II. Přípravné úlohy I. kola

1. *KATEGORIE A*

1. Jsou-li d_1, d_2, d_3 kladná čísla taková, že $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$, pak pro libovolná nezáporná čísla c_1, c_2, c_3 platí

$$(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leqq$$

$$\leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2 \frac{(d_1 + d_3)^2}{4d_1d_3}.$$

Dokažte.

(Návod. Dokažte nejprve, že

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leqq 1.)$$

Řešení. Dokažme nejprve, že platí

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leqq 1. \qquad (1)$$

Protože $(d_3 - d_2)(d_2 - d_1) \geqq 0$, je také

$$d_2(d_1 + d_3) \geqq d_2^2 + d_1d_3.$$

Odtud

$$\frac{d_2^2}{d_2(d_1 + d_3)} + \frac{d_1d_3}{d_2(d_1 + d_3)} \leqq 1$$

neboli

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leqq 1 .$$

Protože také $d_1 \leqq d_1 \leqq d_3$ a $d_1 \leqq d_3 \leqq d_3$, platí i

$$\frac{d_1}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_1}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leqq 1 \tag{2}$$

a

$$\frac{d_3}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_3}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leqq 1 . \tag{3}$$

Nechť nyní c_1, c_2, c_3 jsou nezáporná čísla. Násobením nerovnosti (1) číslem c_1, nerovnosti (2) číslem c_2 a nerovnosti (3) číslem c_3 a sečtením dostaneme

$$\frac{1}{d_1 + d_3}(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3) + \frac{1}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}}\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leqq$$

$$\leqq c_1 + c_2 + c_3 .$$

Protože aritmetický průměr nezáporných čísel

$$\frac{2}{d_1 + d_3}(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3), \frac{2}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}}\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right)$$

je nejvýše roven $c_1 + c_2 + c_3$, je také jejich geometrický průměr nejvýše roven $c_1 + c_2 + c_3$:

$$\sqrt{\frac{4}{(d_1+d_3)\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}\right)}(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right)} \leqq$$

$$\leqq c_1 + c_2 + c_3\,.$$

Umocněním a úpravou dostaneme odtud dokázanou nerovnost.

Jiné řešení. Daná nerovnost platí právě tehdy, když platí

$$\frac{4d_1d_3}{(d_1+d_3)^2}(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right) \leqq$$

$$\leqq (c_1+c_2+c_3)^2. \tag{1}$$

Výraz na levé straně nerovnosti (1) je součin dvou činitelů

$$x = \frac{2}{d_1+d_3}(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3),$$

$$y = \frac{2d_1d_3}{d_1+d_3}\cdot\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right).$$

Tento rozklad jsme provedli proto, že aritmetický průměr čísel x, y je velmi jednoduchý, jak snadno zjistíme výpočtem:

$$\frac{1}{2}(x+y) =$$

$$= \frac{1}{d_1+d_3}\left[c_1(d_1+d_3) + c_3(d_1+d_3) + \frac{c_2}{d_2}(d_1d_3+d_2^2)\right],$$

tj.

$$\frac{1}{2} x + y) = c_1 + c_3 + c_2\frac{d_1d_3+d_2^2}{(d_1+d_3)d_2}\,. \tag{2}$$

Snadno dokážeme, že koeficient při c_2 v (2) je menší nebo roven jedné. Skutečně, kdyby bylo

$$\frac{d_1d_3 + d_2^2}{(d_1 + d_3)d_2} > 1,$$

platilo by

$$d_1d_3 + d_2^2 > d_1d_2 + d_2d_3\,,$$

neboli

$$d_1(d_3 - d_2) + d_2(d_2 - d_3) > 0\,,$$

neboli

$$(d_3 - d_2)(d_1 - d_2) > 0,$$

což je ve sporu s předpoklady $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$. Protože koeficient při c_2 ve vztahu (2) je menší nebo rovný jedné, je

$$\frac{1}{2}(x + y) \leqq c_1 + c_2 + c_3\,. \tag{3}$$

Je známo, že geometrický průměr dvou nezáporných čísel je menší nebo roven jejich aritmetickému průměru; platí tedy

$$\sqrt{xy} \leqq \frac{1}{2}(x + y)\,. \tag{4}$$

Z (3) a (4) dostaneme po umocnění

$$xy \leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2\,,$$

a to je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

2. Rovnica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

s reálnymi koeficientami a, b, c má jeden reálny koreň a dva rýdzo imaginárne korene práve vtedy, ak platí

$$c = ab,\; b > 0. \tag{2}$$

Dokážte.

Riešenie. I. Nech rovnica (1) má reálny koreň α a dva rýdzo imaginárne korene. Rýdzo imaginárne korene sú potom navzájom opačné čísla $\pm\, \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$ je reálne číslo. Z rovnice (1) vyplýva

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha + c &= -\alpha^3, \\ -a\beta^2 + b\mathrm{i}\beta + c &= \mathrm{i}\beta^3, \\ -a\beta^2 - b\mathrm{i}\beta + c &= -\mathrm{i}\beta^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Sčítaním druhej a tretej rovnice vo vzťahu (3) dostaneme

$$c = a\beta^2 . \tag{4}$$

Odčítaním druhej a tretej rovnice vyjde

$$b = \beta^2 . \tag{5}$$

Po dosadení z (5) do (4) dostaneme rovnosť zo vzťahov (2). Keďže $\beta \neq 0$ je reálne, je $b = \beta^2 > 0$, čo je nerovnosť zo vzťahov (2).

