18. ročník matematické olympiády

VI. Jedenásta medzinárodná matematická olympiáda v Bukurešti v dňoch 5.-20. 7. 1969

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968/1969. 11. mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. pp. 147–179.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404590

VI. Jedenásta medzinárodná matematická olympiáda v Bukurešti v dňoch 5.—20. 7. 1969.

1. *ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE*

Na *XI. MMO*, ktorá sa konala v *Bukurešti* v dňoch 5.—20. 7. 1969, opäť vzrástol počet účastníckych zemí, keď sa súťaže po prvý raz zúčastnili družstvá *Belgicka* a *Holandska*. Z účastníckych zemí *X. MMO* chýbalo tentoraz *Taliansko*, takže bukurešťská olympiáda zaznamenala rekordný počet — 14 zemí: *Anglicko*, *Belgicko*, *Bulharsko*, *ČSSR*, *Francúzsko*, *Holandsko*, *Juhoslávia*, *Maďarsko*, *Mongolsko*, *NDR*, *Poľsko*, *Rumunsko*, *SSSR*, *Švédsko*. Ako pozorovateľ sa na práci jury zúčastňoval zástupca *Rakúska*.

Vedúci delegácií jednotlivých zemí (ich mená spolu s menami ich zástupcov — pedagogických sprievodcov sú uvedené *v tabuľke* č. 1), ktorí boli súčasne členmi medzinárodnej jury, sa schádzali v Bukurešti v dňoch 4. a 5. júla 1969. Ihneď po svojom príchode boli ubytovaní v priestoroch telovýchovného zariadenia *Complexul sportiv Snagov* asi 35 km od Bukurešti. V Snagove sa konali tiež zasadania jury v období prípravy vlastnej súťaže, kedy boli vedúci delegácií dôkladne izolovaní od žiakov a pedagogických sprievodcov.

Predsedom jury bol *akademik Gr. C. Moisil*, predseda rumunskej vedeckej matematickej spoločnosti *Societătia de stiinte matematice*. Rokovania jury však viedol zväčša jej podpredseda *akademik N. N. Teodorescu*, podpredseda Národnej rady pre vedecký výskum a podpredseda rumunskej vedeckej matematickej spoločnosti. Ďalším podpredsedom jury bol *prof. C. Ionescu — Bujor*, profesor bukurešťskej polytechniky. Do vedenia organizačného komitétu súťaže patrili okrem menovaných ešte *prof. Gh. Rizescu*, profesor matematiky na lýceu Dimitrie Cantemir v Bukurešti, ako sekretár, *prof. Stefan Văgăi* z toho istého lýcea ako technický sekretár a *prof. Simion Cioată*, ústr. inšpektor Ministerstva školstva RSR.

Prvé zasadnutie jury sa uskutočnilo v nedeľu 6. 7. 69. Delegáti boli na ňom zoznámení s programom olympiády a s návrhmi úloh, medzi ktorými však chýbali návrhy predložené delegáciami Anglicka, Bulharska, Juhoslávie a Maďarska, ktoré ich neposlali vopred, ale priviezli so sebou. O výbere úloh, ktorému boli venované tiež zasadnutia jury v dňoch 7. a 8. 7., sa zmienime podrobnejšie na inom mieste.

Jednotlivé delegácie, na čele se zástupcami vedúcich ako pedagogickými sprievodcami, pricestovali do Bukurešti v dňoch 7. a 8. 7. 1969. Ubytovaní boli vo vysokoškolskom internáte „*Căminul 6. Martie*" na bulváre Gheorghe Gheorghiu-Dej v centre Bukurešti. Na rozdiel od niekoľkých predchádzajúcich olympiád zostali pedagogickí sprievodcovia ubytovaní spolu so žiakmi a nezúčastňovali sa prvej etapy práce jury — výberu úloh a ich prekladu do materskej reči súťažiacich žiakov.

V dňoch 7.—9. 7. 1969 sa žiaci zoznamovali s miestom súťaže a jeho najbližším okolím. V utorok 8. 7. podnikli autokarový zájazd k zámku *Mogoşoaia* neďaleko Bukurešti a k jazeru *Snagov*. Predpoludnie dňa 9. 7. bolo venované *prehliadke Bukurešti*, ktorú žiaci absolvovali na autobusoch s dvoma dlhšími zastávkami — na *štadióne 23. augusta* a v *Muzeul Satului* (rumunský skanzen). Počas popoludňajších horúčav mohli žiaci oddychovať v príjemnom prostredí internátu.

Vedúci delegácií počas stredy 9. 7. rozmnožovali texty úloh vybraných pre súťaž a zavčas ráno dňa 10. 7. 1969 sa definitívne presťahovali zo Snagova do Bukurešti, kde boli ubytovaní na zostávajúcu časť svojho pobytu v Rumunsku v hoteli *Ambassador* na bulvári Magheru, najrušnejšej tepne hlavného mesta.

Vo štvrtok 10. 7. 1969 o 9. hodine bolo v *lýceu Nicolae Bălcescu slávnostné zahájenie súťaže.* Krátky prejav k zhromaždeným členom delegácií predniesol po rumunsky námestník ministra školstva *Traian Pop.* Po niekoľkých organizačných pokynoch *prof. Ionescu-Bujora* sa žiaci rozišli po jednom z každej delegácie do ôsmich tried lýcea, kde asi o 9.03 hod. začali pracovať na riešení prvej trojice súťažných úloh. Vedúci delegácií boli potom odvezení do *Valca Călegăreascā* (asi 70 km od Bukurešti), kde si prehliadli vinárske závody a neskoro večer sa vrátili do svojho nového bydliska — hotelu Ambassador.

Druhá časť súťaže sa začala v piatok 11. 7. o 9. hodine a žiaci opäť riešili 3 úlohy za 4 hodiny čistého času. Potom sa vedúci delegácií po prvý raz od príchodu do Rumunska stretli so svojimi zástupcami a za vytrvalého dažďa podnikli výlet do údolia rieky *Prahovy*, kde si prezreli kráľovský zámok *Peleš* v kúpeľnom mestečku *Sinaia*, a do *Brašova.* Do Bukurešti sa vrátili opäť neskoro v noci. Žiaci večer pod vedením tlmočníkov jednotlivých delegácií navštívili v bukureštskom divadle *Nottara* vystúpenie rumunského súboru ľudových piesní a tancov „*Perinica*“.

Ráno 12. 7. 1969 sa vydali z Bukurešti na sedemdňový zájazd okolo Rumunska tri autobusy so žiakmi, tlmočníkmi a rumunskými organizátormi. V prvý deň cesty prechádzali mestami *Buzau*, *Foscani*, *Marazešti*, kde si prezreli pamätník rumunských hrdinov z 1. svetovej vojny, a *Bacau.*

Dňa 13. 7. navštívili priehradu a jazero *Rošu* a mesto *Bicaz*, mesto *Piatre Neamt* a cestu zakončili prehliadkou monastýra *Agapia*, v ktorom nocovali.

