16. ročník matematické olympiády

IV. Úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 16. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1966-1967. 9. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968. pp. 81–103.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404564

IV. Úlohy II. kola

1. *KATEGORIE A*

1. Dokažte, že o objemu V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V \leqq \frac{1}{6} AB \,.\, BC \,.\, CD \,.$$

Řešení. Objem V daného čtyřstěnu je roven $V = \frac{1}{3} Pv$, kde P je obsah trojúhelníku ABC a v je velikost výšky čtyřstěnu spuštěné z vrcholu D na stěnu ABC. Je však dále

$$P = \frac{1}{2} AB \,.\, v' \,,$$

kde v' je velikost výšky trojúhelníku ABC, spuštěné z bodu C.

Protože v' je vzdálenost bodu C od přímky AB, je

$$v' \leqq BC \,,$$

tj.

$$P \leqq \frac{1}{2} AB \,.\, BC \,.$$

Dále je v vzdálenost bodu D od roviny ABC, takže

$$v \leqq CD \,.$$

Odtud

$$V = \frac{1}{3} Pv \leqq \frac{1}{6} AB \,.\, BC \,.\, CD \,,$$

jak jsme měli dokázat.

2. Je dána soustava rovnic

$$|1 - x| = a, \ |x - y| = b, \ |y - 1| = c, \qquad (1)$$

kde a, b, c jsou daná přirozená čísla.

Dokažte, že soustava (1) má buď dvě řešení, nebo je neřešitelná. Určete podmínku řešitelnosti.

Řešení. Pokládejme čísla 1, x, y za souřadnice tří bodů přímky p; tyto body označme

$$A = [y], \ B = [1], \ C = [x] . \qquad (2)$$

Pak je podle (1)

$$BC = a, \ CA = b, \ AB = c . \qquad (3)$$

Protože a, b, c jsou přirozená čísla, jsou A, B, C tři různé body přímky p.

Ze tří různých bodů přímky právě jeden odděluje oba zbývající. Je-li tedy soustava (1) řešitelná, platí právě jeden ze vztahů

C odd. AB, A odd. BC, B odd. CA,

neboli právě jedna z rovností

$$AC + CB = AB, \ BA + AC = BC, \ CB + BA = CA,$$

tj. vzhledem k (3) právě jedna z rovností

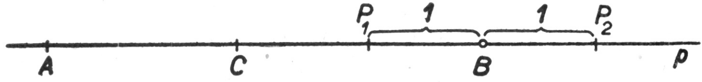
$$a + b = c, \ b + c = a, \ c + a = b. \qquad (4)$$

Platnost právě jedné z rovností (4) je tedy nutná podmínka pro řešitelnost soustavy (1). Dokážeme, že tato podmínka je také postačující.

Nechť platí např.

$$a + b = c . \qquad (5)$$

Na libovolné přímce p sestrojíme tři body A, B, C tak, aby pro ně platily vztahy (3) a (5); viz obr. 20. Dále sestrojíme



Obr. 20.

oba body přímky p, pro které platí $BP_1 = BP_2 = 1$. Jsou-li y_1, x_1 po řadě souřadnice bodů A, C v soustavě s počátkem P_1 a jednotkovým bodem B, pak platí

$$c = AB = |y_1 - 1|, \; a = BC = |1 - x_1|$$

a vzhledem k (3)

$$|x_1 - y_1| = AC = b\,.$$

Čísla x_1, y_1 jsou tedy řešením soustavy (1). Druhé řešení dá bod P_2.

Závěr. Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, platí-li jedna z rovností (4). Je-li řešitelná, má dvě řešení.

3. Vypočítajte súčet

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \,.\, \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \,.\, \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \,.\, \cos 3} + \ldots + \frac{\sin 1}{\cos (n-1) \cos n},$$

kde n je dané prirodzené číslo.