Poznámka. Vzťahy (2) možno odvodiť tiež zo známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami rovnice (1):

$$\begin{aligned} a &= -(\alpha + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\beta) = -\alpha , \\ b &= (\mathrm{i}\beta)(-\mathrm{i}\beta) + \alpha\mathrm{i}\beta - \alpha\mathrm{i}\beta = \beta^2 > 0 , \\ c &= -\alpha \,.\, \mathrm{i}\beta \,.\, (-\mathrm{i}\beta) = -\alpha\beta^2 = ab . \end{aligned}$$

II. Nech platia vzťahy (2). Potom možno rovnicu (1) napísať v tvare

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0 ,$$

čiže

$$x(x^2 + b) + a(x^2 + b) = 0 ,$$

alebo

$$(x + a)(x^2 + b) = 0 . \tag{6}$$

Pretože je $b > 0$, má rovnica $x^2 + b = 0$ dva rýdzo imaginárne korene $\pm\, \mathrm{i}\sqrt{b}$. Okrem nich má rovnica (6) ešte reálny koreň $-a$.

3. V triede je 15 dvojsedadlových lavíc a 27 žiakov. Určití dvaja žiaci majú sedieť (z výchovných dôvodov) vedľa seba v tej istej lavici a žiadna lavica nemá zostať prázdna. Koľkými spôsobmi možno žiakov rozsadiť?

Riešenie. Najskôr vyberieme miesta pre rozsadenie žiakov. Obaja vybraní žiaci budú sedieť v jednej z 15 lavíc. To je 15 možností. Zo zostávajúcich 14 lavíc budú tri obsadené len jedným žiakom. V každej z týchto troch lavíc bude buď pravé alebo ľavé miesto prázdne. Pre usadenie zostávajúcich (nevybraných) 25 žiakov je teda

$$\binom{14}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \binom{14}{3} \cdot 2^3 \qquad (1)$$

možností. Celkom je teda podľa (1)

$$15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 2^3 = n \qquad (2)$$

spôsobov, ako možno vybrať miesta pre rozsadenie.

Pri každej z týchto n situácií možno vybraných žiakov usadiť dvoma spôsobmi a okrem toho ostatných nevybraných 25 žiakov 25! spôsobmi. Pri každej z n situácií je teda

$$2 \cdot 25! \qquad (3)$$

rozsadení. Podľa (2) a (3) je počet všetkých možných rozsadení

$$15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 25!\,,$$

t. j.

$$16 \cdot 15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 25!$$

4. Je dáno n bodů ($n \geqq 3$), z nichž žádné tři neleží v přímce, a množina $\boldsymbol{U}$ skládající se z n úseček, které spojují vždy dva z daných bodů.

Pak lze z daných n bodů vybrat k bodů $A_1, \ldots, A_k (k \geqq 3)$ tak, že všechny úsečky $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$ náležejí množině $\mathbf{U}$.

Řešení. Pro $n = 3$ je věta zřejmá; pro libovolné n ji dokážeme matematickou indukcí. Budeme předpokládat, že věta platí pro všecka $k \leqq n$ a dokážeme ji pro $n + 1$. Při indukčním kroku rozlišíme tyto dva případy:

a) Mezi danými $n + 1$ body lze nalézt skupinu k-bodů ($k \leqq n$), které jsou spojeny k úsečkami z množiny $\mathbf{U}$;

b) žádná taková skupina k bodů ($k \leqq n$) neexistuje.
V případě a) platí věta pro daných $n + 1$ bodů podle indukčního předpokladu.
V případě b) vycházejí z každého z daných $n + 1$ bodů aspoň dvě úsečky množiny $\mathbf{U}$, neboť každých n bodů je spojeno *nejvýše* $n - 1$ úsečkami z $\mathbf{U}$; proto ze zbývajícího $(n + 1)$-ho bodu vycházejí aspoň dvě úsečky množiny $\mathbf{U}$.
Budiž A_1A_2 úsečka množiny $\mathbf{U}$. Z bodu A_2 vychází mimo úsečku A_2A_1 ještě úsečka A_2A_3 množiny $\mathbf{U}$.
Z bodu A_3 vychází mimo úsečku A_3A_2 ještě úsečka A_3A_4 množiny $\mathbf{U}$, atd. Tak zkonstruujeme posloupnost úseček množiny $\mathbf{U}$

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \ldots,\ A_nA_{n+1}\,. \tag{1}$$

Žádný z bodů

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \ldots,\ A_{n+1}$$

nemůže splynout se žádným z předcházejících bodů, neboť pak by pro některé $k \leqq n$ nastal případ a) a nikoli b). Posloupnost (1) obsahuje tedy n různých úseček množiny $\mathbf{U}$ a body $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ jsou navzájem různé. Druhá úsečka vycházející z bodu A_{n+1} musí být tedy $A_{n+1}A_1$, a tím je dokázáno, že věta platí i v případě b) pro $n + 1$.

1. Funkce proměnné x

$$y = a|x| + b|x - k| \tag{1}$$

nabývá hodnoty 0 pro $x = -1$ a $x = 3$; největší hodnota, které nabývá, je $y = 2$. Určete konstanty a, b, k a nakreslete graf funkce (1).

