VI. Desátá mezinárodní matematická olympiáda

Jubilejní desátý ročník *MMO* uspořádal *SSSR v Moskvě* ve dnech 5.—19. července 1968. Zúčastnily se ho delegace dvanácti zemí: *Anglie*, *Bulharska*, *Československa*, *Itálie*, *Jugoslávie*, *Maďarska*, *Mongolska*, *NDR*, *Polska*, *Rumunska*, *SSSR* a *Švédska*; celkem soutěžilo 96 žáků (z toho jedna žákyně). Mimoto byl přítomen též jeden zástupce *Rakouska* jako pozorovatel.

Vedoucí delegací — členové mezinárodní jury, která soutěž řídí — se sjeli v Moskvě již 5. července, aby soutěž připravili; osmičlenná *žákovská družstva* přijela spolu se zástupci vedoucích ve dnech 7. a 8. července. *Vlastní soutěž* probíhala ve dnech *10.* a *11. července* v internátní fyzikálně-matematické střední škole v *Moskvě-Davydkově*. V následujících dnech jury žákovská řešení úloh korigovala a hodnotila; dne 14. července pak podle výsledků rozhodla o udělení cen. Slavnostní rozdělení cen se konalo v aule Moskevské státní university dne 18. července; 19. července se jednotlivé delegace rozjely opět domů.

Jak je tomu při *MMO* zvykem, zahrnoval program vedle samotné matematické soutěže také řadu vedlejších akcí společenských a kulturních. Účastníkům *MMO* bylo umožněno seznámit se s historickými památkami *Moskvy* (Kreml, Tretjakovská galérie, muzeum v Ostankinu, borodinské panorama), navštívili též Leninovo muzeum v *Gorkách u Moskvy*. Ve dnech *15.—17. července* byli všichni účastníci olympiády na zájezdu *v Leningradě*, kde si rovněž prohlédli místní pamětihodnosti (Petropavlovská pevnost, křižník Aurora, Isakčejevské muzeum, a zejména nezapomenutelná je návštěva Ermitáže) a odkud si zajeli také na prohlídku *Petrodvorce*. V Leningradě shlédli též představení baletu (Antonius a Kleopatra) a v Moskvě, kde divadelní sezóna již skončila, představení státního cirkusu. Kromě toho se v Leningradě účastníci *MMO* setkali s místními pionýry v jejich domě na přátelském večírku. Celý program byl tedy velmi bohatý.

Úlohy pro *X. MMO* byly vybírány jako obvykle z návrhů zaslaných, resp. dodatečně předložených, účastnickými zeměmi. Jednání o výběru úloh vyplnila program zasedání mezinárodní jury v prvních dnech. Výsledkem dlouhých diskusí byl výběr *šesti úloh,* jejichž text uvádíme v dalším. Výběr ani tentokráte nelze pokládat za ideální; i na zasedání jury byly proti němu vznášeny námitky, hlavně v tom smyslu, že v úlohách je málo zastoupena geometrie a že úlohy jsou vesměs dosti snadné. Většina členů jury však, jak se zdá, dávala záměrně přednost úlohám spíše snazším.

Soutěž se konala v osmi třídách internátní střední školy, ve které byli žáci po dobu svého pobytu v Moskvě také ubytováni. Bylo to poprvé, co nebyli všichni účastníci pohromadě; v každé třídě seděl z každého družstva jeden žák. Toto uspořádání zaručilo bezpochyby větší klid pro soutěžící, s výjimkou prvních okamžiků, kdy třídy postupně navštěvovala skupina dvanácti vedoucích delegací, aby mohla soutěžícím vysvětlit event. nejasnosti v textu úloh.

