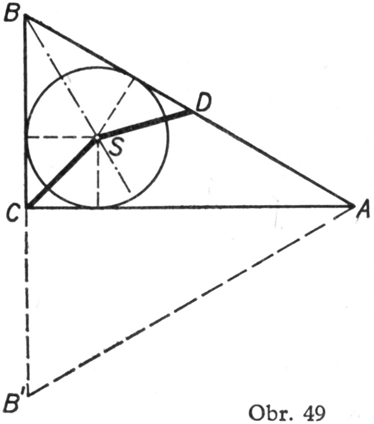
$$a(b - c) = 0, \quad b(c - a) = 0, \quad c(a - b) = 0.$$

Kombináciou podmienok, ktoré vyplývajú z týchto troch rovností, dostaneme celkom osem prípadov, z ktorých vyplýva, že $V = 0$ platí vtedy a len vtedy, keď je splnená niektorá z týchto podmienok:

a) $a = b = c$,
b) $a = b = 0$, c ľubovoľné,
c) $b = c = 0$, a ľubovoľné,
d) $c = a = 0$, b ľubovoľné.

Z–II–4

4. Je daný pravouhlý trojuholník ABC. Bod D je stredom jeho prepony AB a bod S je stredom vpísanej kružnice.



Obr. 49

Dokážte: Ak $\sphericalangle\ BAC = 30°$, potom platí $CS = DS$.

RIEŠENIE. Strana AB je prepona, a preto $\sphericalangle\ ACB = 90°$ a uhly $\sphericalangle\ BAC$ a $\sphericalangle\ ABC$ sú ostré. Podľa predpokladu $\sphericalangle\ BAC = 30°$ (obr. 49). Ak zostrojíme na polpriamke opačnej k polpriamke CB bod B' tak, že $CB' = CB$, potom $\triangle\ BB'A$ je rovnostranný a tedy

$$BC = \frac{1}{2}\ BB' = \frac{1}{2}\ AB = BD. \tag{1}$$

Ak vezmeme ďalej do úvahy, že priamka BS je osou uhla $\sphericalangle\ ABC$, potom dostaneme

$$\sphericalangle CBS = \sphericalangle DBS. \tag{2}$$

Trojuholníky CBS a DBS majú spoločnú stranu BS, a preto podľa vety *sus* z (1) a (2) vyplýva

$$\triangle\ CBS \cong \triangle\ DBS,$$

takže

$$CS = DS,$$

čo sme mali dokázať.

POZNÁMKA. Rovnosť $BC = \frac{1}{2} AB$ dostaneme aj bez pomocného trojuholníka $BB'A$, ak použijeme to, že

$$\sin \sphericalangle\ BAC = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$