Řešení. Pro $x = -1$ dostaneme z (1)

$$a + b|1 + k| = 0; \tag{2}$$

pro $x = 3$ dostaneme z (1)

$$3a + b|3 - k| = 0\,. \tag{3}$$

Z (2), (3) vyloučíme a; vyjde

$$b(|3 - k| - 3|1 + k|) = 0\,. \tag{4}$$

Je $b \neq 0$; jinak by totiž vyšlo z (2) také $a = 0$ a funkce (1) by nenabývala hodnoty $y = 2$. Z (4) pak dostaneme $|3 - k| = 3|1 + k|$, neboli

$$3 - k = \pm\, 3(1 + k)\,. \tag{5}$$

Řešením (5) vyjde buď $k = 0$, nebo $k = -3$. Je tedy třeba vyšetřovat dvě funkce

$$y = (a + b)\,|x| \tag{1'}$$

a

$$y = a\,|x| + b\,|x + 3|\,. \tag{1''}$$

V případě $k = 0$ dostaneme z (2) $b = -a$, funkce (1′) je pak $y = 0$, a nenabývá tedy hodnoty $y = 2$. V případě $k = -3$ dostaneme z (2) $a = -2b$; funkce (1″) má pak rovnici

$$y = -2b|x| + b|x+3|\,. \tag{6}$$

Zkoumejme průběh funkce (6). Budeme vyšetřovat tři intervaly:

I. $x \leqq -3$, II. $-3 \leqq x \leqq 0$, III. $x \geqq 0$.

V intervalu I. můžeme rovnici (6) přepsat ve tvaru

$$y = bx - 3b \tag{6a}$$

a v intervalu II. ji můžeme přepsat ve tvaru

$$y = 3bx + 3b\,. \tag{6b}$$

Konečně v intervalu III. ji můžeme přepsat ve tvaru

$$y = -bx + 3b\,. \tag{6c}$$

Kdyby bylo $b < 0$, nabývala by funce (6c) pro dosti velká kladná x hodnot větších než 2; kdyby bylo $b = 0$, bylo by $y = 0$ pro všechna x. Je tedy $b > 0$. Funkce (6a) je rostoucí a v bodě $x = -3$ dosahuje nejvyšší hodnoty $y = -6b$. Rovnost $y = 2$ není splněna pro žádné $b > 0$. Funkce (6b) je rovněž rostoucí a v bodě $x = 0$ nabývá nejvyšší hodnoty $y = 3b$. Funkce (6c) je klesající a její nejvyšší hodnota $y = 3b$ je rovněž v bodě $x = 0$. Musí být tedy $3b = 2$, tj. $b = \frac{2}{3}$ a z (2) pro $k = -3$ dostaneme $a = -\frac{4}{3}$. Hledaná funkce tedy je

$$y = -\frac{4}{3}|x| + \frac{2}{3}|x + 3|\,. \tag{7}$$

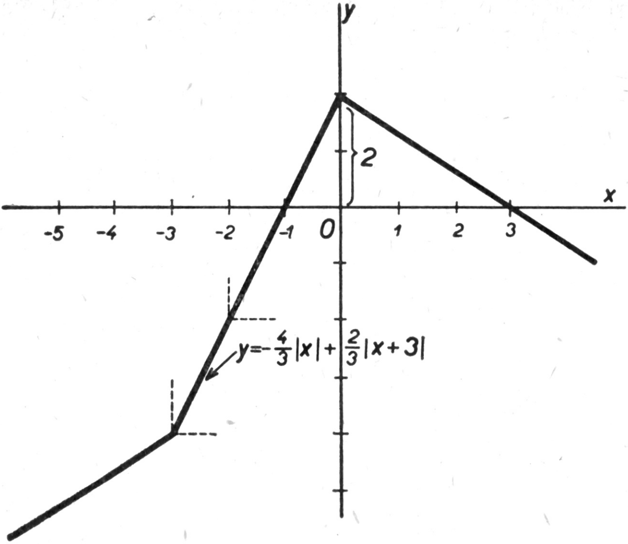
Graf funkce (7) je na obr. 1.

2. Určite všetky prirodzené čísla x, ktoré vyhovujú rovnici

$$4^{x-1} + 7 \,.\, 2^x + 48 = x(x-1) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1\,. \tag{1}$$

Riešenie. Číslo $x = 1$ zrejme nevyhovuje. Ak je $x \geqq 2$, je ľavá strana (1) násobkom štyroch a teda aj súčin $x(x-1) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$ je násobkom štyroch. Preto musí byť $x \geqq 4$.

Ak je $x \geqq 4$, je ľavá strana (1) násobkom šestnástich a preto aj číslo $x(x-1) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$ je násobkom šest-



Obr. 1.

nástich, čo však znamená, že

$$x \geqq 6\,. \tag{2}$$

Upravme (1) pre $x \geqq 6$. Dostaneme

$$16\,.\,4^{x-3} + 7\,.\,16\,.\,2^{x-4} + 3\,.\,16 = x\,.\,(x-1)\;\ldots$$
$$\ldots\,8.7.6.5.4.3.2.1\,. \tag{3}$$

Obe strany rovnice (3) vydelíme číslom 16:

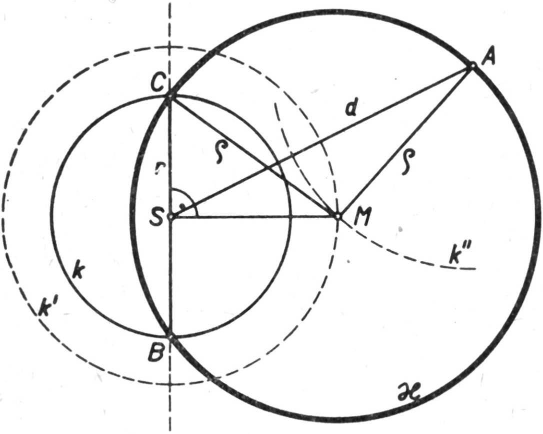
$$4^{x-3} + 7\,.\,2^{x-4} + 3 = x(x-1)\ldots 8\,.\,7\,.\,45. \tag{4}$$

Ak je $x > 7$, je pravá strana rovnice (4) násobkom ôsmich, teda párne číslo. Ľavá strana tejto rovnice je však naproti tomu číslo nepárne. Preto je

$$x \leqq 7\,. \tag{5}$$

Spojením vzťahov (2) a (5) dostaneme, že len čísla $x = 6$ a $x = 7$ môžu byť riešením rovnice (1).