V dalších dnech *10.—13. července* byla žákovská řešení úloh obvyklým způsobem opravována a koordinována. Koordinátory bylo šest moskevských mladých matematiků, většinou bývalých olympioniků. *Závěrečné hodnocení* se konalo na schůzi jury dne *14. července.* Definitivní schválení bodového hodnocení nezabralo mnoho času, o to více se ho věnovalo diskusi okolo stanovení hranic pro jednotlivé ceny. Většina delegací se snažila o získání co největšího počtu cen; prestižní otázky hrály bezpochyby opět značnou roli. Nakonec bylo rozhodnuto udělit celkem 64 ceny, ve srovnání s minulými ročníky tedy enormní počet (právě 2/3 soutěžících); hodnotu cen je nutno brát i z tohoto hlediska. *Prvních cen* bylo uděleno 22, *druhých* také 22 a *třetích* 20. K získání třetí ceny postačilo tentokrát 26 bodů (ze 40 možných), k získání druhé ceny 34 bodů, na první cenu bylo zapotřebí 38 bodů. Vedle těchto cen bylo uděleno ještě pět *zvláštních cen*; čtyři za zvláště originální či elegantní řešení, pátou dostala mongolská žákyně za relativně nejlepší výkon.

Československé družstvo soutěžící na X. MMO bylo složeno z osmi žáků vesměs 2. a 3. ročníku SVVŠ. Byli to:

1. *Bohuš Sivák*, Zvolen,
2. *Tomáš Mašek*, Praha,
3. *Martin Bukovčan*, Bratislava,
4. *Pavel Polcar*, Velké Meziříčí,
5. *Libor Polák*, Brno,
6. *Jiří Vinárek*, Praha,
7. *Michal Kaukič*, Námestovo,
8. *Vladimír Müller*, Praha.

Výsledky, jichž dosáhli v soutěži, jsou uvedeny v přiložené *tabulce*. Vzhledem k výsledkům minulých let by se mohlo zdát, že jsou to výsledky velmi dobré. Je však třeba si uvědomit, že úlohy byly vesměs snadné, takže dobrých výsledků dosáhl poměrně značný počet účastníků. V pořadí podle celkového počtu bodů skončila *ČSSR* na sedmém místě (viz další *tabulka pořadí družstev*); toto umístění vyjadřuje dosti dobře skutečný poměr sil.

V jistém smyslu lze tvrdit, že snadné úlohy odhalí spíše slabší žáky nežli výrazné matematické talenty. Z tohoto hlediska nás pak ovšem zarazí, jestliže tři naši žáci totálně neuspěli při řešení velmi snadné *čtvrté úlohy*, jestliže *třetí úlohu* dokázali bez chyby rozřešit jenom tři z osmi. Potíže činilo našim žákům také tvoření negace tvrzení s kvantifikátory, rovněž nevynikali v schopnosti systematického probírání jednotlivých případů, které se vyskytovaly v rozboru některých úloh (např. *první*, *druhé*, *šesté*).

Při přípravě čs. družstva na další, *XI. MMO*, které se má konat *v červenci 1969 v Rumunsku*, bude proto potřeba ještě více prohloubit nejen znalost matematických obratů, metod a algoritmů, ale také umění logických rozborů; nelze přitom opomenout ani zdánlivě „*vedlejší*" formální stránku: formulace tvrzení a vůbec redakce a stylizace textu řešení. Vedle toho však bude, zdá se, potřeba vzít v úvahu i tendenci, která se začíná u *MMO* projevovat: od klasické, elementární, školské matematiky k matematice modernější, k matematické analýze i event. jiným moderním disciplínám. I když se pravděpodobně v příštím ročníku opět dostane ke slovu syntetická geometrie, přijdou jistě znovu návrhy úloh podobných, jako se vyskytly v X. ročníku: vyšetřování průběhu funkcí, nerovnosti i odhady, limity posloupností a součty řad.

Zároveň však v Moskvě bylo možno pozorovat určitou diferenciaci mezi delegacemi v názoru na *MMO* vůbec: lze se na ni dívat jako na vyvrcholení obdobných soutěží domácích (a pak ovšem nemůže být příliš snadná) anebo jako na prostředek propagace matematiky a povzbuzení zájmu o ni. Není vyloučeno, že při event. dalším rozšíření počtu účastnických zemí nabudou podobné problémy na významu.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY A JEJICH ŘEŠENÍ

1. Dokažte, že existuje jediný trojúhelník takový, že délky jeho stran jsou vyjádřeny třemi po sobě jdoucími přirozenými čísly a jeden z jeho úhlů je dvojnásobkem jednoho ze zbývajících dvou.

