14. ročník matematické olympiády

IV. Řešení úloh ze soutěže

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Rudolf Zelinka (author): 14. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1964-1965. 7. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. pp. 26–111.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404542

IV. Řešení úloh ze soutěže

1. Úlohy I. kola kategorie A

1. Vypočtěte součet všech možných součinů xy, jejichž činitelé x, y jsou navzájem různá čísla vybraná z přirozených čísel $1, 2, \ldots, n$, kde n je dané přirozené číslo. [Lze užít vzorce: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 =$

$$= \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1) \,.]$$

Řešení. Označme S hledaný součet a dále

$$s_1 = 1 + 2 + \ldots + n \,, \quad s_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 .$$

Víme, že je

$$s_1 = \frac{1}{2} n(n + 1) \,, \quad s_2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) \,, \qquad (1)$$

což lze ověřit matematickou indukcí. Zřejmě platí vztah

$$s_1^2 = s_2 + 2S \,,$$

z čehož

$$S = \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2) \,.$$

Dosaďme sem z (1); dostáváme postupně

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} n^2(n + 1)^2 - \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) \right] =$$

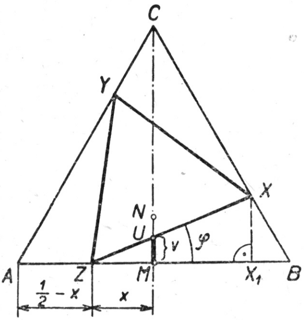
$$= \frac{1}{24} n(n + 1)(3n^2 - n - 2) = \frac{1}{24} n(n+1)(n - 1)(3n+2).$$

Tím je číslo S nalezeno.

2. Je daný rovnostranný trojuholník ABC so stranou dĺžky 1; M je stred strany AB. Do trojuholníka ABC je vpísaný rovnostranný trojuholník XYZ tak, že body X, Y, Z ležia po rade vo vnútri strán BC, CA, AB a tak, že úsečky XZ, CM majú spoločný bod U.

a) Vyjadrite vzdialenosť MU pomocou vzdialenosti MZ.

b) Dokážte, že bod U každého z trojuholníkov XYZ leží na určitej úsečke MN, ktorá má dĺžku $\frac{1}{9}\,CM$.



Obr. 1

Riešenie (obr. 1). a) Vzdialenosť bodov M, Z označme x, vzdialenosť bodov M, U označme v a $\sphericalangle XZB$ označme φ. Potom pre trojuholníky ZXB, XYZ platí, že

$$\sphericalangle ZXB = 120° - \varphi\,, \quad \sphericalangle YXC = 180° - 60° - (120° - \varphi) = \varphi\,.$$

Je teda

$$\triangle ZXB \cong \triangle XYC \quad (usu)\,,$$

takže

$$ZB = XC\,,\ AZ = AB - ZB = BC - XC = BX = \\ = \frac{1}{2} = x\,.$$

Cyklickou zámenou dostaneme $BX = CY$, t. j.

$$AZ = BX = CY = \frac{1}{2} - x\,.$$

Označme X_1 pätu kolmice vedenej bodom X k strane AB. Bod X_1 náleží úsečke MB. Platí

$$XX_1 = BX \sin 60° = \left(\frac{1}{2} - x\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \tag{2}$$

$$MX_1 = MB - BX_1 = MB - BX \cos 60° = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x. \tag{3}$$

Pomocou vzťahu (3) dostávame

$$ZX_1 = x + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\,. \tag{4}$$

Z rovnoľahlosti trojuholníkov ZUM, ZXX_1 dostaneme

$$v : x = XX_1 : XZ_1\,.$$

Stadiaľ pomocou vzťahov (2) a (4) po úprave dostávame

$$v = x\,\frac{\sqrt{3}(1 - 2x)}{6x + 1}\,, \tag{5}$$

pričom x prebieha interval $0 \leqq x < \frac{1}{2}$.

b) Máme určit maximum funkcie (5). Dokážeme, že je to $\frac{1}{9}\,CM = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{18}\sqrt{3}$. Predpokladajme, že je $v \geqq \frac{\sqrt{3}}{18}$ čiže

$$\frac{x(1-2x)}{6x+1}\sqrt{3} \geqq \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \text{kde} \quad 0 \leqq x < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Vynásobením prvej nerovnosti kladným číslom $\frac{18(6x+1)}{\sqrt{3}}$ dostávame po krátkej úprave, že nutne platí

$$36x^2 - 12x + 1 \leqq 0$$

čiže

$$(6x-1)^2 \leqq 0\,. \tag{7}$$

Nerovnosť (7) platí jedine pre $x = \frac{1}{6}$. Číslo $x = \frac{1}{6}$ splňuje pritom nerovnosť (6) a z rovnosti (5) pre $x = \frac{1}{6}$ dostaneme práve $v = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Bod Z pre $x = \frac{1}{6}$ leží v tretine úsečky AB a príslušný bod U má od M vzdialenosť $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Tým je riešenie úlohy prevedené.

3. Je dána funkce proměnné x

$$y = x^2 - 4\,|x-1| - p\,,$$

kde p je parametr.

Určete p tak, aby příslušná funkce nabyla hodnoty 1 právě pro tři různé hodnoty x.

Řešení. Označme $x_1 < x_2 < x_3$ hledané tři hodnoty nezávisle proměnné x, pro které má daná funkce hodnotu

$y = 1$. Vzhledem k dané funkci (1) rozeznávejme dvě možnosti, podle toho, je-li $x \leqq 1$ nebo je-li $x \geqq 1$.

Pro $x \leqq 1$ funkce (1) zní

$$y = x^2 + 4x - 4 - p; \tag{2}$$

pro $x \geqq 1$ funkce (1) zní

$$y = x^2 - 4x + 4 - p. \tag{3}$$

Jsou zřejmě jen tři možnosti [1], [2] a [3]:

Případ [1]. Funkce (2) nabývá pro $x = x_1$, $x = x_2$ hodnoty $y = 1$, kde $x_1 \leqq 1$, $x_2 \leqq 1$. Pak ovšem funkce (3) nabývá hodnoty $y = 1$ pro jediné $x = x_3 \geqq 1$, tj. platí [viz (3)] $1 = x^2 - 4x + 4 - p$ neboli $x^2 - 4x + + 3 - p = 0$; tato kvadratická rovnice musí mít jediný kořen, tj. její diskriminant $4[4 - (3 - p)]$ musí být roven nule. Odtud plyne, že je nutně

$$p = -1.$$

Funkce (3) pak zní

$$y = x^2 - 4x + 5$$

a pro $y = 1$ dostaneme $x^2 - 4x + 4 = 0$ neboli $(x - 2)^2 = 0$; odtud plyne

$$x_3 = 2; \tag{4}$$

to je číslo z intervalu $x \geqq 1$. Pro $x = x_3$ je skutečně $y = 1$.