Skúškou zistíme, že $x = 7$ rovnici vyhovuje, ale $x=6$ nevyhovuje.



Obr. 2.

3. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$, bod A, pre ktorý platí $AS = d > r$ a kladné číslo $\varrho > r$. Zostrojte kružnicu s polomerom ϱ, ktorá prechádza bodom A a delí kružnicu k na dve polkružnice. Určite podmienku riešiteľnosti.

Riešenie. Rozbor (obr. 2). Označme $\varkappa$ hľadanú kružnicu, M jej stred. Spoločná tetiva BC kružníc k, $\varkappa$ je priemerom kružnice k, preto vznikne pravouhlý trojuholník CSM, ktorého odvesna CS má dĺžku r, prepona $CM = \varrho$. Z tohto trojuholníka možno určiť dĺžku druhej odvesny

$$SM = \sqrt{\varrho^2 - r^2}\,. \tag{1}$$

Stred M hľadanej kružnice $\varkappa$ leží jednak na kružnici $k' \equiv (S;\ \sqrt{\varrho^2 - r^2})$, jednak na kružnici $k'' \equiv (A;\ \varrho)$.

Skúška. Obrátene, ak je M spoločný bod kružníc k', k'' a $\varkappa$ kružnica $(M; MA)$, potom $\varkappa$ splňuje prvé dve podmienky úlohy. Z (1) ďalej vyplýva, že

$$\varrho - r < SM < \varrho + r\,, \tag{2}$$

čiže

$$(\sqrt{\varrho - r})^2 < \sqrt{\varrho - r}\,.\,\sqrt{\varrho + r} < (\sqrt{\varrho + r})^2\,.$$

Kružnica $\varkappa$ pretne teda podľa (2) kružnicu k v dvoch rôznych bodoch B, C. Keďže z (1) vyplýva $\varrho^2 = r^2 + SM^2$, sú oba trojuholníky SMC, SMB pravouhlé, BC je priemer kružnice k, tj. $\varkappa$ delí k na dve polkružnice.

Diskusia. Úloha má aspoň jedno riešenie práve vtedy, keď kružnice k', k'' majú aspoň jeden spoločný bod, tj. keď platí

$$|SM - \varrho| \leqq d \leqq SM + \varrho,$$

čiže podľa (1)

$$\varrho - \sqrt{\varrho^2 - r^2} \leqq d \leqq \varrho + \sqrt{\varrho^2 - r^2}\,. \tag{3}$$

Úpravou nerovností (3) dostaneme

$$\sqrt{\varrho^2 - r^2} \geqq d - \varrho\,, \qquad \sqrt{\varrho^2 - r^2} \geqq \varrho - d\,,$$

t. j.

$$\sqrt{\varrho^2 - r^2} \geqq |d - \varrho|\,. \tag{4}$$

Nerovnosť (4) je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením, tj. s nerovnosťou

$$\varrho^2 - r^2 \geqq d^2 + \varrho^2 - 2d\varrho\,,$$

čiže

$$2d\varrho \geqq d^2 + r^2\,. \tag{5}$$

Nerovnosť (5) je teda podmienkou riešiteľnosti úlohy.

4. Krychle o hraně délky 6 je rozdělena v $6^3 = 216$

jednotkových krychlí. Krychli je vepsána koule o průměru 6. Zjistěte, kolik jednotkových krychlí leží v kouli a kolik jich neobsahuje žádný vnitřní bod koule.

Řešení. Označíme S střed vepsané koule a A, B, C její dotykové body s třemi stěnami krychle, které mají společný vrchol. Poloměry SA, SB, SC jsou po dvou navzájem kolmé. Stačí řešit úlohu pro oktant $\mathcal{O} = S(ABC)$ a výsledky znásobit osmi; to vyplývá ze souměrnosti koule i krychle podle rovin SAB, SBC, SCA.

Označme po řadě x, y, z vzdálenosti toho vrcholu jednotkové krychle, který leží nejblíže bodu S, od rovin SBC, SCA, SAB. Další vrcholy této jednotkové krychle mají od rovin SBC, SCA, SAB vzdálenosti:

$$[x+1, y, z], [x, y+1, z], [x, y, z+1], [x+1, y+1, z], \tag{1}$$

$$[x+1, y, z+1], [x, y+1, z+1], [x+1, y+1, z+1].$$

Z toho plyne, že čísla x, y, z probíhají (navzájem nezávisle) čísla 0, 1, 2; tak dostaneme 27 jednotkových krychlí, které náležejí oktantu $\mathcal{O}$.

Jednotková krychle náleží vepsané kouli právě tehdy, náleží-li jí vrchol nejvzdálenější od bodu S; to je podle (1) vrchol $[x+1, y+1, z+1]$. Jednotková krychle náleží tedy kouli, platí-li

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \leq 9\,. \tag{2}$$

Nerovnost (2) má tato řešení:

$x+1$	1	2	1	1	1	2	2
$y+1$	1	1	2	1	2	1	2
$z+1$	1	1	1	2	2	2	1

To je 7 jednotkových krychlí v oktantu $\mathcal{O}$; celkem 56 jednotkových krychlí, které leží v kouli.

Jednotková krychle nemá s koulí žádný společný vnitřní bod, jestliže nejbližší vrchol k bodu S leží buď na kouli, nebo vně koule, tj. když pro bod $[x, y, z]$ platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 9\,. \tag{3}$$

Nerovnost (3) má tato řešení

x	1	2	2	2
y	2	1	2	2
z	2	2	1	2

To jsou 4 jednotkové krychle v oktantu $\mathcal{O}$; celkem 32 jednotkových krychlí, které neobsahují žádný vnitřní bod koule.