V nasledujúci deň sa presťahovali do mesta *Suceava*, z ktorého podnikli výlety do klášterov *Sucevica*, *Moldovica* (14. 7.), *Humor* a *Voronec* (15. 7.).

Dňa 16. 7. viedla trasa zájazdu zo *Suceavy* cez *Gura Humorului*, *Vatra Dornai*, *Bistricu* (návšteva pionierskeho tábora) do *Tirgu Mureš*.

V predposledný deň zájazdu navštívili jeho účastníci mestá *Sighišoara* a *Brašov*. Dňa 18. 7. absolvovali cestu z Brašova cez *Predeal* a *Poianu Tapului* do *Sinaie*, kde si so záujmom prehliadli kráľovský palác *Peleš* a krátko pred polnocou sa vrátili do Bukurešti.

Počas dlhej a na dojmy bohatej cesty sa účastníci zájazdu zoznámili s históriou Rumunska a vo všetkých krajoch videli desiatky nových tovární, ktorých počet neustále rastie.

Pri ceste Rumunskom priam cítiť, ako sa poľnohospodársky štát mení na krajinu s vyspelým priemyslom.

V sobotu 12. 7. 1969 začali vedúci delegácií so svojimi zástupcami opravu riešení súťažných úloh. O 14. hodine sa v *Univerzitnom dome* zúčastnili na obede poriadanom ministrom školstva RSR pre zahraničných delegátov olympiády a organizačný výbor.

Opravy žiackych riešení pokračovali v lýceu Nicolae Balcescu i v nedeľu 13. 7. 1969, kedy sa začala zároveň koordinácia opráv a hodnotenia riešení s rumunskými koordinátormi.

Oprava, bodovanie a koordinácia klasifikácie úloh boli sťažené tým, že sa principiálne otázky neprejednali vopred na spoločnej schôdzke vedúcich delegácií, ich zástupcov a koordinátorov. Koordinátori boli pôvodne len štyria, až na žiadosť členov jury bol ich počet zvýšený na šesť tak, aby pre každú úlohu bol zvláštny koordinátor. Práce rumunskych žiakov koordinovali — ako je to na olympiádach obvyklé — vedúci delegácií tých zemí, z ktorých boli autori súťažných úloh.

Koordinácia riešení prebiehala tiež v dňoch 14. 7. a 15. 7. V utorok 15. 7. o 19.00 hod. navštívili vedúci delegácií so svojmi zástupcami predstavenie súboru *Perinica v divadle Nottara.*

V stredu 16. 7. bol pre delegátov prakticky voľný deň, ktorý využívali *na prehliadku Bukurešti* a jej najbližšieho okolia.

Vo štvrtok 17. 7. sa v lýceu Nicolae Bălcescu konali záverečné zasadnutia jury, ktorých sa bez hlasovacieho práva zúčastnili aj pedagogickí sprievodcovia. Na programe predpoludňajšieho zasadnutia bolo schválenie výsledkov jednotlivých žiakov a stanovenie podmienok pre udelenie cien. Rokovanie o cenách bolo komplikované a zdĺhavé, takže rozhodnutie o udelení zvláštnych cien za originalitu a eleganciu riešení bolo odložené na popoludňajšie zasadnutie jury. Na predpoludňajšom rokovaní predložil tiež podpredseda jury prof. Ionescu-Bujor návrh na zmenu programu záverečných dní olympiády. Jeho návrh, aby sa v sobotu 19. 7. nekonal spoločný výlet delegátov a žiakov do *Curtea de Argeš* vzhľadom na neskorý plánovaný návrat žiakov zo zájazdu okolo Rumunska a aby sa slávnostné vyhlásenie výsledkov a odovzdanie diplomov preložilo z nedele 20. 7. na 19. 7., prijala jury bez námietok.

V závere popoludňajšieho zasadnutia sa prihlásil o slovo vedúci maďarskej delegácie *prof. E. Hódi*, ktorý predniesol pozvanie na *XII. MMO do Maďarska.* O usporiadanie *XIII. MMO* v r. 1971 sa uchádza ČSSR, o čom československí zástupcovia v neoficiálnych rozhovoroch informovali zástupcov ostatných delegácií, ktorí prijímali túto správu so súhlasom. V piatok 18. 7. mali vedúci delegácií a ich zástupcovia opäť voľný deň, ktorý väčšina z nich venovala neúspešným pokusom o získanie cestovných lístkov, resp. leteniek pre návrat do vlasti so skorším dátumom.

O 20.30 hod. poriadal výbor *Societatia de stiințe matematice* večeru pre zahraničných delegátov a organizačný výbor olympiády. *Večera* sa konala opäť v *Univerzitnom dome* a zúčastnil sa jej tiež námestník ministra školstva s. *Traian Pop*.

V sobotu 19. 7. o 10.00 hod. sa v aule lýcea Nicolae Bălcescu konalo *slávnostné vyhlásenie výsledkov a rozdelenie cien*. Za prítomnosti nám. ministra školstva s. Traiana Popa prehovoril *akad. Gr. C. Moisil*, ktorý vo svojom prejave zhodnotil význam medzinárodných matematických olympiád, ktoré se pred rokmi začali konať z iniciatívy rumunských matematikov a práve *Rumunsko* už po tretí raz hostilo desiatky nádejných matematikov, ktorí si prišli zmerať sily v súťaži. V závere prejavu úprimne želal účastníkom olympiády, aby po celý život udržiavali a upevňovali medzinárodné priateľstvá, ktoré počas svojho pobytu v Rumunsku uzavreli.

Po prejave odovzdal *akad. Moisil* diplomy o udelení cien a zvláštnych cien odmeneným žiakom a účastnícke diplomy ostatným účastníkom olympiády.

V mene zahraničných delegácií poďakoval za dobrú organizáciu a vynaloženú starostlivosť rumunským hostiteľom vedúci maďarskej delegácie *prof. E. Hódi*, ktorý v závere svojho prejevu opätovne pozval delegácie všetkých zúčastnených zemí i *Rakúska*, ktoré malo v Bukurešti len svojho pozorovateľa, na budúci rok *do Maďarska na XII. MMO.*

O 13.00 hod. sa v jedálni internátu „*Căminul 6. Martie*" uskutočnil slávnostný obed všetkých účastníkov olympiády, ktorým sa skončil oficiálny program. Pred obedom odovzdali rumunskí hostitelia knižné a drobné vecné darčeky všetkým zahraničným účastníkom olympiády. Zvyšok času do svojho odchodu využívali jednotlivé delegácie na prehliadku niektorých miest Bukurešti a nákup suvenírov a darčekov pre svojich blízkych. *Odchod delegácií* sa uskutočnil v nedeľu 20. 7. popoludní a v pondelok 21. 7. 1969. Zhodou okolností odchádzala ako posledná z Bukurešti československá delegácia, ktorá opustila dejisko *XI. MMO* až v pondelok večer.

