15. ročník matematické olympiády

VII. Osmá mezinárodní matematická olympiáda v Sofii ve dnech 1.-13. července 1966

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 15. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1965-1966. 8. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967. pp. 148–172.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404555

VII.

Osmá mezinárodní matematická olympiáda v Sofii ve dnech 1.—13. července 1966

Při VIII. mezinárodní matematické olympiádě se projevily výrazně některé tendence, nad kterými se musíme zamyslit, chceme-li objektivně hodnotit výsledky této soutěže a chceme-li realisticky uvažovat o budoucnosti mezinárodních matematických olympiád a o naší účasti na nich.

Předně lze pozorovat stále rostoucí úroveň reprezentantů většiny účastnických států. I když oficiálně jsou tyto soutěže soutěžemi jednotlivců, sestavuje se vždy tabulka pořadí států podle součtu bodů, resp. cen, kterých jednotlivé země dosáhly. Dobré umístění celého družstva se pokládá za věc národní prestiže a většina zemí věnuje přípravě svých olympijských reprezentantů zvláštní péči. Někteří talentovaní žáci se účastní mezinárodních olympiád několikrát, aby získali zkušenosti na mezinárodním fóru, aby se připravili i psychologicky a tak vyrostli v kvalitní reprezentanty. Domácí příprava žáků je v mnoha státech — jak tomu nasvědčují různé příznaky — často spíše individuálním školením profesionálních reprezentantů. Je jasné, že výsledky dosažené v olympiádách nejsou pak ovšem objektivním ukazatelem úrovně vyučování matematice v jednotlivých zemích, ale spíše vizitkou péče, kterou věnuje ta která země svým matematickým talentům. Nemá smyslu diskutovat o tom, zda je tato koncepce soutěží správná či nikoli; nechce-li však kterýkoliv stát hrát na olympiádách roli beznadějného outsidera, nechce-li se pouštět do nerovného zápolení, má jen dvě možnosti: buď se mezinárodních olympiád neúčastnit, nebo se přizpůsobit jejich koncepci.

Druhá tendence, která se na VIII. MMO projevila, je jakási — byť i často skrytá — nespokojenost s nedostatečným statuárním zajišťováním organizace soutěže a z toho vyplývající snahy o její novou organizaci. V roce 1962 byl sice při příležitosti IV. MMO vypracován v ČSSR statut této soutěže, který byl v podstatě přejímán ve všech dalších mezinárodních matematických olympiádách; pořádající země jej však může v detailech měnit — a tím vzniká těsně před soutěží určitá nejistota, která není mnohým zemím sympatická. Na druhé straně se zdá, že se okruh účastnických zemí bude zvětšovat; zájem o mezinárodní matematické olympiády počínají projevovat i některé státy mimo socialistický tábor. Možná, že i proto se objevují pokusy organizovat mezinárodní soutěž nebo obdobné oblastní soutěže na půdě mezinárodní organizace jako např. UNESCO. Velká diskuse o mezinárodních matematických olympiádách byla i na kongresu v Moskvě v srpnu 1966; velmi blízká budoucnost nám asi ukáže, jak se budou věci vyvíjet; rozhodně bychom však přitom neměli být jen pasivními diváky, ale spíše také aktivními činiteli.

Konečně třetí výraznou tendencí je stále větší a větší pozornost věnovaná společenské stránce soutěže; lze říci, že pro pořadatelskou zemi se stává mezinárodní matematická olympiáda příležitostí pro reprezentaci státu před ostatními účastníky soutěže. Tím jednak stoupají nároky na čas účastníků, jednak ovšem i finanční náklady; při rostoucím počtu účastnických zemí a při nynějším úsporném hospodaření, které se projevuje téměř ve všech státech, tato tendence by mohla v budoucnosti vážně ohrozit pořádání soutěží.

2.

VIII. MMO se oproti roku 1965 účastnilo o jednu zemi méně; bylo tu 9 států: *Bulharsko*, *Československo*, *Jugoslávie*, *Maďarsko*, *Mongolsko*, *Německá demokratická republika*, *Polsko*, *Rumunsko* a *Sovětský svaz*. Finové nepřijeli, také Kuba, Vietnam, Korea, ač pozvány, se nedostavily. Jména vedoucích delegací i pedagogických průvodců jsou uvedena v *příloze* 1.

Delegáti se sjeli dne 1. července 1966 v Sofii; již v 19 hod. téhož dne se konala v anglické škole první schůze Mezinárodní komise (Jury), řízená *prof. Alippi Matteevem*, děkanem Matematické fakulty sofijské university, který byl předsedou bulharského přípravného výboru a zároveň předsedou Jury. Generálním sekretářem přípravného výboru byl *inspektor Stojan Budurov*. Na schůzi byl oznámen a schválen program celé soutěže a rozdány materiály, zejména návrhy 19 soutěžních úloh.

