18. ročník matematické olympiády

II. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968-1969. 11. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. pp. 29–56.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404586

II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Buďte a, b, c tři kladná čísla, pro něž platí

$$a^n + b^n = c^n\,,$$

kde n je přirozené číslo větší než 1. Pak existuje trojúhelník, jehož strany mají délky a, b, c. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Dané číslo c je větší než daná čísla a i b. Proto je

$$a + c > b,$$
$$b + c > a$$

a stačí dokázat, že také

$$a + b > c\,.$$

Podle binomické věty platí

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Protože $n > 1$, je na pravé straně kromě členů a^n a b^n alespoň jeden další člen. Všechny členy jsou kladné, takže

$$(a + b)^n > a^n + b^n = c^n\,,$$

tedy také

$$a + b > c\,.$$

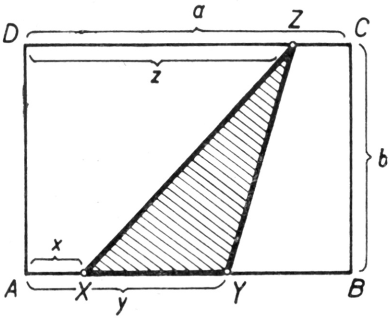
Tím je tvrzení dokázáno.

2. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $AD = b$. Trojúhelník XYZ je vepsán obdélníku $ABCD$ tak, že vrcholy X, Y náležejí straně AB, vrchol Z straně CD.

a) Dokažte, že poloměr r kružnice opsané trojúhelníku XYZ splňuje nerovnosti

$$\frac{b}{2} < r < \frac{a^2 + b^2}{2b}. \tag{1}$$

b) Dokažte, že každé číslo r splňující nerovnosti (1) je poloměrem kružnice opsané některému z takových trojúhelníků XYZ.



Obr. 1

ŘEŠENÍ (obr. 1). a) Zvolme označení vrcholů $\triangle XYZ$ tak, aby bylo $AX < AY$ a označme $AX = x$, $AY = y$, $DZ = z$.

Pro výpočet poloměru r užijeme známého vzorce

$$r = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4P}, \tag{2}$$

kde P je obsah $\triangle XYZ$.

Vyjádříme

$$XY = y - x, \quad YZ = \sqrt{b^2 + (y-z)^2},$$

$$ZX = \sqrt{b^2 + (x-z)^2},$$

$$P = \frac{b}{2}(y - x). \tag{3}$$

Dosadíme z (3) do (2); po úpravě vyjde

$$r = \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + (y - z)^2} \cdot \sqrt{b^2 + (x - z)^2} \,. \tag{4}$$

Zřejmě je

$$b = BC \leqq YZ \leqq BD = \sqrt{a^2 + b^2} \,,$$
$$b = AD \leqq ZX \leqq AC = \sqrt{a^2 + b^2} \,.$$

Z geometrického významu plyne, že nemůže současně platit

$$YZ = b, \; ZX = b,$$
$$YZ = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad ZX = \sqrt{a^2 + b^2} \,. \tag{5}$$

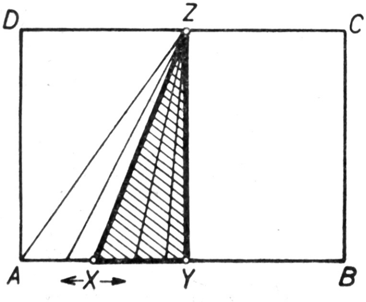
Spojením (3), (4) a (5) vyjde

$$\frac{b}{2} < r < \frac{a^2 + b^2}{2b} \,,$$

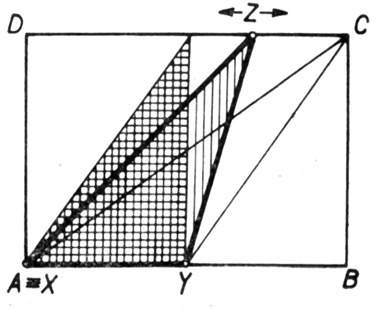
což jsou nerovnosti (1).

b) Abychom dokázali, že poloměr r nabývá každé hodnoty z intervalu (1), rozlišíme tři případy.

I. (obr. 2a). Nechť je $0 \leqq x < \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{a}{2}$.



Obr. 2a



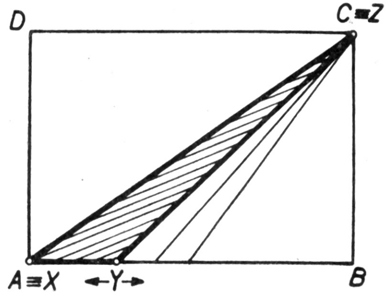
Obr. 2b

Pak je

$$r = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \,. \tag{4a}$$

Pak r nabývá podle (4a) všech hodnot z intervalu

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot b < r \leqq \frac{1}{2b} \cdot b \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \,. \tag{6a}$$



Obr. 2c

II. (obr. 2b). Nechť je $x = 0$, $y = \frac{a}{2}$, $\frac{a}{2} \leqq z \leqq a$.

Pak je

$$r = \frac{1}{2\,b} \sqrt{b^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{b^2 + z^2} \,. \tag{4b}$$

Pak r nabývá podle (4b) všech hodnot z intervalu

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \leqq r \leqq \frac{1}{2b}\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \,. \\ . \sqrt{b^2 + a^2} \,. \tag{6b}$$

III. (obr. 2c). Nechť je $x = 0$, $0 < y \leqq \frac{a}{2}$, $z = a$.

Pak je

$$r = \frac{1}{2b}\sqrt{b^2 + (y-a)^2} \, . \, \sqrt{a^2 + b^2} \, . \tag{4c}$$

Pak r nabývá podle (4c) všech hodnot z intervalu

$$\frac{1}{2b}\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \, . \, \sqrt{b^2 + a^2} \leqq r < \frac{1}{2b}\sqrt{b^2 + a^2} \, . \, \sqrt{b^2 + a^2} = \\ = \frac{a^2 + b^2}{2b} \, . \tag{6c}$$

Spojíme-li (6a), (6b), (6c), zjistíme, že r nabývá všech hodnot z intervalu (1).