Rumunskí poriadatelia urobili všetko pre to, aby *XI. MMO* skončila plným úspechom, pripravili žiakom a ich vedúcim tie najlepšie podmienky pre prácu. Počas celého svojho pobytu sa všetky delegácie stretávali s pozornosťou a pohostinstvom. Olympiáde venovala pozornosť aj rumunská televízia, ktorá 10. 7. večer vysielala zábery zo slávnostného zahájenia súťaže a v sobotu 19. 7. večer zasa zábery z rozdeľovania cien a rozhovor s akad. Moisilom, predsedom jury, a so všetkými 3 žiakmi, ktorí získali 1. cenu.

2. *O VÝBERE SÚŤAŽNÝCH ÚLOH*

Výber 6 súťažných úloh na rokovaní jury v *Snagove* sa ukázal byť veľmi zložitým problémom. Pretože pozvanie na *XI. MMO* v Rumunsku došlo pomerne neskoro (v polovici apríla), neposlali niektoré zúčastnené štáty (*Anglicko*, *Bulharsko*, *Juhoslávia*, *Maďarsko*) úlohy vopred, ale vedúci delegácií ich priviezli až so sebou do Snagova. Sekretariát MMO mohol potom včas rozmnožiť iba texty týchto úloh. Ich autorské riešenia neboli známe a členovia jury nemali už čas úlohy rozriešiť a preštudovať. To isté platí aj o sovietskych úlohách, pretože *SSSR* poslal do stanoveného termínu poriadateľom len texty navrhovaných úloh bez riešení.

Rumunská prípravná komisia vybrala 12 úloh z tých, ktoré prišli včas, aby z nich jury vybrala 6 súťažných úloh. Medzi týmito úlohami boli aj *2 úlohy československé.* Dodatočne predložené úlohy však zmenili situáciu. Prof. Ionescu-Bujor, ktorý viedol zasadnutia jury pri výbere úloh, doplnil skupinu 12 úloh o ďalšie návrhy, a to podľa jednotlivých úsekov školskej matematiky. Pritom sa ukázal nedostatok vhodných úloh zo školskej algebry, planimetrie a trigonometrie, ale zato bol nadbytok úloh napr. z číselnej teórie.

Výber súťažných úloh sa previedol potom z upravenej skupiny 12 úloh hlasovaním o jednotlivých úlohách. Táto metóda výberu, ktorá bola použitá po prvý raz s neveľkým úspechom na X. MMO v Moskve, sa príliš neosvedčila ani tento raz. Medzi súťažné úlohy sa dostala celkom nevhodná *úloha č. 1* z číselnej teórie, ktorá sa hodí skôr pre žiakov nižšieho stupňa strednej školy, málo vhodná planimetrická *úloha č. 4*, ktorá nedáva takmer žiadne možnosti elegantného riešenia, a neobvyklá a pre žiakov značne obťažná *úloha č. 6.* Stereometrická *úloha č. 3* bola sformulovaná tak, že jej riešenie nevyžadovalo detailné preskúmanie najobťažnejšieho prípadu pre $k = 3$, ktoré mal autor hlavne na mysli, čím sa príliš zjednodušila, pretože jej riešenie sa opieralo v podstate len o použitie trojuholníkovej nerovnosti.

Ďalšia ťažkosť sa objavila pri *stanovení maximálneho počtu bodov* dosiahnuteľného za úplné riešenie jednotlivých úloh. Predsedajúci prof. Ionescu-Bujor stanovil pre počet bodov hranice 5—8. Pretože toto rozpätie bolo vzhľadom na rôznu obťažnosť úloh napr. č. 1 a č. 6 príliš malé, zdržal sa čs. delegát hlasovania o tejto otázke. Pri hlasovaní bola tiež úloha č. 3 nadhodnotená 7 bodmi. Najlepšie boli vybrané a ohodnotené úlohy č. 2 (po úprave pôvodnej formulácie) a č. 5.

Je pozoruhodné, že na *XI. MMO* sa po prvý raz nedostala medzi súťažné úlohy úloha z ČSSR. Pri stále rastúcom počte účastníckych zemí je to však celkom prirodzené a samozrejmé.

Pri celom rokovaní jury o výbere úloh sa ukázalo, že rozdieľnosť osnov toľkých zúčastnených štátov sťažuje výber. Tématikou navrhovaných úloh je podľa doterajšej tradície tzv. *„klasická" školská matematika.* Viacerým zemiam, v ktorých modernizácia vyučovania matematiky viac pokročila, to však nevyhovuje. Pravdepodobne už v blízkej budúcnosti bude treba uvažovať o zmene koncepcie súťažných úloh.

3. *RIEŠENIE SÚŤAŽNÝCH ÚLOH*

1. DEŇ (10. JÚLA 1969)

1. Existuje nekonečne mnoho prirodzených čísel a, ktoré majú tú vlastnosť, že číslo $a + n^4$ nie je prvočíslom pre žiadne prirodzené číslo n. Dokážte.

(*NDR*, 5 bodov)

RIEŠENIE. Položme $a = 4k^4$, kde k je prirodzené číslo, abysme číslo $a + n^4$ vyjadrili ako rozdiel druhých mocnín. Potom je $a + n^4 = n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk) = [(n - k)^2 + k^2]\,[(n + k)^2 + k^2]$.

Ak zvolíme $k \geqq 2$, sú oba činitele v hranatých zátvorkách väčšie alebo rovné 4 pre každé prirodzené n a číslo $a + n^4$ nie je teda prvočíslo.

2. Nech sú $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqq 1)$ reálne konštanty a nech $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \ldots +$

$+ \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x)$ je funkcia reálnej premennej x. Ak je $f(x_1) = f(x_2) = 0$, potom je $x_2 - x_1 = m\pi$, kde m je celé číslo; dokážte. (*Maďarsko*, 7 bodov)

RIEŠENIE. Podľa vzorca pre kosínus súčtu uhlov platí $f(x) = A \cos x - B \sin x$, kde

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\cos a_1}{2^0} + \frac{\cos a_2}{2^1} + \ldots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}, \\
B &= \frac{\sin a_1}{2^0} + \frac{\sin a_2}{2^1} + \ldots + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Podľa predpokladu je

$$
\begin{aligned}
A \cos x_1 - B \sin x_1 &= 0, \\
A \cos x_2 - B \sin x_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Nepriamo dokážeme, že nie je súčasne $A = B = 0$. Nech platí opak, tj. $A = B = 0$. Potom, ak prvú rovnicu v (1) vynásobíme číslom $\cos a_1$, druhú číslom $\sin a_1$ a sčítame, dostaneme

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} (\cos a_1 \cos a_k + \sin a_1 \sin a_k) = 0,$$

čiže

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos(a_1 - a_k) = 0. \tag{3}$$

Platí však

$$\left| 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos(a_1 - a_k)}{2^{k-1}} \right| \geqq 1 - \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{\cos(a_1 - a_k)}{2^{k-1}} \right| \geqq$$

$$\geqq 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} > 0,$$

čo je spor s (3).

Môžeme preto predpokladať, že je napr. $A \neq 0$. Ak vynásobíme prvú rovnicu (2) číslom $A \sin x_2$, druhú číslom $-A \sin x_1$ a sčítame, dostaneme

$$A^2 (\cos x_1 \sin x_2 - \cos x_2 \sin x_1) = A^2 \sin (x_2 - x_1) = 0\,.$$

Pretože $A \neq 0$, je $\sin (x_2 - x_1) = 0$, tj. $x_2 - x_1 = m\pi$, kde m je celé číslo.