Nyní zjistíme, zda existují čísla x_1, x_2, pro funkci (2) a pro parametr $p = -1$ taková, že pro ně je hodnota funkce $y = 1$. Funkce (2) zní

$$y = x^2 + 4x - 3 \tag{5}$$

a pro $y = 1$ dostáváme rovnici $x^2 + 4x - 4 = 0$, jejíž kořeny jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 2\sqrt{2} = -2(\sqrt{2} + 1), \\ x_2 &= -2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} - 1) < 2 \,.\, 0{,}5 = 1\,; \end{aligned} \tag{6}$$

obě navzájem různá čísla x_1, x_2 jsou skutečně menší než 1. Po dosazení $x = x_1$, $x = x_2$ do pravé strany (5) dostaneme (čti zároveň horní anebo dolní znaménka)

$$(-2 \pm 2\sqrt{2})^2 + 4(-2 \pm 2\sqrt{2}) - 3 = 12 \mp 8\sqrt{2} - 8 \pm$$
$$\pm 8\sqrt{2} - 3 = 1\,,$$

tj. $y = 1$. Tím je případ [1] vyšetřen; hledaná čísla jsou dána vztahy (6), (4).

Případ [2]. Funkce (2) nabývá hodnoty $y = 1$ pro jediné $x = x_1 \leqq 1$ a funkce (3) pro dvě čísla $x = x_2$, $x = x_3$, $x_2 \geqq 1$, $x_3 \geqq 1$. Pro $y = 1$ ze (2) dostaneme rovnici

$$x^2 + 4x - (5 + p) = 0$$

o neznámé x, která musí mít jediný (reálný) kořen; její diskriminant $4[4 + (5 + p)]$ musí být roven nule, tedy

$$p = -9\,.$$

Funkce (2) tedy zní

$$y = x^2 + 4x + 5 \tag{7}$$

a pro $y = 1$ odtud plyne $(x + 2)^2 = 0$, neboli

$$x_1 = -2\,;$$

pro $x = x_1$ je hodnota funkce (7) skutečně $y = 1$.

Pro $p = -9$ funkce (3) zní

$$y = x^2 - 4x + 13\,. \tag{8}$$

Tu pro $y = 1$ dostáváme rovnici $x^2 - 4x + 12 = 0$, jejíž diskriminant je zřejmě záporný a případ [2] nevede k řešení.

Případ [3]. Zjistíme ještě, zda funkce (2) a (3) mohou nabýt současně pro $x = x_1 = 1$ hodnoty $y = 1$. V tomto případě pak funkce (2) nabude hodnoty $y = 1$ pro jisté $x = x_2 \leqq 1$ a rovněž funkce (3) nabude hodnoty $y = 1$ pro jisté $x = x_3 \geqq 1$.

Dosaďme tedy $y = 1$ a $x = 1$ např. do vztahu (2); dostaneme rovnici pro p:

$$1 = 1 + 4 . 1 - 4 - p ,$$

tj.

$$p = 0 .$$

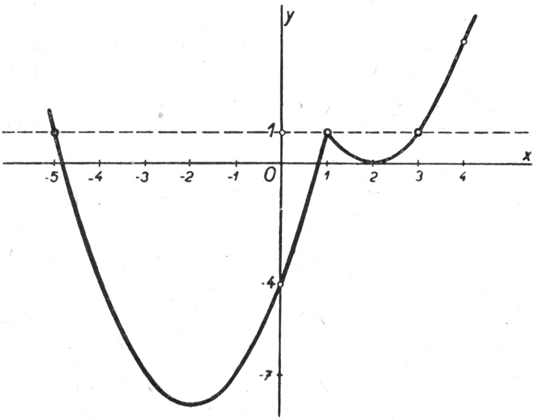
Pro $p = 0$ a $y = 1$ dostaneme ze vztahu (2) rovnici

$$1 = x^2 + 4x - 4 .$$

Kořeny této rovnice jsou očekávané $x_1 = 1$ a dále $x_2 = -5$, tj. číslo menší než 1.

Dosazením $p = 0$ a $y = 1$ do vztahu (3) dostaneme rovnici

$$1 = x^2 - 4x + 4 .$$



Obr. 2

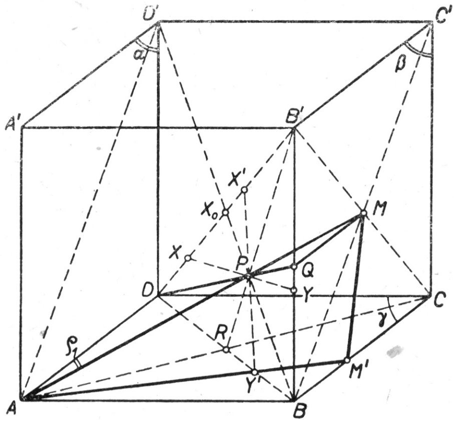
Rovněž tato rovnice má kořen $x_1 = 1$ a další kořen $x_3 = 3$, tj. číslo větší než 1. Tedy i případ [3] pro $p = 0$ vede k řešení úlohy (obr. 2).

Závěr. Hledané hodnoty parametru jsou $p = 0$ a $p = -1$.

4. Místnost má tvar krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1. Označme M střed stěny $BCC'B'$. Svítící bod probíhá tělesovou úhlopříčku DB'. Přitom se vržený stín úsečky AM pohybuje a probíhá postupně jistou část stěn a podlahy místnosti.

Vyšetřte, z kterých obrazců se tato část skládá, a rozhodněte, zda její obsah je větší než obsah podlahy místnosti.

Řešení. Situace je patrna z obr. 3. Nejprve dokážeme, že se úsečky BD', AM protínají v bodě, který označíme P.



Obr. 3

Skutečně úsečky AM, BD' jsou úhlopříčkami lichoběžníku $AD'MB$ a protínají se v bodě P, který náleží vnitřku každé z nich. Vržený stín úsečky AM padne buď na přední a pravou stěnu krychle (tj. $ABB'A'$ a $BCC'B'$), nebo na dolní a pravou stěnu (tj. $ABCD$ a $BCC'B'$); v prvním případě se stín láme na hraně BB', ve druhém na hraně BC. Přechodným případem je situace, kdy svítící bod X splývá se středem X_0 úsečky DB' a kdy stínem jsou úsečky AB, BM; tu je bod B vrženým stínem průsečíku P úseček AM, BD'. Bod P hraje v úloze důležitou roli pro kteroukoli polohu bodu X na úsečce DB'; označíme Y bod, který je vrženým stínem bodu P z bodu X na povrch krychle.

a) Bod Y padne na úsečku BB' v případě, že X je bodem úsečky X_0D; b) bod Y padne na úsečku BD v případě, že X' je bodem úsečky X_0B'.