3. Určite všetky komplexné čísla z, ktoré vyhovujú rovnici

$$(1 + \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}|z^2| + 1 - \mathrm{i} = 0 \, . \tag{1}$$

RIEŠENIE. Platí $|z^2| = |z|^2 = z\bar{z}$. Rovnica (1) má potom tvar

$$(1 + \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z\bar{z} + 1 - \mathrm{i} = 0 \, . \tag{2}$$

Ak do (2) dosadíme $z = x + y\mathrm{i}$, $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ (x, y reálne čísla), dostaneme:

$$(1 + \mathrm{i})(x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}) - \mathrm{i}(x^2 + y^2) + 1 - \mathrm{i} = 0. \tag{3}$$

Z rovnice (3) vyplýva, že reálna aj imaginárna časť ľavej strany sa rovná nule, t. j.

$$x^2 - y^2 - 2xy + 1 = 0 \, , \tag{4a}$$

$$x^2 - y^2 + 2xy - (x^2 + y^2) - 1 = 0 \, . \tag{4b}$$

Rovnicu (4b) upravíme na tvar

$$2xy - 2y^2 - 1 = 0 \, . \tag{5}$$

Sčítaním rovníc (4a), (5) dostaneme $x^2 - 3y^2 = 0$ čiže

$$x = \varepsilon\sqrt{3}\, y, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1 \, . \tag{6}$$

Po dosadení zo (6) do (5) vyjde $2y^2(\varepsilon\sqrt{3} - 1) = 1$. Pretože y musí byť reálne, je $2y^2 > 0$ a preto je $\varepsilon = 1$. Máme teda

$$y^2 = \frac{1}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} . \tag{7}$$

Zo vzťahov (7) a (6) dostaneme

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3(1 + \sqrt{3})}}{2},$$

$$y_2 = -y_1, \quad x_2 = -x_1 .$$

Danej rovnici môžu teda vyhovovať len čísla

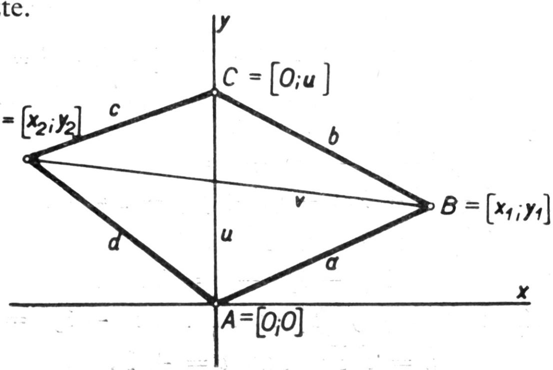
$$z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}, \qquad z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i} = -z_1 .$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že tieto čísla rovnici (1) skutočne vyhovujú.

4. Buďte a, b, c, d délky stran konvexního čtyřúhelníka, u, v délky jeho úhlopříček, P jeho obsah. Pak platí

$$4u^2v^2 = 16P^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 .$$

Dokažte.



Obr. 3

ŘEŠENÍ. Zvolme soustavu kartézských souřadnic podle obr. 3. Pak platí podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů

$$\begin{aligned} a^2 &= x_1^2 + y_1^2 , \\ b^2 &= x_1^2 + (y_1 - u)^2 , \\ c^2 &= x_2^2 + (y_2 - u)^2 , \\ d^2 &= x_2^2 + y_2^2 . \end{aligned} \tag{2}$$

Dále je podle téhož vzorce

$$v^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 . \tag{3}$$

Podle vzorce pro obsah trojúhelníka je

$$P = \frac{1}{2} u(|x_1| + |x_2|) = \frac{1}{2} u (x_1 - x_2), \tag{4}$$

neboť je $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. Z druhé a třetí rovnosti (2) dostaneme

$$b^2 - c^2 = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2u(y_1 - y_2),$$

neboli vzhledem k první a čtvrté rovnosti (2)

$$2u(y_1 - y_2) = a^2 + c^2 - b^2 - d^2 . \tag{5}$$

Z (4) a (5) dosadíme do (3); vyjde

$$4u^2v^2 = 16P^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2,$$

což je rovnost (1).

2. *KATEGORIE B*

1. a) Najděte všechny dvojice (x, y) celých kladných čísel, pro které platí

$$|2^x - 10^y| \leqq 5 .$$

b) Je-li p kladné číslo, pak nerovnice

$$|2^x - 10^y| \leqq p$$

má v oboru dvojic celých kladných čísel (x, y) buď konečně řešení, nebo je neřešitelná. Dokažte.

ŘEŠENÍ. a) Dokažme nejprve, že nerovnice $|2^x - 10^y| \leqq 5$ nemá řešení $x = y$. Je totiž $|2^x - 10^x| = 10^x - 2^x = (10 - 2)N = 8N \geqq 8$, kde N je přirozené číslo. Protože mocniny čísla 2 rostou „pomaleji" než mocniny čísla 10, napadne nás, že předchozí odůvodnění by se mohlo rozšířit i na případ $x \leqq y$. Skutečně je pro $x \leqq y$

$|2^x - 10^y| = 2^x\,|1 - 2^{y-x} \,.\, 5^y| \geqq 2^x\,(2^{y-x} \,.\, 5^y - 1) \geqq$

$\geqq 2 \,.\, (5 - 1) = 2 \,.\, 4 = 8\,.$

Řešení nerovnice z úlohy a) můžeme hledat jen mezi dvojicemi x, y, pro něž platí $x > y$. Pak platí

$$|2^x - 10^y| = 2^y\,|2^{x-y} - 5^y| \leqq 5\,,$$

tj.

$$|2^{x-y} - 5^y| \leqq \frac{5}{2^y} \leqq \frac{5}{2}\,,$$

neboť $y \geqq 1$. Je tedy $|2^{x-y} - 5^y| = 0$ nebo 1 nebo 2. Případy 0; 2 jsou vyloučeny, neboť číslo 5^y je liché, čísla 2^{x-y}; 0; 2 jsou sudá. Je tedy buď

$$5^y + 1 = 2^{x-y}\,, \tag{1a}$$

nebo

$$5^y - 1 = 2^{x-y}\,. \tag{1b}$$

Dekadické vyjádření čísla 5^y končí dvojčíslím 05 nebo 25; proto dekadické vyjádření čísla $5^y + 1$ končí buď dvojčíslím 06, nebo 26. Je proto $5^y + 1$ dělitelné jen mocninou 2^1, tj. $2^{x-y} = 2$, $x - y = 1$. Z (1a) pak plyne $5^y = 1$, což je nemožné, neboť y je přirozené číslo.