V prípade $A = 0$ musí byť $B \neq 0$ a dôkaz sa prevedie analogicky.

3. Pre každé z čísel $k = 1, 2, 3, 4, 5$ riešte úlohu: Určite nutné a postačujúce podmienky pre kladné číslo a, aby existoval štvorsten, ktorého k hrán má dĺžku a a zostávajúcich $6 - k$ hrán má dĺžku 1. (*Poľsko*, 7 bodov)

RIEŠENIE. Keďže prípady $k = 4$, $k = 5$ možno voľbou úsečky veľkosti a za jednotkovú previesť na prípady $k = 2$, $k = 1$, stačí vyšetrovať len prípady $k = 1, 2, 3$.

I. $k = 1$. Nech $AB = a$, $AC = AD = BC = BD = CD = 1$ a nech M je stred hrany CD (obr. 50).

Potom je $AM = BM = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $AB < AM + BM$, čiže

$$0 < a < \sqrt{3}\,. \tag{1}$$

Podmienka (1) je však zrejme aj postačujúcou podmienkou pre to, aby bylo možné zostrojiť štvorsten typu I.

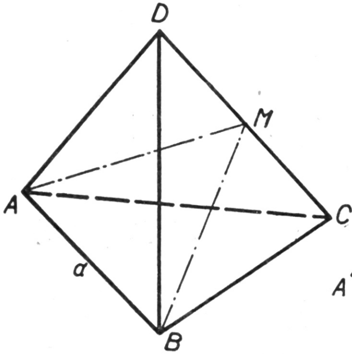
II. $k = 2$. Treba rozlišovať 2 prípady: a) Hrany dĺžky a sú mimobežné, napr. $AB = CD = a$, $AC = BC = AD = BD = 1$. Pri označení ako v obr. 50 potom platí

$$AM = BM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}, \; AB < AM + BM, \text{ čiže}$$

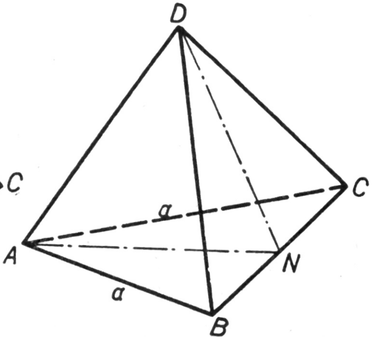
$a < 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$, z čoho $a^2 < 4 - a^2$, čiže $|a| < \sqrt{2}$, a teda

$$0 < a < \sqrt{2}, \tag{2}$$

čo je opäť aj podmienka postačujúca.



Obr. 50



Obr. 51

b) Hrany, dĺžky a sú rôznobežné, napr. $AB = AC = a$; $AD = BD = BC = CD = 1$. Označme N stred hrany BC (obr. 51). Z existencie trojuholníka ADN vyplýva: $AD + DN > AN > |AD - DN|$, čiže

$$1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

odkiaľ postupne dostaneme

$$1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}<a^2-\frac{1}{4}<1+\sqrt{3}+\frac{3}{4},$$

$$2-\sqrt{3}<a^2<2+\sqrt{3},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

z čoho po úprave surdických výrazov dostaneme nutnú podmienku pre existenciu štvorstena v tomto prípade v tvare

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})<a<\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}). \tag{3}$$

Ak platí (3), je $a>\frac{1}{2}$, možno preto zostrojiť trojuholník ABC so stranami $AB=AC=a$, $BC=1$ a určiť bod D tak, že bude $AD=BD=CD=1$.

Keďže $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})<\sqrt{2}$, je nutnou a postačujúcou podmienkou k tomu, aby pre $k=2$ existoval štvorsten uvedených vlastností splnenie nerovnosti

$$0<a<\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

ktorú dostaneme z (2) a (3).

III. $k=3$. Môžu nastať celkom 3 prípady: a) Hrany dĺžky a sú strany trojuholníka; b) hrany dĺžky a vychádzajú z toho istého vrcholu; c) dĺžku a majú dve mimobežné hrany a ich priečka.

a) Nech je napr. $AB=BC=CA=a$, $DA=DB=$ $=DC=1$. Kolmý priemet bodu D do roviny ABC je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre existenciu štvorstena tohto typu je, aby polomer kružnice opísanej $\triangle ABC$ bol menší než 1, tj. $a\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$, čiže

$$0 < a < \sqrt{3} \doteq 1{,}732\,. \tag{4}$$

b) Nech je napr. $DA = DB = DC = a$, $AB = BC = CA = 1$. Podobne ako v prípade a) dostaneme pre polomer R kružnice opísanej $\triangle ABC$ podmienku $R < a$, tj.

$$a > \frac{1}{3}\sqrt{3} \doteq 0{,}577\,. \tag{5}$$

Zo (4) a (5) dostávame $0 < a$, čo je zrejme nutná aj postačujúca podmienka pre existenciu štvorstena uvedených vlastností pre $k = 3$ a o prípade c) netreba uvažovať.

Nutnú a postačujúcu podmienku pre existenciu štvorstena uvedených vlastností pre jednotlivé k možno zhrnúť v tabuľke

$k = 1$	$0 < a < \sqrt{3}$
$k = 2$	$0 < a < \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
$k = 3$	$0 < a$
$k = 4$	$\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) < a$
$k = 5$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} < a$

POZNÁMKA. Keďže skúmanie prípadu IIIc je najzaujímavejšie a podľa zámeru autora úlohy malo byť jadrom riešenia, rozoberme ešte tento prípad.

Nech napr. $AD = BD = BC = a$, $AB = AC = CD = 1$. Zvoľme si súradnicovú sústavu v priestore tak, že $A \equiv [0, 0, 0]$, $B \equiv [1, 0, 0]$, $C \equiv [u, v, 0]$, $D \equiv [x, y, z]$ (obr. 52).
Potom platí

$$(AC^2 =)\, u^2 + v^2 = 1, \tag{6}$$
$$(BC^2 =)\, (u - 1)^2 + v^2 = a^2\,, \tag{7}$$
$$(AD^2 =)\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,, \tag{8}$$
$$(BD^2 =)\, (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = a^2\,, \tag{9}$$
$$(CD^2 =)\, (x - u)^2 + (y - v)^2 + z^2 = 1\,. \tag{10}$$