Dne 2. 7. po celý den a 3. 7. dopoledne zasedala Jury a vybírala soutěžní úlohy. K 19 původním návrhům (ze zemí: Bulharsko, Československo, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokr. republika, Polsko a Sovětský svaz) byly připojeny dodatečně při zasedání Jury další návrhy: tři úlohy jugoslávské, dvě rumunské a jedna sovětská. Vybírání bylo velmi obtížné, neboť byl nedostatek návrhů úloh z algebry, konstrukční i kombinatorické geometrie a stereometrie; situaci ještě zkomplikoval požadavek, aby žádná ze zúčastněných zemí nebyla zastoupena dvěma nebo více úlohami. Hodně se diskutovalo o obtížnosti úloh; po dlouhém jednání byly vybrány dvě trojice úloh; pro první den slovní úloha (bulharská), úloha z trigonometrie (maďarská) a ze stereometrie (sovětská); pro druhý den úloha z goniometrie (jugoslávská), soustava rovnic (československá) a úloha z početní geometrie (polská).

Dne 3. 7. 1966 ve 12 hod. byli delegáti přijati ministrem národní osvěty BLR *s. Gončevem*. Při besedě se ministr Gončev zajímal o stav vyučování v jednotlivých zúčastněných zemích a vyslovil návrh, aby se při mezinárodních matematických olympiádách pořádalo vždy jakési „*symposium*“ o školské matematice.

Na zasedání Jury 4. 7. se ukázala snadnost 1. a 3. soutěžní úlohy. Jury se pak usnesla nahradit první soutěžní úlohu sovětskou slovní úlohou a třetí soutěžní úlohu bulharskou úlohou stereometrickou. I po této úpravě tvořil komplex všech šesti úloh celek ne příliš náročný, což se ukázalo při soutěži samé.

Pak byly formulovány texty úloh v světových jazycích (rusky, německy, francouzsky) a stanoven počet bodů; odpoledne přeložili delegáti texty úloh do národních jazyků, rozmnožili je pro oba dny soutěže a připravili zalepené obálky pro svá družstva. K této práci nebyli podle rozhodnutí organizátorů soutěže připuštěni pedagogičtí průvodci.

3.

Dne 5. 7. 1966 byla v 8.30 zahájena v aule university soutěž bulharským proslovem *prof. Matteeva*, který delegáti přetlumočili do všech ostatních osmi jazyků. Prof. Matteev zdůraznil ve svém projevu důležitost matematiky pro výstavbu socialismu, význam mezinárodních olympiád pro vyhledávání a vzdělávání matematických talentů i pro výměnu zkušeností na poli školské matematiky. Po oficiálním zahájení byly žákům rozdány obálky s texty prvních tří soutěžních úloh a byla zahájena práce. Odpoledne se začalo v anglické škole (kde konali delegáti všecky své práce a Jury všecka svá zasedání) s korekturou první žákovské práce; opravování se zúčastnili i pedagogičtí průvodci. Žáci měli odpoledne volno.

Dne 6. 7. v 9 hod. byla zahájena v budově university druhá soutěžní práce. Dopoledne dokončovali vedoucí delegací s pedagogickými průvodci korekturu prvních tří úloh, odpoledne se opravovala druhá trojice úloh a začalo se s koordinováním. Pro každou úlohu stanovila bulharská strana jednoho koordinátora z domácích pracovníků, který koordinoval práce žáků všech devíti zemí včetně Bulharska.

Dne 7. 7. a dopoledne 8. 7. se pokračovalo v opravování druhé soutěžní práce a v koordinování. Ihned po ukončení koordinace dne 8. 7. se zahájilo závěrečné zasedání Jury, které pokračovalo i po polední přestávce. Počty bodů pro jednotlivé ceny byly stanoveny takto:

I. cenu získali žáci, kteří dosáhli 39—40 bodů (40 bodů bylo maximum), *II. cenu* žáci s 35—38 body a *III. cenu* žáci s 31—34 body.

Žáci měli ve dnech 7. a 8. 7. setkání s *komsomolci-matematiky*, výlet na jezero *Pančarevo* a na *Vitošu* s večeří v restauraci Kopitoto.

4.

Dne 9. 7. ráno v 6.30 nastoupily všecky delegace (žáci, ped. průvodci i vedoucí delegací) spolu s organizačním výborem VIII. mezinárodní matematické olympiády i s přítomnými novináři (NDR a BLR) a tlumočníky (každé družstvo mělo svého tlumočníka) čtyřdenní okružní cestu po Bulharsku. Jelo se třemi autobusy a dvěma osobními auty přes *Loveč*, *Starotirnovo*, *Varnu*, *Nesebar*, *Burgas*, *Sliven*, *Starou Zagoru* a *Plovdiv* zpět do Sofie. Ujelo se více než 1000 km s jednodenní zastávkou a dvěma noclehy ve Varně, s půldenní zastávkou a jedním noclehem v Plovdivě. I když cesta byla namáhavá a sled dojmů překotný, podařilo se hostitelům podat všem účastníkům pohled v kostce na staré i nové Bulharsko a poskytnout jim zážitky, na které jistě hned tak nezapomenou. Cesta Mizií, krásným podhůřím Balkánu, letmá prohlídka stoličního města Tirnova, kouzelné Černé moře, koupání v Zlatých pískách i na Slunečním pobřeží, jízda po moři katěrem do Varny, návštěva památníku Vladislava Varnenčika, letmé shlédnutí přístavu Burgasu, prohlídka Plovdiva-staré Filippopole, mnoho dojmů z krásné balkánské přírody, z památek starých zašlých kultur i výstavby nového socialistického Bulharska a všude ve Varně, v Plovdivu, v Tirnovu a v Tergovišti vřelé vítání pionýry i zástupci měst — to je stručně nastíněný popis cesty.