Případ a). Vržený stín bodu P pro případ, že je svítící bod $X \equiv D$, označme Q; leží v rovině $PADM$, a protože jsou stěny $ADD'A'$, $BCC'B'$ rovnoběžné, jsou rovnoběžné i průsečnice AD, MQ roviny $PADM$ s oběma těmito stěnami. Protože M je střed stěny $BCC'B'$, plyne odtud, že Q je středem úsečky BB'.

Pohybuje-li se bod X z bodu D do X_0, pohybuje se bod Y z bodu Q do B; pro $X \equiv X_0$ je $Y \equiv B$. Lomené čáry AYM pokryjí tedy v rovinách ABB', BCC' trojúhelníky ABQ a BMQ.

Případ b). Vržený stín Y' bodu P pro případ, že svítící bod X' náleží úsečce X_0B', padne do úsečky BR, kde R je vržený stín bodu P pro případ, že je $X' \equiv B'$, tj. R je průsečík úhlopříček AC, BD stěny $ABCD$. V tomto případě je stínem lomená čára $AM'M$, kde M' je průsečík přímek AY', BC. Tyto lomené čáry v rovinách ABC, BCC' pokryjí trojúhelníky ABC a BCM;

v rovině BCC' dostaneme celkem lichoběžník $BCMQ$ (viz případ a).

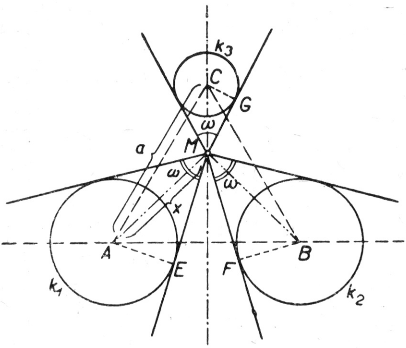
Obsah čtverce $ABCD$ je 1 (plošných jednotek); trojúhelníky ABQ, BMQ, BCM, ABC mají po řadě obsahy $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, a součet $\frac{9}{8}$ těchto obsahů je větší než 1.

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a. Dále jsou dány dva kruhy $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ se středy A, B a o poloměrech 1 a kruh $\mathbf{K}_3$ se středem C a o poloměru $r = \frac{1}{2}$. Bod M je takový bod trojúhelníku ABC, ze kterého je vidět kruhy $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ pod zornými úhly téže velikosti.

Vypočtěte vzdálenosti MA, MB, MC a proveďte diskusi vzhledem k číslu a.

Řešení. a) Označení je patrné z obr. 4a. Je-li bod M řešením úlohy, je

$$\triangle AME \sim \triangle CMG\,,$$



Obr. 4a

neboť

$$\sphericalangle MEA = \sphericalangle MGC = 90^\circ\,, \quad \sphericalangle AME = $$
$$= \sphericalangle CMG = \frac{1}{2}\omega\,.$$

Odtud plyne

$$\frac{AM}{CM} = \frac{AE}{CG} = 2\,. \tag{1}$$

Dále je podle věty *suu*

$$\triangle AME \cong \triangle BMF\,,$$

tj.

$$AM = BM\,. \tag{2}$$

Označíme-li $AM = x$, je podle (1), (2)

$$AM = BM = x\,, \quad CM = \frac{1}{2}x\,. \tag{2'}$$

Užijeme kosinové věty na trojúhelník ACM; vyjde

$$x^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2\,.\,\frac{1}{2}x\,.\,a\,.\cos 30^\circ; \tag{3}$$

je totiž $\sphericalangle ACM = 30^\circ$, neboť bod M leží podle (2) na ose úsečky AB. Úpravou vztahu (3) dostaneme pro neznámou x kvadratickou rovnici

$$3x^2 + 2ax\sqrt{3} - 4a^2 = 0\,. \tag{4}$$

Její diskriminant $D = 60a^2$ je kladné číslo. Kořeny rovnice (4) jsou

$$x = \frac{-2a\,.\sqrt{3} \pm 2\,.\sqrt{15}a}{6} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}\,a\,. \tag{5}$$

Záporný kořen (5) nemůže být řešením úlohy, zbývá tedy jediné možné řešení

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a . \tag{6}$$

Tím je ukončen rozbor úlohy.

b) Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABM tak, aby platilo (2′), kde x je dáno vzorcem (6), a aby bod M ležel v polorovině ABC. Je to možné, neboť platí $2x > a$, jak se snadno přesvědčíme tímto výpočtem: z nerovnosti

$$2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a > a \tag{7}$$

vyplývá postupně

$$2(\sqrt{5} - 1) > \sqrt{3} ,$$

$$\sqrt{20} > 2 + \sqrt{3} .$$

Poslední nerovnost je pravdivá, neboť je $\sqrt{20} > 4 > 2 + \sqrt{3}$; obrácením postupu pak dostaneme nerovnost (7).

Bod M takto sestrojený padne dovnitř trojúhelníku ABC, neboť je

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{\sqrt{5} - 1}{3} \cdot a \sqrt{3} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \cdot a <$$

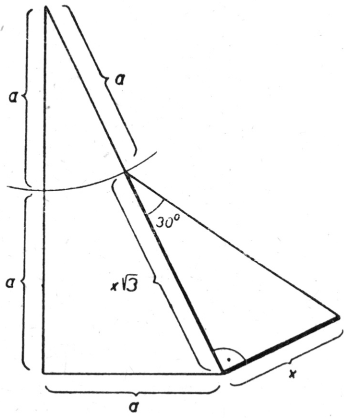
$$< \frac{4 - 1{,}6}{3} \cdot a = 0{,}8a < a .$$

Bod M padne vně kružnic k_1, k_2 (a tudíž i vně k_3), právě tehdy, platí-li $x > 1$, neboli podle (6)

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a > 1 ,$$

tj. platí-li

$$a > \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{5}+1}{4} \doteq 1{,}4\,.$$



Obr. 4b

Platí-li nerovnost (8), je bod M řešením úlohy, a to jediným, jak vyplývá z obrácení postupu.

Nerovnost (8) je tedy podmínkou řešitelnosti úlohy. Konstrukci ukazuje obr. 4b.