Zo (6) a (7) odčítaním dostaneme

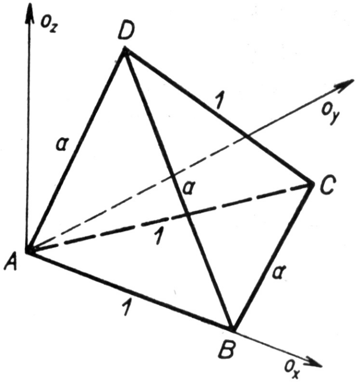
$$u = 1 - \frac{a^2}{2}\,. \tag{11}$$

Zo (6) a (11) po dosadení za u máme

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{4 - a^2}\,. \tag{12}$$

Z (8) a (9) po odčítaní dostaneme

$$x = \frac{1}{2} \tag{13}$$



Obr. 52

a z (9) a (10) po odčítaní bude $2ux + 2vy = a^2$, z čoho po dosadení z (11), (12), (13) máme

$$y = \frac{3a^2 - 2}{2a\sqrt{4 - a^2}}\,. \tag{14}$$

Päta P výšky z vrcholu D na stenu ABC má súradnice $P[x, y, 0]$. Pre dĺžku AP platí $AP = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nutná a postačujúca podmienka existencie štvorstena je $AD >$ $>$ AP čiže $AD^2 > AP^2$, tj.

$$x^2 + y^2 < a^2 . \tag{15}$$

Ak do (15) dosadíme z (13) a (14), bude

$$\frac{1}{4} + \frac{(3a^2 - 2)^2}{4a^2(4 - a^2)} < a^2 ,$$

z čoho po úprave máme

$$a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 1 < 0 . \tag{16}$$

Štvorčlen na ľavej strane (16) sa však dá rozložiť,
$a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)(a^4 - 3a^2 + 1)$, takže podmienkou existencie štvorstena typu IIIc je splnenie nerovnosti $a^4 - 3a^2 + 1 < 0$, čiže

$$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} < a < \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} .$$

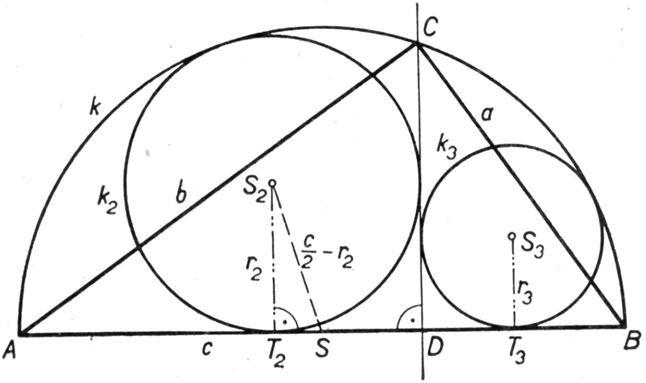
2. DEŇ (11. JÚLA 1969)

4. Je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a jemu opísaná kružnica k. Označme D pätu výšky spustenej z vrcholu C na preponu AB, k_1 kružnicu vpísanú trojuholníku ABC k_2, k_3 dve navzájem rôzne kružnice, z ktorých každá sa dotýka priamok AB, CD, leží v polrovine ABC a dotýka sa zvnútra kružnic k. Dokážte, že kružnice k_1, k_2, k_3 majú okrem priamky AB ešte ďalšiu spoločnú dotyčnicu. (*Holandsko*, 6 bodov)

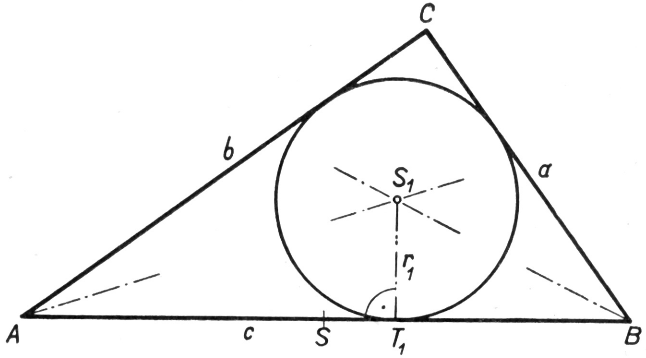
RIEŠENIE. Označme podľa obr. 53 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = p$, $BD = q$. Ďalej označme S_1, S_2, S_3 stredy a r_1, r_2, r_3 polomery kružníc k_1, k_2, k_3 v uvedenom poradí. Ich dotykové body s priamkou AB označme T_1,

T_2, T_3 a stred prepony AB označme S. Predpokladajme (bez ujmy na všeobecnosti), že je $b \geqq a$.

Pre $\triangle\, S_2T_2S$ platí podľa Pythagorovej vety (i vtedy, keď je $T_2 = S$): $\left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2 = r_2^2 + \left(q + r_2 - \frac{c}{2}\right)^2$,



Obr. 53



Obr. 54

z čoho vyplýva $(r_2 + q)^2 = qc = a^2$, čiže

$$r_2 = a - q\,. \tag{1}$$

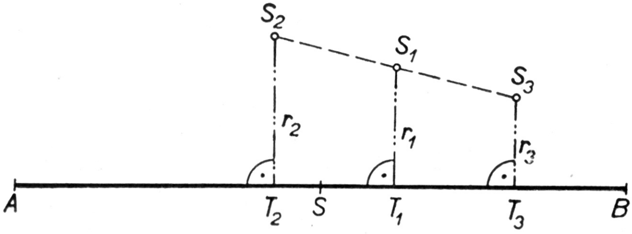
Použitím Pythagorovej vety na $\triangle\, S_3T_3S$ analogicky dostaneme

$$r_3 = b - p\,. \tag{2}$$

Pretože je podľa predpokladu $b \geqq a$, leží bod T_1 na polpriamke SB (obr. 54). Podľa známeho vzorca je

$$r_1 = s - c,\ \ AT_1 = s - a\,. \tag{3}$$

Pre body T_1, T_2, T_3 (ležiace na polpriamke AB) a pre body S_1, S_2, S_3 nastane teda situácia z obr. 55).



Obr. 55

Podľa vzťahov (1), (2), (3) pritom platí:

$$AT_2 = p + q - a,\ AT_3 = p + b - p = b\,,$$
$$AT_1 = s - a\,,$$

čiže

$$AT_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) - a = \frac{1}{2}(b + c - a) =$$
$$= \frac{1}{2}(AT_2 + AT_3)\,,$$

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) - c = \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3),$$

pretože

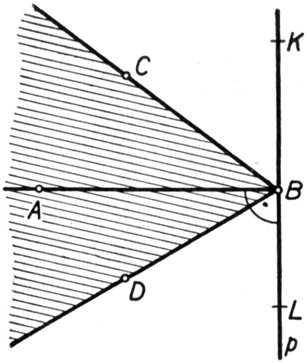
$$p + q = c .$$

Bod S_1 je teda stredom úsečky S_2S_3. Priamka súmerne združená s AB podľa priamky S_2S_1 je preto ďalšou spoločnou dotýčnicou kružníc k_1, k_2, k_3.

5. V rovine je daných n bodov ($n > 4$), z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Potom existuje aspoň $\frac{1}{2}(n-3) \, . \, (n-4)$ rôznych konvexných štvoruholníkov, ktorých všetky vrcholy sú niektoré z daných bodov. Dokážte.