(*Rumunsko*, 6 bodů)

ŘEŠENÍ (*B. Sivák*)

Nechť existuje trojúhelník ABC se stranami $BC = n - 1$, $CA = n$, $AB = n + 1$, kde n je přirozené číslo a v němž je jeden úhel dvojnásobkem jednoho ze zbývajících dvou. Označme úhly $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Protože proti větší straně leží v trojúhelníku vždy větší úhel, takže nutně $\alpha < \beta < \gamma$, máme jen tyto tři možnosti:

a) $\beta = 2\alpha$, b) $\gamma = 2\beta$, c) $\gamma = 2\alpha$. Podle kosinové věty máme

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{(n+1)^2 + n^2 - (n-1)^2}{2(n+1) \cdot n} = \frac{n+4}{2(n+1)}. \tag{1}$$

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - n^2}{2(n+1)(n-1)} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)} \tag{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{n^2 + (n-1)^2 - (n+1)^2}{2n(n-1)} = \frac{n-4}{2(n-1)}. \tag{3}$$

a) Jestliže $\beta = 2\,\alpha$, je $\cos\beta = \cos 2\,\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, tedy

$$\frac{n^2+2}{2(n^2-1)} = \frac{(n+4)^2}{2(n+1)^2} - 1$$

a odtud

$$n^3 - 2n^2 - 4n + 8 = 0,$$

tj.

$$(n-2)^2(n+2) = 0.$$

Protože n je přirozené, muselo by být $n = 2$ a trojúhelník ABC by měl strany délek 1, 2, 3, které ovšem nevyhovují trojúhelníkové nerovnosti. Tento případ tedy vyloučíme.

b) Jestliže $\gamma = 2\beta$, je $\cos\gamma = 2\cos^2\beta - 1$, tzn.

$$\frac{n-4}{2(n-1)} = \frac{(n^2+2)^2}{2(n^2-1)^2} - 1,$$

čili

$$2n^4 - 3n^3 - 13n^2 + 3n + 2 = 0$$

neboli

$$n(2n^3 - 3n^2 - 13n + 3) = -2.$$

Na obou stranách této rovnosti stojí celá čísla, z čehož plyne, že je nutně buď $n = 2$ nebo $n = 1$. První možnost jsme vyloučili již v předchozím případě, avšak ani $n = 1$ není možné, neboť by pak strana BC měla nulovou délku.

c) Nechť tedy konečně $\gamma = 2\alpha$, tedy

$$\frac{n-4}{2(n-1)} = \frac{(n+4)^2}{2(n+1)^2} - 1$$

a odtud

$$2n^3 - 7n^2 - 17n + 10 = 0,$$

což lze napsat ve tvaru

$$(n-5)(2n^2 + 3n - 2) = 0.$$

Víme již, že je nutně $n > 2$, avšak pro $n > 2$ je $2n^2 + 3n - 2 > 8 + 6 - 2 > 0$, takže jediným řešením je $n = 5$.

Pro $n = 5$ má trojúheník ABC strany 4, 5, 6; přesvědčíme se, že pak skutečně $\gamma = 2\alpha$. Podle vzorců (1) – (3) je $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\gamma = \frac{1}{8}$. Odtud snadno vyplývá $\cos 2\alpha = \cos\gamma$. Úhel α je nejmenší (leží proti nejkratší straně), takže $0° < \alpha < 60°$. Musí tedy být $2\alpha = \gamma$. Trojúhelník o stranách 4, 5, 6 má tedy všechny požadované vlastnosti a je jediný takový, c . b . d.