Zbývajících $216 - (56 + 32) = 128$ jednotkových krychlí obsahuje jak vnitřní, tak vnější body koule.

3. *KATEGÓRIA C*

1. Určite všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x(x + y) + z(x - y) &= 6, \\ y(y + z) + x(y - z) &= -2, \\ z(z + x) + y(z - x) &= 3. \end{aligned} \tag{1}$$

Riešenie. Pokúsime sa vylúčiť z. Pri roznásobení si všimnime, že z sa dá z 1. a 2. rovnice vylúčiť tým, že sa sčítajú.

Sčítaním prvej a druhej rovnice sústavy (1) dostaneme

$$x^2 + xy + xz - yz + y^2 + yz + xy - xz = 4$$

čiže

$$(x + y)^2 = 4\,. \tag{2}$$

Podobne dostaneme sčítaním druhej a tretej rovnice sústavy (1)

$$(y + z)^2 = 1 \tag{3}$$

a sčítaním tretej a prvej rovnice sústavy (1)

$$(z + x)^2 = 9 . \tag{4}$$

Z (2), (3), (4) vyplýva

$$\begin{aligned} x + y &= \pm 2 , \\ y + z &= \pm 1 , \\ z + x &= \pm 3 . \end{aligned} \tag{5}$$

Odčítaním druhej rovnice sústavy (5) od tretej rovnice tejto sústavy dostaneme pre $x - y$ štyri možné hodnoty: 2, -2, 4, -4. Ďalší výpočet prevedieme pomocou tabuľky

$x + y$	2	2	2	2	-2	-2	-2	-2
$x - y$	2	-2	4	-4	2	-2	4	-4
x	2	0	3	-1	0	-2	1	-3
y	0	2	-1	3	-2	0	-3	1
z	1	-3	0	-2	3	-1	2	0

Posledný riadok tabuľky bol určený tak, aby bola splnená druhá a tretia rovnica sústavy (5).

Sústava má teda 8 riešení, ako sa presvedčíme skúškou.

2. Nechť prvočísla p_1, p_2 jsou různá od čísel 3 a 5. Pak číslo $p_1^4 - p_2^4$ je násobkem patnácti. Dokažte.

Řešení. Celé číslo je násobkem patnácti právě tehdy, když je součinem dvou celých čísel, z nichž jedno je násobkem tří, druhé násobkem pěti nebo jedno je násobkem tří i pěti. V našem případě je

$$p_1^4 - p_2^4 = (p_1^2 + p_2^2)(p_1^2 - p_2^2) .$$

Provedeme-li několik numerických výpočtů, zjistíme, že $p_1^2 - p_2^2$ je vždy násobkem tří, a aspoň jedno z čísel $p_1^2 + p_2^2$, $p_1^2 - p_2^2$ je násobek pěti. Pokusíme se zjistit, zda tomu je tak v každém případě. Čísla p_1, p_2 dávají při dělení třemi zbytky buď 1, nebo 2. Proto každé z čísel p_1^2, p_2^2 dává při dělení třemi zbytek jedině číslo 1. Proto je $p_1^2 - p_2^2$ vždy dělitelné třemi.

Čísla p_1, p_2 dávají při dělení pěti zbytky buď 1, nebo 2, nebo 3, nebo 4. Proto každé z čísel p_1^2, p_2^2 dává při dělení pěti zbytek buď 1, nebo 4. Je-li totiž např. $p_1 = 5\alpha + 2$, je $p_1^2 = 25\,\alpha^2 + 20\,\alpha + 4 = 5\beta + 4$. Jsou-li oba zbytky při dělení p_1^2, p_2^2 pěti sobě rovny, je $p_1^2 - p_2^2$ násobkem pěti, jsou-li tyto zbytky různé (1 a 4), je $p_1^2 + p_2^2$ násobkem pěti.

Dokázali jsme: Číslo $p_1^2 - p_2^2$ je vždy dělitelné třemi; aspoň jedno z čísel $p_1^2 - p_2^2$, $p_1^2 + p_2^2$ je dělitelné pěti.

Protože čísla 3, 5 jsou nesoudělná, je

$$p_1^4 - p_2^4 = (p_1^2 + p_2^2)(p_1^2 - p_2^2)$$

dělitelné patnácti.

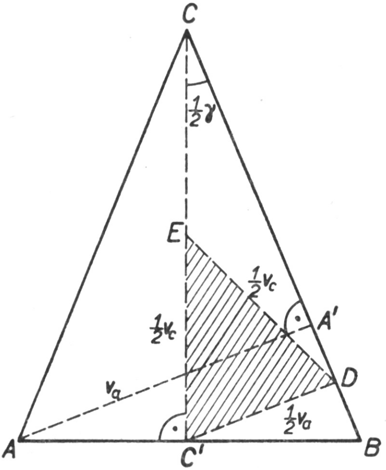
3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, je-li dán součet s výšek na základnu a na rameno a dutý úhel γ proti základně.

Řešení. Rozbor (obr. 3). Označme A', C' paty výšek spuštěných z vrcholů A, C. Bod C' je středem základny AB; patu kolmice spuštěné z bodu C' na přímku BC označme D. Potom úsečka $C'D$ je střední příčkou v trojúhelníku $AA'B$, a tedy platí

$$C'D = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} v_a\,. \tag{1}$$

Označme dále E střed výšky $CC' = v_c$. Bod E je středem přepony pravoúhlého trojúhelníku $CC'D$, takže je

$$EC' = EC = ED = \frac{1}{2} v_c . \tag{2}$$



Obr. 3.

