19. ročník matematické olympiády

III. Súťažné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 19. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1969-1970. 12. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971. pp. 53–87.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404599

III. Súťažné úlohy I. kola

1. *KATEGÓRIA A*

1. V sáčku je 100 hracích známok označených číslami 1, 2, 3, . . ., 100. Koľkými spôsobmi môžeme zo sáčku vytiahnuť tri známky tak, aby súčet čísel na nich uvedených nepresiahol 100? Koľko je to percent zo všetkých možných ťahov po troch známkach?

RIEŠENIE. Ide zrejme o počet všetkých trojíc prirodzených čísel x, y, z, z ktorých každé dve sú navzájom rôzne a pre ktoré platí

$$x + y + z \leqq 100\,.$$

Pretože na označení čísel nezáleží, môžeme predpokladať, že $x < y < z$. Najväčšie možné x je 32, pretože preň máme tieto možnosti: $32 + 33 + 34 = 99$, $32 + 33 + 35 = 100$, zatiaľ čo $33 + 34 + 35 = 102 > 100$.

Ak zvolíme ľubovoľné prirodzené číslo x tak, aby $0 < x \leqq 32$, môžeme za y voliť ktorékoľvek z čísel $x + 1$, $x + 2$, . . ., $x + n$, kde n je najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $(x + n) + (x + n + 1) \leqq 100 - x$, t. j. $n = \dfrac{99 - 3x}{2}$ pre x nepárne a $n = \dfrac{98 - 3x}{2}$ pre x párne. Číslo z je potom treba voliť tak, aby $y < z \leqq 100 - x - y$. Máme teda pre každú dvojicu x, $y = x + k$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$ celkom $(100 - x - y) -$

$- y = 100 - 3x - 2k$ možností pre z a pre každú voľbu čísla x celkom

$$m = (100 - 3x - 2) + (100 - 3x - 4) + \ldots + \\ + (100 - 3x - 2n) = n(99 - 3x - n)$$

možností pre voľbu čísel y a z. Pre nepárne x je

$$m = \frac{99 - 3x}{2} \cdot \left(99 - 3x - \frac{99 - 3x}{2}\right) = \left(\frac{99 - 3x}{2}\right)^2;$$

pre párne x je

$$m = \frac{98 - 3x}{2} \cdot \left(99 - 3x - \frac{98 - 3x}{2}\right) = \\ = \frac{100 - 3x}{2} \cdot \frac{98 - 3x}{2}.$$

Celkový počet r všetkých riešení dostaneme, ak sem postupne dosadíme $x = 1, 2, \ldots, 32$ a sčítame. Dostaneme

$$r = 48^2 + 47 \cdot 46 + 45^2 + 44 \cdot 43 + \ldots + \\ + 3^2 + 2 \cdot 1 .$$

Pretože pre ľubovoľné a je

$$(3a)^2 + (3a - 1)(3a - 2) = 18a^2 - 9a + 2 ,$$

dostávame

$$r = 18(1^2 + 2^2 + \ldots + 16^2) - \\ - 9(1 + 2 + \ldots + 16) + 32$$

a s použitím známych vzorcov

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2} k(k + 1), 1^2 + 2^2 + \ldots + \\ + k^2 = \frac{1}{6} k(k + 1)(2k + 1) ,$$

ktorých správnosť pre každé prirodzené číslo k sa ľahko dokáže matematickou indukciou, stadiaľ máme

$$r = 3 \,.\, 16 \,.\, 17 \,.\, 33 - 9 \,.\, 8 \,.\, 17 + 32 =$$
$$= 25\,736\,.$$

Existuje teda 25 736 trojíc čísel x, y, z, ktoré splňujú danú podmienku.

Všetkých trojíc čísel x, y, z je $\binom{100}{3} = 161\,700$. Trojice, ktoré vyhovujú úlohe, predstavujú teda 15,9 % všetkých možných trojíc.

2. Je-li n liché číslo, je číslo

$$N = n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$$

dělitelné číslem 256. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Pro zkoumání dělitelnosti je užitečné rozložit daný mnohočlen v součin jednodušších mnohočlenů. Dosadíme-li $n^2 = x$, má daný mnohočlen tvar $x^3 + 3x^2 + 7x - 11$. Protože $x = 1$ je kořenem rovnice

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = 0\,,$$

je mnohočlen $x^3 + 3x^2 + 7x - 11$ dělitelný dvojčlenem $x - 1$. Je tedy

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = (x - 1)(x^2 + px + q)\,. \quad (1)$$

Koeficienty p, q zjistíme tím, že na pravé straně (1) vynásobíme a porovnáme koeficienty při týchž mocninách. Vyjde

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = x^3 + (p - 1)x^2 +$$
$$+ (q - p)x - q;$$

odtud plyne $p - 1 = 3$, $p = 4$, $q - p = 7$, $q = 11$ a skutečně je $-11 = -q$. Máme tedy rozklad

$$x^3 + 3x^2 + 7x - 11 = (x - 1)(x^2 + 4x + 11)\,. \, (2)$$

Řešením kvadratické rovnice $x^2 + 4x + 11 = 0$ dostaneme kořeny imaginární, proto mnohočlen $x^2 + 4x +$

$+ 11$ nelze rozložit v dvojčleny s reálnými koeficienty. Dosadíme-li v (2) opět $x = n^2$, vyjde

$$N = (n^2 - 1)(n^4 + 4n^2 + 11) . \qquad (3)$$

Protože zjišťujeme dělitelnost číslem 256 ($= 16^2$), je vhodnější vyjádřit liché číslo n ve tvaru $4\nu + 1$ (ν celé), nebo ve tvaru $4\nu - 1$ (ν celé).

a) Je-li $n = 4\nu + 1$, je $n^2 - 1 = 16\nu^2 + 8\nu = = 8\nu(2\nu + 1)$.

O druhém mnohočlenu v (3) platí po úpravě

$$n^4 + 4n^2 + 11 = 256\nu^4 + 256\nu^3 + 160\nu^2 + 48\nu + 16 = = 32k + 16(3\nu + 1) .$$

Celkem tedy můžeme v případě $n = 4\nu + 1$ psát

$$N = 8\nu(2\nu + 1)[32k + 16(3\nu + 1)] ,$$

čili

$$N = 128\nu(2\nu + 1)[2k + 3\nu + 1] .$$

Je-li nyní ν sudé, je hned vidět, že N je násobkem čísla 256. Je-li ν liché, je číslo v hranaté závorce sudé, takže N je opět násobkem čísla 256.

b) Je-li $n = 4\nu - 1$, je $n^2 - 1 = 16\nu^2 - 8\nu$ násobkem čísla 16 právě tehdy, když je ν sudé; je-li ν liché, je násobkem osmi.

O druhém mnohočlenu v (3) platí po úpravě

$$n^4 + 4n^2 + 11 = (256\nu^4 - 256\nu^3 + 160\nu^2) - - 48 + 16 = 32k - 16(3\nu - 1) . \qquad (4)$$

Je-li ν sudé, je číslo (4) násobkem čísla 16, a tedy N násobkem čísla $16 . 16 = 256$. Je-li ν liché, je $n^2 - 1$ násobkem osmi, ale $n^4 + 4n^2 + 11$ je podle (4) násobkem čísla 32. Je tedy také v tomto případě N násobkem čísla $256 = 8 . 32$.