Rovnici (1b) rozřešíme pomocí rozkladu

$$5^y - 1 = 5^y - 1^y = 4\,(1 + 5 + \ldots + 5^{y-2} + 5^{y-1}). \tag{2}$$

Má-li být číslo $5^y - 1$ mocninou dvou, musí mnohočlen v závorkách (2) být roven buď 1, nebo být číslo sudé, tj. musí obsahovat sudý počet členů. V posledním případě seskupíme členy ve dvojice a použijeme vzorce $5^k + 5^{k+1} = 5^k(1 + 5) = 6 \,.\, 5^k$. To znamená: jsou-li v závorkách (2) aspoň dva členy, je číslo na pravé straně (2) násobkem tří a není mocninou dvou. V úvahu přichází tedy jen případ $y = 1$. Z (1b) dostaneme $x - y = 2$, tj. $x = 3$.

b) Tvrzení dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že pro některé přirozené číslo p má nerovnice $|2^x - 10^y| \leqq \leqq p$ nekonečně mnoho řešení. Mezi těmito řešeními lze vybrat takové dvojice $[x_i, y_i]$ a očíslovat je tak, že $x_1, x_2, x_3, \ldots, y_1, y_2, y_3$ budou dvě posloupnosti přirozených čísel, která stále porostou. Tyto posloupnosti nemohou být totiž obě omezené (předpokládáme, že nerovnice má nekonečně mnoho řešení); také není možné, aby jedna posloupnost byla omezená a druhá neomezená, protože $[2^x - 10^y] \leqq p$.
Můžeme tedy najít takové přirozené číslo n, že je

$$2^{x_n} > p, \qquad 5^{y_n} > p\,. \tag{3}$$

Je-li $x_n \leqq y_n$, počítáme s použitím (3) takto:

$$|2^{x_n} - 10^{y_n}| = 2^{x_n}\,|1 - 2^{y_n - x_n}\,.\,5^{y_n}| > p\,|5 - 1| = 4p.$$

To je spor s danou nerovnicí; $[x_n, y_n]$ není tedy jejím řešením.

Je-li $x_n > y_n$, počítáme s použitím (3) takto:

$$|2^{x_n} - 10^{y_n}| = 2^{y_n}\,|2^{x_n - y_n} - 5^{y_n}| > p\,.\,N \geqq p,$$

kde N je přirozené číslo. Také tato dvojice $[x_n, y_n]$ není řešením dané nerovnice. Tím je dokázáno, že nerovnice nemá nekonečně mnoho řešení.

Obrat, kterého jsme použili, je typický v disciplíně, zvané matematická analýza.

2. Platí-li zároveň

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0\,, \tag{1}$$
$$\cos x + \cos y + \cos z = 0\,, \tag{2}$$

pak je také

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0\,, \tag{3}$$
$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0\,. \tag{4}$$

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Upravíme

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = \sin 2x + \sin 2y + 2 \sin z \cos z = \sin 2x + \sin 2y + 2(\sin x + \sin y)(\cos x + \cos y) = 2 \sin 2x + 2 \sin 2y + 2 \sin (x + y) = 4 \sin (x + y) \cos (x - y) + 2 \sin (x + y) = 2 \sin(x + y)\,[2 \cos (x - y) + 1] = 0.$$

Nyní vyjádříme z (1) a (2) $\sin z$, $\cos z$, dosadíme do formule $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; po úpravě dostaneme $2 \cos (x - y) + 1 = 0$. Platí tedy (3).

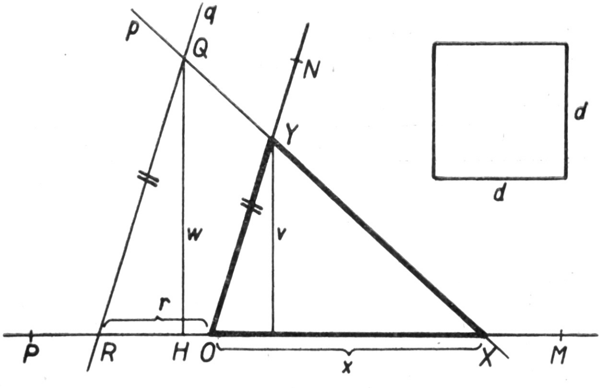
Obdobně počítáme

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = \cos 2x + \cos 2y + \cos^2 z - \sin^2 z = \cos 2x + \cos 2y + (\cos x + \cos y)^2 - (\sin x + \sin y)^2 = 2 \cos 2x + 2 \cos 2y + 2 \cos (x + y) = 4 \cos (x + y) \,.\, \cos (x - y) + 2 \cos (x + y) = 2 \cos (x + y)\,[2 \cos (x - y) + 1] = 0.$$

Protože je $2 \cos (x - y) + 1 = 0$, platí i (4).

3. V rovine je daný dutý uhol MON, vnútorný bod P polpriamky opačnej k polpriamke OM a vnútorný bod Q dutého uhla NOP. Ďalej je daný štvorec so stranou d. Bodom Q veďte priamku p, ktorá pretína polpriamky OM, ON v uvedenom poradí v bodoch X, Y tak, aby trojuholník OXY a daný štvorec mali rovnaký obsah.

RIEŠENIE. *Rozbor.* Predpokladajme, že sme zostrojili priamku p žiadaných vlastností (obr. 4). Bodom Q veďme priamku $q \parallel ON$. Priamka q leží v polrovine NOP.