Riešenie. Upravíme člen súčtu

$$\frac{\sin 1}{\cos (k-1) \,.\, \cos k} \tag{1}$$

pomocou rovnosti

$$\sin 1 = \sin [k - (k-1)] = \sin k \,.\, \cos (k-1) - \cos k \,.\, \sin (k-1)\,. \tag{2}$$

Ak dosadíme z (2) do (1), dostaneme

$$\frac{\sin 1}{\cos (k-1) \cos k} = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg} (k-1)\,. \tag{3}$$

Členy (3) máme sčítať pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Hľadaný súčet

je teda $s = (\mathrm{tg}\,1 - \mathrm{tg}\,0) + (\mathrm{tg}\,2 - \mathrm{tg}\,1) + (\mathrm{tg}\,3 - \mathrm{tg}\,2) + \ldots + (\mathrm{tg}\,n - \mathrm{tg}\,(n-1))$,
t. j.

$$s = \mathrm{tg}\,n - \mathrm{tg}\,0 = \mathrm{tg}\,n\,.$$

Poznámka. Dá sa dokázať, že $\cos k \neq 0$ pre každé prirodzené číslo k. Ak by totiž pre niektoré prirodzené číslo k platilo $\cos k = 0$, bolo by

$$k = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi \quad (\lambda \text{ celé}).$$

Stade by sme dostali $\pi = \dfrac{2k}{1 + 2\lambda}$, čo však nie je možné, pretože π je číslo iracionálne.

4. Je daná priamka p a rovina π kolmá k p. Na priamke p sú dané dva rôzne body A, B, ktoré ležia v tom istom polpriestore s hranicou π. V rovine π je daná priamka q mimobežná s p.

Vyšetrite geometrické miesto priesečníkov výšok trojuholníkov ABX, keď bod X prebieha priamku q.

Riešenie. Výška každého z trojuholníkov ABX spustená z vrcholu X má tú istú pätu M. Bod M je priesečníkom priamky p s rovinou π.

Rozoznávajme dva prípady:

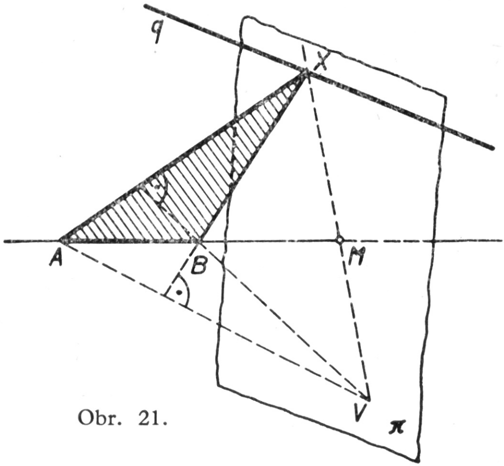
a) bod M splynie s niektorým z bodov A, B, napr. $M \equiv B$;

b) $M \not\equiv A, B$ a pri vhodnom označení oddeľuje napr. bod B body A a M.

V prípade a) sú všetky trojuholníky ABX pravouhlé s pravým uhlom $\sphericalangle ABX$. Priesečník výšok V v každom z nich je $V \equiv B$. Hľadané geometrické miesto bodov pozostáva teda z jediného bodu B.

Prípad b) (obr. 21). Všetky priesečníky výšok V ležia na priamkach MX, t. j. v rovine $Mq \equiv \pi$. Pretože $\sphericalangle ABX$ je tupý ($\triangle BMX$ je pravouhlý s pravým uhlom $\sphericalangle BMX$), oddeľuje bod M body V a X. Bod B je priesečníkom výšok trojuholníka AVX. Preto je $\sphericalangle XAM = \sphericalangle MVB$ a ďalej

$$\triangle AMX \sim \triangle VMB\,. \tag{1}$$



Obr. 21.

Zo vzťahu (1) odvodíme $AM : VM = XM : BM$ čiže

$$MX\,.\,MV = MA\,.\,MB = k\,, \tag{2}$$

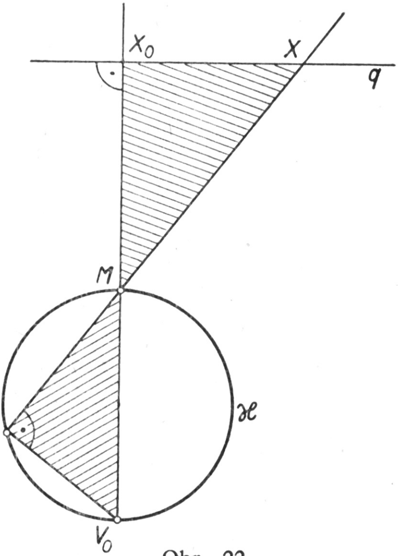
kde k je kladná konštanta.