Dne 12. 7. 1966 večer dorazily všecky delegace do Sofie. Dopoledne 13. 7. 66 bylo volné a bylo věnováno nákupům. Odpoledne v 16 hodin byla závěrečná slavnost v aule university za přítomnosti ministra školství s. Gončeva. Zasedání zahájil prof. Matteev, pak promluvil s. Gončev o významu matematiky v období technické revoluce a výstavby socialismu. Na to rozdal prof. Matteev diplomy a dárky vítězům, uznání i diplomy ostatním účastníkům. Zvláštní uznání dostal nejlepší mongolský žák, který dosáhl 18 bodů. Mezi žáky, kteří získali uznání za originální řešení, zobecnění úloh apod., byl i čs. reprezentant *Bohuš Sivák*. Jménem žáků pak poděkoval hostitelům německý žák a jménem delegátů vedoucí čs. delegace. Projevy byly tlumočeny do všech jazyků zúčastněných zemí. Za zmínku stojí, že tentokrát žádný delegát nepozval účastníky jménem své země na příští MMO. Po zakončení slavnosti byla ve 20 hodin v internátě Obščežitie společná večeře pro všecky účastníky, které se zúčastnil také s. ministr. Při večeři si vyměnily delegace mezi sebou tradiční dárky.

5.

Texty a řešení soutěžních úloh

I. den (5. 7. 1966).

1. V matematické soutěži byly dány tři úlohy A, B, C. Mezi účastníky bylo 25 žáků, z nichž každý rozřešil aspoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nerozřešili úlohu A, byl počet těch, kteří rozřešili úlohu B, dvojnásobkem počtu těch, kteří rozřešili úlohu C. Počet těch žáků, kteří rozřešili jen úlohu A, byl o 1 větší než počet ostatních žáků, kteří rozřešili úlohu A. Ze všech žáků, kteří rozřešili jedinou úlohu, právě polovina nerozřešila úlohu A.

Kolik žáků rozřešilo jen úlohu B?

(*SSSR*, 6 *bodů*)

2. Označme po řadě a, b, c délky stran trojúhelníka a α, β, γ velikosti protějších úhlů. Platí-li rovnost

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

pak je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

(*Maďarsko*, 7 *bodů*)

3. Součet vzdáleností vrcholů pravidelného čtyřstěnu od středu kulové plochy jemu opsané je menší než součet vzdáleností těchto vrcholů od kteréhokoli jiného bodu prostoru. Dokažte.

(*Bulharsko*, 7 *bodů*)

II. den (6. 7. 1966).

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n,\ \lambda$ celé) platí

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin (2^n x)} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} (2^n x).$$

(*Jugoslávie*, 5 *bodů*)

5. Řešte soustavu

$$\begin{aligned}
&|a_1 - a_2|\, x_2 + |a_1 - a_3|\, x_3 + |a_1 - a_4|\, x_4 = 1,\\
|a_1 - a_2|\, x_1 &+ |a_2 - a_3|\, x_3 + |a_2 - a_4|\, x_4 = 1,\\
|a_1 - a_3|\, x_1 + |a_2 - a_3|\, x_2 &+ |a_3 - a_4|\, x_4 = 1,\\
|a_1 - a_4|\, x_1 + |a_2 - a_4|\, x_2 + |a_3 - a_4|\, x_3 &= 1,
\end{aligned}$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři daná navzájem různá reálná čísla.

(*ČSSR*, 7 *bodů*)

6. Uvnitř stran AB, BC, CA trojúhelníka ABC zvolíme po řadě libovolné body K, L, M. Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků MAK, KBL, LCM je menší nebo rovný čtvrtině obsahu trojúhelníka ABC.

(*Polsko*, 8 *bodů*)

Řešení úlohy 1. Označme po řadě x_A, x_B, x_C počty žáků, kteří rozřešili jen úlohu A, B, C; dále pak x_{BC} je počet žáků, kteří rozřešili jen úlohy B, C a analogicky x'_A je počet žáků, kteří rozřešili úlohu A a aspoň ještě jednu další úlohu.