Obr. 4

S polpriamkou OM je rôznobežná, z čoho vyplýva, že pretína polpriamku OP v jej vnútornom bode. Označme ho R. Označme ďalej x veľkosť úsečky OX, r veľkosť úsečky RO, v veľkosť výšky trojuholníka OXY prislúchajúcej k strane OX a w veľkosť výšky trojuholníka RXQ prislúchajúcej k strane RX.

Podľa vety (uu) je $\triangle OXY \sim \triangle RXQ$, z čoho vyplýva, že $\frac{v}{x} = \frac{w}{r + x}$ čiže

$$v = \frac{wx}{r + x}. \qquad (1)$$

Z textu úlohy vyplýva, že $\frac{1}{2} vx = d^2$ čiže

$$v = \frac{2d^2}{x}. \qquad (2)$$

Zo vzťahov (1), (2) vyplýva $\frac{wx}{r + x} = \frac{2d^2}{x}$, z čoho po úprave

$$wx^2 - 2d^2x - 2d^2r = 0\,.$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice a ďalšou úpravou dostaneme:

$$x_{1,2} = \frac{2d^2 \pm \sqrt{4d^4 + 8d^2rw}}{2w} = \frac{2d^2 \pm 2d\sqrt{d^2 + 2rw}}{2w} =$$

$$= \frac{d(d \pm \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}\,.$$

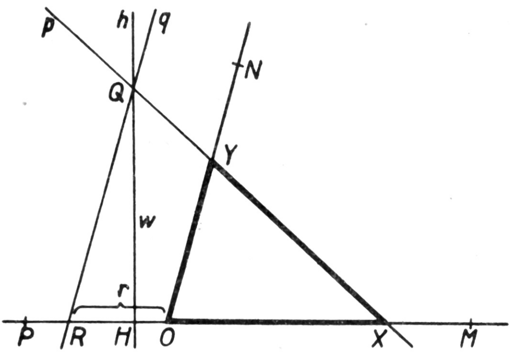
Pretože $\sqrt{d^2 + 2rw} > \sqrt{d^2} = d$ a x má byť číslo kladné, vyhovuje úlohe len prvý koreň, t. j.

$$x = \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}\,. \tag{3}$$

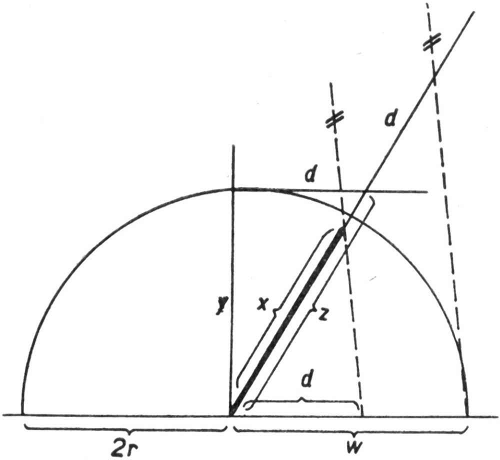
Úsečka veľkosti d je daná, úsečky veľkosti r, w môžeme zostrojiť a úsečku veľkosti x dostaneme konštrukciou algebraického výrazu (3).

Konštrukcia (obr. 5a, b).

1. Bodom Q vedieme priamku $q \parallel ON$ a jej priesečník



Obr. 5a



Obr. 5b

s polpriamkou OP označíme R, a priamku $h \perp OM$ a jej priesečník s priamkou OM označíme H. Veľkosti úsečiek RO a QH v uvedenom poradí označíme r, w (obr. 5a).

2. Zostrojíme úsečku veľkosti y, pre ktorú platí: $y^2 = 2rw$. Jej konštrukciu možno previesť napríklad na základe Euklídovej vety o výške (obr. 5b). Na základe Pytagorovej vety zostrojíme úsečku veľkosti z, pre ktorú $z = \sqrt{d^2 + y^2}$ a potom na základe podobnosti skonštruujeme úsečku veľkosti x, pre ktorú $x = \dfrac{d(d+z)}{w}$.

3. Na polpriamke OM zostrojíme bod X, pre ktorý platí $OX = x$. Priesečník priamky $p = QX$ s polpriamkou ON je bod Y.

Dôkaz. Z konštrukcie vyplýva, že

$$OX = x = \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w} \tag{4}$$

a

$$\triangle\, OXY \sim \triangle\, RXQ\,. \tag{5}$$

Zo vzťahu (5) vyplýva, že $\frac{v}{x} = \frac{w}{r + x}$, z čoho $v = \frac{wx}{r + x}$. Po dosadení zo vzťahu (4) do tohto vzťahu dostaneme

$$v = \frac{\dfrac{wd\,(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}}{r + \dfrac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}} = \frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{rw + d^2 + d\sqrt{d^2 + 2\,rw}}\,.$$

Obsah P trojuholníka OXY je

$$P = \frac{1}{2}\,xv = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}\cdot$$

$$\cdot\frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{rw + d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2d^2(d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw} + rw)}{d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw} + rw} = d^2\,.$$

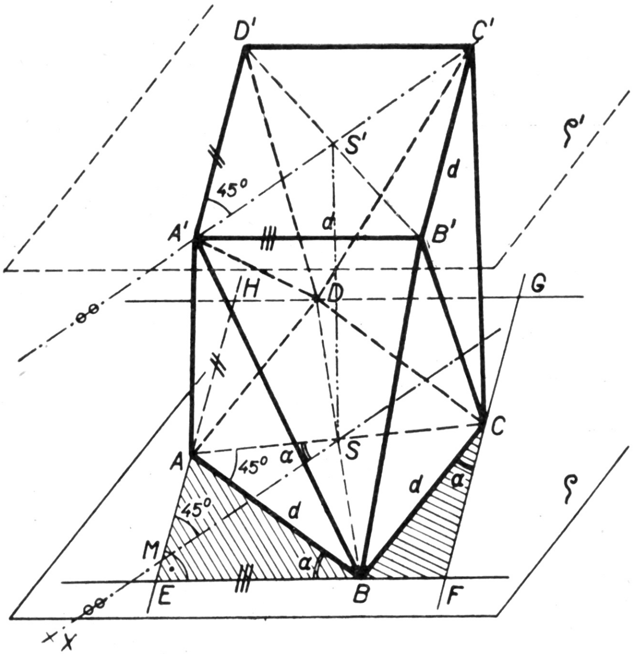
Diskusia. Z rozboru vyplýva, že úsečka veľkosti x je jednoznačne určená. Na polpriamke OM existuje jediný bod X, pre ktorý $OX = x$, z čoho vyplýva, že úloha má práve jedno riešenie.