Obr. 22 znázorňuje situáciu v rovine π. Priamka MX_0 je spoločná kolmica mimobežiek p, q. Bod V_0 je priesečník výšok trojuholníka ABX_0. Preto je podľa (2) $MX_0\,.\,MV_0 = k$, tj. $MX_0\,.\,MV_0 = MX\,.\,MV$ čiže

$$MX : MX_0 = MV_0 : MV\,. \tag{3}$$

Zo vzťahu (3) vyplýva podľa vety *s u s* o podobnosti trojuholníkov, že je $\triangle MXX_0 \sim \triangle MV_0V$. Preto je uhol $\sphericalangle MVV_0$ pravý a bod V leží podľa obrátenej Thaletovej vety na kružnici $\varkappa$ zostrojenej nad priemerom MV_0.

Pretože každá priamka zväzku (M) s výnimkou dotýčnice kružnice $\varkappa$ v bode M obsahuje po jednom bode X i V, vyplnia body V kružnicu $\varkappa$ bez bodu M.



Obr. 22.

Zhrnutie. V prípade a) je hľadaným geometrickým miestom množina obsahujúca jediný bod M, v prípade b) je to kružnica $\varkappa$ bez bodu M.

2. KATEGORIE B

1. Platí-li o reálných číslech a, b, c, že $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$,

$|c| \leqq 1$, potom je

$$ab + ac + bc \geqq -1 .$$

Dokažte a najděte nutnou a postačující podmínku pro to, aby nastala rovnost.

Řešení. Platí

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqq 0,$$

neboť oba sčítanci jsou nezáporná čísla. Vynásobením, úpravou a dělením dvěma dostáváme

$$ab + ac + bc + 1 \geqq 0$$

neboli

$$ab + ac + bc \geqq -1 ,$$

jak jsme měli dokázat.

Rovnost nastane v tom a jen v tom případě, je-li zároveň

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 0$$

a

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0 .$$

To bude splněno, bude-li aspoň jedno z čísel a, b, c rovno -1 a zároveň aspoň jedno rovno 1.

2. Je daná funkcia

$$y = \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{2x} - 1}}} .$$

Zistite jej obor definície a zostrojte jej graf.

Riešenie. Najprv zistíme obor definície danej funkcie. Z definície druhej odmocniny vyplýva nutnosť splnenia vzťahov

$$\frac{1 + x^2}{2x} \pm 1 \geqq 0 ,$$

ktoré sú splnené len pre $x > 0$. Keďže pre kladné x je nezáporným číslom aj výraz pod „veľkou odmocninou", pričom menovateľ je rôzny od nuly, je daná funkcia definovaná pre

$$x > 0\,. \tag{1}$$

Upravme teraz zlomok

$$\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(1+x)^2}{2x}}-\sqrt{\frac{(1-x)^2}{2x}}}{\sqrt{\frac{(1+x)^2}{2x}}+\sqrt{\frac{(1-x)^2}{2x}}}\,.$$

Použitím známej vety, že $\sqrt{x^2} = |x|$, dostaneme z daného zlomku tvar

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}\,.$$

Z definície absolútnej hodnoty vyplýva pre $x \geqq 1$:

$|1+x| = 1+x$, $|1-x| = x-1$, teda

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|} = \frac{1+x+1-x}{1+x-1+x} = \frac{1}{x}; \tag{2a}$$

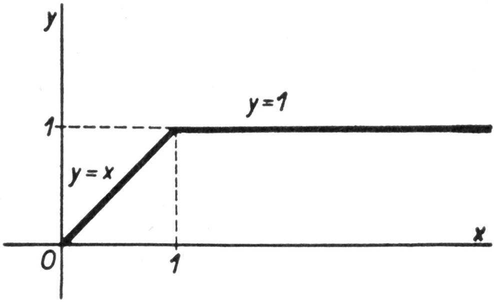
pre $0 < x < 1$ je $|1+x| = 1+x$, $|1-x| = 1-x$ a teda

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = x\,. \tag{2b}$$

Ak použijeme vzťahy (1) a (2), dostaneme:

pre $x \geqq 1$ je $y = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$, pre $0 < x < 1$ je $y =$
$= \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Grafom danej funkcie je teda lomená čiara znázornená na obr. 23.



Obr. 23.