Spojením (1) a (2) dostaneme

$$ED + C'D = \frac{1}{2} v_c + \frac{1}{2} v_a = \frac{1}{2} s . \tag{3}$$

Protože trojúhelník DCE je rovnoramenný se základnou DC, platí pro jeho vnější úhel

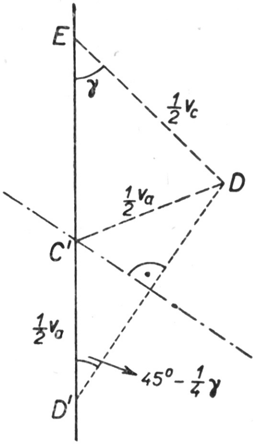
$$\sphericalangle C'ED = \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \gamma = \gamma . \tag{4}$$

Rovnoramenný trojúhelník $C'DE$ je tedy dán součtem základny a jednoho ramena [viz (3)] a úhlem proti základně [viz (4)]. Konstrukci tohoto pomocného trojúhelníku ukazuje obr. 4; je totiž

$$\sphericalangle EC'D = \sphericalangle EDC' = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma,$$

takže

$$\sphericalangle ED'D = \frac{1}{4}(180^\circ - \gamma) = 45^\circ - \frac{1}{4}\gamma.$$



Obr. 4.

Konstrukce. Nejprve sestrojíme trojúhelník $ED'D$, v němž $\sphericalangle D'ED = \gamma$, $\sphericalangle ED'D = 45^\circ - \frac{1}{4}\gamma$, $ED' = \frac{1}{2}(v_a + v_c) = \frac{1}{2}s$.

Osa o strany DD' protne stranu ED' v bodě C'. Snadno doplníme bod C, přímku CD a body B, A tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný se základnou AB.

Zkouška. Sestrojený trojúhelník ABC má $\sphericalangle ACB = \gamma$, neboť podle konstrukce vzhledem ke (4) je $\sphericalangle ECD = \frac{1}{2}\gamma$. Podle konstrukce je též rovnoramenný, platí pro něj (3), a tedy $v_a + v_c = s$.

Diskuse. Trojúhelník $ED'D$ lze sestrojit, neboť $\gamma + 45° - \frac{1}{4}\gamma = 45° + \frac{3}{4}\gamma < 45° + \frac{3}{4}\cdot 180° = 180°$.

Osa o protne stranu ED' vždy ve vnitřním bodě C', neboť platí

$$\gamma + 2\left(45° - \frac{1}{4}\gamma\right) = 90° + \frac{1}{2}\gamma < 180°\,.^{*)}$$

Sestrojení bodů C, B, A je vždy proveditelné, a proto má úloha vždy řešení.

4. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$, bod A z vnútra kruhu ohraničeného kružnicou k a kladné číslo d. Bodom A je vedená tetiva kružnice tak, že tento bod ju rozdeľuje na dve úsečky, ktorých dĺžky majú rozdiel d.

a) Vyjadrite dĺžku t tejto tetivy a jej vzdialenosť od stredu S pomocou parametrov r, d, $v = SA$.

b) Zostrojte pomocou výsledku z úlohy a) všetky tetivy danej vlastnosti.

Riešenie. a) Označme $AP > AQ$ úsečky vytvorené na tetive podľa textu úlohy. Potom platí (pozri obr. 5)

$$AP + AQ = t,$$
$$AP - AQ = d;$$

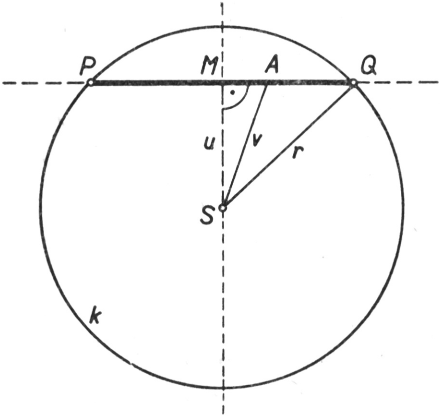
---

*) Používáme věty:

Osa strany BC trojúhelníku ABC protne stranu AB ve vnitřním bodě právě tehdy, platí-li pro úhly trojúhelníku ABC

$$\alpha + 2\beta < 180°\,.$$

z čoho vyplýva $2AP = t + d$ čiže $AP = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}d$.
Úsečka MA má preto veľkosť $\frac{1}{2}d$. Vzdialenosť tetivy



Obr. 5.

PQ od stredu S kružnice označme $u = SM$. Z pravouhlého trojuholníka ASM podľa Pythagorovej vety vyplýva

$$v^2 = u^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2. \tag{1}$$

Z pravouhlého trojuholníka QMS dostaneme

$$r^2 = u^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2. \tag{2}$$

Odčítaním rovnice (1) od rovnice (2) vyjde

$$r^2 - v^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{d^2}{4} \tag{3}$$

a po úprave

$$t = \sqrt{4r^2 + d^2 - 4v^2}\,. \tag{4}$$

Zo vzťahu (1) vypočítame

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{1}{4}\,d^2}\,. \tag{5}$$

Vzorce (4) a (5) sú riešením úlohy a).

b) Množina stredov všetkých tetív kružnice k, ktoré majú dĺžku t danú vzorcom (4), je kružnica $\varkappa \equiv (S; u)$, pričom u je dané vzorcom (5). Konštruktívne získame polomer u ako odvesnu pravouhlého trojuholníka s preponou v a druhou odvesnou $\frac{d}{2}$ (pozri $\triangle\, AMS$ na obr. 5).