4. Jsou dány roviny $\varrho \parallel \varrho'$, jejichž vzdálenost je $v > 0$ V rovině ϱ leží čtverec $ABCD$ o straně d a středu S, v rovině ϱ' s ním shodný čtverec $A'B'C'D'$ o středu S'. Přitom je $SS' \perp \varrho$, odchylka přímek SA, $S'A'$ je α, kde $0° \leqq \alpha \leqq 90°$, a polopřímka SX souhlasně rovnoběžná s polopřímkou $S'A'$ má s úsečkou AB společný bod. Vypočtěte objem tělesa, které omezují čtverce $ABCD$,

$A'B'C'D'$ a trojúhelníky $AA'B$, $A'BB'$, $BB'C$, $B'CC'$, $CC'D$, $C'DD'$, $DD'A$, $D'AA'$.

ŘEŠENÍ. Roviny $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$, $D'AA'$ protínají rovinu ϱ v přímkách, které omezují čtverec $EFGH$; označení volme tak, aby $EF \parallel A'B'$ a aby body A, B, C, D ležely po řadě na stranách HE, EF, FG, GH (obr. 6).

Protože $S'A' \parallel SX$, je $\sphericalangle ASX = \alpha$. Označme M



Obr. 6

průsečík polopřímky SX s polopřímkou AE. Vzhledem k $A'D' \parallel HE$ je $\sphericalangle AMS = \sphericalangle D'A'S' = 45°$. Protože $\sphericalangle SAB = 45°$, v trojúhelníku AMS vypočítáme $\sphericalangle MAS = 180° - (\alpha + 45°) = 135° - \alpha$. Je tedy $\sphericalangle MAB = 135° - \alpha - 45° = 90° - \alpha$. Potom $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCF = \alpha$ a $BE = d \,.\, \cos \alpha$, $BF = d \sin \alpha$, takže $EF = d \,.\, (\sin \alpha + \cos \alpha)$.

Popsané těleso vznikne, jestliže od komolého jehlanu s podstavami $EFGH$, $A'B'C'D'$ a s výškou v odetneme čtyři shodné jehlany $AEBA'$, $BFCB'$, $CGDC'$, $DHAD'$, jejichž podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami $d \,.\, \sin \alpha$, $d \,.\, \cos \alpha$ a jejichž výška je v. Jeho objem je

$$V = \frac{d^2v}{3} [1 + (\sin \alpha + \cos \alpha) + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2] -$$

$$- \frac{4}{3} \cdot \frac{d^2v \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{d^2v}{3} (2 + \sin \alpha + \cos \alpha) =$$

$$= \frac{d^2v}{3} [2 + \sqrt{2} \sin (\alpha + 45°)] \,.$$

POZNÁMKA. Pro $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$ vznikne pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$, popř. $ABCDD'A'B'C'$ o objemu $V = d^2v$; pro $\alpha = 45°$ máme $V = \frac{d^2v}{3} (2 + \sqrt{2}) \doteq 1{,}138 \,.\, d^2v$, což je zřejmě maximum.

3. KATEGORIE C

1. Dva chodci jdou stálými rychlostmi podél železniční trati v témže směru. V témž směru jede po trati vlak. Lokomotiva předjede prvního chodce τ minut poté, co předjela druhého chodce. Prvního chodce mine vlak za t_1 vteřin, druhého chodce, který jde rychleji, za t_2 vteřin. Za kolik minut dohoní druhý chodec prvního?

ŘEŠENÍ. Prvního chodce, který jde pomaleji, mine vlak za kratší dobu než druhého chodce, tj.

$$t_1 < t_2 . \tag{1}$$

Představme si, že v úloze popsaný děj sledujeme z uvedeného jedoucího vlaku. Označme d jeho délku v metrech. Potom se nám zdá, že se chodci pohybují kolem nás v obráceném pořadí pozpátku, a to první chodec rychlostí

$$v_1 = \frac{d}{t_1} \tag{2}$$

a druhý chodec rychlostí

$$v_2 = \frac{d}{t_2} . \tag{3}$$

Rychlosti v_1 a v_2 jsou ve vztazích (2) a (3) udány v m/s. Vzhledem k nerovnosti (1) platí

$$\frac{d}{t_1} > \frac{d}{t_2} ,$$

tj. podle (2) a (3)

$$v_1 > v_2 .$$

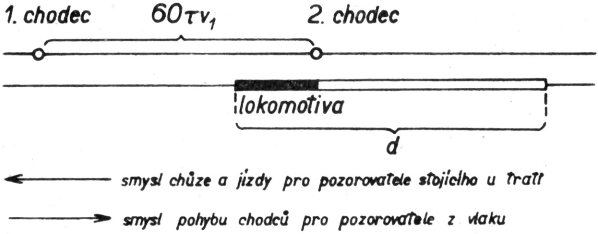
Z poslední nerovnosti plyne, že z vlaku se zdá, že první chodec je rychlejší a dohání druhého.

Popišme nyní, jak vypadá z hlediska pozorovatele ve vlaku předjíždění chodců. Jako první se objeví u předku lokomotivy druhý chodec. V okamžiku, kdy se octne druhý chodec u zádi lokomotivy (z jeho hlediska ho lokomotiva předjela), je od něho první chodec vzdálen

$$60 . \tau . v_1$$

metrů (obr. 7). Z vlaku se nám zdá, že se chodci k sobě přibližují s rychlostí

$$v_1 - v_2$$



Obr. 7

metrů za sekundu. Od okamžiku, kdy lokomotiva předjela druhého chodce, se oba chodci setkají za

$$t = \frac{1}{60} \cdot \frac{60\,\tau v_1}{v_1 - v_2} = \frac{\tau v_1}{v_1 - v_2} \tag{4}$$

minut. Dosadíme-li z (2) a (3) do (4), máme

$$t = \frac{\tau \,.\, t_2}{t_2 - t_1}\,. \tag{5}$$

Vztah (5) udává počet minut, který potřeboval druhý chodec v okamžiku, když ho předjela lokomotiva, k dostižení prvního chodce.