3. Do polgule s polomerom 1 treba vpísať tri zhodné plochy guľové tak, aby sa každé dve zvonku dotýkali a každá z nich aby sa dotýkala jednak podstavy polgule a jednak jej hraničnej plochy guľovej. Vypočítajte polomer vpísaných guľových plôch a dokážte, že úloha je riešiteľná.

Riešenie. Predpokladajme, že riešenie existuje. Označme O stred polgule, S_1, S_2, S_3 stredy vpísaných guľových plôch, r ich polomer. Body S_1, S_2, S_3 tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka so stranami dĺžky $2r$. Ak je S stred tohto trojuholníka, potom platí $d = SS_1 =$

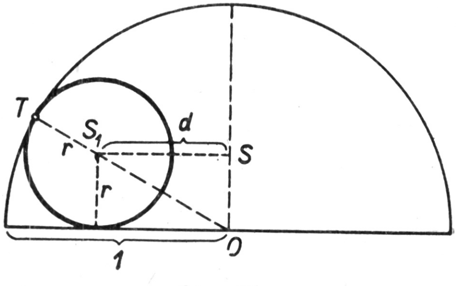
$= SS_2 = SS_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$. Rovina S_1OS pretne polguľu v polkružnici (obr. 24), prvú guľovú plochu v kružnici s polomerom r a stredom S_1. Táto kružnica sa dotýka polkružnice v bode T. Pretože body T, S_1, O ležia na priamke, platí

$$1 = r + \sqrt{r^2 + d^2} = r\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}}\right) = r\left(1 + \frac{\sqrt{21}}{3}\right).$$

Stade

$$r = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{21}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{3} - 1}{\frac{7}{3} - 1} = \frac{1}{4}(\sqrt{21} - 3).$$

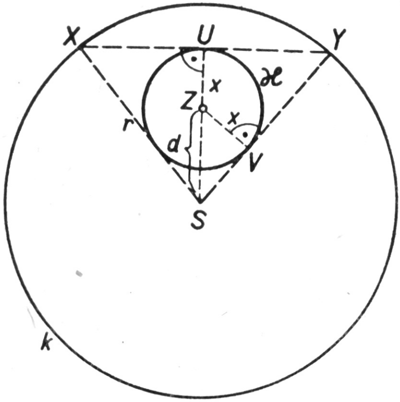
Ak zvolíme r takto a $d = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$, potom existuje kružnica s polomerom r ako na obr. 24. Potom možno zostrojiť tri guľové plochy požadovaných vlastností.



Obr. 24.

4. Je dána kružnice k se středem S. Dokažte, že každý bod $Z \not\equiv S$ jejího vnitřku je středem kružnice vepsané trojúhelníku SXY, jehož vrcholy X, Y leží na kružnici k. Vyjádřete poloměr této vepsané kružnice pomocí r, SZ.

Řešení. Je-li bod Z středem kružnice vepsané trojúhelníku SXY, jehož vrcholy X, Y leží na kružnici k a který je proto rovnoramenný, zavedeme označení podle obr. 25: U je střed úsečky XY a zároveň bod dotyku



Obr. 25.

kružnice vepsané trojúhelníku SXY, V je pata kolmice z bodu Z na přímku SY, a tedy také bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku SXY. Platí tedy

$$SZ = d, \quad SY = r, \quad ZU = ZV = x,$$

kde x značí poloměr vepsané kružnice.

Z podobnosti trojúhelníků

$$\triangle SYU \sim \triangle SZV$$

dostaneme: $SY : SU = SZ : SV$, neboli

$$r : (d + x) = d : \sqrt{d^2 - x^2},$$

neboli

$$r \sqrt{d^2 - x^2} = d(d + x) . \tag{1}$$

Odtud dostaneme umocněním

$$r^2(d + x)(d - x) = d^2(d + x)^2 . \tag{2}$$

Protože je $d + x \neq 0$, můžeme jím dělit rovnici (2) a vyjde

$$r^2(d - x) = d^2(d + x)$$

a odtud po jednoduché úpravě

$$x = d \frac{r^2 - d^2}{r^2 + d^2} . \tag{3}$$

Zvolme nyní libovolný bod Z vnitřku kružnice k, pro který platí $SZ = d < r$. Kolem bodu Z opišme kružnici $\varkappa$ poloměrem x, který je dán vzorcem (3). Ze vzorce (3) vyplývá, že je $x < d$. Proto leží bod S vně kružnice $\varkappa$. Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník $SX'Y'$ se základnou $X'Y'$ tak, aby $\varkappa$ byla kružnice jemu vepsaná. Pak opíšeme kolem středu S kružnici k' poloměrem $SX' = SY' = r'$. Podle vzorce (3) pak platí