6. Najděte všechna čísla x, pro něž platí nerovnosti

$$0 \leqq x \leqq 2\pi\,, \tag{1}$$

$$\cos 2x \geqq \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - x\right). \tag{2}$$

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že $x \neq \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi,$

$\frac{3}{4}\pi$ a $\frac{7}{4}\pi$. Je-li x řešením, pak z nerovnosti (2) postupně plyne

$$2\cos^2 x - 1 \geqq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \tag{2'}$$

$$\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1 \geqq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \geqq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

$$\frac{(1 - \operatorname{tg} x)[(1 + \operatorname{tg} x)^2 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)]}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} x)} \geqq 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \geqq 0,$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) \geqq 0, \tag{2''}$$

neboť pro x různé od $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ je $1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$.

Jsou dvě možnosti, jak splnit (2″), a tím i (2′):
Případ [1]. Nechť zároveň platí

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) \geqq 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} x \geqq 0. \tag{4}$$

Ze (4) pro x vzhledem k (1) dostáváme intervaly

$$\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi\right), \left\langle \pi, \frac{3}{2}\pi\right). \tag{4'}$$

Místo (3) pišme $\operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \leqq 0$; tento vztah bez ohledu na (1) platí právě tehdy, je-li

$$\frac{1}{2}\pi + n\pi < x - \frac{1}{4}\pi \leqq \pi + n\pi ,$$

kde n je libovolné celé číslo [které dodatečně omezíme požadavkem (1)]. Odtud

$$\frac{3}{4}\pi + n\pi < x \leqq \frac{5}{4}\pi + n\pi . \tag{5}$$

Omezme n vzhledem k požadavku (1):
Pro $n = -1$ již se zřetelem k (1) dostáváme

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}\pi . \tag{6}$$

Pro $n = 0$ máme

$$\frac{3}{4}\pi < x \leqq \frac{5}{4}\pi . \tag{6'}$$

Pro $n = 1$ vzhledem k (1) je

$$\frac{7}{4}\pi < x \leqq 2\pi . \tag{6''}$$

Společné části intervalů (4′) a (6) až (6″) jsou

$$\left\langle 0, \frac{1}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{5}{4} \right\rangle \pi . \tag{6'''}$$

Případ [2]. Nechť platí zároveň

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) \leqq 0 , \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} x \leqq 0 . \tag{8}$$

Z (8) plynou intervaly

$$\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right\rangle, \quad \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right\rangle. \tag{8'}$$

Místo (7) pišme $\operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \geqq 0$, a tedy bez zřetele k (1) je

$$n\pi \leqq x - \frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi + n\pi,$$

kde n je libovolné celé číslo; odtud dostáváme

$$\frac{1}{4}\pi + n\pi \leqq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi.$$

Volba čísla n je omezena požadavkem (1); jsou tyto dvě možnosti:

Pro $n = 0$ dostáváme

$$\frac{1}{4}\pi \leqq x < \frac{3}{4}\pi; \tag{9}$$

pro $n = 1$

$$\frac{5}{4}\pi \leqq x < \frac{7}{4}\pi. \tag{9'}$$

Společné části intervalů (8′) a (9), (9′) jsou:

$$\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right). \tag{9''}$$

b) Předem jsme vyloučili případy $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; první dvě hodnoty však vyhovují (1) a (2), další dvě nikoli. Dostáváme tedy intervaly

$$\left\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \right), \left\langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \right). \qquad (9''')$$

Pro čísla x z intervalů (6'''), (9'') lze postup obrátit, takže (6'''), (9'') jsou všechna požadovaná řešení úlohy.

Jiné řešení. Daný vztah (2) upravujme takto:

$$\cos 2x \geqq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \qquad (10)$$

$$\cos 2x \geqq \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x},$$

$$\cos 2x \geqq \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x}, \qquad (11)$$

$$\cos 2x \geqq \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}. \qquad (12)$$

Úpravy byly provedeny za předpokladu, že je x různé od čísel

$$\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \text{ [viz (10)]}, \quad \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \qquad (13)$$

která až na $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ vyhovují (2).

Nerovnost (12) lze splnit dvěma způsoby:

P ř í p a d [1]. Nechť je $\cos 2x > 0$; pak ze (12) plyne postupně

$$\cos^2 2x \geqq 1 - \sin 2x,$$

$$\sin 2x\,(1 - \sin 2x) \geqq 0.$$

Druhý činitel vlevo je vždy nezáporný a máme tedy celkem požadavky

$$\sin 2x \geqq 0\,, \quad \cos 2x > 0\,.$$

Ty platí při libovolném celém n pro x z intervalů

$$n\,.\,2\pi \leqq 2x < \frac{1}{2}\pi + n\,.\,2\pi$$

neboli

$$n\pi \leqq x < \frac{1}{4}\pi + n\pi\,.$$

Vzhledem k (1) jsou možné tyto dvě volby čísla n:
pro $n = 0$ máme

$$0 \leqq x < \frac{1}{4}\pi\,;$$

pro $n = 1$

$$\pi \leqq x < \frac{5}{4}\pi\,.$$

Připojíme-li přípustné hodnoty z (13), obdržíme intervaly

$$\left\langle 0, \frac{1}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{5}{4}\pi \right\rangle. \tag{14}$$

P ř í p a d [2]. Nechť je $\cos 2x < 0$; pak ze (12) postupně plyne

$$\cos^2 2x \leqq 1 - \sin 2x\,,$$

$$\sin 2x\,(1 - \sin 2x) \leqq 0\,,$$

kde druhý činitel vlevo je nezáporný, a tudíž celkem

$$\sin 2x \leqq 0\,, \quad \cos 2x < 0\,.$$

Ty platí při libovolném celém n pro x z intervalů

$$\pi + n\,.\,2\pi \leqq 2x < \frac{3}{2}\pi + n\,.\,2\pi$$

neboli

$$\frac{1}{2}\pi + n\pi \leqq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi\,.$$

Vzhledem k požadavku (1) jsou možné tyto volby čísla n:

pro $n = 0$ máme

$$\frac{1}{2}\pi \leqq x < \frac{3}{4}\pi\,;$$

pro $n = 1$

$$\frac{3}{2}\pi \leqq x < \frac{7}{4}\pi\,.$$

Podle poznámky k (13) čísla $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ vskutku nevyhovují (1) a tak dostáváme intervaly

$$\left\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \right), \left\langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \right). \tag{15}$$

Postup lze pro čísla x z intervalů (14), (15), pokud jsou různá od čísel (13), obrátit. Tím jsou tedy nalezena všechna řešení.