Hľadané tetivy vytína kružnica k na dotyčniciach vedených z bodu A ku kružnici $\varkappa$. Bod A leží vždy mimo kružnice $\varkappa$.

Pretože podľa textu úlohy je $v < r$, je tiež $4r^2 - 4v^2 > > 0$ a vzorec (4) dá vždy kladné t. Toto číslo t je menšie, alebo rovná sa $2r$ práve vtedy, ak je vzhľadom na vzorec (4)

$$4r^2 + d^2 - 4v^2 = t^2 \leqq (2r)^2$$

čiže $d^2 - 4v^2 \leqq 0$, skadiaľ

$$d \leqq 2v\,. \tag{6}$$

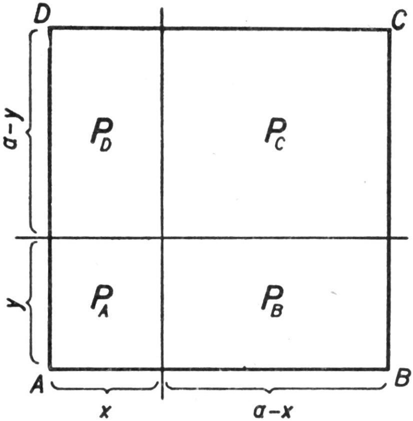
Ak je splnená nerovnosť (6), dá vzorec (5) reálne $u < < v < r$.

Nerovnosť (6) je teda podmienkou riešiteľnosti.

4. *KATEGORIE D*

1. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a. Čtverec $ABCD$ je rozdělen dvěma přímkami, z nichž jedna je rovnoběžná s AB a druhá s BC, ve čtyři obdélníky P_A, P_B, P_C, P_D; přitom $P_A(P_B, P_C, P_D)$ je obdélník, který obsahuje bod $A(B, C, D)$. Pro obsahy obdélníků platí $P_A : P_B : P_C = 2 : 3 : 4$.

Vyjádřete jejich rozměry pomocí a a vypočtěte $P_D : P_B$.



Obr. 6.

Řešení. a) Označíme-li x, y rozměry obdélníku P_A, pak platí pro obsahy (viz obr. 6)

$$P_A = xy, \quad P_B = (a - x)y, \quad P_C = (a - x)(a - y),$$
$$P_D = x(a - y). \tag{1}$$

Podle (1) a podle podmínky úlohy je

$$xy : (a - x)y = 2 : 3, \quad (a - x)y : (a - x)(a - y) = 3 : 4,$$

tj.

$$\frac{a - x}{x} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{a - y}{y} = \frac{4}{3}. \tag{2}$$

Z (2) plyne

$$x = \frac{2}{5}a,\ y = \frac{3}{7}a,\ a - x = \frac{3}{5}a,\ a - y = \frac{4}{7}a\,. \qquad (3)$$

Vzorce (3) jsou hledaná vyjádření rozměrů obdélníků pomocí čísla a.

b) Nyní vypočítáme poměr $P_D : P_B$; podle (1) je

$P_D : P_B = x(a - y) : (a - x)y\,.$

Po dosazení ze (3) dostaneme

$$P_D : P_B = \frac{2}{5}a \cdot \frac{4}{7}a : \frac{3}{5}a \,.\, \frac{3}{7}a$$

a po další úpravě hledaný poměr

$$P_D : P_B = 8 : 9\,.$$

2. Autobus prechádzal trať skladajúcu sa z troch rovnako dlhých úsekov. Prvý úsek prechádzal rýchlosťou v km/h; v druhom úseku šiel rýchlosťou o 10 km/h menšou, v treťom úseku šiel rýchlosťou o 5 km/h menšou než v druhom.

a) Vyjadrite priemernú rýchlosť autobusu na trati pomocou v.

b) Môže byť pre niektoré v priemerná rýchlosť $\frac{v}{2}$?

Riešenie. a) Rýchlosť autobusu vyjadrená v km/h na jednotlivých úsekoch bola: v, $v - 10$, $v - 15$. Označme s dĺžku jedného úseku trate v km a t dobu, ktorú autobus potreboval na prejdenie celej trate, v hodinách. Priemerná rýchlosť x (km/h) je taká rýchlosť, ktorou by musel ísť autobus vo všetkých troch úsekoch, aby prešiel trať $3s$ za čas t. Doby, ktoré autobus potreboval na prejdenie jednotlivých úsekov, sú po rade $\frac{s}{v}$, $\frac{s}{v-10}$, $\frac{s}{v-15}$. Pre celkovú dobu t platí teda

$$t = \frac{s}{v} + \frac{s}{v-10} + \frac{s}{v-15}. \tag{1}$$

Okrem toho však platí $3s = xt$, čiže

$$t = \frac{3s}{x}. \tag{2}$$

Spojením vzťahov (1) a (2) po úprave dostaneme rovnicu pre x:

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v-10} + \frac{1}{v-15}. \tag{3}$$

Stade

$$\frac{3}{x} = \frac{(v-10)(v-15) + v(v-15) + v(v-10)}{v(v-10)(v-15)}$$

a po úprave

$$x = \frac{3v(v^2 - 25v + 150)}{3v^2 - 50v + 150}. \tag{4}$$

Vzorec (4) dáva riešenie úlohy a).

b) Skúsime, či pre niektoré v môže byť $x = \frac{v}{2}$. Dosadíme $\frac{v}{2}$ za x vo vzťahu (4). Po odstránení zlomkov dostaneme

$$v(3v^2 - 50v + 150) = 6v(v^2 - 25v + 150). \tag{5}$$

Ak vydelíme obe strany rovnice (5) kladným číslom v, prevedieme všetky členy rovnice na pravú stranu a obe strany rovnice vymeníme, dostaneme

$$3v^2 - 100v + 750 = 0$$

čiže

$$v^2 - \frac{100}{3} v + 250 = 0 .$$

Ďalej platí

$$\left(v - \frac{50}{3}\right)^2 - \frac{2500}{9} + 250 = 0, \text{ čiže } \left(v - \frac{50}{3}\right)^2 = \frac{250}{9} .$$