$$x = d \frac{r'^2 - d^2}{r'^2 + d^2} . \tag{4}$$

Porovnáním (3) a (4) dostaneme

$$(r^2 - d^2)(r'^2 + d^2) = (r'^2 - d^2)(r^2 + d^2)$$

a odtud $r'^2 = r^2$, tj. $r' = r$. Kružnice k, k' tedy splynou, zvolený bod Z je středem kružnice vepsané jednomu z trojúhelníku SXY a tvrzení je dokázáno.

3. *KATEGORIE C*

1. Trojúhelník o obsahu 50 cm^2 má jedinou stranu delší než 10 cm. Určete délku této strany.

Řešení. Nechť a, b, c jsou délky stran daného trojúhelníku a nechť c je větší než 10 cm. Je pak $a \leqq 10$ cm, $b \leqq 10$ cm. Obsah P trojúhelníku je

$$P = \frac{1}{2} av ,$$

kde v je velikost výšky kolmé k straně a, vycházející z vrcholu A. Protože v je zároveň vzdálenost bodu A od strany BC, platí $v \leqq b = AC$.

Je proto

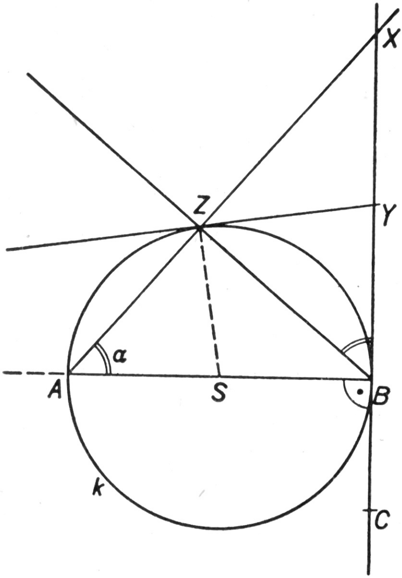
$$P = \frac{1}{2} av \leqq \frac{1}{2} ab \leqq 50 \text{ cm}^2 .$$

Avšak víme, že $P = 50$ cm^2. Je proto $v = b$, tj. strana b je kolmá k a, dále $a = 10$ cm, $b = 10$ cm. Odtud plyne, že $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10\sqrt{2}$ cm $\doteq 14{,}14$ cm, což je hledaný výsledek.

2. Je daný pravý uhol $\sphericalangle ABC$. Vrchol X pravouhlého trojuholníka ABX sa pohybuje po priamke BC. Y je stred jeho odvesny BX, Z päta výšky na preponu AX. Vyšetrite geometrické miesto bodov Z, pre ktoré platí $\sphericalangle ZBY \geqq \sphericalangle XZY$.

Riešenie. Nad priemerom AB zostrojíme kružnicu k so stredom S. Podľa obrátenej Thaletovej vety patrí bod Z kružnici k. Ak označíme α veľkosť uhla $\sphericalangle XAB$, je $\sphericalangle AXB = 90° - \alpha$ (z pravouhlého $\triangle ABX$), $\sphericalangle ZBY = \alpha$ (z pravouhlého $\triangle BXZ$ — pozri obr. 26). Ďalej máme podľa obrátenej Thaletovej vety z pravouhlého $\triangle BXZ$ vzťahy $XY = YB = YZ$, t.j. z rovnoramenného $\triangle XYZ$ dostaneme

$$\sphericalangle XZY = \sphericalangle AXB = 90° - \alpha .$$



Obr. 26.

Podmienka $\sphericalangle ZBY \geqq \sphericalangle XZY$ je teda ekvivalentná s nerovnosťou

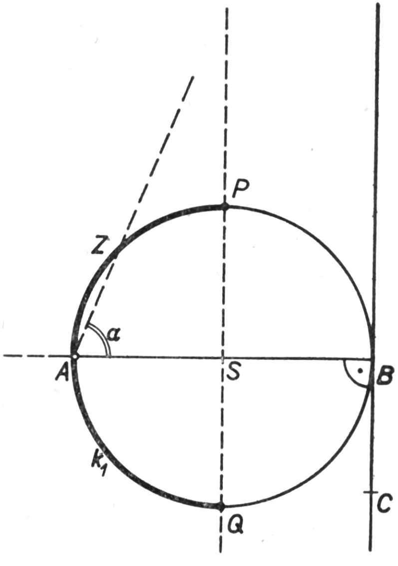
$$\alpha \geqq 90° - \alpha ,$$

čiže

$$\alpha \geqq 45° .$$

Stredom S kružnice k vedieme priemer $PQ \| BC$.