Tím je úloha rozřešena.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ve výrazu pro N se n vyskytuje jen v sudých mocninách. Položíme proto $m = n^2$. Je-li n liché, tj. tvaru $n = 2k + 1$, bude

$$m = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Ze dvou čísel k, $k + 1$ je nutně jedno sudé, je tedy m tvaru

$$m = 8r + 1 .$$

Potom však

$$N = m^3 + 3m^2 + 7m - 11 =$$
$$= (8r + 1)^3 + 3(8r + 1)^2 + 7(8r + 1) - 11 =$$
$$256r^3 + 192r^2 + 24r + 1 + 192r^2 + 48r + 3 +$$
$$+ 56r + 7 - 11 = 256r^3 + 384r^2 + 128r =$$
$$= 256r^3 + 128r(3r + 1) .$$

Je-li r liché, je $3r + 1$ sudé, takže součin $r(3r + 1)$ je vždy sudý: $r(3r + 1) = 2s$. Je potom

$$N = 256(r^3 + s) ,$$

tj. N je dělitelné číslem 256.

POZNÁMKA. Číslo 256 je zřejmě nejvyšší mocnina 2, kterou je N vždy dělitelné — stačí uvážit případ r tvaru $4l + 2 = 2(2l + 1)$.

3. Je daná nerovnosť

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{2a}{y\sqrt{x}} < \frac{a\sqrt{y}}{y} + \frac{2\sqrt{y}}{y}, \tag{1}$$

kde x, y sú premenné a a reálny parameter.

a) Určite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice x, y vyhovujú danej nerovnosti.

b) Pre $a = 3$ určite súradnice všetkých bodov s celočíselnými súradnicami, ktoré patria do tejto množiny.

RIEŠENIE. a) Daná nerovnosť má zmysel len pre

$$x > 0 , \qquad y > 0 . \tag{2}$$

Preto v ďalšom budeme uvažovať len o I. kvadrante súradnicového systému. Postupnými úpravami nerovnosti (1) dostaneme

$$\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{y}}{y} - \frac{a\sqrt{y}}{y} + \frac{2a}{y\sqrt{x}} < 0\,,$$

$$\frac{xy - 2\sqrt{x}\sqrt{y} - a\sqrt{x}\sqrt{y} + 2a}{y\sqrt{x}} < 0\,,$$

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2) - a(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)}{y\sqrt{x}} < 0\,,$$

$$\frac{(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)(\sqrt{x}\sqrt{y} - a)}{y\sqrt{x}} < 0\,.$$

Vzhľadom na (2) je menovateľ tohto zlomku kladné číslo. Musí preto platiť:

$$(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)(\sqrt{x}\sqrt{y} - a) < 0\,. \tag{3}$$

1. Ak $a = 2$, potom výraz na ľavej strane nerovnosti (3) má tvar $(\sqrt{x}\sqrt{y} - 2)^2$, čo je zrejme číslo nezáporné. Pre $a = 2$ nemá teda daná nerovnosť riešenie.

2. Ak $a < 2$, potom $-a > -2$ a tiež $\sqrt{x}\sqrt{y} - a > > \sqrt{x}\sqrt{y} - 2$, z čoho vyplýva, že ak má platiť nerovnosť (3), musí byť

$$\sqrt{x}\sqrt{y} - a > 0\,, \tag{4}$$

$$\sqrt{x}\sqrt{y} - 2 < 0\,. \tag{5}$$

Treba preto rozoznávať dva prípady: $a \leqq 0$, $0 < a < 2$.

Ak $a \leqq 0$, potom nerovnosť (4) zrejme platí pre každé dve kladné čísla x, y. Nerovnosť (5) môžeme vzhľadom na (2) upraviť takto: $\sqrt{x}\sqrt{y} < 2$ čiže $xy < 4$, z čoho

$$y < \frac{4}{x}\,. \tag{6}$$

Z prvého kvadrantu vyhovujú nerovnosti (6) súradnice vonkajších bodov rovnoosej hyperboly určenej rovnicou

$$y = \frac{4}{x}. \tag{7}$$

Ak je $a \leqq 0$, sú teda hľadanou množinou bodov, ktorých súradnice vyhovujú nerovnosti (1) tie body prvého kvadrantu, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly (7).

Ak $0 < a < 2$, môžeme nerovnosť (4) vzhľadom na podmienky (2) upraviť takto: $\sqrt{x}\sqrt{y} > a$ čiže $xy > a^2$, z čoho

$$y > \frac{a^2}{x}. \tag{8}$$

Nerovnosti (8) vyhovujú súradnice vnútorných bodov rovnoosej hyperboly určenej rovnicou

$$y = \frac{a^2}{x}. \tag{9}$$

Ak je $0 < a < 2$, hľadanou množinou bodov, ktorých súradnice vyhovujú nerovnosti (1) sú teda tie body I. kvadrantu, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly určenej vzťahom (7) a zároveň vnútornými bodmi hyperboly určenej vzťahom (9).

3. Ak $a > 2$, potom $-a < -2$ a tiež $\sqrt{x}\sqrt{y} - a < < \sqrt{x}\sqrt{y} - 2$, z čoho vyplýva, že ak má platiť nerovnosť (3), potom musí byť $\sqrt{x}\sqrt{y} - a < 0$, $\sqrt{x}\sqrt{y} - 2 > 0$. Vzhľadom na podmienky (2) možno však tieto nerovnosti upraviť takto: $\sqrt{x}\sqrt{y} < a$, $\sqrt{x}\sqrt{y} > 2$ čiže

$$xy < a^2, \tag{10}$$

$$xy > 4, \tag{11}$$

z čoho $y < \dfrac{a^2}{x}$, $y > \dfrac{4}{x}$. Tejto sústave vyhovujú súradnice tých bodov, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly určenej rovnicou

$$y = \frac{a^2}{x} \tag{12}$$

a zároveň vnútornými bodmi hyperboly určenej rovnicou

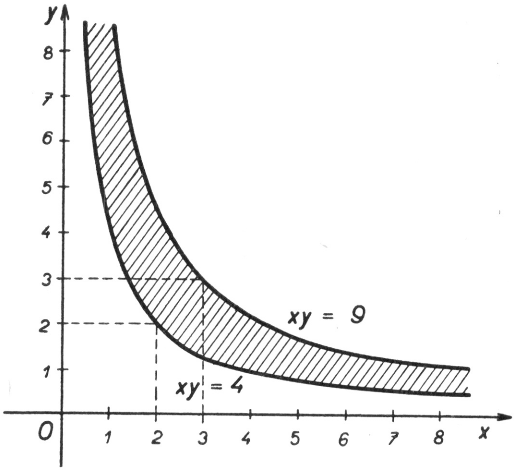
$$y = \frac{4}{x}. \tag{13}$$

Ak je $a > 2$, potom hľadanou množinou bodov, ktorých súradnice vyhovujú nerovnosti (1), sú teda tie body I. kvadrantu, ktoré sú vonkajšími bodmi hyperboly (12) a zároveň vnútornými bodmi hyperboly (13).