Podle podmínek úlohy je pak

$$x_A + x_B + x_C + x'_A + x_{BC} = 25\,, \tag{1}$$

$$x_B + x_{BC} = 2\,(x_C + x_{BC})\,, \tag{2}$$

$$x_A = x'_A + 1\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\,(x_A + x_B + x_C) = x_B + x_C\,. \tag{4}$$

Z (2) plyne

$$x_{BC} = x_B - 2x_C\,. \tag{5}$$

Z (4) plyne

$$x_A = x_B + x_C\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li z (3), (5) do (1), dostaneme

$$2x_A + 2x_B - x_C = 26\,. \tag{7}$$

Dosadíme-li z (6) do (7), vyjde

$$4x_B + x_C = 26\,. \tag{8}$$

Z (5) vyplývá $x_B - 2x_C \geqq 0$, tj.

$$x_B \geqq 2x_C\,. \tag{9}$$

Spojením (8), (9) dostaneme $x_C \leqq \frac{26}{9}$. Protože podle (8) je x_C sudé, je $x_C = 0$ nebo $x_C = 2$. Pro $x_C = 0$ však nevyjde z (8) celé x_B. Je tedy $x_C = 2$ a $x_B = 6$, z (6) a (5) plyne $x_A = 8$, $x_{BC} = 2$, z (3) plyne $x'_A = 7$.

Zkouškou se přesvědčíme, že jediné možné řešení $x_B = 6$ je skutečně řešením úlohy.

Řešení úlohy 2. Danou rovnost upravíme na tvar

$$(a + b) \cos \alpha \cos \beta \cos \frac{\gamma}{2} =$$

$$= a \sin \alpha \cos \beta \sin \frac{\gamma}{2} + b \sin \beta \cos \alpha \sin \frac{\gamma}{2},$$

neboli

$$a \cos \beta \left(\cos \alpha \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \alpha \sin \frac{\gamma}{2} \right) +$$

$$+ b \cos \alpha \left(\cos \beta \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \beta \sin \frac{\gamma}{2} \right) = 0$$

neboli

$$a \cos \beta \cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + b \cos \alpha \cos \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) = 0 \,. \quad (10)$$

Pro úhly trojúhelníka platí

$$\cos \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) = - \cos \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right), \quad (11)$$

neboť je

$$\left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) = \pi \,. \quad (12)$$

Buď je $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 0$, pak je $\alpha + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$, tj. $\alpha = \beta$ a jde tedy o trojúhelník rovnoramenný. Nebo je $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \neq 0$; pak dělíme rovnost (10) číslem $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$ a dostaneme

$$a \cos \beta - b \cos \alpha = 0\,. \tag{13}$$

Připojíme-li k rovnosti (13) rovnost

$$a \sin \beta - b \sin \alpha = 0$$

(sinová věta), vyjde $ab(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = 0$ neboli $\sin(\alpha - \beta) = 0$, tj. $\alpha = \beta$. Tento druhý případ však nemůže nastat, neboť pro $\alpha = \beta$ vyjde z (12) $\alpha + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$, tj. $\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 0$.

Řešení úlohy 3. Použijeme pomocné věty P:

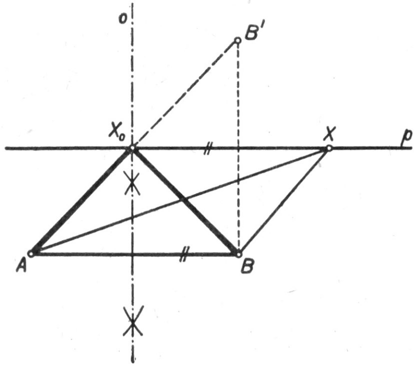
Budiž AB úsečka, p přímka s ní rovnoběžná. Nechť bod X probíhá přímku p. Pak součet vzdáleností $AX + BX$ je minimální, leží-li bod X na ose úsečky AB.

D ů k a z v ě t y P: Obsahuje-li přímka p úsečku AB, je věta P zřejmá*). Neobsahuje-li přímka p úsečku AB, označíme X_0

*) V tomto případě je součet $AX + BX$ minimální pro jakoukoliv polohu bodu X na úsečce AB.

průsečík osy o úsečky AB s přímkou p, $X \neq X_0$ bod přímky p, B' bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky p (obr. 71). Pak je

$$BX_0 = B'X_0 , \qquad BX = B'X . \tag{14}$$



Obr. 71.

Body A, B' jsou zřejmě souměrně sdruženy podle středu X_0, proto bod X_0 leží mezi body A, B'. Je tedy podle (14) a podle trojúhelníkové nerovnosti

$$AX_0 + BX_0 = AX_0 + B'X_0 = AB' < AX + B'X = \\ = AX + BX .$$

Tím je pomocná věta P dokázána.