(*Mongolsko*, 7 bodov)

RIEŠENIE. Medzi $\binom{n}{2}$ úsečkami, ktoré spájajú body danej množiny $\mathfrak{M}$ po dvoch vyberieme najdlhšiu úsečku AB (tj. pre všetky dvojice bodov X, Y množiny $\mathfrak{M}$ platí $XY \leqq AB$). Bodom B vedieme priamku $p \perp AB$. Podľa voľby úsečky AB ležia všetky body množiny $\mathfrak{M}$ okrem bodu B vo vnútri polroviny pA (obr. 56).



Obr. 56

Na priamke p zvolíme body K, L tak, aby boli oddeľované bodom B a určíme také body C, D množiny $\mathfrak{M}$, aby vo vnútri uhlov $\sphericalangle KBC$ a $\sphericalangle LBD$ neležal žiadny bod množiny $\mathfrak{M}$. Potom všetky body množiny $\mathfrak{M}$ s výnimkou bodov B, C, D ležia vo vnútri dutého úhla $\sphericalangle CBD$.

Zvoľme ľubovoľné dva body X, Y z $\mathfrak{M}$ rôzne od B,

C, D. Body X, Y ležia vo vnútri uhla $\sphericalangle CBD$. Môže nastať práve jeden z týchto 5 prípadov: a) Priamka XY pretína obe úsečky BC, BD; b) priamka XY pretína úsečku BD (BC) a polpriamku opačnú k CB(DB); c) priamka XY pretína úsečku BD(BC) a je rovnobežná s priamkou BC (BD); d) priamka XY pretína polpriamku opačnú k DB (CB) a je rovnobežná s priamkou BC (BD); e) priamka XY pretína polpriamky opačné k CB, DB. Jednotlivé prípady sú načrtnuté na obr. 57a)—e).

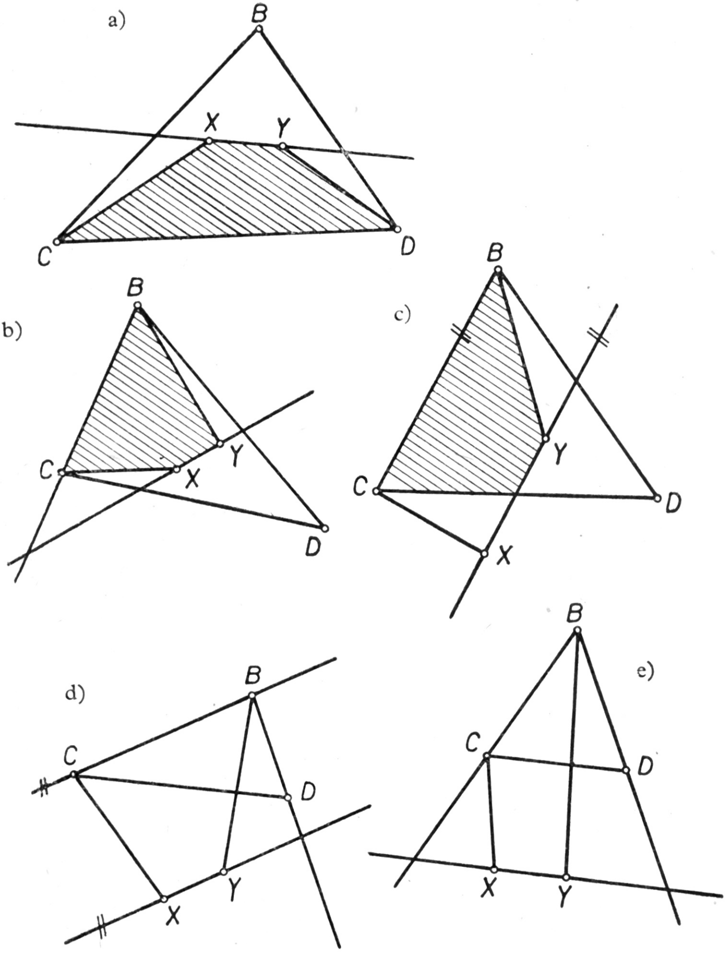
Štvoruholník $CXYD$ v prípade a) (obr. 57a) je zrejme prienikom polrovín CDX, CXD, DYC a XYC. Ako prienik konečného systému konvexných množín je to teda konvexná množina. Analogicky sa dokáže konvexita štvoruholníkov s vrcholmi X, Y vyšrafovaných na obr. 57b)—e) v ostatných prípadoch. Z každej dvojice bodov X, Y dostaneme teda aspoň jeden konvexný štvoruholník so stranou XY (na obr. 57d i 57e sú také štvoruholníky tri: $CXYB$, $CXYD$, $BXYD$). Dvojíc bodov X, Y je $\binom{n-3}{2} = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$. Tým je tvrdenie dokázané.

6. Ak sú x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 reálne čísla, pre ktoré platí $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, potom platí

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} . \tag{1}$$

Dokážte. Nájdite nutné a postačujúce podmienky pre to, aby v (1) platila rovnosť.

(*SSSR*, 8 bodov)



Obr. 57

RIEŠENIE. Označme $D_1 = x_1 y_1 - z_1^2$, $D_2 = x_2 y_2 - z_2^2$. Potom platí

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 = D_1 + D_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2z_1 z_2 = D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2}(D_2 + z_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(D_1 + z_1^2) - 2z_1 z_2 = D_1 + D_2 + \frac{x_1}{x_2} D_2 + \frac{x_2}{x_1} D_1 + \frac{x_1}{x_2} z_2^2 + \frac{x_2}{x_1} z_1^2 - 2z_1 z_2 = D_1 + D_2 + \frac{x_1^2 D_2 + x_2^2 D_1}{x_1 x_2} + \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\, z_2 - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\, z_1\right)^2 \geqq D_1 + D_2 + 2\sqrt{D_1 D_2} = (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2,$$

tj.

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \geqq (\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2 . \quad (2)$$

Z toho

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqq \frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2} . \quad (3)$$

Keďže pre každé reálne čísla $a > 0$, $b > 0$ platí

$$\frac{2ab}{a + b} \leqq \sqrt{ab} ,$$

čiže

$$\frac{4a^2b^2}{(a + b)^2} \leqq ab$$

a tiež

$$ab \leqq \frac{a^2 + b^2}{2} ,$$

platí

$$\frac{4a^2b^2}{(a + b)^2} \leqq \frac{a^2 + b^2}{2} ,$$

z čoho

$$\frac{8}{(a+b)^2} \leqq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{4}$$

Po dosadení do (4) za $a = \sqrt{D_1}$, $b = \sqrt{D_2}$ dostaneme

$$\frac{8}{(\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2})^2} \leqq \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}. \tag{5}$$

Z nerovností (3) a (5) vyplýva (1).

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane zrejme práve vtedy, keď platí rovnosť vo vzťahu (2), tj. keď platí

$$x_1 \sqrt{D_2} = x_2 \sqrt{D_1} \tag{6}$$

a súčasne

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\, z_2 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\, z_1 \tag{7}$$

a ak zároveň platí rovnosť vo vzťahu (5), t. j. keď platí tiež

$$\sqrt{D_1} = \sqrt{D_2}. \tag{8}$$

Vzhľadom na (8) máme zo (6): $x_1 = x_2$, v dôsledku čoho zo (7) bude $z_1 = z_2$ a z (8) $y_1 = y_2$.