2. Úlohy II. kola kategorie A

1. Riešte nerovnosť

$$3 \operatorname{cotg} x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \geqq 3 - \sqrt{3}\,. \tag{1}$$

Riešenie. Ak x je riešením nerovnosti (1), je nutne

$$x \neq k\,.\,90^\circ\,, \tag{2}$$

kde k je ľubovoľné celé číslo. Upravujme postupne nerovnosť (1) pre x, ktoré je jej riešením:

$$\frac{3}{\operatorname{tg} x}(1 - \operatorname{tg} x) + \sqrt{3}\,(1 - \operatorname{tg} x) \geqq 0\,,$$

$$(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(\frac{3}{\operatorname{tg} x} + \sqrt{3}\right) \geqq 0\,,$$

$$3(1 - \operatorname{tg} x)\,.\left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \geqq 0\,,$$

$$(1 - \operatorname{tg} x)\,.\left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \geqq 0\,. \qquad (3)$$

Rozlišujme teraz dve možnosti (v ďalšom je n ľubovoľné celé číslo):

P r í p a d [1]. Nech obidva činitele na ľavej strane vzťahu (3) sú nezáporné, t. j.

$$\operatorname{tg} x \leqq 1, \quad \operatorname{cotg} x \geqq -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,.$$

Musí teda súčasne platiť jednak [vzhľadom na (2)] jedna z nerovností

$$n\,.\,180^\circ < x \leqq 45^\circ + n\,.\,180^\circ,$$
$$90^\circ + n\,.\,180^\circ < x < 180^\circ + n\,.\,180^\circ$$

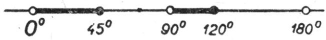
a jednak jedna z nerovností

$$n\,.\,180^\circ < x < 90^\circ + n\,.\,180^\circ,$$
$$90^\circ + n\,.\,180^\circ < x \leqq 120^\circ + n\,.\,180^\circ\,.$$

Spoločné časti týchto intervalov sú (pozri obr. 5 pre $n = 0$):

$$n \,.\, 180^\circ < x \leqq 45^\circ + n \,.\, 180^\circ \,,$$

$$90^\circ + n \,.\, 180^\circ < x \leqq 120^\circ + n \,.\, 180^\circ \,. \qquad (4)$$



Obr. 5

Prípad [2]. Nech oba činitele na ľavej strane vzťahu (3) sú nekladné, t. j. $\operatorname{tg} x \geqq 1$, $\operatorname{cotg} x \leqq -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Musí teda platiť jednak [vzhľadom na (2)] nerovnosť

$$45^\circ + n \,.\, 180^\circ \leqq x < 90^\circ + n \,.\, 180^\circ$$

a súčasne nerovnosť

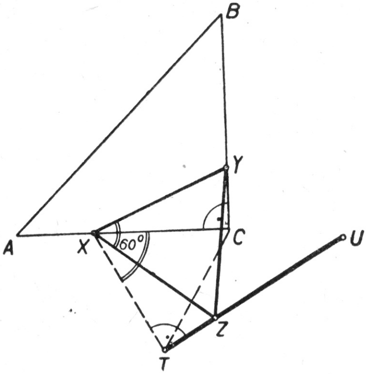
$$120^\circ + n \,.\, 180^\circ \leqq x < 180^\circ + n \,.\, 180^\circ.$$

Tieto dva intervaly však nemajú spoločnú časť.

Od čísla x daného niektorou z nerovností (4) možno prejsť obrátením postupu k (1). Vzťahom (4) sú teda dané všetky riešenia danej nerovnosti.

2. V rovině je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Vyšetřte množinu všech vrcholů Z rovnostranných trojúhelníků XYZ, které vzniknou, když bod X probíhá vnitřek úsečky CA, bod Y probíhá vnitřek úsečky CB a polorovina XYZ obsahuje bod C.

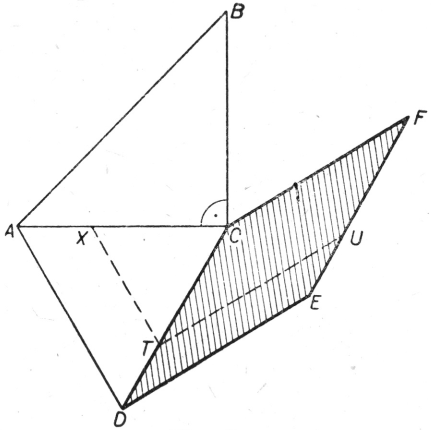
Řešení (obr. 6). Zvolme pevný bod X mezi body A, C a nechť je XYZ jeden z trojúhelníků, který splňuje podmínky úlohy. Pak bod Z vznikne otočením bodu Y kolem X o úhel velikosti $60°$v záporném smyslu (viz



Obr. 6

obr. 6). Probíhá-li bod Y vnitřek úsečky BC, probíhá bod Z vnitřek úsečky TU, která vznikne otočením úsečky CB kolem X o úhel velikosti $60°$ v záporném smyslu. Bod T vznikne tedy otočením bodu C kolem X o úhel velikosti $60°$ v záporném smyslu, tj. bod T je vrcholem rovnostranného trojúhelníku XCT, ležícího vně trojúhelníku ABC.

Probíhá-li nyní bod X vnitřek úsečky AC, probíhá bod T vnitřek úsečky CD; přitom D je vrchol rovnostranného trojúhelníku ACD sestrojeného v polorovině opačné k polorovině ACB (obr. 7). Úsečky TU jsou navzájem rovnoběžné (je $TU \perp XT // AD$) a leží všechny v polorovině opačné k CDA. Všechny úsečky TU vyplní kosočtverec $CDEF$; jeho strany DE a CF vznikly po řadě otočením úsečky CB kolem středů A, C o úhel velikosti 60° v záporném smyslu. Hledaný útvar, vyplněný vrcholy Z, je tedy vnitřek kosočtverce $CDEF$.



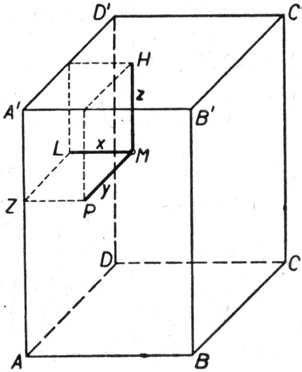
Obr. 7

3. Uvnitř kvádru o daných rozměrech a, b, c zvolme bod M a sestrojme jeho obrazy v souměrnostech vzhledem k rovinám, ve kterých leží stěny daného kvádru. Obdržíme tak 6 vrcholů osmistěnu, který má právě tři navzájem kolmé tělesové úhlopříčky.

Vypočtěte objem tohoto osmistěnu i objem tělesa, které je společnou částí osmistěnu a daného kvádru. Dokažte, že oba tyto objemy nezávisí na volbě bodu M.