Pretože predchádzajúci postup možno obrátiť, je hľadaným geometrickým miestom bodov Z polkružnica k_1, ktorá obsahuje bod A. Bod A však do hľadaného geometrického miesta nepatrí (obr. 27).



Obr. 27.

3. Přirozená čísla 1, 2, 3, ..., 12 jsou rozdělena do čtyř skupin po třech číslech. Součet čísel každé této skupiny je nejvýše 20. Dokažte, že v žádném takovém rozkladu se nevyskytuje skupina $\{5, 6, 7\}$.

Řešení. Předpokládejme, že v některém rozkladu je skupina $\{5, 6, 7\}$. Skupina $\{5, 6, 7\}$ dává součet 18. Proto každá ze tří zbývajících skupin dává součet 20.

Tyto tři skupiny dávají totiž dohromady součet $78 - 18 = 60$.

Vyšetřme, v které skupině se vyskytuje číslo 12. Toto číslo se může vyskytovat jen ve skupinách

$$\{1, 7, 12\}, \quad \{2, 6, 12\}, \quad \{3, 5, 12\}.$$

Každá z těchto tří skupin však má společný prvek se skupinou $\{5, 6, 7\}$, což není možné.

4. Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ |x| + y &= a, \end{aligned} \tag{1}$$

kde a je parametr. Diskutujte řešení vzhledem k parametru a.

Řešení. Rozlišíme dva případy: a) $x \geqq 0$, b) $x \leqq 0$.

a) V případě a) má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ x + y &= a. \end{aligned} \tag{2}$$

Odečtením obou rovnic (2) dostaneme

$$(a - 1)x = 1 - a. \tag{3}$$

Je-li $a \neq 1$, plyne z rovnice (3) $x = -1$; to však nevede v případě a), kdy je $x \geqq 0$, k žádnému řešení soustavy (1). Je-li $a = 1$, obsahuje soustava (2) dvě totožné rovnice $x + y = 1$. Jejich řešení jsou všechny dvojice x, $1 - x$, kde $x \geqq 0$.

b) V případě b) má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ -x + y &= a. \end{aligned} \tag{4}$$

Odečtením obou rovnic (4) dostaneme

$$(a + 1)x = 1 - a. \tag{5}$$

Je-li $a \neq -1$, plyne z (5) $x = \dfrac{1 - a}{1 + a}$, a dále z druhé rovnice (4) $y = \dfrac{1 + a^2}{1 + a}$.

Dvojice čísel

$$x = \frac{1 - a}{1 + a}, \quad y = \frac{1 + a^2}{1 + a} \tag{6}$$

je řešením soustavy (1) právě tehdy, když je $x \leqq 0$, tj. buď $1 - a \geqq 0$, $1 + a < 0$, nebo $1 - a \leqq 0$, $1 + a > 0$. První případ nastane pro $a < -1$, druhý pro $a \geqq 1$. Pro $a = 1$ dávají vzorce (6) řešení 0; 1, které jsme už dostali mezi řešeními odstavce a).

Pro $a = -1$ se skládá soustava (4) z rovnic $-x + y = 1$, $-x + y = -1$, které si odporují; pro $a = -1$ je tedy soustava (1) neřešitelná.

Shrnutí je dáno tabulkou:

a	$a < -1$	$-1 \leqq a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
Řešení	jediné, dané vzorci (6)	žádné	nekonečně mnoho řešení $x, 1-x; x \geqq 0$	jediné, dané vzorci (6)

4. *KATEGORIE D*

1. Je dán čtverec *ABCD* o středu *S*. Tento čtverec otočíme kolem středu *S* o ostrý úhel velikosti φ do polohy $A'B'C'D'$ tak, že strany $B'C'$ a $C'D'$ protnou stranu *BC* v bodech *X* a *Y*.

Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle XSY$.