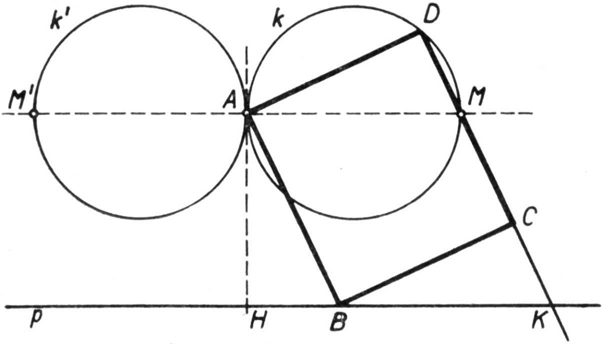
POZNÁMKA. Samozřejmě lze udávat počet minut i od jiného okamžiku, než kterého jsme užili. Musí být ovšem zajištěno, že v tomto okamžiku jsou už chodci v pohybu a že druhý chodec ještě není před prvním. U okamžiku, jenž jsme výše zvolili, je toto zřejmé podle textu úlohy. Podobně je tomu, počítáme-li čas potřebný k dostižení prvního chodce druhým od okamžiku, kdy lokomotiva předjela prvního chodce.

Dostáváme s užitím vztahu (5)

$$t' = \frac{\tau \,.\, t_2}{t_2 - t_1} - \tau = \frac{\tau \,.\, t_1}{t_2 - t_1}$$

minut.

2. V rovine je daná priamka p a bod A vzdialený od priamky p o $a > 0$. Ďalej je dané kladné číslo c. Určite geometrické miesto vrcholu D všetkých pravouholníkov $ABCD$, ktorých plošný obsah je c a ktorých vrchol B leží na priamke p.



Obr. 8

RIEŠENIE. Nech H je päta kolmice spustenej z bodu A na priamku p (obr. 8). Nech $ABCD$ je jeden z pravouholníkov vyhovujúcich podmienkam úlohy. Pretože priamka AB je zrejme rôznobežná s priamkou p, je tiež priamka CD s priamkou p rôznobežná a existuje preto priesečník K priamok p a CD. Podobne existuje priesečník M priamky CD s rovnobežkou s priamkou p vedenou bodom A. Pravouholník $ABCD$ a rovnobežník $ABKM$ majú spoločnú stranu AB a rovnakú výšku na ňu (je to dĺžka AD), preto sú rovnoploché. Plošný obsah pravouholníka sa podľa textu úlohy rovná c a plošný obsah pravouholníka sa zrejme rovná súčinu dĺžok AM a AH. Pretože čísla c a $AH = a$ nezávisia na voľbe pravouholníka $ABCD$, je tiež dĺžka úsečky $AM = c : a$ na tejto voľbe nezávislá. Existujú práve dva body vzdialené od bodu A o $c : a$ a ležiace na rovnobežke s priamkou p vedenej bodom A. Jeden z týchto bodov sme označili M, druhý označme M'. Z toho vyplýva podľa Thaletovej vety, že vrchol D leží na niektorej z kružníc k, resp. k' opísanej nad úsečkou AM, resp. AM' ako priemerom.

Hľadané geometrické miesto vrcholu D je dvojica kružníc k a k' bez bodu A. Posledné tvrdenie *dokážeme*. Ukázali sme už, že vrchol D leží nutne buď na kružnici k, alebo k'. Je zrejmé z textu úlohy, že $D \neq A$.

Nech teraz $D \neq A$ je bod kružnice k alebo k'. Bodmi D a A a tým, že bod B leží na priamke p je pravouholník $ABCD$ jednoznačne určený. Dôkaz, že jeho plošný obsah je c sa prevedie rovnako ako v predchádzajúcej úvahe. Tým je dôkaz prevedený.

3. Športový krúžok školy má 79 členov. Z nich pestuje 45 futbal, 30 volejbal, 36 basketbal, 28 hokej, 25 plávanie a 34 ľahkú atletiku. Každý člen krúžku pestuje aspoň dva športy a najväčší počet športov pestuje 40 členov krúžku. Koľko členov krúžku pestuje práve dva športy, práve tri športy, atď.?

RIEŠENIE. Označme x_i počet členov krúžku, ktorí pestujú práve i športov, $i = 2, 3, \ldots, k$, pričom $x_k = 40$. V počte $45 + 30 + 36 + 28 + 25 + 34 = 198$ je každý člen krúžku počítaný toľkokrát, koľko rôznych športov pestuje. Preto platí

$$2x_2 + 3x_3 + \ldots + kx_k = 198 \qquad (1)$$

a keďže členov krúžku je 79, platí

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_k = 79\,. \qquad (2)$$

Vylúčením x_2 z rovníc (1) a (2) dostaneme

$$x_3 + 2x_4 + \ldots + (k-2)x_k = 40\,.$$

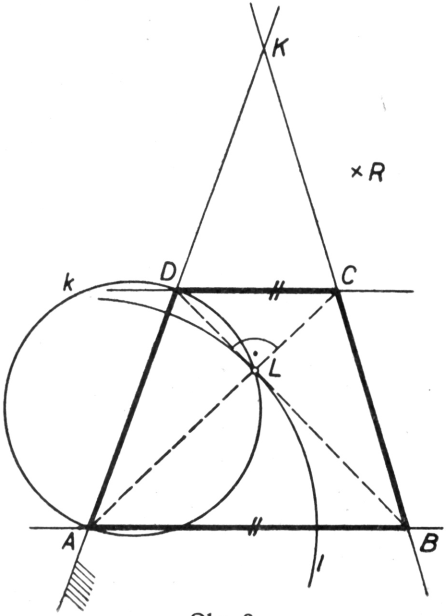
Keďže $x_k = 40$, musí byť $k = 3$, pretože inak by ľavá strana bola väčšia než 40. Potom rovnicu (2) môžeme zapísať v tvare

$$x_2 + x_3 = 79\,,$$

skadiaľ po dosadení $x_3 = 40$ dostaneme $x_2 = 39$.