Rovnosť vo vzťahu (1) nastane teda práve vtedy, keď platí

$$x_1 = x_2, \; y_1 = y_2, \; z_1 = z_2.$$

4. *VÝSLEDKY SÚŤAŽE*

Prehľad počtu bodov, ktoré získali jednotliví žiaci ukazuje *tabuľka 2*. Dosiahnuté výsledky potvrdzujú to, čo sme povedali o výbere úloh. O obťažnosti 6. úlohy svedčí napr. to, že plný počet bodov za jej riešenie dosiahlo len 7 žiakov zo 112 (1 z Anglicka; 1 z ČSSR, 3 z Maďarska, 1 z Poľska a 1 z SSSR). Celkove boli výsledky podstatne horšie než na *X. MMO* v Moskve, keď plný počet 40 bodov za riešenie všetkých 6 úloh dosiahli len 3 žiaci.

Tabuľka 2 ukazuje, že v poradí družstiev nedošlo v porovnaní s predchádzajúcim rokom k podstatným zmenám. Do skupiny silnejších (*Maďarsko, NDR, SSSR, Anglicko*) se opäť zaradilo domáce *Rumunsko* a relatívne sa zlepšilo *Bulharsko*, ktoré malo tohto roku pomerne vyrovnané družstvo, a *Juhoslávia*. *ČSSR*, ako už tradične, uzatvára skupinu vyrovnaných družstiev stredu. Na čelo slabšej skupiny sa dostalo *Mongolsko*, ktoré v súčte bodov predstihlo *Poľsko* a *Francúzsko*. *Švédsko* prišlo opäť so slabším družstvom a najslabších výsledkov dosiahli *Belgicko* a *Holandsko*, ktoré prišli na *MMO* po prvý raz s družstvami bez špeciálnej prípravy, ktorých členovia neabsolvovali žiadnu domácu súťaž. Úspech *Mongolska* nie je určite náhodný a v budúcich rokoch možno očakávať ďalšie zlepšenie jeho družstva.

Pokiaľ ide o ceny, hranice pre ich udelenie boli na zdĺhavom rokovaní jury, na ktorom bol jedným z najiniciatívnejších vedúci sov. delegácie *prof. V. J. Levin*, stanovené takto:

I. cena: 40 bodov;

II. cena: 37—30 bodov;

III. cena: 29—24 bodov.

Podľa tohto kľúča získali účastníci z jednotlivých zemí ceny uvedené prehľadne v *tabuľke 3*. V protiklade s tradíciou, keď ceny dostávalo približne 50 % účastníkov, je počet odmenených nepomerne nižší.

Okrem týchto cien boli udelené niekoľkým žiakom *zvláštne odmeny za originálne a elegantné riešenie*. Pri zložitom rokovaní o tejto otázke sa nedosiahlo v jury jednotné hľadisko na podsuzovanie metódy riešenia, použitia aparátu nepreberaného na strednej škole a z toho vyplývajúcu krátkosť či tzv. eleganciu riešenia. Sovietsky delegát *prof. Levin* vyslovil napr. názor, že žiak, ktorý pri riešení úlohy vie použiť diferenciálnych rovníc, sa nemá zúčastniť *MMO*, hoci inak (vekom a školským zaradením) podmienky splňuje.

Je zaujímavé, že nikto nedostal zvláštnu cenu za riešenie 1. a 4. úlohy, čo opäť potvrdzuje nevhodnosť ich voľby. Ani úloha č. 3 v predloženej formulácii nedala možnosť originálnych a elegantných riešení. *Za riešenie úlohy č. 2* dostali zvláštnu cenu 1 *anglický*, 1 *československý* (*Tomáš Mašek*) a 1 *švédsky* žiak, *za riešenie úlohy č. 5* po 1 žiakovi z *Anglicka*, *Maďarska*, *NDR*, *Poľska* a *SSSR* a za *riešenie úlohy č. 6* jeden *sovietsky* žiak.

5. *ČESKOSLOVENSKÁ DELEGÁCIA*

Naša delegácia sa skladala z *vedúceho*, jeho *zástupcu* a *ôsmich žiakov*. Mená žiakov i výsledky, ktoré dosiahli sú uvedené v *tabuľke 4*.

Po vlaňajšom relatívnom úspechu, keď naše družstvo získalo dve prvé a 4 druhé ceny, sú tohtoročné výsledky sklamaním. Pre družstvo, v ktorom boli jeden päťnásobný (*Sivák*), jeden trojnásobný (*Mašek*) a 1 dvojnásobný (*Vinárek*) účastník *MMO* je zisk len troch tretích cien menej než chudobným vysvedčením. Najmenej sa dal očakávať neúspech *Siváka*, ktorý už ako 13-ročný na *VII. MMO* získal 3. cenu a na *XI. MMO* sa musel uspokojiť s diplomom účastníka. No, ani ostatní členovia družstva — snáď až na *Hadravu* a *Vinárka* — nepodali očakávané výkony.

Najmenej možno žiakom vyčítať malý úspech v *úlohe 6* (celkom 18 bodov), pretože s úlohami tohto druhu sa nestretli ani v školskej praxi, ani v špeciálnej príprave. Najviac zaráža nevalný výsledok v *úlohe 4*, obe nuly v stĺpci 1 a to, že úlohu č. 3 riešili s plným bodovým ziskom len 2 žiaci. V predloženej formulácii nemusela robiť problémy ani jednému z našich žiakov.

Pri pátraní po príčinách nášho malého úspechu by sme opäť museli opakovať to, čo sa v správach o *MMO* povedalo už niekoľkokrát, a to, že žiadna špeciálna mimoškolská príprava nemôže nahradiť systematické, náročné a dobre vedené vyučovanie. Aj pri organizácii špeciálnych matematických tried by sme sa mali poučiť z osvedčených zahraničných skúseností, kde sa takéto triedy zriaďujú len v miestach, kde sú pre to podmienky a učia v nich prevažne vysokoškolskí učitelia.

Nedostatkom, ktorý sa zvlášť vypukle prejavil u nášho družstva, je snaha používať aparát vyššej matematiky, ktorý žiak poriadne neovláda namiesto aplikácie stredoškolských metód. Ďalej sa stále prejavuje častokrát kritizované bezhlavé počítanie bez predchádzajúcej logickej úvahy o rozumnej ceste.

Ako ďalšia príčina pomerne malého úspechu našich žiakov sa javí opäť ich nedobrý nervový stav, ich malá sebadôvera, húževnatosť a vytrvalosť v prekonávaní prekážok. Nazdávame sa, že korene týchto nedostatkov treba hľadať v nedostatkoch vo výchove, a to už v nižších triedach.

Záverom uveďme ešte *dve riešenia úlohy č. 2*, za ktoré boli naši žiaci navrhnutí na zvláštnu cenu, ale pod vplyvom vyššie spomínaných názorov, ktoré sa presadili pri rokovaní jury, dostal ju len prvý z nich.