2. Najděte všecka přirozená čísla x taková, že součin jejich cifer (v dekadickém zápisu) je roven $x^2 - 10x - 22$.

(*Československo*, 7 bodů)

ŘEŠENÍ. (*M. Kaukič*)

Označme $P(x)$ součin cifer čísla x. Nejprve si dokážeme, že pro každé přirozené x je $P(x) \leqq x$. Skutečně, nechť

$$x = c_0 + 10c_1 + 10^2c_2 + \ldots + 10^n c_n,$$

kde $c_i (i = 0, \ldots, n)$ jsou cifry čísla x; $0 \leqq c_i \leqq 9$, $0 < c_n \leqq 9$. Součin n-cifer $c_0 c_1 \ldots c_{n-1}$ je zřejmě menší než 10^n, takže

$$P(x) = c_0 c_1 \ldots c_n < 10^n c_n \leqq$$
$$\leqq 10^n c_n + 10^{n-1} c_{n-1} + \ldots + 10c_1 + c_0 = x.$$

Má-li platit $P(x) = x^2 - 10x - 22$, musí být

$$x^2 - 10x - 22 \leqq x,$$

tedy

$$x^2 - 11x - 22 \leqq 0.$$

Řešením této kvadratické nerovnosti dostáváme $x \leqq 13$.

Pro jednociferná x je ovšem $P(x) = x$, bylo by tedy

$$x^2 - 10x - 22 = x,$$

tzn.

$$x^2 - 11x - 22 = 0,$$

avšak tato rovnice nemá žádné přirozené řešení.

Pro dvojciferné $x < 20$ je $P(x) = x - 10$, tedy má být

$$x^2 - 10x - 22 = x - 10,$$

čili

$$x^2 - 11x - 12 = 0.$$

Jediným přirozeným řešením je $x = 12$; to je tedy jediné přirozené číslo vyhovující podmínkám úlohy.

3. Je dána soustava rovnic s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} ax_1^2 &+ bx_1 + c = x_2, \\ ax_2^2 &+ bx_2 + c = x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ax_{n-1}^2 &+ bx_{n-1} + c = x_n, \\ ax_n &+ bx_n + c = x_1, \end{aligned}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$. Dokažte, že tato soustava:

I. nemá žádné reálné řešení, jestliže

$$(b - 1)^2 - 4ac < 0;$$

II. má právě jedno reálné řešení, jestliže

$$(b - 1)^2 - 4ac = 0;$$

III. má více než jedno reálné řešení, jestliže

$$(b - 1)^2 - 4ac > 0.$$

(*Bulharsko*, 7 bodů).

ŘEŠENÍ. (*B. Sivák*)

Označme $P(x) = ax^2 + (b - 1)x + c$; danou soustavu pak můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} P(x_1) &= x_2 - x_1, \\ P(x_2) &= x_3 - x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(x_{n-1}) &= x_n - x_{n-1}, \\ P(x_n) &= x_1 - x_n. \end{aligned}$$

Sečtením všech rovnic dostáváme

$$P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_n) = 0. \tag{*}$$

I. Nechť $(b - 1)^2 - 4ac < 0$. Potom je buď $P(x) > 0$ pro všechna reálná x (při $a > 0$), anebo je $P(x) < 0$ pro všechna reálná x (při $a < 0$). V žádném případě tedy nemůže platit rovnost (*).

II. Nechť $(b - 1)^2 - 4ac = 0$. Při $a > 0$ je opět $P(x) \geqq 0$ pro všechna reálná x, při $a < 0$ je $P(x) \leqq 0$ pro všechna reálná x, takže rovnost (*) může být splněna jen v tom případě, jestliže $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_n) = 0$. Avšak rovnice $P(x) = 0$ má při $(b-1)^2 - 4ac = 0$ právě jedno řešení, a to $x = \dfrac{1-b}{2a}$. Jediným řešením dané soustavy je tedy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1-b}{2a},$$

které skutečně soustavě vyhovuje.

III. Nechť $(b-1)^2 - 4ac > 0$. Rovnice $P(x) = 0$ má v tomto případě dvě různá reálná řešení $x = \alpha$ a $x = \beta$. Snadno se přesvědčíme, že pak také

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \alpha$$

a

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \beta$$

jsou dvě (různá) řešení dané soustavy, (která ovšem může mít event. ještě jiná, další řešení).