Řešení (obr. 28). Z textu úlohy plyne

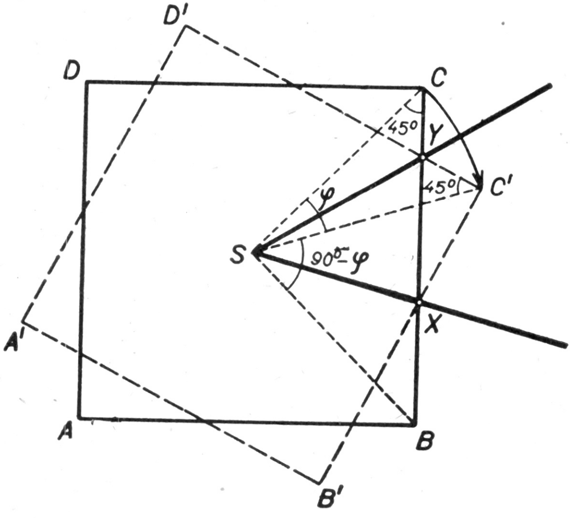
$$\sphericalangle C'SC = \varphi\,. \tag{1}$$

Dále platí

$$\sphericalangle C'SB = \sphericalangle CSB - \sphericalangle C'SC = 90° - \varphi\,. \tag{2}$$

Trojúhelník SCC' je rovnoramenný, neboť $SC = SC'$. Ze souměrnosti tohoto trojúhelníka podle osy úsečky CC' a ze vztahu

$$\sphericalangle SC'Y = \sphericalangle SCY = 45°$$



Obr. 28.

plyne, že bod Y leží na ose souměrnosti $\triangle SCC'$. Je tedy podle (1)

$$\sphericalangle YSC = \frac{\varphi}{2}\,. \tag{3}$$

Ze souměrnosti plyne dále

$$\sphericalangle YSC' = \frac{1}{2}\varphi .$$

Polopřímka SY je tedy osou úhlu CSC'. Obdobně dokážeme, že polopřímka SX je osou úhlu $C'SB$.

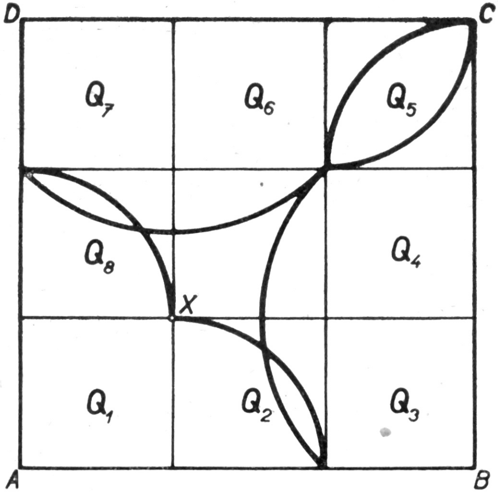
Velikost úhlu $C'SB$ je podle (2) $90° - \varphi$, takže

$$\sphericalangle XSC' = \frac{1}{2}(90° - \varphi) .$$

Pro velikost hledaného úhlu tedy platí

$$\sphericalangle XSY = \sphericalangle XSC' + \sphericalangle C'SY = 45° - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\varphi = 45°.$$

2. Na obrázku (obr. 29) je štvorec $ABCD$ so stranou



Obr. 29.

dĺžky 9 cm a 8 zhodných štvorcov $Q_1, Q_2, \ldots, Q_8$. Štvorec Q_1 prevedieme na štvorec Q_2, Q_2 na Q_3, atď. až Q_8 na Q_1 a to vždy otočením okolo toho spoločného vrcholu oboch štvorcov, ktorý leží na obvode štvorca *ABCD*. Spôsob otáčania je naznačený vo štvorci *ABCD* na obr. 29.

a) Zostrojte čiaru, ktorú pri všetkých týchto otočeniach prebehne vrchol *X*.

b) Vypočítajte jej dĺžku a porovnajte ju s dĺžkou kružnice opísanej a s dĺžkou kružnice vpísanej štvorcu *ABCD*.