b) Ak $a = 3$, je $a > 2$ a teda podľa vzťahov (10), (11) musí platiť

$$4 < xy < 9 .$$

Keďže xy má byť celé číslo, z týchto nerovností vyplýva, že



Obr. 10

$$5 \leqq xy \leqq 8 .$$

Týmto nerovnostiam vyhovujú len tieto usporiadané dvojice prirodzených čísel: [1,5], [5,1], [1,6], [6,1], [1,7], [7,1], [1,8], [8,1], [2,3], [3,2], [2,4], [4,2], ktoré sú zároveň súradnicami hľadaných bodov. Časť uvažovanej množiny pre $a = 3$ je vyšrafovaná na obr. 10.

$$y = \frac{4}{x}$$

x	0,5	0,8	1,25	1,6	2	2,5	3,2	5	8
y	8	5	3,2	2,5	2	1,6	1,25	0,8	0,5

$$y = \frac{9}{x}$$

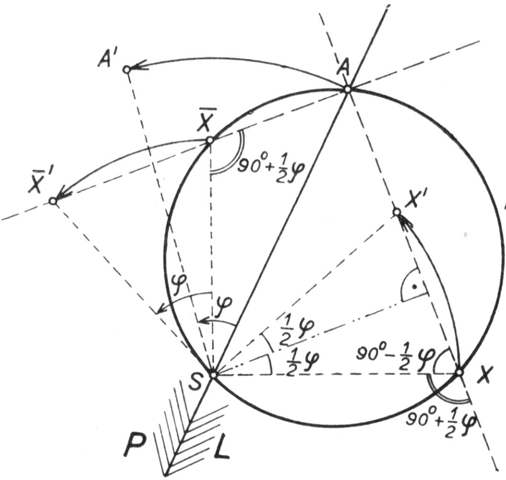
x	1	1,5	2	2,5	3	3,6	4,5	6	9
y	9	6	4,5	3,6	3	2,5	2	1,5	1

4. V rovině ϱ jsou dány dva různé body A, S a úhel velikosti φ, $0° < \varphi \leqq 180°$. Určete množinu všech bodů X roviny ϱ takových, že bod X', který z X dostaneme otočením okolo středu S o úhel φ (v kladném smyslu), leží na přímce AX.

ŘEŠENÍ. I. Nechť $\varphi = 180°$. Poněvadž pak vždy X, X' a S leží na přímce, musí X ležet na přímce AS. Naopak každý bod přímky AS přejde otočením okolo S o $180°$ v bod přímky AS.

V tomto případě je tedy hledanou množinou bodů X přímka AS.

II. Nechť $0° < \varphi < 180°$. Je vidět, že oba body A, S patří do hledané množiny. Nechť A' je obraz bodu A v daném otočení. Buď dále X ještě nějaký jiný bod hledané množiny. Bod X zřejmě neleží na přímce AS a padne tedy buď dovnitř poloroviny ASA', kterou označíme písmenem **P**, anebo dovnitř poloroviny **L** k ní



Obr. 11

opačné (obr. 11). Přitom v rovnoramenném trojúhelníku XSX' $(SX = SX', \ \sphericalangle XSX' = \varphi)$ je vnitřní úhel $\sphericalangle X'XS = 90° - \dfrac{\varphi}{2}$ a vnější úhel při vrcholu X má velikost $90° + \dfrac{\varphi}{2}$. Body X, X', A leží v přímce.

[1] Leží-li náš bod X v polorovině **L**, pak z kladného smyslu otáčení je zřejmé, že bod X' leží na polopřímce XA, a proto

$$\sphericalangle AXS = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

[2] Padne-li náš bod $\bar{X}$ dovnitř poloroviny **P**, pak bod $\bar{X}'$ leží na polopřímce opačné k $\bar{X}A$, a proto

$$\sphericalangle A\bar{X}S = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}.$$

Tak jsme dokázali, že bod X leží buď v polorovině **L** na kruhovém oblouku určeném ostrým úhlem $\sphericalangle AXS =$

$= 90^\circ - \dfrac{\varphi}{2}$, anebo na kruhovém oblouku v polorovině **P** s tupým obvodovým úhlem $AXS = 90^\circ + \dfrac{\varphi}{2}$. Přitom je jasné, že tyto dva oblouky spolu se svými krajními body A, S dají dohromady celou kružnici k.

Obráceně se snadno uváží, že každý bod této kružnice k splňuje podmínky úlohy.

V tomto případě je tedy hledanou množinou bodů X kružnice k, kterou jsme před chvílí popsali.

Tím je úloha vyřešena.

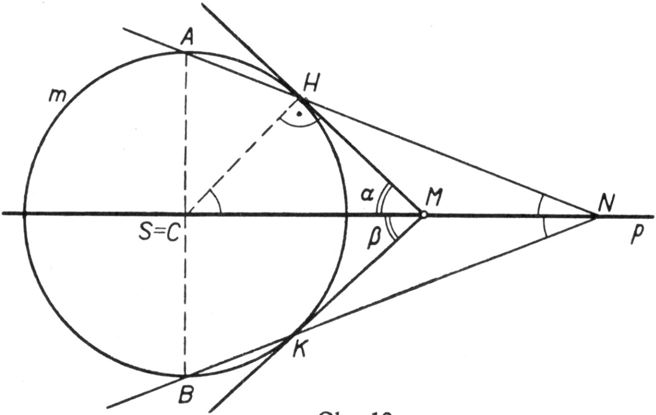
5. V rovině je dána kružnice m se středem S a poloměrem r a přímka p, která má od středu S vzdálenost $d < r$. Na přímce p zvolme libovolný bod M tak, že $SM \geqq r$; z bodu M veďme tečny ke kružnici m a jejich dotykové body označme H, K; patu kolmice vedené bodem S na přímku p označme C.

Pak pro všechny takové body M je součin

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sphericalangle CMK \,.\, \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \sphericalangle CMH$$

roven témuž číslu k (při vhodném označení bodů K, H).

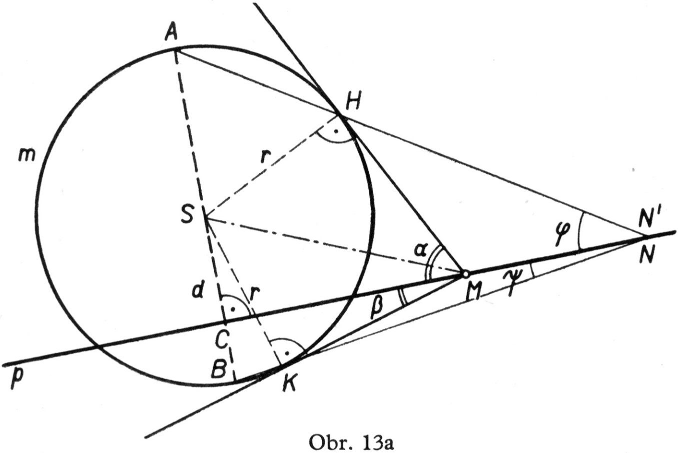
Dokažte a vyjádřete k pomocí r, d. Platí tato věta i v případě $d \geqq r$?