4. Dokažte, že v každém čtyřstěnu existuje takový vrchol, že z úseček rovných hranám, které z něho vycházejí, lze sestrojit trojúhelník.

(*Polsko*, 5 bodů)

ŘEŠENÍ. (*B. Sivák*)

Budiž $ABCD$ libovolný daný čtyřstěn, přičemž označení volíme tak, aby hrana AB byla nejdelší (jedna z nejdelších). Pro stěny ABC, ABD čtyřstěnu platí trojúhelníkové nerovnosti, tj.

$$AC + BC > AB,$$
$$AD + BD > AB;$$

sečtením dostaneme nerovnost

$$AC + BC + AD + BD > 2AB,$$

kterou můžeme napsat též jako

$$(AC + AD - AB) + (BC + BD - AB) > 0.$$

Nutně tedy platí buď $AC + AD > AB$ anebo $BC + BD > AB$. Protože hrana AB je nejdelší, je možné buď z úseček AC, AD, AB anebo z BC, BD, BA sestrojit trojúhelník.

5. Nechť f je funkce s reálnými hodnotami definovaná pro všechna reálná x a taková, že pro každé x platí

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}, \qquad (*)$$

kde a je dané kladné číslo.

I. Dokažte, že funkce f je periodická (tzn. že existuje kladné číslo b takové, že $f(x + b) = f(x)$ pro všechna x).

II. Udejte pro $a = 1$ příklad funkce f s uvedenými vlastnostmi, která není identicky rovna konstantě.

(*NDR*, 7 bodů)

ŘEŠENÍ

I. Má-li funkce f být definována pro všechna x a přitom vyhovovat (*), musí nutně být

$$f(x) \geqq [f(x)]^2$$

a tedy $f(x) \leqq 1$, a současně $f(x) \geqq \frac{1}{2}$, takže celkem

$$\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq 1$$

pro všechna reálná x.

Počítejme dále $f(x+2a)$ podle (*). Je

$$f(x+2a) = f[(x+a)+a] =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a)[1-f(x+a)]} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} \cdot \left\{\frac{1}{2} - \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \{f(x) - [f(x)]^2\}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left[f(x) - \frac{1}{2}\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x)\,.$$

Platí tedy

$$f(x+2a) = f(x)$$

pro všechna x; za číslo b lze tedy vzít $b = 2a$.

II. Příkladů funkce s požadovanými vlastnostmi je ovšem mnoho. Obecně lze takovou funkci definovat takto:

1. pro $0 \leqq x < 1$ definujeme $f(x)$ zcela libovolně, ale tak, aby $\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq 1$;

2. pro $1 \leqq x < 2$ určíme $f(x)$ pomocí (*), tj. tak, aby

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x-1) - [f(x-1)]^2};$$

3. pro všechna ostatní x určíme $f(x)$ tak, aby f byla periodická s periodou 2.

Lze ostatně udat i některé jednoduché konkrétní příklady jako

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|,$$

anebo

$$f(x) = \frac{1}{2} \text{ pro } 0 \leqq x < 1,$$

$$f(x) = 1 \text{ pro } 1 \leqq x < 2$$

a dále periodicky, atp.

6. Pro každé přirozené číslo n vypočtěte součet

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots$$

a dokažte správnost odvozeného vzorce.

Symbol $[x]$ zde značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo m takové, že $m \leqq x$.

(*Anglie*, 8 bodů)

Poznámka.

Tato úloha byla poprávu ohodnocena největším počtem bodů ani ne proto, že by snad byla nejtěžší (uvidíme, že má velmi krátké a elegantní řešení), ale proto, že je podnětná a inspiruje k dalšímu zobecnění získaných výsledků, a to v několika různých směrech. Proto si tu také uvedeme různé způsoby řešení.