Budiž nyní $ABCD$ pravidelný čtyřstěn a nechť bod X neleží v rovině souměrnosti hrany AB (obr. 72). Rovina σ obsahuje vrcholy C, D, neboť platí

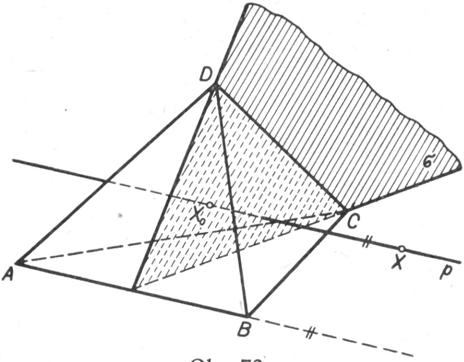
$$AC = BC , \qquad AD = BD .$$

Bodem X vedeme přímku $p \parallel AB$ a označíme X_0 její průsečík

OPRAVNÝ LÍSTEK

Doplněk na str. 159 (dodatek k řešení úlohy 3 z VIII. MMO).

Existenci bodu, pro který je součet $AX + BX + CX + DX$ minimální, lze dokázat takto: Podle pomocné věty P lze tento bod hledat jen na přímce m, která obsahuje středy protějších hran AB, CD; také střed S kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ leží na přímce m. Otočíme-li hranu CD kolem přímky m do roviny ABS, dostaneme podle věty P pro každý bod X přímky m $AX + CX \geqq AS + CS$, $BX + DX \geqq BS + DS$, a tedy $AX + BX + CX + DX \geqq AS + BS + CS + DS$.



Obr. 72.

s rovinou σ. Protože CX_0 a DX_0 jsou pravoúhlé průměty úseček CX a DX do roviny σ, je

$$CX_0 < CX\,, \qquad DX_0 < DX\,. \tag{15}$$

Podle pomocné věty P je

$$AX_0 + BX_0 \leqq AX + BX\,. \tag{16}$$

Spojením (15), (16) dostaneme

$$AX_0 + BX_0 + CX_0 + DX_0 < AX + BX + CX + DX\,. \tag{17}$$

Tím je dokázáno: neleží-li bod X v rovině souměrnosti některé hrany čtyřstěnu $ABCD$, lze nalézt takový bod X_0, že platí (17). Bod X, pro který je součet $AX + BX + CX + DX$ minimální, musí tedy ležet v rovinách souměrnosti všech šesti hran čtyřstěnu; je to tedy střed kulové plochy čtyřstěnu $ABCD$.

Řešení úlohy 4. Pro $n = 1$ se redukuje daná rovnost na rovnost

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\,;$$

z ní plyne rovnost

$$1 = 2\cos^2 x - \cos 2x ,$$

která platí pro všecka x. Pro $x \neq \dfrac{\lambda\pi}{2}$ lze postup obrátit; je tedy daná nerovnost dokázána pro $n = 1$.

Indukční krok z n na $n + 1$: Předpokládáme, že $x \neq \dfrac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n, n + 1)$ a označíme L_n levou stranu dokazované nerovnosti. Pak je

$$L_{n+1} = L_n + \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(2^n x) +$$

$$+ \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} = \operatorname{cotg} x - \frac{\cos(2^n x)}{\sin(2^n x)} + \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} =$$

$$= \operatorname{cotg} x - \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)}\,[2\cos^2(2^n x) - 1]\,.$$

Protože výraz v lomených závorkách je roven $\cos(2^{n+1}x)$, je

$$L_{n+1} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(2^{n+1}x)\,.$$

Tím je dokázán indukční krok a je dokázána i daná formule.

Řešení úlohy 5. Při současné výměně parametrů a_i, a_k a neznámých x_i, x_k se soustava nezmění. Zvolíme-li tedy vhodné označení, je

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4\,. \tag{17}$$

Pak lze každou absolutní hodnotu $|a_i - a_k|$ $(i < k)$ nahradit rozdílem $a_i - a_k$. Odečteme-li druhou rovnici od první, vyjde

$$(a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0\,. \tag{18}$$

Podobně odečtením třetí rovnice od druhé dostaneme

$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0 . \qquad (19)$$

Konečně odečtením čtvrté rovnice od třetí dostaneme

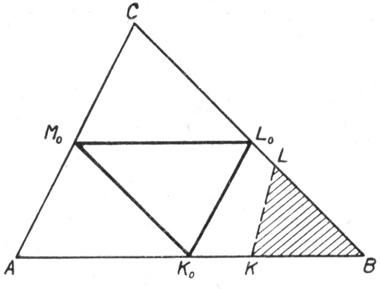
$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0 . \qquad (20)$$

Rovnice (18), (19), (20) dělíme nenulovými koeficienty $(a_1 - a_2)$, $(a_2 - a_3)$, $(a_3 - a_4)$. Takto upravené rovnice (18) a (20) sečteme; vyjde $x_1 = x_4$. Odečtením upravených rovnic (18) a (19) vyjde $x_2 = 0$, z (18) pak $x_3 = 0$.

Z původních rovnic pak dostaneme

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{|a_1 - a_4|} .$$

Za předpokladu (17) má tedy daná soustava jediné možné řešení $x_1 = x_4 = \dfrac{1}{|a_1 - a_4|}$, $x_2 = x_3 = 0$. Zkouškou se přesvědčíme, že to je skutečně řešení dané soustavy.



Obr. 73.