Obr. 12

ŘEŠENÍ. a) Počneme případem $d = 0$ (přímka p prochází středem S). Celý útvar je pak souměrný podle přímky p (obr. 12). Označme A, B krajní body průměru kružnice m kolmého k p. Platí $\sphericalangle HCM = 90° - \alpha$, $\sphericalangle ACH = \alpha$, $\sphericalangle CAH = \sphericalangle CHA = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle ANC = \frac{\alpha}{2}$. Obdobně $\sphericalangle BNC = \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Je tedy

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \,.\, \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = 1 \,. \tag{1}$$



Obr. 13a

b) Nechť přímka p neprochází středem S, tj. $0 < d < < r$ (obr. 13a). Vyšetřujme velikost úhlu $\sphericalangle CNH = \varphi$. Platí $\sphericalangle SAH = \sphericalangle SHA = 90° - \varphi$, pro součet úhlů v čtyřúhelníku $CMHA$ platí $90° + \alpha + 90° + 90° - - \varphi + 90° - \varphi = 360°$, tj. $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$. Odtud plyne

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r + d}{CN}. \tag{2a}$$

Obdobně vyšetříme pro polorovinu pB opačnou k pA

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r - d}{CN'}, \tag{2b}$$

kde N' je průsečík přímek BK, p. Je třeba ještě dokázat, že body N, N' splynou, což nám naznačuje obr. 13a. Skutečně $\sphericalangle CMH$ ($\sphericalangle CMK$) je vnější úhel $\triangle MNH$

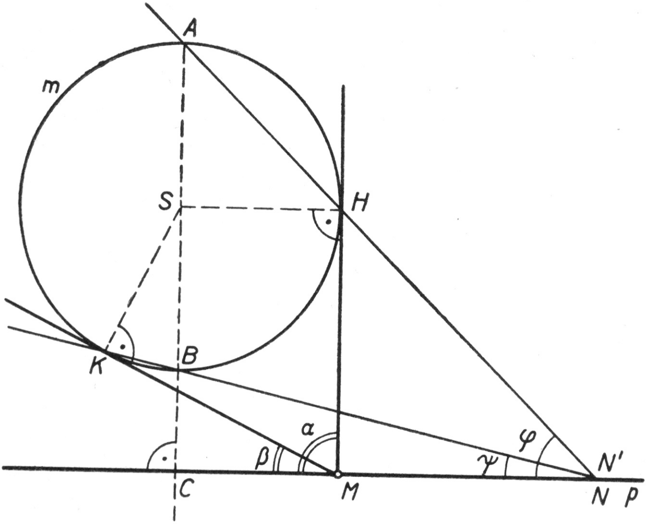
$(MN'K)$. Z toho plyne, že $\sphericalangle MHN = \frac{\alpha}{2} \left(\sphericalangle MKN = \frac{\beta}{2}\right)$, trojúhelníky $\triangle NHM$, $\triangle N'KM$ jsou rovnoramenné a je tedy $MN' = MK = MH = MN$. Protože oba body N, N' leží na polopřímce opačné k MC, je $N = N'$. Z (2a), (2b) plyne

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{r+d}{r-d}. \tag{3}$$

Formule (3) souhlasí s formulí (1), kterou dostaneme, dosadíme-li do (3) $d = 0$.

c) Je zřejmé, že při výměně označení bodů K, H je konstantní poměr ve vzorci (3) roven $\frac{r-d}{r+d}$. V případě $r = d$ zlomek ve vzorci (3) nemá smysl, zlomek $\frac{r-d}{r+d} = \frac{0}{2r}$ je konstantní.

d) Prozkoumejme ještě případ $d > r$ (obr. 13b). V tomto případě musíme volit $M \neq C$, neboť jinak by nebyly úhly $\sphericalangle CMK$, $\sphericalangle CMH$ definovány. Při důkazu rovnosti $\varphi = \frac{1}{2} \alpha$ postupujeme obdobně jako v odstavci b), tj. využijeme vzorce pro součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka $CMHA$. Trochu je jiná situace pro body K, N' a úhly β, ψ. Zde nejprve dokážeme $\sphericalangle CBN' = \sphericalangle KBS = \sphericalangle SKB = 90° - \psi$. Proto je $\sphericalangle MKB = \psi$, a protože $\sphericalangle KMC = \beta$ je vnější úhel $\triangle MN'K$, je $\sphericalangle MKN' = \psi = \frac{\beta}{2}$, $\triangle KMN'$ je rovnoramenný. Obdobně jako v odstavci b) dokážeme, že je $N = N'$ a dostaneme tedy



Obr. 13b

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d + r}{CN}, \quad \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{CN}{d - r},$$

znásobením

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{d + r}{d - r}. \tag{4}$$

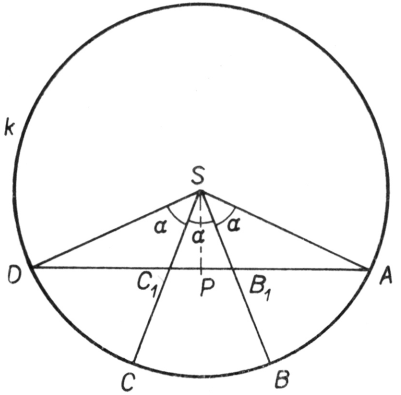
Souhrnně lze zapsat vzorce (3), (4) takto:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} . \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{d + r}{|d - r|};$$

Odst. c) ukazuje, že nemá smysl se zabývat případem $d = r$.

6. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$ a na nej štyri rôzne body A, B, C, D také, že $\sphericalangle BSA = \sphericalangle CSB = \sphericalangle DSC = \alpha < 60°$. Zostrojte tetivu AD a jej priesečníky s priamkami SB, SC označte v uvedenom poradí B_1, C_1. Dokážte, že ak rastie α, rastie i poměr $\lambda = AB_1 : B_1C_1$.

RIEŠENIE. Keďže $\sphericalangle ASD = 3\alpha < 180°$, leží úsečka AD v tomto uhle a aj bod B_1 leží v uhle $\sphericalangle ASD$ (obr. 14). Pritom nemôže byť $B_1 = S$, pretože vtedy by bol uhol ASD priamy, ani B_1 nemôže ležať na polpriamkach SA, SD, pretože body A, B, C, D sú navzájom rôzne. To isté platí i o bode C_1. Z textu úlohy taktiež vidieť, že body A, C ležia v opačných polrovinách vyťatých priamkou SB, t. j. bod B_1 leží vo vnútri úsečky AC_1.