Stade vyplýva

$$v - \frac{50}{3} \doteq \pm \frac{16}{3},$$

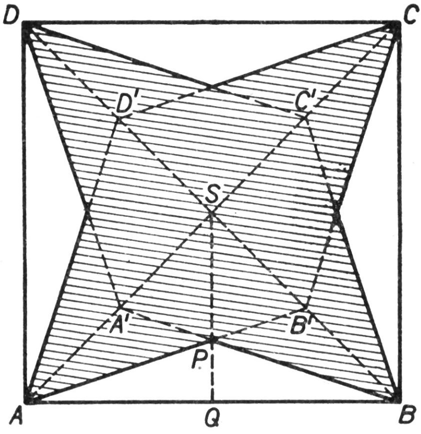
t. j. buď $v \doteq 22$, alebo $v \doteq 11\frac{1}{3}$. Vzhľadom na text úlohy vyhovuje len $v \doteq 22$ (km/h).

3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a; S je průsečík jeho úhlopříček, A', B', C', D' jsou po řadě středy úseček AS, BS, CS, DS.

Vypočtěte obsah části čtverce $ABCD$, která je pokryta trojúhelníky $A'C'B$, $A'C'D$, $B'D'A$, $B'D'C$, i obsah osmiúhelníku, který je společnou částí čtyřúhelníků $AB'CD'$ a $BC'DA'$.

Řešení. Označíme P průsečík úseček AB', $A'B$ (viz obr. 7); tyto úsečky jsou těžnicemi trojúhelníku ABS, proto je bod P jeho těžištěm. Označme Q střed úsečky AB. Úsečka SQ je potom třetí těžnice trojúhelníku ABS. Protože trojúhelník ABS je rovnoramenný, je úsečka SQ zároveň výškou trojúhelníku ABS a úsečka $PQ = \frac{1}{3} SQ$ je výškou trojúhelníku ABP. Obsah trojúhelníku ABP je tedy

$$\triangle\, ABP = \frac{1}{2}\, a \,.\, PQ = \frac{1}{2}\, a \cdot \frac{1}{6}\, a = \frac{1}{12}\, a^2 \,.$$



Obr. 7.

Obdobně je obsah každého z nevyšrafovaných trojúhelníků roven $\frac{1}{12}\, a^2$.

Obsah hvězdice je tedy

$$P_1 = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{12}\, a^2 = \frac{2}{3}\, a^2 \,. \tag{1}$$

Označme P_2 obsah každého z trojúhelníků $A'C'B$, $A'C'D$, $B'D'A$, $B'D'C$, P_3 obsah osmiúhelníku. Pak platí

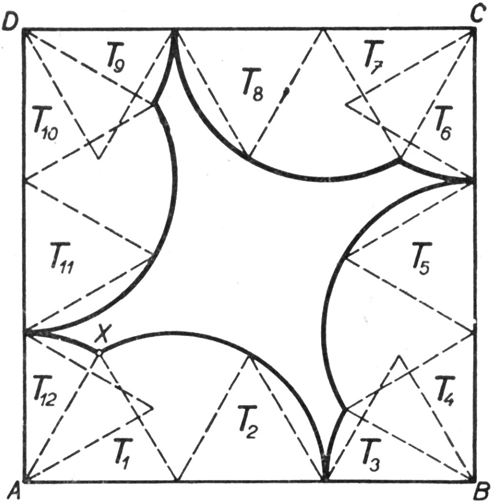
$$4P_2 - P_3 = P_1 \,. \tag{2}$$

Protože je

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}, \tag{3}$$

je podle (2), (3), (1)

$$P_3 = 4P_2 - P_1 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{2}{3}a^2 = \frac{1}{3}a^2 .$$



Obr. 8.

4. Na obr. 8 je čtverec $ABCD$ o straně délky 9 cm a dále 12 shodných rovnostranných trojúhelníků $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2, \ldots, \boldsymbol{T}_{12}$. Převedeme trojúhelník $\boldsymbol{T}_1$ v $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_2$ v $\boldsymbol{T}_3$, $\ldots$, $\boldsymbol{T}_{12}$ v $\boldsymbol{T}_1$ vždy otočením kolem společného vrcholu obou trojúhelníků, provedeným ve čtverci $ABCD$.

a) Sestrojte čáru, která je dráhou vrcholu X ve všech těchto otočeních.

b) Vypočtěte její délku a porovnejte ji s délkou kružnice opsané i kružnice vepsané čtverci $ABCD$.

Řešení. a) Čára je vyznačena v obrázku tlustě. Skládá se ze čtyř oblouků kružnice o poloměru $AX = 3$ cm příslušných k středovému úhlu $120°$ a ze čtyř oblouků kružnice téhož poloměru příslušných k středovému úhlu $30°$.

b) Délka čáry je (v cm)

$$d = 4 \cdot \frac{6\pi}{3} + 4 \cdot \frac{6\pi}{12} = 10\pi \,. \tag{1}$$

Délka kružnice opsané čtverci $ABCD$ je

$$d_1 = \pi \,.\, 9 \,.\, \sqrt{2} \doteq 12{,}7\pi \,, \tag{2}$$

délka kružnice vepsané čtverci $ABCD$ je

$$d_2 = 9\pi \,. \tag{3}$$

Je tedy podle (1), (2), (3)

$$d_2 < d < d_1 \,.$$