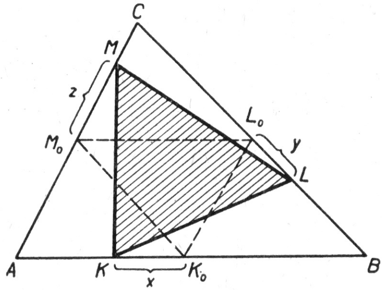
Řešení úlohy 6. Označíme K_0, L_0, M_0 po řadě středy úseček AB, BC, CA (obr. 73); pak úsečky K_0L_0, L_0M_0, M_0K_0 rozdělí trojúhelník ABC ve čtyři části téhož obsahu $\frac{1}{4} \triangle ABC$.

Leží-li dva z bodů K, L, M na obvodu některého z „rohových“ trojúhelníků AK_0M_0, L_0BK_0, CM_0L_0, např. K, L na úsečkách BK_0, BL_0 (viz obr. 73), pak je

$$\triangle BKL \leqq \triangle BK_0L_0 = \frac{1}{4} \triangle ABC .$$

Stačí tedy zabývat se případem, kdy žádné dva z bodů K, L, M nemají od téhož vrcholu trojúhelníka ABC vzdálenosti menší nebo rovné polovinám délek příslušných stran.

Nechť např. bod K leží mezi A, K_0, dále bod L mezi B, L_0 a bod M mezi C, M_0 (obr. 74). Označme $KK_0 = x$, $LL_0 = y$, $MM_0 = z$.



Obr. 74.

Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že je

$$\triangle AKM > \frac{1}{4} \triangle ABC, \quad \triangle BLK > \frac{1}{4} \triangle ABC,$$

$$\triangle CML > \frac{1}{4} \triangle ABC .$$

Pak je

$$\triangle AKM + \triangle BLK + \triangle CML > \frac{3}{4} \triangle ABC ,$$

neboli

$$4 \frac{\triangle AKM}{\triangle ABC} + 4 \frac{\triangle BLK}{\triangle ABC} + 4 \frac{\triangle CML}{\triangle ABC} > 3 . \tag{21}$$

Poměry obsahů trojúhelníků v nerovnosti (21) vyjádříme pomocí délek a, b, c, x, y, z. Při obvyklém označení úhlů platí

$$\triangle AKM = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + z\right)\left(\frac{c}{2} - x\right) . \sin \alpha, \ \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$

tj.

$$\frac{\triangle AKM}{\triangle ABC} = \frac{\left(\frac{b}{2} + z\right)\left(\frac{c}{2} - x\right)}{bc} . \tag{22}$$

Cyklickou záměnou dostaneme z (22) další dva poměry obsahů; po dosazení do (21) a úpravě vyjde

$$a(b + 2z)(c - 2x) + b(c + 2x)(a - 2y) +$$
$$+ c(a + 2y)(b - 2z) > 3abc .$$

Tuto nerovnost zjednodušíme po vynásobení na tvar

$$axz + byx + czy < 0 ,$$

což je ve sporu s podmínkami $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Tím je věta úplně dokázána.

6.

Pro zajímavost uveďme *první* a *třetí úlohu* původního návrhu, které byly pro snadnost nahrazeny jinými úlohami.

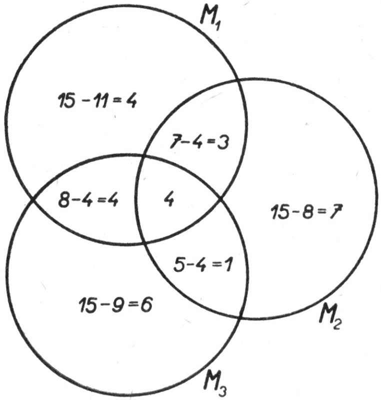
Místo sovětské *úlohy* 1 byla původně navržena tato bulharská úloha:

1.' Žáci jedné třídy uspořádali tři exkurze; každé z nich se zúčastnilo 15 žáků. Sedm účastníků I. exkurze se zúčastnilo také II. exkurze, osm účastníků I. exkurze se účastnilo také III. exkurze. Pět účastníků II. exkurze se zúčastnilo také III. exkurze. Čtyři žáci se zúčastnili všech tří exkurzí.

a) Kolik žáků se zúčastnilo jen I., kolik jen II., kolik jen III. exkurze?

b) Kolik žáků se zúčastnilo aspoň jedné z těchto tří exkurzí?

Řešení úlohy lze podat velmi jednoduše bez výpočtů, pomocí *Vennových diagramů*; stačí podle textu úlohy vepsat počty žáků do průniků tří množin $\boldsymbol{M}_i$ ($i = 1, 2, 3$); přitom $\boldsymbol{M}_i$ znamená množinu všech žáků, kteří se zúčastnili i-té exkurze (obr. 75).