Obr. 14

Z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že

$$\sphericalangle DAS = \frac{180° - 3\alpha}{2} = 90° - \frac{3}{2}\alpha, \quad \sphericalangle ASC_1 = 2\alpha,$$

$$\overline{B_1C_1} = \overline{AC_1} - \overline{AB_1},$$

$$\sphericalangle SB_1A = 180° - \left(90° - \frac{3}{2}\alpha\right) - \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2},$$

$$\sphericalangle SC_1A = 180° - \left(90° - \frac{3}{2}\alpha\right) - 2\alpha = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Podľa sínusovej vety je

$$\overline{AB_1} = \overline{AS} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = r\,\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\overline{AC_1} = \overline{AS} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = r\,\frac{\sin 2\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \text{a} \quad \overline{B_1C_1} =$$

$$= r\,\frac{\sin 2\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} - r\,\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = r\,\frac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Teda $\lambda = \overline{AB_1} : \overline{B_1C_1} = r\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} : r\,\dfrac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha - 1}.$$

Treba dokázať, že ak $\alpha_1 < \alpha_2 < 60^\circ$, potom je $\lambda_1 < \lambda_2$. Pretože funkcia $\cos x$ je v intervale $\langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$ klesajúca, je $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$, z čoho $2\cos\alpha_1 - 1 > 2\cos\alpha_2 - 1$ a keďže $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, je $\cos\alpha_1 > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ a taktiež $\cos\alpha_2 > \frac{1}{2}$, prechádza posledná nerovnosť do tvaru

$$\frac{1}{2\cos\alpha_1 - 1} < \frac{1}{2\cos\alpha_2 - 1},$$

čo je už nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

1. Jsou dána přirozená čísla 1, 2, 3, . . ., n (kde $n \geqq 19$) vyjádřená v desítkové soustavě. Rozdělíme-li tato čísla libovolným způsobem na dvě neprázdné skupiny, pak je vždy možno vybrat z každé skupiny po jednom čísle tak, že obě vybraná čísla mají aspoň jednu společnou číslici. Dokažte.

Platí takové tvrzení i pro $n = 18$?

ŘEŠENÍ. Předpokládejme naopak, že existuje rozklad množiny daných čísel na dvě skupiny A, B takový, že žádné číslo z jedné skupiny nemá společnou číslici s žádným číslem z druhé skupiny. Číslo 10 nechť leží např. ve skupině A. Pak ale z našeho předpokladu vyplývá, že ve skupině A leží i 11, 12, 13, . . ., 19, takže ve skupině A se vyskytují všechny číslice 0, 1, 2, . . ., 9. Na skupinu B tedy žádné číslice nezbývají. To je spor.

Pro $n = 18$ tvrzení neplatí, jak ukazuje rozklad, při němž jedna skupina obsahuje pouze číslo 9 a druhá všechna ostatní čísla.

2. Najděte všechny dvojice celých čísel x, y, pro které platí, že obě čísla $\frac{1+x}{y}$, $\frac{1+y}{x}$ jsou celá.

Výsledek znázorněte náčrtem v rovině pravoúhlých souřadnic x, y.

ŘEŠENÍ. x, y jsou celá čísla nutně různá od nuly.

[1] $x > 0, y > 0$. Je jasné, že musí platit

$$1 + x \geqq y \quad \text{a} \quad 1 + y \geqq x$$

neboli

$$1 + x \geqq y \quad \text{a} \quad y \geqq x - 1\,,$$

tj.

$$x - 1 \leqq y \leqq x + 1 .$$

Tu jsou právě tři možnosti:

a) $y = x - 1$. Potom je $\dfrac{1 + y}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$ celé číslo pro všechna celá $x > 0$. Ale

$$\frac{1 + x}{y} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1},$$

a to je celé právě když $x - 1$ je dělitelem 2, tj. (viz $x > 0$) $x - 1 = 1$ nebo 2, tedy $x = 2$ nebo 3; příslušné $y = x - 1 = 1$ nebo 2.

Obě nalezené dvojice $(x = 2, y = 1)$, $(x = 3, y = 2)$ vyhovují úloze, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

b) $y = x$. Pak $\dfrac{1 + x}{y} = \dfrac{1 + y}{x} = \dfrac{1 + x}{x} = $ $= 1 + \dfrac{1}{x}$. Nutně $x = 1$.

Dvojice $(x = 1, y = 1)$ vyhovuje úloze.

c) $y = x + 1$, tj. $x = y - 1$. To je zřejmě obdobné jako v případě a); zaměníme x, y. Výsledek dostaneme jako symetrický obraz výsledků z a) podle přímky $y = x$.

V I. kvadrantu tedy vyhovuje pět bodů.

[2] $x < -1, y > 0$. Je zřejmé, že nyní musí platit

$$-(1 + x) \geqq y \quad \text{a} \quad 1 + y \geqq -x$$

čili

$$-(1 + x) \geqq y \quad \text{a} \quad y \geqq -(1 + x) ,$$

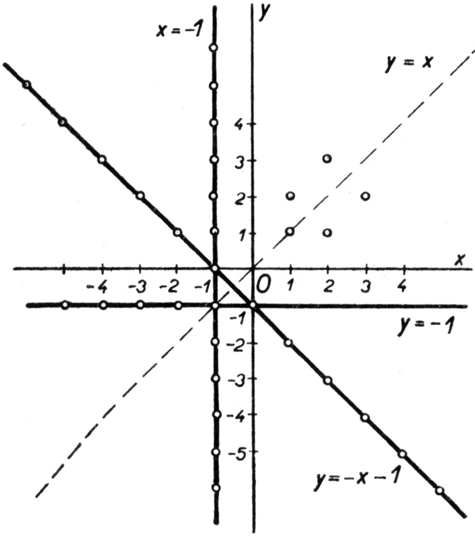
tj.

$$y = -x - 1 .$$

Potom

$$\frac{1+x}{y} = -\frac{1+x}{1+x} = -1 \text{ celé číslo, } \frac{1+y}{x} =$$
$$= -\frac{x}{x} = -1 \text{ celé.}$$

Výsledek je znázorněn na obr. 15.



Obr. 15

Případ $x = -1$ je jednoduchý: vyhovuje každé celé $y \neq 0$ (viz obr. 15).

[3] Případ $y = -1$ je zase snadný. Mějme tedy $x < -1, y < -1$. Tu musí být

$$-(1+x) \geqq -y \quad \text{a} \quad -(1+y) \geqq -x,$$

tj.

$$1 + x \leqq y \quad \text{a} \quad y \leqq x - 1\,,$$

tedy

$$x + 1 \leqq y \leqq x - 1\,.$$

To však není možné, neboť vždy platí

$$x + 1 > x - 1 \quad (\Leftrightarrow 1 > -1)\,.$$

V tomto případě tedy nenacházíme žádnou vyhovující dvojici x, y.

[4] IV. kvadrant už nemusíme vyšetřovat, vzhledem k souměrnosti výsledku podle přímky $y = x$. Uvedené body nejsou na obr. 15 ve IV. kvadrantu na přímce $y = -1$ vyznačeny.

Tím je celá rovnice prozkoumána.

Úloha má nekonečně mnoho řešení (viz obrázek 15).

3. Prirodzené číslo $N > 2$ je súčtom niekoľkých (aspoň dvoch) za sebou nasledujúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď nie je mocninou čísla 2. Dokážte a uveďte príklad $N = 100$.

RIEŠENIE. a) Nech je

$$N = a + (a + 1) + \ldots + (a + b)\,, \tag{1}$$

kde a, b sú prirodzené čísla. Z (1) vyplýva, že platí

$$N = (a + b) + (a + b - 1) + \ldots + a\,. \tag{2}$$

Sčítaním (1) a (2) dostaneme

$$2N = (2a + b)(b + 1)\,. \tag{3}$$

Keďže z textu úlohy vyplýva, že je $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, zrejme platí

$$2a + b \geqq 3\,, \qquad b + 1 \geqq 2\,.$$

Ďalej platí: Ak je b párne, je $b + 1$ nepárne; ak je b nepárne, je aj $2a + b$ nepárne číslo. Číslo $2N$ a teda aj N

má aspoň jedného nepárneho prvočiniteľa a nie je preto mocninou čísla 2.

b) Nech $N > 2$ nie je mocninou čísla 2. Potom má N aspoň jedného nepárneho prvočiniteľa a číslo $2N$ možno rozložiť na súčin dvoch činiteľov, z ktorých jeden je párny, druhý nepárny a každý z nich je väčší než 1. Nech je $2N = \alpha\beta$ taký rozklad. Označenie činiteľov zvoľme tak, aby platilo: $\alpha < \beta$.