Řešení. I. Uvažujme tři navzájem kolmé roviny stěn kvádru (obr. 8), které jdou bodem A', a označme vzdálenosti bodu M od těchto stěn x, y, z (levá, přední, horní stěna), což jsou kladná čísla. Jsou-li $a = AB$, $b = AD$,

$c = AA'$ rozměry kvádru, pak $a - x$, $b - y$, $c - z$ jsou vzdálenosti bodu M od rovin stěn kvádru (pravé, zadní, dolní) jdoucích bodem C. Označme $M_1, \ldots, M_6$ obrazy bodu M v uvažovaných rovinových souměrnostech, a to



Obr. 8

M_1, M_2, M_3 podle stěn levé, přední a horní, jdoucích bodem A', a M_4, M_5, M_6 podle stěn pravé, zadní a dolní, jdoucích bodem C; jsou tedy M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 tělesové úhlopříčky vzniklého osmistěnu. Platí

$$MM_1 = 2x,\ MM_2 = 2y,\ MM_3 = 2z,$$

$$MM_4 = 2(a - x),\ MM_5 = 2(b - y),\ MM_6 = 2(c - z);$$

tedy

$$M_1M_4 = 2x + 2(a - x) = 2a,\ M_2M_5 = 2b,\ M_3M_6 = 2c.$$

Objem kvádru je $K = abc$. Objem V osmistěnu vypočítáme jako objem dvojjehlanu, např. s podstavou $M_1M_2M_4M_5$ (což je čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami

M_1M_4, M_2M_5 — viz obr. 9) a s hlavními vrcholy M_3, M_6 jehlanů, jejichž výšky jsou $2z$, $2(c - z)$. Označme P obsah zmíněného čtyřúhelníka; platí

$$P = \frac{1}{2} M_1M_4 \, . \, M_2M_5 = \frac{1}{2} \, . \, 2a \, . \, 2b = 2ab$$

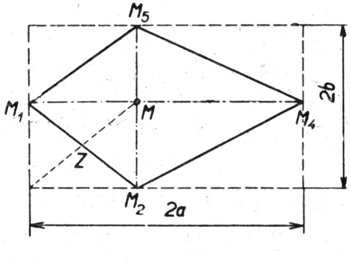
(čtyřúhelník snadno doplníme na obdélník s rozměry M_1M_4, M_2M_5 a s dvojnásobným obsahem $4ab$ — viz obr. 9). Součet objemů jehlanů je

$$V = \frac{1}{3} P \, . \, MM_3 + \frac{1}{3} P \, . \, MM_6 = \frac{1}{3} P \, . \, (MM_3 + MM_6) =$$

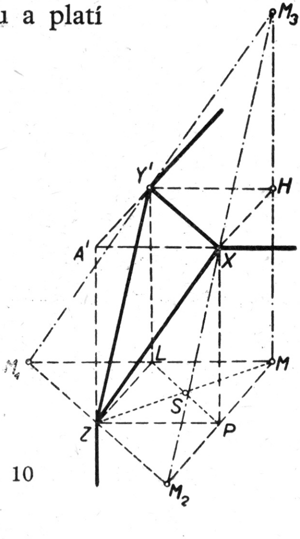
$$= \frac{1}{3} P \, . \, M_3M_6 = \frac{1}{3} 2ab \, . \, 2c = \frac{4}{3} K \, .$$

Objem osmistěnu je nezávislý na poloze bodu M uvnitř kvádru a platí

$$V = \frac{4}{3} K.$$



Obr. 9



Obr. 10

II. Označme L, P, H paty kolmic z bodu M na stěny levou, přední a horní, jdoucí bodem A' (obr. 10). Trojúhelník LMP, kde $\sphericalangle M = 90°$, doplníme na obdélník $LMPZ$ se středem S; přitom bod Z leží na hraně AA' kvádru. Stejnolehlost o středu M a poměru 2 převádí trojúhelník LMP v trojúhelník M_1MM_2 a střed S strany LP (a strany MZ) převede ve střed strany M_1M_2, což je bod Z. Protne tedy hrana M_1M_2 osmistěnu hranu $A'A$ kvádru. To se při vrcholu A' kvádru opakuje i pro hrany M_2M_3, $A'B'$; M_3M_1, $A'D'$. Označme $M_2M_3 \,.\, A'B' \equiv X$; $M_3M_1 \,.\, A'D' \equiv Y$; pak platí

$$A'X = x, \; A'Y = y, \; A'Z = z\,.$$

Čtyřstěn $A'XYZ$ odříznutý od kvádru stěnou $M_1M_2M_3$ osmistěnu má objem $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}xy\right)z = \frac{1}{6}xyz$. Obdobných čtyřstěnů je celkem osm (při každém vrcholu kvádru právě jeden); označme T součet jejich objemů; vzhledem k právě provedenému výpočtu platí, že

$$6T = xyz + xy(c - z) + x(b - y)z + (a - x)yz + \\ + x(b - y)(c - z) + (a - x)y(c - z) + (a - x)(b - y)z + \\ + (a - x)(b - y)(c - z) = abc\,.$$

Je tedy $T = \frac{1}{6}K$ a objem tělesa společného kvádru a osmistěnu je $K - \frac{1}{6}K = \frac{5}{6}K$.

Závěr. Objem osmistěnu je $\frac{4}{3}$ objemu kvádru a objem společného tělesa je roven $\frac{5}{6}$ objemu kvádru.

4. Ak sú a, b, c, d prirodzené čísla, potom súčin

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)$$

nie je prirodzené číslo. Dokážte.

Riešenie. Dôkaz tvrdenia prevedieme sporom. Nech platí

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right) = k, \tag{1}$$

kde k je prirodzené číslo. Po úprave dostaneme

$$(ad - bc)^2 = kabcd\,. \tag{2}$$

Ak položíme $ad = x$, $bc = y$, potom (2) možno písať vo tvare

$$(x - y)^2 = kxy\,.$$

Pretože je $x > 0$, $y > 0$, vyplýva z toho

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - (2 + k)\frac{x}{y} + 1 = 0\,. \tag{3}$$

Číslo xy je nutne racionálne a preto vo vzorci

$$\frac{1}{2}\left(2 + k \pm \sqrt{D}\right)$$

pre korene rovnice (3) je diskriminant $D = (2 + k)^2 - 4$ (ktorý musí byť celým číslom) nutne rovný druhej mocnine nezáporného celého čísla m, t. j. $(2 + k)^2 - 4 = m^2$ čiže $(2 + k)^2 - m^2 = 4$ a teda

$$(2 + k + m)\,.\,(2 + k - m) = 4\,.$$

Prvý činiteľ na ľavej strane je kladné číslo, preto je nutne kladný aj druhý činiteľ. Sú to okrem toho čísla párne, pretože ich súčin je 4 a rozdiel je $2m$. Jediná možnosť je $2 + k + m = 2$, $2 + k - m = 2$, t. j. $k = 0$, čo je však spor s predpokladom, že číslo k je prirodzené.