ŘEŠENÍ 1 (autorské)

Vypíšeme si součet $S_n = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$n = 1: \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{8}\right] + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

$$n = 2: \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{4}{4}\right] + \left[\frac{6}{8}\right] + \ldots = 1 + 1 + 0 + 0 + \ldots,$$

$$n = 3: \left[\frac{4}{2}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] + \left[\frac{7}{8}\right] + \ldots = 2 + 1 + 0 + 0 + \ldots,$$

výsledky nás vedou k formulaci hypotézy $S_n = n$, kterou se pokusíme dokázat. Předně je zřejmé, že pro $n < 2^k$ je už $\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} < 1$, a tedy $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = 0$. V každém součtu S_n je tedy jen konečný počet nenulových sčítanců. Pozorujme, jak se liší sčítanci

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] \text{ a } \left[\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}}\right].$$

v součtech S_n a S_{n+1}. Zřejmě vždy

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] \leqq \left[\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}}\right],$$

takže nutně $S_n \leqq S_{n+1}$. Poněvadž však

$$\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}} - \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

nemůže být rozdíl

$$\left[\frac{(n + 1) + 2^k}{2^{k+1}}\right] - \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]$$

větší než 1. Kdy však je právě roven 1 ? V takovém případě musí existovat přirozené číslo m takové, že

$$\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} < m \leqq \frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}}.$$

Odtud

$$n + 2^k < m \,.\, 2^{k+1} \leqq n + 2^k + 1.$$

Avšak $n + 2^k$ a $n + 2^k + 1$ jsou dvě po sobě následující přirozená čísla a také číslo $m \,.\, 2^{k+1}$ je přirozené. Musí tedy být

$$m \,.\, 2^{k+1} = n + 2^k + 1,$$

tj.

$$n + 1 = 2^k(2m - 1).$$

Snadno je vidět, že při daném n existuje právě jedno celé nezáporné k takové, že lze najít m tak, aby $n + 1 = 2^k(2m - 1) - k$; k tomu stačí rozložit číslo $n + 1$ na prvočinitele: k pak bude počet dvojek v tomto rozkladu.

Pro všechna ostatní k bude pak nutně

$$\left[\frac{n + 1 + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right].$$

Při přechodu od S_n k S_{n+1} změní se tedy právě jeden sčítanec o jednotku, všechny ostatní zůstanou nezměněny. Platí tedy pro každé n: $S_{n+1} = S_n + 1$. Poněvadž však $S_1 = 1$, je skutečně $S_n = n$, c.b.d.

ŘEŠENÍ 2

Číslo n vyjádříme v dvojkové soustavě, tedy ve tvaru

$$n = c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + 2^3c_3 + \ldots + 2^rc_r + \ldots \,;\; c_j = 0,1.$$

Potom

$$n + 2^k = c_0 + \ldots + 2^{k-1}c_{k-1} + 2^k(c_k + 1) + 2^{k+1}c_{k+1} + \\ + \ldots + 2^rc_r + \ldots$$

$$\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} = 2^{-k-1}c_0 + 2^{-k}c_1 + \ldots + 2^{-2}c_{k-1} + 2^{-1}(c_k + 1) + \\ + c_{k+1} + c_{k+1} + \ldots + 2^{r-k-1}c_r + \ldots$$

a dále zřejmě

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{1 + c_k}{2}\right] + c_{k+1} + 2c_{k+2} + \ldots + 2^{r-k-1}c_r + \ldots .$$

Avšak $c_k = 0$ nebo 1, takže $\left[\dfrac{1 + c_k}{2}\right] = c_k$. Máme tedy

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] = c_0 + c_1 + 2c_2 + 2^2c_3 + \dots$$

$$\left[\frac{n+2}{4}\right] = c_1 + c_2 + 2c_3 + \dots$$

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = c_k + c_{k+2} + 2c_{k+2} + \dots .$$

Sečtením dostáváme na levé straně právě součet S_n a na pravé straně

$$c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + \dots + 2^r c_2 + \dots = n,$$

tedy

$$S_n = n.$$

ŘEŠENÍ 3. (*M. Bukovčan*— upraveno)

Uvažujme všechna přirozená čísla od 1 do n. Můžeme si je rozdělit do dvou skupin: na čísla lichá, kterých je právě $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, a na čísla sudá. Sudá čísla si dále rozdělíme opět do dvou skupin: na čísla nedělitelná čtyřmi — a těch je právě $\left[\dfrac{n+2}{4}\right]$ a na čísla dělitelná čtyřmi. Tuto poslední skupinu dále dělíme na čísla nedělitelná osmi — a těch je $\left[\dfrac{n+4}{8}\right]$ — a zbytek —. Tímto způsobem postupujeme dále až bude při některém dělení druhá skupina prázdná. Poněvadž takto vyčerpáme všechna přirozená čísla od 1 do n (a těch je právě n) a přitom každé číslo bude právě v jedné skupině — vidíme, že platí $S_n = n$.