Pretože $a \geqq 1$ implikuje $2a + b \geqq b + 2 > b + 1$, pokúsme sa nájsť prirodzené čísla a, b tak, aby platilo

$$b + 1 = \alpha\,, \qquad 2a + b = \beta\,.$$

Z toho dostaneme

$$b = \alpha - 1\,, \qquad 2a = \beta - \alpha + 1\,. \tag{4}$$

Čísla α, β sú však rôznej parity, preto je $\beta - \alpha + 1$ číslo párne a z podmienky $\alpha < \beta$ vyplýva, že je $\beta - \alpha + 1 \geqq 2$. Zo (4) teda dostaneme

$$b = \alpha - 1\,, \qquad a = \frac{1}{2}(\beta - \alpha + 1)\,,$$

kde $a \geqq 1$ je prirodzené číslo. Obrátením postupu z (3) dostaneme (1).

c) Ak je napr. $N = 100$, rozložíme číslo $2N = 200$ na súčin $8 \,.\, 25$ a položíme $b + 1 = 8$, $2a + b = 25$. Z toho vyplýva $b = 7$, $a = 9$ a jedno z riešení úlohy teda je

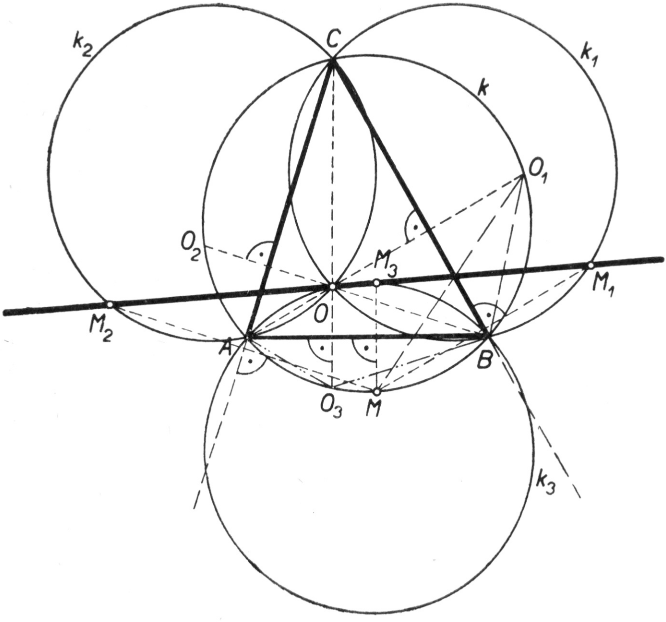
$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100\,.$$

Iné riešenie dostaneme z rozkladu $2N = 200 = 5 \,.\, 40$. V tomto prípade je $b + 1 = 5$, $2a + b = 40$ čiže $b = 4$, $a = 18$ a teda

$$18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100\,.$$

4. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC a na kružnici k jemu opísanej bod M, ktorý nesplýva so žiadnym z vrcholov A, B, C.

Označme M_1, M_2, M_3 body súmerne združené s bodom M podľa priamok BC, AC a AB v uvedenom poradí. Potom body M_1, M_2, M_3 ležia na priamke prechádzajúcej priesečníkom výšok trojuholníka ABC. Dokážte.



Obr. 16

RIEŠENIE. Priesečník výšok daného trojuholníka označme O a body s ním súmerne združené podľa priamok BC, AC, AB nech sú v uvedenom poradí O_1, O_2, O_3 (obr. 16). Pretože

$$\sphericalangle AO_3B = \sphericalangle AOB = 180° - \sphericalangle ACB$$

a body C, O_3 sú oddelené priamkou AB, leží bod O_3 na kružnici k. Podobne aj body O_1, O_2 ležia na kružnici k. Ak teda zostrojíme kružnice k_1, k_2, k_3 súmerne združené s kružnicou k podľa priamok BC, AC, AB, budú tieto tri (zhodné) kružnice prechádzať bodom O.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že bod M leží na tom oblúku $\widehat{AB}$ kružnice k, na ktorom neleží vrchol C. Bod M_1 leží potom vo vnútri uhla $\sphericalangle BOC$ (a to na väčšom oblúku $\widehat{BC}$ kružnice k_1). Podobné tvrdenie možno vysloviť aj o bode M_2.

Zo súmernosti podľa priamky BC vyplýva rovnosť

$$\sphericalangle BOM_1 = \sphericalangle BO_1M$$

a pretože $\sphericalangle BO_1M = \sphericalangle BCM$ (obvodové uhly nad tetivou BM v kružnici k), platí

$$\sphericalangle BOM_1 = \sphericalangle BCM .$$

Podobne sa dokáže, že $\sphericalangle AOM_2 = \sphericalangle ACM$. Celkom teda dostávame

$$\sphericalangle AOM_2 + \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOM_1 = \sphericalangle ACB + \\ + \sphericalangle AOB = 180° .$$

Tak sme dokázali, že body M_1, O, M_2 ležia v jednej priamke.

Ak je náhodou $M = O_3$, leží i bod $M_3 = O$ na tejto priamke. Predpokladajme preto, že bod $M \neq O_3$ leží napr. na oblúku $\widehat{AO_3}$. Potom zo súmernosti podľa priamky AB vyplýva, že

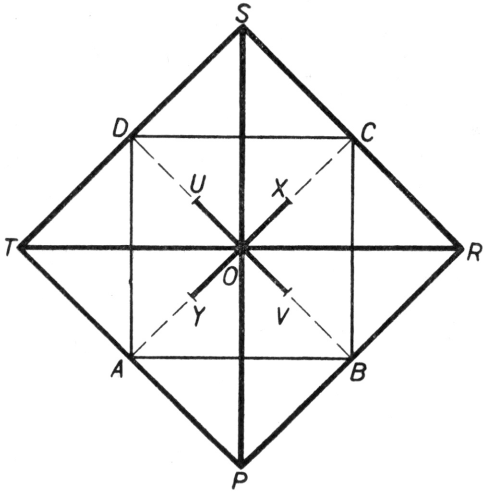
$$\sphericalangle AOM_3 = \sphericalangle AO_3M = \sphericalangle ACM = \sphericalangle AOM_2 .$$

Pretože bod M_3 (ležiaci na menšom oblúku $\widehat{AO}$ kružnice k_3) padne rovnako ako bod M_2 do uhla $\sphericalangle AOC$, je jasné, že aj M_3 leží na našej priamke.

Tým je úloha vyriešená.

5. Je daný štvorec $ABCD$. Uhlopriečka štvorca $KLMN$ je zhodná so stranou štvorca $ABCD$ a vrcholy K aj M ležia na obvode štvorca $ABCD$.

Určite množinu všetkých vrcholov L všetkých takých štvorcov $KLMN$.