Dva športy pestuje teda 39 členov a tri športy 40 členov krúžku.

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé, je-li dána délka jeho ramene $AD = d$, délka jeho úhlopříčky $AC = e$ a poměr obou základen $AB : DC = 5 : 3$.



Obr. 9

ŘEŠENÍ. Označme L průsečík úhlopříček AC a BD, K průsečík ramen AD a BC. Z podobnosti trojúhelníků (obr. 9)

$$\triangle KAB \sim \triangle KDC \text{ a } \triangle ABL \sim \triangle CDL$$

plyne

$$AK : DK = 5 : 3,\ AL : CL = BL : DL = AB : DC = $$
$$= 5 : 3 \text{ a } AL = \frac{5}{8} AC\,.$$

Poněvadž je $AC \perp BD$, leží bod L na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem AD.

Konstrukce (provedena na obr. 9 v polorovině ADR):

1. Nad úsečkou AD jako nad průměrem opíšeme kružnici k.
2. Sestrojíme kružnici $l \equiv (A; \frac{5}{8} AC)$.
3. Určíme průsečík $L \equiv k\,.\,l$ ležící v polorovině ADR.
4. Na polopřímku AL naneseme od A úsečku délky $AC = e$.
5. Sestrojíme $AB \parallel DC$; B leží na DL.

Důkaz. Z provedené konstrukce plyne, že $DL \perp AL$, tj. úhlopříčky jsou k sobě kolmé. Poněvadž je $AC : AL = 8 : 5$, je $AL : LC = 5 : 3$ a $AB : DC = 5 : 3$.

Diskuse. Úloha má řešení, a to jediné (v polorovině ADR), když $\frac{5}{8} e < d$. (Další řešení v polorovině opačné k polorovině ADR by bylo souměrné podle přímky AD.)

4. KATEGÓRIA D

1. Rozpočítali, že stavebný materiál odvezie auto za x dní, kde $x > 3$. Keďže odvoz bolo treba urýchliť, začali na štvrtý deň odvážať materiál ešte ďalšími dvoma autami.

Výkon prvého pomocného auta bol $\frac{5}{6}$ výkonu pôvodného auta, výkon druhého pomocného auta bol 1,5 výkonu pôvodného auta. Všetky tri autá dokončili odvoz za y dní.

a) Vyjadrite y pomocou x.

b) Pre ktoré celé čísla $x < 50$ je y celé číslo?

RIEŠENIE. Prvé auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x}$ množstva všetkého materiálu, čiže celkom odviezlo $(y + 3)\frac{1}{x}$ materiálu. Druhé auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x} \cdot \frac{5}{6}$ množstva všetkého materiálu a celkom teda $\frac{5y}{6x}$ materiálu. Tretie auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x}$. 1,5 množstva všetkého materiálu, čiže celkom $\frac{3y}{2x}$ materiálu. Všetky tri autá spolu odviezli všetok materiál, preto platí

$$\frac{y+3}{x} + \frac{5y}{6x} + \frac{3y}{2x} = 1,$$

z čoho dostaneme

$$y = \frac{3}{10}(x - 3).$$

Číslo y je zrejme kladné, pretože $x > 3$. Ak je číslo y celé, potom kladné číslo $x - 3$ je násobkom čísla 10, t.j. $x - 3 = 10k$, kde k je číslo prirodzené. Pre prirodzené číslo x máme teda vzťah

$$x = 3 + 10k\,,$$

čiže $x \in \{13, 23, 33, 43, 53, \ldots\}$.

Ak je $x < 50$, potom prichádzajú do úvahy čísla 13, 23, 33 a 43.

2. Určete všecky dvojice přirozených čísel x, y, pro které platí

$$8x^3 - y^3 = 387\,. \tag{1}$$

ŘEŠENÍ. Platí $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$, tj. rovnice (1) zní

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 387\,.$$

Zřejmě je $4x^2 + 2xy + y^2 > 0$, $2x - y > 0$, $2x > y$. Rozložíme číslo 387 v součin prvočinitelů: $387 = 3 \,.\, 3 \,.\, 43$. Sestavíme tabulku:

$2x - y$	1	3	43	9	129	387
$4x^2 + 2xy + y^2$	387	129	9	43	3	1
$(2x - y)^2$	1	9	1849	81	$129^2 > 3$	$387^2 > 1$
$4x^2 + 2xy + y^2 - (2x - y)^2 = 6xy$	386	120	záporné	záporné	záporné	záporné
xy	není celé	20	—	—	—	—
x	—	4	—	—	—	—
y	—	5	—	—	—	—

Rozložíme číslo 20 v součin dvou činitelů: $20 = 1 . 20 = 2 . 10 = 4 . 5$; kladné rozdíly $2x - y$ jsou $2 . 20 - 1 = 39$, $2 . 10 - 2 = 18$, $2 . 5 - 4 = 6$, $2 . 4 - 5 = 3$. Vyhovuje jen poslední; proto do tabulky (sloupec 2) doplníme $x = 4, y = 5$. Skutečně je $8x^3 - y^3 = 8 . 64 - 125 = 512 - 125 = 387$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Položíme-li $2x = z$, dostáváme

$$z^3 - y^3 = 387\,, \tag{1}$$

$1^3 = 1$
$2^3 = 8$
$3^3 = 27$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$
$6^3 = 216$
$7^3 = 343$
$8^3 = 512$
$9^3 = 729$
$10^3 = 1000$
$11^3 = 1331$
$12^3 = 1728$
$13^3 = 2197$
$14^3 = 2744$
.
.
.

tj. úlohu: nalezněte taková dvě přirozená čísla z a y, přičemž z je sudé, aby rozdíl jejich třetích mocnin byl 387.