Iné riešenie. Dokážme, že predpoklad (1), kde k je prirodzené číslo, vedie k sporu.

Bez ujmy na všeobecnosti možno predpokladať, že dvojica prirodzených čísel a, b i dvojica c, d sú nesúdeliteľné čísla. Nech P je najväčší spoločný deliteľ čísel a, c a Q najväčší spoločný deliteľ čísel b, d. Možno teda položiť

$$a = PA, \; c = PC, \; b = QB, \; d = QD\,, \tag{4}$$

kde A, B, C, D sú nejaké prirodzené čísla, pričom čísla A, C i čísla B, D sú nesúdeliteľné. Po dosadení zo (4) do (1) postupne dostaneme

$$\left(\frac{AP}{QB} - \frac{CP}{QD}\right) \cdot \left(\frac{QD}{PC} - \frac{QB}{PA}\right) = k$$

čiže

$$\left(\frac{A}{B} - \frac{C}{D}\right) \cdot \left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A}\right) = k\,,$$

$$(AD - BC)^2 = k\,ABCD\,. \tag{5}$$

Nech niektoré z čísel A, B, C, D je rôzne od čísla 1, napr. číslo A. Označme p jeho prvočíselného deliteľa. Potom je pravá strana rovnosti (5) deliteľná číslom p a teda aj straná ľavá. Tam je však číslom p děliteľné AD, preto aj BC je nutne deliteľné číslom p. Je tedy nutne buď dvojica A, B alebo dvojica A, C deliteľná číslom p, čo je spor.

Preto nutne platí $A = B = C = D = 1$. Je teda $a = P = c$, $b = Q = d$, čo je spor s tým, že čísla a, c i čísla b, d sú nesúdeliteľné s výnimkou prípadu: $a = c = 1$, $b = d = 1$. V tom prípade však z (1) vyplýva $k = 0$, čo je spor s tým, že k je prirodzené číslo. Tým je dôkaz tvrdenia prevedený.

3. Úlohy III. kola kategorie A

1. Je-li n celé nezáporné číslo, potom číslo

$$5^{2n+1} \,.\, 2^{n+2} + 3^{n+2} \,.\, 2^{2n+1}$$

je dělitelné devatenácti. Dokažte.

První řešení. Dané číslo lze psát ve tvaru

$$5 \,.\, 2^2 \,.\, 5^{2n} \,.\, 2^n + 3^2 \,.\, 2 \,.\, 3^n \,.\, 2^{2n} = 20 \,.\, 50^n + 18 \,.\, 12^n =$$
$$= 19 \,.\, 50^n + 19 \,.\, 12^n + 50^n - 12^n \,.$$

Protože číslo $50^n - 12^n$ je pro každé celé $n \geqq 0$ dělitelné číslem $50 - 12 = 38 = 2 \,.\, 19$, je dané číslo dělitelné devatenácti pro každé celé $n \geqq 0$.

Druhé řešení matematickou indukcí. Pro $n = 0$ platí $5^1 \,.\, 2^2 + 3^2 \,.\, 2^1 = 20 + 18 = 38 = 2 \,.\, 19$, což je číslo dělitelné devatenácti.

Předpokládejme nyní, že pro některé celé nezáporné číslo n je číslo $5^{2n+1} \,.\, 2^{n+2} + 3^{n+2} \,.\, 2^{2n+1}$ dělitelné devatenácti a uvažujme číslo $5^{2n+3} \,.\, 2^{n+3} + 3^{n+3} \,.\, 2^{2n+3}$, jež stručně označíme A. Platí

$$A = 5^{2n+1} \,.\, 5^2 \,.\, 2^{n+2} \,.\, 2 + 3^{n+2} \,.\, 3 \,.\, 2^{2n+1} \,.\, 2^2 =$$
$$= 50 \,.\, 5^{2n+1} \,.\, 2^{n+2} + 12 \,.\, 3^{n+2} \,.\, 2^{2n+1} =$$
$$= 38 \,.\, 5^{2n+1} \,.\, 2^{n+2} + 12(5^{2n+1} \,.\, 2^{n+2} + 3^{n+2} \,.\, 2^{2n+1}) \,.$$

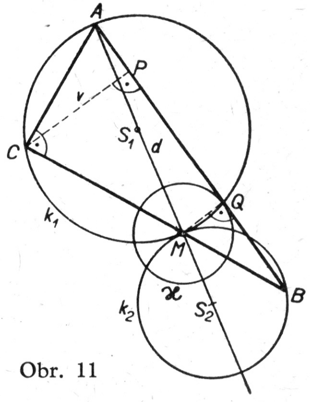
Číslo 38 je dělitelné devatenácti a také poslední číslo v závorce je podle indukčního předpokladu dělitelné devatenácti. Z toho plyne, že též číslo A je dělitelné devatenácti. Tím je důkaz podán.

2. V rovine je daná úsečka AM dĺžky d. Ďalej je dané kladné číslo v.

Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, ktorého výška kolmá k prepone má dĺžku v a ktorého odvesna BC je bodom M rozdelená v pomere $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{2}{3}$. Preveďte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na čísla d, v.

Riešenie. Podľa obrátenej Thaletovej vety leží vrchol C každého z hľadaných trojuholníkov na kružnici $k_1 \equiv \left(S_1; \dfrac{d}{2}\right)$ zostrojenej nad priemerom AM. Rovnoľahlosť so stredom M a koeficientom $-\dfrac{2}{3}$ prevedie bod C do bodu B a súčasne kružnicu k_1 do kružnice $k_2 \equiv \left(S_2; \dfrac{d}{3}\right)$. Bod B leží teda na kružnici k_2.

Označme po rade P, Q päty kolmíc spustených z bodov C, M na priamku AB. Potom je $CP = v$ a rovnoľahlosť so stredom B a koeficientom $\dfrac{2}{5}$ prevedie body C, P po rade do bodov M, Q. Je teda $MQ = \dfrac{2}{5}v$. Z toho vyplýva: Priamka AQ, na ktorej leží vrchol B, je dotyčnicou kružnice $\varkappa \equiv \left(M; \dfrac{2}{5}v\right)$, vedenej bodom A (obr. 11).



Obr. 11

Tým je prevedený r o z b o r ú l o h y. Predpis k o n š t r u k c i e je takýto: Zostrojíme kružnicu k_1, na polpriamke AM zostrojíme bod S_2 tak, aby bolo $AS_2 = \dfrac{4}{3}d$ a opíšeme kružnicu k_2. Potom zostrojíme kružnicu $\varkappa$, vedieme k nej dotyčnice z bodu A a určíme spoločné body týchto dotyčnic a kružnice k_2. Tým sú nájdené všetky body B. Vrcholy C hľadaného trojuholníka ľahko doplníme.