Ukážeme si ještě, že skutečně $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]$ je právě počet těch přirozených čísel $\leqq n$, která nejsou dělitelná 2^{k+1}, ale jsou dělitelná 2^k, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$. Čísla s těmito vlastnostmi jsou tvaru

$$m = 2^k(2l - 1), \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

přitom z nerovnosti $m \leqq n$ plyne postupně

$$2^k(2l - 1) \leqq n,$$

$$2l - 1 \leqq \frac{n}{2^k},$$

$$l \leqq \frac{n + 2^k}{2^{k+1}}.$$

Největší přípustná hodnota l je tedy $\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right]$, avšak to je zároveň hledaný počet těchto čísel m.

Toto řešení vede k *zobecnění úlohy*, kdy dvojku nahradíme libovolným prvočíslem p. Každé přirozené číslo m lze vyjádřit — a to právě jedním způsobem — ve tvaru

$$m = p^k \,.\, q,$$

kde q není dělitelno prvočíslem p. Toto číslo q pak lze dále vyjádřiti — opět jediným způsobem — ve tvaru

$$q = lp - r, \qquad 1 \leqq r < p, \qquad l = 1, 2, \ldots.$$

Analogicky jako v předchozím případě pak dostaneme z nerovnosti $m \leqq n$ postupně

$$n \geqq m = p^k \,.\, q = p^k(lp - r),$$

$$\frac{n}{p^k} + r \geqq lp,$$

$$l \leqq \frac{n + rp^k}{p^{k+1}},$$

takže $\left[\frac{n + rp^k}{p^{k+1}}\right]$ je opět právě počet všech těch přirozených čísel m nejvýše rovných n, která jsou dělitelná p^k, ale při dělení číslem p^{k+1} dávají zbytek $p - r$. Vidíme tak, že platí

$$\left[\frac{n+1}{p}\right] + \left[\frac{n+p}{p^2}\right] + \left[\frac{n+p^2}{p^3}\right] + \ldots +$$

$$+ \left[\frac{n+2}{p}\right] + \left[\frac{n+2p}{p^2}\right] + \left[\frac{n+2p^2}{p^3}\right] + \ldots +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ \left[\frac{n+p-1}{p}\right] + \left[\frac{n+p(p-1)}{p^2}\right] + \left[\frac{n+p^2(p-1)}{p^3}\right] +$$

$$+ \ldots = n.$$

ŘEŠENÍ 4. (*M. J. Williamson*, Anglie)

Nejprve si dokážeme, že pro každé nezáporné reálné x platí

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = [x].$$

Skutečně , pro $2l \leqq x < 2l + 1$ je

$$l \leqq \frac{x}{2} < l + \frac{1}{2} \leqq \frac{x+1}{2} < l + 1\,,$$

takže

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = l + l = 2l = [x].$$

Pro $2l + 1 \leqq x < 2l + 2$ je pak

$$l + \frac{1}{2} \leqq \frac{x}{2} < l + 1 \leqq \frac{x+1}{2} < l + \frac{3}{2}\,,$$

takže

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = l + l + 1 = 2l + 1 = [x].$$

Platí tedy pro každé nezáporné x

$$[x] - \left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right].$$

Do této rovnosti dosazujeme za x postupně $\frac{x}{2^k}$, $k =$ $= 0, 1, 2, \ldots$ a všechny rovnosti pak sečteme:

$$[x] - \left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right],$$

$$\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{2^2}\right] = \left[\frac{\frac{x}{2}+1}{2}\right] = \left[\frac{x+2}{2^2}\right],$$

$$\left[\frac{x}{2^k}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

Pro dosti velké k bude ovšem $\left[\frac{x}{2^{k+1}}\right] = 0$, takže sečtením dostaneme na levé straně $[x]$ a na pravé straně součet

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

Tím je úloha rozřešena, a to dokonce obecněji nežli jen pro celé hodnoty x.