Riešenie. a) Čiara je na obr. 29 vyznačená hrubo. Skladá sa zo štyroch štvrťkružníc s polomerom 3 a z dvoch štvrťkružníc s polomerom $3\sqrt{2}$.

b) Dĺžka čiary je (v cm) $d = 4 \cdot \dfrac{6\pi}{4} + 2 \cdot \dfrac{6\pi\sqrt{2}}{4}$,

čiže

$$d = 6\pi + 3\pi\sqrt{2} = 3\pi(2 + \sqrt{2}) \doteq 10{,}24\pi . \qquad (1)$$

Dĺžka d_1 kružnice opísanej štvorcu *ABCD* je

$$d_1 = \pi\, 9\sqrt{2} \doteq 12{,}7\,\pi , \qquad (2)$$

dĺžka d_2 kružnice vpísanej štvorcu *ABCD* je

$$d_2 = 9\pi . \qquad (3)$$

Podľa vzťahov (1), (2), (3) je teda

$$d_2 < d < d_1 .$$

3. Je daná tabuľka prirodzených čísel, ktorá pripomína tabuľku na tikete Športky:

1	$\boxed{2}$	3	4	5	6	7
8	9	10	$\boxed{11}$	12	13	14
$\boxed{15}$	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	$\boxed{27}$	28
29	30	31	32	33	34	$\boxed{35}$
36	37	38	39	$\boxed{40}$	41	42
43	44	$\boxed{45}$	46	47	48	49

Ak vyberieme z tabuľky sedem čísel tak, aby sme z každého riadku i z každého stĺpca vybrali jediné číslo, potom je súčet vybraných čísel vždy ten istý. Dokážte. (Jeden možný výber je vyznačený na tabuľke.)

Riešenie. Postup vyberania čísel si môžeme predstaviť takto: Na každé pole prvého riadku položíme jednu mincu. Potom jednu mincu necháme v prvom riadku a ostatné posunieme v smere stĺpcov tak, aby v každom riadku ležala práve jedna z nich. Čísla, ktoré sú zakryté mincami, spĺňajú potom požiadavky výberu.

Keď mince ležali v prvom riadku, bol súčet čísel, ktoré zakrývali

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28\,.$$

Tým, že sme jednu z mincí posunuli do druhého riadku, sa súčet čísel zakrytých mincami zväčší o 7. Podobne posunutím mince do 3. riadku sa súčet zväčší o 2 . 7; . . .; posunutím do 7. riadku o 6 . 7. Súčet čísel zakrytých mincami sa teda zväčšil celkom o

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \,.\, 7 = 21 \,.\, 7 = 147.$$

Súčet čísel vybraných tak, ako žiada úloha, je tedy vždy

$$28 + 147 = 175\,.$$

4. Součin dvou kvadratických trojčlenů $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ je dvojčlen $x^4 + 4$. Určete koeficienty trojčlenů.

Řešení. Platí

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + \\ + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd\,. \tag{1}$$

Porovnáním (1) s dvojčlenem $x^4 + 4$ dostaneme

$$\begin{aligned} a + c &= 0\,, \\ b + d + ac &= 0\,, \\ ad + bc &= 0\,, \\ bd &= 4\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Z první rovnice (2) vyjde

$$c = -a\,; \tag{3}$$

po dosazení do třetí rovnice (2) dostaneme

$$a(d - b) = 0\,. \tag{4}$$

Připustíme, že je $a = 0$; pak z (3) plyne $c = 0$ a z druhé rovnice (2) $d = -b$. Ze čtvrté rovnice (2) pak dostaneme $-b^2 = 4$, což je nemožné. Je tedy $a \neq 0$ a z (4) plyne

$$d = b\,. \tag{5}$$

Dosadíme-li z (3) a (5) do druhé rovnice (2), vyjde

$$2b - a^2 = 0\,. \tag{6}$$

Vztahy (3), (5), (6) nám dovolují vyjádřit všechny koeficienty pomocí a; je

$$b = \frac{1}{2}a^2, \quad c = -a, \quad d = \frac{1}{2}a^2\,. \tag{7}$$

Z čtvrté rovnice (2) dostaneme vzhledem k (7)

$$\frac{1}{4}a^4 = 4\,,$$

tj. $a^4 = 16$, $a^2 = 4$ (nikoli -4), $a = \pm 2$. Máme tedy dvě řešení:

a	b	c	d
2	2	-2	2
-2	2	2	2

Zkouška.

$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4\,.$

$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = x^4 + 4\,.$

Nepřihlížíme-li k pořadí trojčlenů, je řešení jediné.