Z rovnice (1) plyne, že pro sudé číslo z platí

$$z^3 > 387\,,$$

takže z tabulky třetích mocnin přirozených čísel snadno zjistíme, že

$$z \geqq 8\,. \tag{2}$$

Z této tabulky lze také odhadnout, že sudé číslo z nemůže být větší než 10, tj. musí být

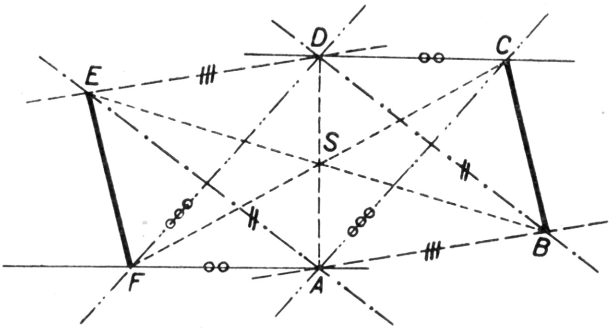
$$z \leqq 10\,. \tag{3}$$

Odečteme-li totiž od třetí mocniny libovolného sudého čísla $z > 10$ třetí mocninu největšího čísla, které přichází v úvahu jako číslo y, tj. třetí mocninu čísla $z - 1$, potom, jak se zdá z tabulky, dostaneme vždy číslo větší než 387. Pravdivost tohoto odhadu snadno dokážeme. Každé sudé přirozené číslo $z > 10$ lze psát ve tvaru $12 + n$, kde n je celé nezáporné číslo. Platí:

$$(12 + n)^3 - [(12 + n) - 1]^3 = (12 + n)^3 - (12 + n)^3 + 3(12 + n)^2 - 3(12 + n) + 1 = 397 + n^2 + 69n > 387.$$

Ze vztahů (2) a (3) plyne, že sudé číslo z je buď 8, nebo 10. Z tabulky třetích mocnin zjistíme, že úloha má jediné řešení $z = 8$ a $y = 5$, tj. $x = 4$ a $y = 5$.

3. Sú dané body A, B, C, D, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Zostrojte bod E tak, aby bolo $AE \parallel BD$, $DE \parallel AB$ a bod F tak, aby bolo $AF \parallel CD$ a $DF \parallel AC$. Dokážte, že $EF = BC$.



Obr. 10

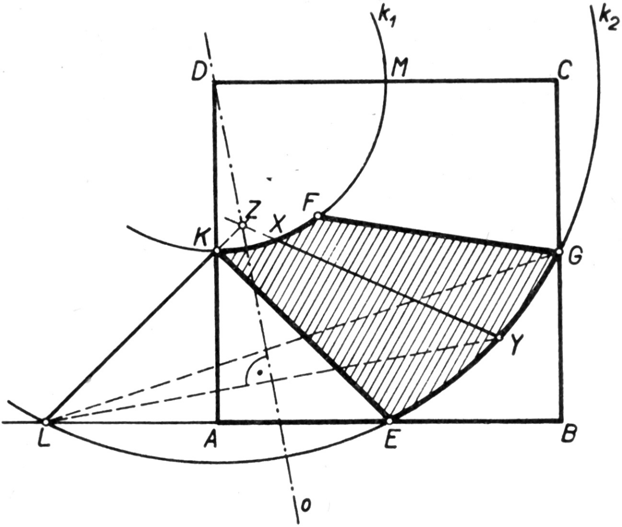
RIEŠENIE. Obrazec $ABDE$ je rovnobežník, pretože body A, B, D neležia v priamke. Priesečník jeho uhlopriečok označme S (obr. 10). Potom $AS = DS$, $BS = ES$. Obrazec $ACDF$ je taktiež rovnobežník, pretože ani body A, C, D neležia v priamke. Jeho uhlopriečky sa taktiež pretínajú v bode S, pretože uhlopriečka AD je spoločná pre oba rovnobežníky. Preto platí tiež $CS = FS$. Z podmienok $BS = ES$, $CS = FS$ vyplýva $EF = BC$, pretože body B, E a C, F tvoria dve dvojice bodov súmerne združených podľa stredu S.

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a; K je střed strany AD, L je bod polopřímky BA, pro který platí $BL = \frac{3}{2}a$. Označme o nějakou takovou přímku procházející bodem D, že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY? Narýsujte obrázek a vyšrafujte tento útvar.

ŘEŠENÍ. Danou situaci znázorňuje obr. 11. Protože body K, X jsou souměrně sdruženy podle osy o, která prochází vrcholem D, platí

$$DK = DX\,.$$



Obr. 11

Bod X leží tedy na kružnici k_1 se středem D a poloměrem $DK = \frac{a}{2}$; ovšem jenom na tom oblouku kružnice k_1, který leží ve čtverci $ABCD$ (je to čtvrtkružnice KM).

Protože body L, Y jsou souměrně sdruženy podle osy o, která prochází vrcholem D, platí

$$DL = DY\,.$$

Bod Y leží tedy na kružnici k_2 se středem D a poloměrem $DL = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, jak snadno vypočteme podle Pythagorovy věty z trojúhelníka ADL. Kružnice k_2 prochází středem G strany BC; bod Y leží ovšem jen na tom oblouku kružnice k_2, který leží ve čtverci $ABCD$. Tento oblouk je omezen středy E, G stran AB, BC.

Budiž Y libovolný bod oblouku EG; dokážeme, že vznikne jako souměrně sdružený bod s bodem L podle vhodné osy o procházející vrcholem D. Tuto osu o sestrojíme jako osu úsečky LY; určíme průsečík Z přímek o, KL a dále průsečík X přímky YZ s obloukem KM kružnice k_1. Úsečka XY je souměrně sdružená s KL podle osy o. Je-li $Y = G$, je $X = F$. Proměnná úsečka XY vyplní vyšrafovanou část mezikruží (k_1, k_2) omezenou obloukem EG kružnice k_2, obloukem KF kružnice k_1 a úsečkami KE, FG.