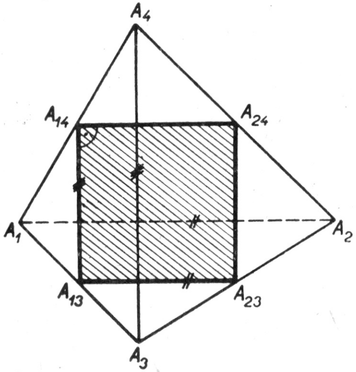


Obr. 75.

Odpověď: a) Jen I. exkurze se zúčastnili 4 žáci, jen II. exkurze 7 žáků, jen III. exkurze 6 žáků. b) Aspoň jedné exkurze se zučastnilo 29 žáků (počet prvků sjednocení množin $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$).

Místo bulharské *úlohy 3* byla původně navržena sovětská úloha:

3'. Každé dvě protější hrany čtyřstěnu jsou navzájem kolmé. Dokažte, že všech šest středů jeho hran leží na kulové ploše.



Obr. 76.

Řešení (obr. 76). Budiž $A_1A_2A_3A_4$ daný čtyřstěn; označme středy hran podle obr. 76. Pak je $A_{13}A_{14} \parallel A_3A_4 \parallel A_{23}A_{24}$, $A_{13}A_{23} \parallel A_1A_2 \parallel A_{14}A_{24}$. Obrazec $A_{13}A_{23}A_{24}A_{14}$ je tedy rovnoběžník. Protože je $A_1A_2 \perp A_3A_4$, je $A_{13}A_{23} \perp A_{13}A_{14}$, tj. obrazec $A_{13}A_{23}A_{24}A_{14}$ je obdélník. Jeho úhlopříčky jsou shodné a navzájem se půlí. Proto kulová plocha Σ sestrojená nad průměrem $A_{13}A_{24}$ má za průměr i úsečku $A_{14}A_{23}$. Vyměníme-li indexy 2, 4 (1, 3 ponecháme), vidíme, že kulová plocha Σ má za průměr i úsečku $A_{12}A_{34}$. Tím je věta dokázána.

7.

Složení čs. družstva je patrné z přílohy 3, výsledky, kterých dosáhlo, z přílohy 4. Seřadíme-li všecka družstva podle počtů dosažených bodů, je ČSSR na osmém, tj. předposledním místě. Také podle udělených cen je na předposledním místě: má tři ceny, z toho jednu druhou a dvě třetí (Jugoslávie má také tři ceny, ale dvě druhé a jednu třetí). Je to bilance na první pohled žalostná, která svědčí, že naše družstvo relativně k jiným družstvům má tendenci sestupnou, i když snad naši letošní reprezentanti byli v celku lepší než loňští. Ale rychle se zvyšující úrovni reprezentantů ostatních států (všimněme si např. vzestupu NDR) nestačíme. Naproti tomu je třeba uvážit, že např. náš nejlepší reprezentant *Sivák* by byl získal se ztrátou jen dvou bodů na každé z předchozích olympiád I. cenu. Dále je třeba uvážit, že bodové rozpětí mezi námi a nejlepším družstvem SSSR bylo loni více než 130 bodů, letos ani ne 80 bodů. Také rozdíly v počtu bodů mezi 6., 7. a 8. družstvem jsou celkem malé; je vhodné hned na tomto místě ukázat, čím jsou způsobeny. Na letošní olympiádě vzhledem k poměrně snadným soutěžním úlohám byl žák, který nedosáhl ani 25 bodů, vysloveným outsiderem. Z přílohy 4 je patrné, že my měli takovéto účastníky tři; naproti tomu Jugoslávie měla jen dva takovéto žáky, Bulharsko jen jednoho. Zde se už částečně ukazuje jedna z příčin našeho neúspěchu: nedobrý výběr reprezentantů. Chceme-li se dále účastnit mezinárodních matematických olympiád, a to nikoli jako podřadné družstvo, musíme vybírat své reprezentanty z žáků, které budeme individuálně a systematicky připravovat. Musíme se zaměřit na žáky mladší, popřát jim možnost získat zkušenosti v mezinárodní soutěži, tj. dát jim psychologickou přípravu. Neboť i letos se ukázalo, jako v minulých letech, že našim reprezentantům často chybějí dobré nervy. Při přípravě družstva se pochopitelně nemůžeme spoléhat jen na školu.

Nyní ještě stručně k našim nedostatkům řešení soutěžních úloh VIII. MMO. Naši žáci chybují v důkazu matematickou indukcí a přitom jde o matematické „řemeslo", které by měl ovládat každý průměrný středoškolák.