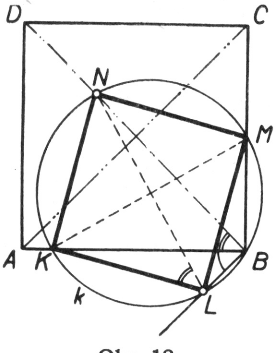


Obr. 17

RIEŠENIE. Nech $PRST$ je štvorec, ktorého stredné priečky sú AC, BD (pozri obr. 17).

I. Body K, M môžu ležať na dvoch protiľahlých stranách daného štvorca $ABCD$. V tomto jednoduchom prípade sa geometrické miesto bodov L skladá práve z úsečiek PS, RT.

II. Nech teraz body K, M ležia na dvoch susedných stranách daného štvorca $ABCD$, napríklad tak, ako to je



Obr. 18

naznačené na obr. 18. Štvorcu $KLMN$ opíšme kružnicu k. Podľa Thaletovej vety leží aj vrchol B na kružnici k. Všimnime si teraz obvodové uhly v kružnici k (napr. $\sphericalangle KBN = \sphericalangle KLN = 45° = \sphericalangle KBL$). Vidíme, že bod L leží na úsečke PR a bod N na úsečke OU (pozri obr. 17, kde $BU = AB$). Pritom však označenie vrcholov L, N možno zameniť. *Obrátene* sa ľahko zistí, že ku každému bodu L úsečky PR, resp. OU možno zostrojiť štvorec $KLMN$ ($KM = AB$), ktorého vrchol K leží na úsečke AB a vrchol M na úsečke BC. Podobnú úvahu môžeme previesť pre každú dvojicu susedných strán daného štvorca $ABCD$.

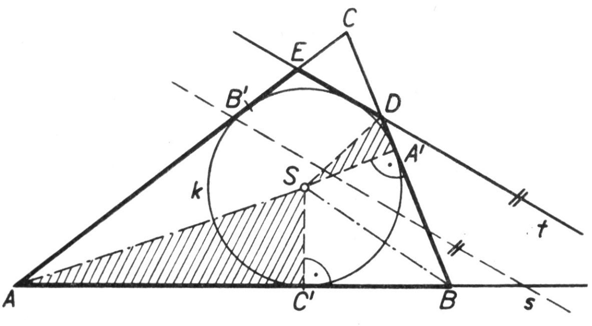
ZÁVER. Hľadané geometrické miesto bodov je na obr. 17 silno vytiahnuté.

6. Je dán trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

a) Sestrojte bod D strany BC a bod E strany CA tak, aby čtyřúhelníku $ABDE$ bylo možno opsat i vepsat kružnici.

b) Vyjádřete vzdálenosti CD, CE i obvod čtyřúhelníka $ABDE$ pomocí délek a, b, c.

ŘEŠENÍ (obr. 19). a) Označme k kružnici vepsanou trojúhelníku ABC a A', B', C' její body dotyku se stranami BC, CA a AB. Přímka DE musí být zřejmě tečnou kružnice k. Protože má být čtyřúhelník $ABDE$ tětivový, musí být $\sphericalangle BDE = 180° - \sphericalangle BAE$; tím je dán směr s



Obr. 19

přímky DE. Sestrojíme tečnu t kružnice k, která je rovnoběžná s přímkou s tak, aby kružnice k i body A, B ležely v téže polorovině s hranicí t. Průsečíky D, E přímky t se stranami CB, CA leží uvnitř úseček CA', CB'. *Obrácením* postupu vyplývá, že čtyřúhelníku $ABDE$ lze i opsat kružnici.

b) Označme S střed kružnice k; pak je $\sphericalangle\, SDA' = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, a tedy $\sphericalangle\, DSA' = \frac{\alpha}{2}$.

Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků je

$$\triangle\, ASC' \sim \triangle\, SDA'$$

a odtud

$$SA' : A'D = AC' : SC' \,. \qquad (1)$$

Platí však $SA' = SC' = \varrho$, kde ϱ je poloměr kružnice k; mimoto je podle známého vzorce $AC' = s - a$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Dosadíme-li do (1), vyjde

$$A'D = \frac{\varrho^2}{s - a} . \tag{2}$$

Dále užijeme vzorce

$$\varrho = \frac{P}{s}, \text{ kde } P \text{ je obsah trojúhelníka } ABC.$$

Užijeme-li Heronova vzorce $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dostaneme pro ϱ^2 rovnost

$$\varrho^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} ; \tag{3}$$

spojením (3) a (2) vyjde

$$A'D = \frac{(s-b)(s-c)}{s} . \tag{4}$$

Protože podle známého vzorce je

$$BA' = s - b ,$$

je podle (4)

$$BD = BA' + A'D = s - b + \frac{(s-b)(s-c)}{s}$$

a po úpravě

$$BD = \frac{s-b}{s}(a+b) . \tag{5}$$

Z rovnosti (5) plyne dále

$$CD = a - BD = \frac{1}{s}(as - as - bs + ab + b^2) ,$$

$$CD = \frac{b}{s}(a + b - s) = \frac{b}{s}(2s - c - s) ,$$

neboli

$$CD = \frac{s-c}{s} . b . \tag{6a}$$

Výměnou písmen $D \leftrightarrow E$, $a \leftrightarrow b$ dostaneme

$$CE = \frac{s - c}{s} \,.\, a \,. \tag{6b}$$

Vzorce (6ab) jsou odpovědí na první otázku b).

Ze vzorce (5) dostaneme výměnou písmen $A \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow E$, $a \leftrightarrow b$ vzorec

$$AE = \frac{s - a}{s} (a + b) \,.$$

$AE + BD$ je poloviční délka obvodu o čtyřúhelníka $ABDE$, který je tečnový. Je tedy

$$o = 2 \frac{s - a}{s} (a + b) + 2 \frac{s - b}{s} (a + b) \,,$$

neboli

$$o = \frac{4(a + b)}{2s} (s - a + s - b) \,,$$

čili

$$o = \frac{4(a + b) \,.\, c}{a + b + c} \,,$$

což je výsledná formule.

3. KATEGÓRIA Z

1. Je daná sústava dvoch rovníc s dvoma neznámymi x, y

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \,, \\ 2x - y &= -3 \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Z tejto sústavy dostaneme novú sústavu tak, že ku každému koeficientu pri neznámej pripočítame to isté číslo p. Nová sústava bude mať za riešenie dvojicu čísel x, y, ktorých rozdiel je 1. Určte všetky čísla p tejto vlastnosti.

RIEŠENIE. Riešením novej sústavy budú buď čísla x, $x + 1$ alebo čísla x, $x - 1$. Preskúmajme obe možnosti.

a) Nech $y = x + 1$. Potom nová sústava sa dá prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} (3 + p)x + (2 + p)(x + 1) &= 0\,, \\ (2 + p)x + (p - 1)(x + 1) &= -3\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme $x = 0$. Po dosadení do prvej rovnice (2) vyjde $p = -2$. Pozmenená sústava (1) má pre $p = -2$ tvar: $x = 0$, $-3y = -3$ čiže $x = 0$, $y = 1$. Je teda $y - x = 1$.

b) Ak bude $y = x - 1$, potom po dosadení do novej sústavy máme

$$\begin{aligned} (3 + p)x + (2 + p)(x - 1) &= 0\,, \\ (2 + p)x + (p - 1)(x - 1) &= -3\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Rovnakou úpravou ako v predchádzajúcom prípade zo sústavy (3) dostaneme $4x - 3 = 3$, z čoho $x = \frac{3}{2}$. Ak tento výsledok dosadíme do prvej rovnice (3), dostaneme $p = -\frac{11}{4}$. Pozmenená sústava (1) má v tomto prípade teda tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y &= 0\,, \\ -\frac{3}{4}x - \frac{15}{4}y &= -3\,. \end{aligned}$$

Táto sústava má riešenie $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, takže je opäť splnená podmienka z textu úlohy: $x - y = 1$.