Třetí a čtvrtý způsob řešení lze ještě dále kombinovat. Budiž p prvočíslo, potom pro každé nezáporné reálné x

platí

$$\sum_{j=0}^{p-1}\left[\frac{x+j}{p}\right] = [x],$$

takže opět

$$[x] - \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{j=1}^{p-1}\left[\frac{x+j}{p}\right].$$

Dosazujeme sem za x postupně $x, \frac{x}{p}, \frac{x}{p^2}, \ldots$ a po sečtení dostaneme jako konečný výsledek rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p-1}\left[\frac{x+jp^k}{p^{k+1}}\right] = [x].$$

Příloha 1

Vedoucí delegací na X. MMO

Země	vedoucí	zástupce
Anglie	dr. Norman Routledge	dr. David Monk
Bulharsko	doc. Dojčin Bogdanov Dojčinov	Christo Stojanov Doganov
ČSSR	dr. František Zítek	dr. Jozef Moravčík
Itálie	prof. Tullio Viola	prof. Angelo Pescarini
Jugoslávie	prof. France J. Križanić	Vladimir P. Mičić
Maďarsko	doc. Hódi Endré	dr. Reiman István
Mongolsko	doc. Uršin Sanžimjatav	Aivan Duger
NDR	dr. Helmut Bausch	Herbert Titze
Polsko	prof. Mieczyslaw Czyżykowski	Mgr. Andrzej Mąkowski
Rumunsko	prof. Constantin Ionescu-Bujor	Z. Bogdanov
SSSR	doc. E. Morozova	N. B. Vasiljev
Švédsko	dr. Per Martin-Löf	Peter Hackman

Rakouský pozorovatel: prof. Alexander

Příloha 2

Přehled výsledků čsl. účastníků.

Jméno	Úloha číslo						Celkem
	1	2	3	4	5	6	
B. Sivák	6	7	7	5	7	8	40
T. Mašek	6	7	7	5	7	8	40
M. Bukovčan	3	4	1	0	0	8	16
P. Polcar	5	7	7	0	7	8	34
L. Polák	5	7	1	5	7	8	33
J. Vinárek	6	7	1	5	7	8	34
M. Kaukič	4	7	4	0	0	1	16
V. Müller	6	7	2	5	7	8	35
Družstvo celkem	41	53	30	25	42	57	248

Žáci *B. Sivák* a *T. Mašek* dosáhli maximálního možného počtu bodů a získali tak *první cenu*, žáci *P. Polcar*, *L. Polák*, *J. Vinárek* a *V. Müller* získali *druhou cenu.*

Příloha 3

Přehled celkových výsledků družstev

Země	Počet cen					Pořadí podle počtu bodů
	I.	II.	III.	Celkem	celkový počet bodů	
Anglie	3	2	2	7	263	4
Bulharsko	0	3	1	4	204	9
Československo	2	4	0	6	248	7
Itálie	0	0	1	1	132	11
Jugoslávie	0	0	3	3	177	10
Maďarsko	3	3	2	8	291	3
Mongolsko	0	0	0	0	74	12
NDR	5	3	0	8	304	1
Polsko	2	3	2	7	262	5
Rumunsko	1	1	2	4	208	8
SSSR	5	1	2	8	298	2
Švédsko	1	2	5	8	256	6
Celkem	22	22	20	64	—	—

Vedle těchto cen bylo uděleno ještě 5 *zvláštních cen*: Dva maďarští, jeden anglický a jeden jugoslávský žák dostali ceny za originální řešení, příp. zobecnění úloh; pátou zvláštní cenu dostala mongolská žákyně za nejlepší výkon (získala 19 bodů).