Z řešení našich žáků je zřejmé, že se i logická stránka výuky zanedbává; je to vidět i na jejich vyjadřování, které je nedbalé a často nesprávné. Mnoha zla působí fráze o „ekvivalentních úpravách“ zakořeněná na našich školách. Našim reprezentantům lze také těžko odpustit jejich nedostatky ve stereometrii (ani jeden z našich osmi žáků nerozřešil úlohu 3 zcela správně). Žáci nadaní v matematice se často pachtí za studiem tzv. vyšší matematiky, jejího aparátu pak užívají nevhodně nebo dokonce nesprávně, ale středoškolskou látku do hloubky neznají. Přitom „středoškolská matematika“ v pojetí mezinárodních olympiád je užší než v pojetí našich osnov; nepřicházejí tu úlohy z analytické geometrie, z aritmetiky komplexních čísel (tato témata nejsou v osnovách řady zúčastněných zemí), málo se vyskytují i úlohy z teorie čísel, zato se věnuje dosti pozornosti kombinatorice, kombinatorické geometrii, stereometrii, kde je často třeba celkem jen skrovného aparátu, zato tím více zkušenosti, logického výcviku a experimentálně-analytického přístupu k řešení úlohy. Konečně je třeba poukázat ještě na jeden nešvar, kterým naši žáci trpí — je to bezuzdná psavost, „počtářství“ v špatném slova smyslu. Počítají často celkem bezhlavě, popíší řady stránek, ač jsou stále upozorňováni na to, že je třeba spíše přemýšlet a netopit se ve výpočtech, jejichž složitost zřejmě ukazuje, že nastoupená cesta nebyla vhodná.

Vzhledem k našemu neúspěchu na VIII. MMO se rozhodl ústřední výbor MO změnit od základu přípravu našich reprezentantů a jejich výběr, pokusně přejít k individuálnímu školení nadaných jedinců, pokud možno z nižších tříd.

PŘÍLOHA 1

Vedoucí delegací a pedagogičtí průvodci.

Bulharsko:

Prof. Spas Monolov, Vyšš. inženerno-stroitelen institut v Sofii.

As. Kostadin Petrov, Mat. fakulta univerzity v Sofii.

Československo:

Doc. Jan Vyšín, Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university v Praze.

Odb. as. Vlastimil Macháček, Pedagogická fakulta Karlovy univerzity v Praze.

Jugoslávie:

Doc. Dušan Adnagievič, Bělehrad.

Vladimír Mitič, Bělehrad.

Maďarsko:

Hódi Endre, vedoucí vědecký pracovník Optických závodů v Budapešti.

Reiman István, Budapešť.

Mongolsko:

Doc. N. Sanžimjatav, St. univerzita Ulanbátor.

G. Zagdragča, inspektor matematiky ministerstva školství MLR.

Něm. dem. republika:

Prof. dr. Hanns-Joakim Weinert, Vys. škola pedagogická, Potsdam.

Dr. Helmut Bausch, Berlín.

Polsko:

Prof. dr. Mieczyslaw Czyżykowski, Polytechnika ve Varšavě.

Magister Andrzej Mąkowski, Varšava.

Rumunsko:

Prof. Tiberiu Roman, Vysoká škola technická v Bukurešti.

Prof. Zlate Bogdanov, Bukurešť.

Sovětský svaz:

Doc. Elena Alexandrovna Morozova, Mech. matem. fakulta Lomonosovy university v Moskvě.

Ivan Semenovič Petrakov, metodik ministerstva školství RSFSR.

PŘÍLOHA 2

Počty udělených cen a celkové počty dosažených bodů.

Stát	Počet dosažených bodů	Počet cen			
		I.	II.	III.	Celkem
Bulharsko	236	0	1	3	4
ČSSR	215	0	1	2	3
Jugoslávie	224	0	2	1	3
Maďarsko	281	3	1	2	6
Mongolsko	90	0	0	0	0
NDR	280	3	3	0	6
Polsko	269	1	4	1	6
Rumunsko	257	1	2	2	5
SSSR	293	5	1	1	7
Celkem	—	13	15	12	40

PŘÍLOHA 3

Poř. č.	Jméno	Škola-třída	Narozen roku
1.	Kosina Miroslav	3. a, SVVŠ U balvanu Jablonec n. Nisou	1948
2.	Kůrka Petr	2. g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2	1949
3.	Mederly Petr	3. d, SVVŠ Prievidza	1948
4.	Němec Petr	3. d, SVVŠ Dlouhý lán, Praha 6	1948
5.	Rott Jiří	4. b, SPŠ hutnická Kladno	1947
6.	Sivák Bohuš	9. tř. ZDŠ Zvolen	1951
7.	Šmerk Jiří	3. c, SVVŠ Kyjov	1948
8.	Vejvoda Pavel	2. g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2	1947

PŘÍLOHA 4

Žák	Počet bodů						
	úl. 1	úl. 2	úl. 3	úl. 4	úl. 5	úl. 6	Celkem
Kosina	4	7	0	5	0	4	20
Kůrka	0	7	4	5	7	8	31 III. cena
Mederly	6	7	3	5	3	8	32 III. cena
Němec	6	0	1	4	1	4	16
Rott	6	0	4	4	2	6	22
Sivák	6	7	5	5	7	8	38 II. cena
Šmerk	6	7	2	4	2	8	29
Vejvoda	6	1	3	5	7	5	27
Celkem	40	36	22	37	29	51	215
	max 48	max 56	max 56	max 40	max 56	max 64	

Poznámka: Průměrný počet bodů připadající na jednoho žáka je (nepočítáme-li Mongoly) 32.