RIEŠENIE T. MAŠKA

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_n+x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a_k}\right).$$

Položme $z = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a_k}$. Platí: $1 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_1}| =$

$$= \left| z - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a_k} \right| \leqq |z| + \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{1}{2^{k-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a_k} \right| =$$

$= |z| + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < |z| + 1$. Z toho vyplýva $|z| > 0$, teda $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, kde $r = |z| > 0$, φ sú reálne čísla.

Teda $f(x) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} z) = \mathrm{Re}\,(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\varphi)}) = r \cos(x + \varphi)$; $r > 0$. Ak platí $f(x_1) = f(x_2) = 0$, potom $\cos(x_1 + \varphi) = \cos(x_2 + \varphi) = 0$, čiže $x_1 + \varphi = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $x_2 + \varphi = \frac{\pi}{2} + p\pi$, kde l, p sú celé čísla. Potom však $x_2 - x_1 = (p - l)\pi = m\pi$, kde m je celé číslo.

RIEŠENIE B. SIVÁKA

Zrejme je $f(-a_1) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cos(a_k - a_1)$. Potom

$$|f(-a_1) - 1| \leqq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

čiže

$$0 < f(-a_1) < 2 .$$

$$f''(x) = - \cos(a_1 + x) - \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) - \ldots -$$

$$- \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x) = -f(x).$$

Funkcia $f(x)$ vyhovuje teda dierenciálnej rovnici $f''(x) + f(x) = 0$, ktorej všeobecné riešenie má tvar $f(x) = A\cos(x + \varphi)$, kde A, φ sú ľubovoľné konštanty.

Keďže $f(-a_1) = A \cos(-a_1 + \varphi) > 0$, je $A \neq 0$. Ak $f(x_1) = f(x_2) = 0$, potom $\cos(x_1 + \varphi) = \cos(x_2 + \varphi) = 0$ a $x_2 - x_1 = m\pi$, kde m je celé číslo sa dokáže rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Tabuľka 1

Vedúci delegácií a ich zástupcovia

Krajina	Vedúci delegácie	Zástupca ped. sprievodca
Anglicko	F. R. Watson, profesor University of Keele, Staffordshire	Lenon Beeson, profesor Biskop Otter College, Chichester
Belgicko	Svens Marcel, inšpektor Sint Martens-Latem	Nachtere Jaele Jean, inšpektor, Bruxelles
Bulharsko	Doc. Kiril Dočev, ved. katedry vyššej algebry, Mat. fakulta Sofia	Dimo Serafimov Angelov, inšpektor, Sofia
ČSSR	Doc. Jan Vyšín, CSc., Mat. fyz. fakulta, KU, Praha	Dr. Jozef Moravčík, CSc., odb. asistent VŠD, Žilina
Francúzsko	A. Warusfel, profesor Lyceé Louis le Grand, Paris	Geril Denis, profesor Lycée Louis le Grand, Paris
Holandsko	Prof. dr. Hans Freudenthal, Utrecht	Ary van Tooren, asistent, Haag
Juhoslávia	Vladimír Mičič, magister, asistent Univerzity v Belehrade	Mila Mrševič, asist. Univ. v Belehrade
Maďarsko	Endré Hódi, vedúci ved. pracovník, Budapešť	István Reiman, vedecký pracovník, Budapešť

Pokračovanie tabuľky 1

Krajina	Vedúci delegácie	Zástupca ped. sprievodcu
Mongolsko	Doc. Gunže Gatavyn, vedúci katedry mat. analýzy, Štátna univerzita, Ulanbator	Gombyn Zagdragca, inšpektor, Ulanbator
NDR	Dr. Helmut Bausch, vedúci ved. pracovník, Berlín	Doc. dr. Rolf Lüders, Berlín
Poľsko	Doc. dr. Mieczyslaw Czyżykowski, Polytechnika Waršawa	Andrzej Mąkowski, magister, Waršawa
Rakúsko	Prof. dr. Willi Flick, Univerzita Graz (pozorovateľ)	
Rumunsko	Zlate Bogdanov, profesor lýcea Nicolae Balcescu, Bukurešť	Florea Pasarica, prof., Bukurešť
SSSR	Prof. Viktor Josifovič Levin, doktor fyz. mat. vied, Moskva	Ivan Semjonovič Petrakov, inšpektor-metodik, Moskva
Švédsko	Prof. dr. Thomee Vidar, Göteborg	Dr. Ake H. Samuelsson, asist. Univer. Göteborg

Tabuľka 2

Počty získaných bodov

Krajina	Počet bodov žiaka č.								Celkový počet bodov
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Anglicko	40	20	18	30	22	18	24	21	193
Belgicko	5	5	10	10	3	5	3	16	57
Bulharsko	25	28	28	20	21	22	22	23	189
ČSSR	13	25	28	14	20	20	28	22	170
Francúzsko	30	4	8	10	22	13	14	18	119
Holandsko	4	15	9	12	1	0	6	4	51
Juhoslávia	22	17	25	30	32	27	10	18	181
Maďarsko	31	34	40	24	35	25	37	21	247
Mongolsko	21	13	13	17	17	10	25	4	120
NDR	35	35	36	29	32	24	25	24	240
Poľsko	34	7	18	9	20	10	13	8	119
Rumunsko	15	37	30	27	21	31	28	30	219
SSSR	40	30	24	27	32	27	21	30	231
Švédsko	10	16	14	8	11	16	9	12	104

96

Tabuľka 3

Prehľad udelených cien

Krajina	Počet získaných cien			Celkom
	I.	II.	III.	
Anglicko	1	1	1	3
Belgicko	0	0	0	0
Bulharsko	0	0	3	3
ČSSR	0	0	3	3
Francúzsko	0	1	0	1
Holandsko	0	0	0	0
Juhoslávia	0	2	2	4
Maďarsko	1	4	2	7
Mongolsko	0	0	1	1
NDR	0	4	4	8
Poľsko	0	1	0	1
Rumunsko	0	4	2	6
SSSR	1	3	3	7
Švédsko	0	0	0	0
Celkom	3	20	21	44

Tabuľka 4

Prehľad výsledkov československého družstva

Por. čís.	Meno žiaka	Škola a trieda	Počet bodov za rieš. úl. č.						Spolu bodov	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1.	Pavol Černek	SVŠ J. Hronca, Bratislava, 2. r.	2	4	2	3	2	0	13	–
2.	Petr Hadrava	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	2	5	4	6	7	1	25	III.
3.	Tomáš Mašek	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	5	7	7	1	7	1	28	III.
4.	Štefan Sakáloš	SVŠ V. B. N., Prievidza, 1. r.	0	7	6	1	0	0	14	–
5.	Bohuš Sivák	SVŠ Zvolen, 3. r.	5	7	7	0	0	1	20	–
6.	Rudolf Švarc	SVVŠ Plzeň, 2. r.	5	5	4	2	0	4	20	–
7.	Jiří Vinárek	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	5	2	1	6	6	8	28	III.
8.	Miloš Zahradník	SVVŠ Tanvald, 3. r.	0	5	4	4	6	3	22	–
Celkom			27	39	35	23	28	18	170	