ZÁVER. Pretože sústavy (2), resp. (3) majú vždy len jediné riešenie $x = 0$, $p = -2$, resp. $x = \frac{3}{2}$, $p = -\frac{11}{4}$, sú teda $p = -2$, $p = -\frac{11}{4}$ hľadané čísla.

2. Udejte všechny pravoúhelníky, jejichž strany mají délky vyjádřené celými čísly (v centimetrech), a které mají tu vlastnost, že jejich obvod (v cm) je roven jejich obsahu (v cm²).

ŘEŠENÍ. Jsou-li a, b velikosti stran hledaného pravoúhelníka, pak podle podmínky úlohy platí

$$2a + 2b = ab\,. \tag{1}$$

Přepíšeme-li tuto rovnici v tvaru

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4\,,$$

vyplývá odtud

$$(a - 2)(b - 2) = 4\,.$$

Čísla $a - 2$, $b - 2$ jsou tedy sdruženými děliteli čísla 4. Výsledky sestavíme do tabulky:

$a-2$	4	2	1	-4	-2	-1
$b-2$	1	2	4	-1	-2	-4
a	6	4	3	-2	0	1
b	3	4	6	1	0	-2

Geometrický význam mají jen kladné hodnoty. Hledané pravoúhelníky jsou dva: obdélník o stranách velikosti 3 cm a 6 cm a čtverec, jehož strana má velikost 4 cm.

POZNÁMKA. Při hledání dvojic přirozených čísel a, b, které splňují rovnici (1) lze také postupovat následujícím způsobem. Z (1) plyne

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2)+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Číslo $b - 2$ je tedy dělitelem čísla 4. Na základě toho dojdeme tedy k obdobné tabulce jako v uvedeném řešení. Bude ovšem mít jen tři řádky, a to pro $b - 2$, b, a.

3. Je dán obdélník $ABCD$, v němž $AB = 2a$, $BC = a$. Nad stranami AB, AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K.

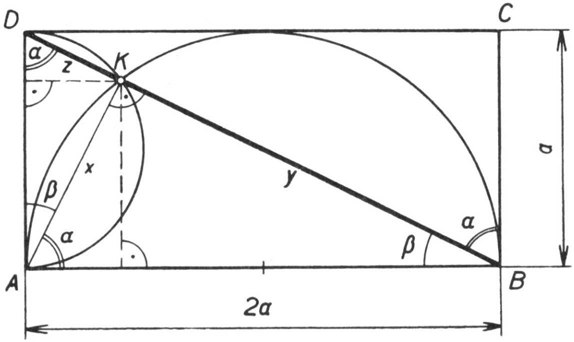
a) Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD.

b) Vypočtěte vzdálenosti bodu K od vrcholů A, B, D.

ŘEŠENÍ. a) Poněvadž podle Thaletovy věty

$$\sphericalangle AKD = 90° \text{ a zároveň } \sphericalangle AKB = 90°,$$

leží body B, K, D v přímce, tj. na úhlopříčce BD daného obdélníka (obr. 20).



Obr. 20

b) Označme

$$AK = x, \quad BK = y, \quad BD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ABK plyne

$$x^2 + y^2 = 4a^2\,,$$

a podobně z pravoúhlého trojúhelníka ADK plyne

$$x^2 + (a\sqrt{5} - y)^2 = a^2\,.$$

Upravujeme druhou rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ay\sqrt{5} + 5a^2 = a^2\,.$$

Dosadíme z první rovnice

$$4a^2 - 2ay\sqrt{5} + 4a^2 = 0$$

a odtud

$$y = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \qquad x = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Nakonec ještě dostaneme

$$DK = a\sqrt{5} - y = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Označme $DK = z$. Z podobnosti $\triangle AKB \sim \triangle DKA$ (věta *uu*) plyne

$$z : x = x : y\,.$$

Dosadíme-li

$$z = a\sqrt{5} - y\,, \tag{1}$$

dostáváme

$$ay\sqrt{5} - y^2 = x^2\,,$$

odtud s použitím vztahu

$$x^2 + y^2 = 4a^2 \tag{2}$$

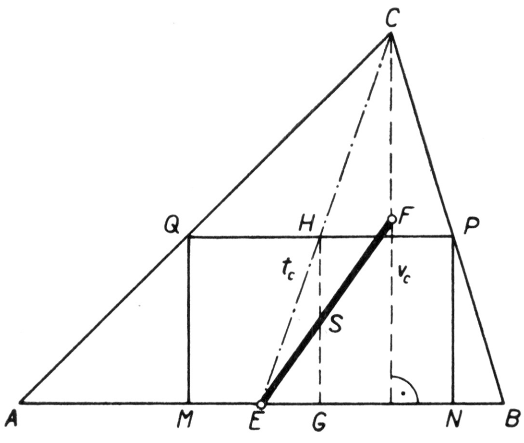
plyne $y = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$. Z (1) pak určíme z. Z (2) můžeme určit x.

Rychleji lze x určit z podobnosti $\triangle ABK \sim \triangle DBA$ (věta *uu*), odkud plyne

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

4. Do ostrouhlého trojuholníka ABC je vpísaný obdĺžnik $MNPQ$ tak, že vrcholy M, N ležia na strane AB, vrchol P na strane BC a vrchol Q na strane CA.
Vyšetrite geometrické miesto stredov všetkých obdĺžnikov $MNPQ$.

RIEŠENIE. Zostrojme jeden obdĺžnik $MNPQ$, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy a jeho stred S (obr. 21).



Obr. 21

Bod S ako stred obdĺžnika $MNPQ$ je stredom jeho strednej priečky HG, kde H je stred strany QP a G stred strany MN. Zrejme je $HG \perp AB$.

Bod H je stredom priečky QP trojuholníka ABC, ktorá je rovnobežná so stranou AB, a preto bod H leží na ťažnici $t_c = EC$ trojuholníka ABC. *Obrátene* ľahko zistíme, že každý vnútorný bod H' ťažnice $EC = t_c$ je stredom strany $Q'P'$ nejakého obdĺžnika $M'N'P'Q'$ vyhovujúceho podmienkam úlohy. Dochádzame teda k úlohe, ktorú možno formulovať takto:

Určite geometrické miesto stredov S všetkých úsečiek HG, kde bod H prebieha vnútro úsečky $EC = t_c$, G leží na AB a $HG \perp AB$.

ZÁVER. Množinou stredov S je teda vnútro úsečky EF, kde F je stred výšky v_c z bodu C na stranu AB, čo platí aj v prípade, keď t_c splýva s v_c, t. j. keď $AC = BC$.