Skúška. Z predchádzajúcej konštrukcie je vidieť, že body A, B, C, pokud existujú, sú nekolineárne, že trojuholník ABC je pravoúhlý (C leží na k_1), že platí $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3}$ (C leží na k_1, B na k_2) a že vzdialenosť vrcholu C od priamky AB je v $\left(\text{je totiž } MQ = \frac{2}{5}v\right)$. Trojuholník splňuje teda podmienky úlohy.

Diskusia. Kružnice k_1, k_2, $\varkappa$ možno narysovať vždy. Dotyčnica kružnice $\varkappa$ prechádzajúca bodom A má s kružnicou k_2 spoločný aspoň jeden bod len vtedy, ak bod A leží zvonku kružnice $\varkappa$, t. j. ak platí:

$$d > \frac{2}{5}v\,. \tag{1}$$

Dotyčnica vedená ku kružnici $\varkappa$ z vonkajšieho bodu A s kružnicou k_2 spoločný aspoň jeden bod práve vtedy, ak je

$$\frac{\frac{2}{5}v}{d} \leqq \frac{\frac{d}{3}}{\frac{4}{3}d}\,. \tag{2}$$

Nerovnosti (1), (2) upravíme na tvar

$$5d > 2v\,, \quad 8v \leqq 5d\,. \tag{3}$$

Ak je splnená druhá z nerovností (3), je splnená aj prvá a úloha je riešiteľná. Podmienka riešiteľnosti úlohy je teda

$$\frac{v}{d} \leqq \frac{5}{8}\,.$$

Ak nastane nerovnosť, má úloha štyri riešenia (dve dvojice trojuholníkov súmerne združených podľa priamky AM). Ak nastane rovnosť, má úloha dve riešenia (jednu dvojicu trojuholníkov súmerne združených podľa priamky AM).

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p\,, \tag{1}$$

kde p je dané reálné číslo.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslu p.

Řešení. Předpokládejme, že x je řešením dané rovnice (1). Je pak tedy jednak

$$p \geqq 0\,, \tag{2}$$

jednak $x^2 - 2|x| - 1 \geqq 0$, neboli

$$(x^2 - 1)^2 \geqq 4x^2\,. \tag{3}$$

Umocněním obou stran v (1) dostaneme

$$x^2 - 2x - 1 + x^2 + 2x - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2$$

neboli

$$2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2 - 2(x^2 - 1)\,. \tag{4}$$

Odtud vyplývá, že

$$p^2 \geqq 2(x^2 - 1)\,. \tag{5}$$

Umocněním (4) dostaneme

$$4[(x^2 - 1)^2 - 4x^2] = p^4 - 4p^2(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)^2,$$

čili

$$4x^2(p^2 - 4) = p^2(p^2 + 4)\,. \tag{6}$$

Je proto

$$p^2 - 4 > 0 \tag{7}$$

a naše řešení x je jedno z čísel

$$x_{1,2} = \pm \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2+4}{p^2-4}}. \tag{8}$$

Z (5) a (8) plyne

$$p^2 \geqq 2\left(\frac{p^2(p^2+4)}{4(p^2-4)} - 1\right)$$

neboli vzhledem k (7)

$$2(p^2-4)p^2 \geqq p^2(p^2+4) - 4(p^2-4)\,.$$

Odtud vyplývá

$$p^4 - 8p^2 - 16 \geqq 0\,,$$

tj.

$$[p^2 - 4(1+\sqrt{2})]\,[p^2 + 4(\sqrt{2}-1)] \geqq 0\,.$$

Je proto

$$p^2 \geqq 4(1+\sqrt{2})$$

neboli vzhledem k (2)

$$p \geqq 2\sqrt{1+\sqrt{2}}\,. \tag{9}$$

Tím jsme dokázali: Má-li rovnice (1) řešení, je řešením jedno z čísel (8) a pro číslo p platí nerovnost (9). Ukažme nyní, že je-li pro číslo p splněna nerovnost (9), pak každé z obou čísel (8) je řešením.

Je-li totiž splněna podmínka (9), pak čísla x_1, x_2 daná vztahem (8) existují a vyhovují vztahům (6), (5), tedy i (4). Protože je splněna rovnost (4), platí i (3), obě odmocniny v (1) mají smysl a platí i (1).

Celkem tedy dostáváme závěr:

Daná rovnice má řešení právě tehdy, je-li $p \geqq 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Řešení jsou dvě a jsou dána vzorcem

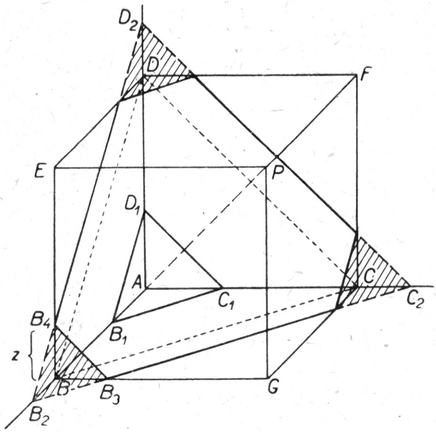
$$x_{1,2} = \pm \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2+4}{p^2-4}}.$$

4. Nádoba má tvar duté krychle umístěné tak, že její tělesová úhlopříčka AP je ve svislé poloze, a platí $AP = 1$. V nádobě je voda; část tělesové úhlopříčky AP, která je ponořena ve vodě, má délku x.

Vyjádřete objem y vody v nádobě pomocí čísla x pro tyto dva případy:

a) $0 < x \leqq \frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3} < x \leqq \frac{1}{2}$.

Řešení (obr. 12). 1. Označme B, C, D vrcholy krychle, které leží na hranách vycházejících z vrcholu A, dále



Obr. 12

E, F, G vrcholy krychle, které leží na hranách vycházejících z vrcholu P. Roviny BCD, EFG dělí tělesovou úhlopříčku na tři úsečky délky $\frac{1}{3}$. To snadno dokážeme. $ABCD$ je pravidelný jehlan trojboký, jehož podstava BCD je rovnostranný trojúhelník o straně délky $\sqrt{\frac{2}{3}}$, jeho pobočné stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, jejichž odvěsny mají délku $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Přímka AP je kolmá ke každé z přímek BC, CD, DB, proto je kolmá k rovině BCD a obsahuje příslušnou výšku v jehlanu $ABCD$. Vypočteme dvojím způsobem objem tohoto jehlanu; dostaneme

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{v}{3}.$$

Odtud vyjde po úpravě $v = \frac{1}{3}$, což jsme chtěli dokázat. Ze souměrnosti krychle podle průsečíku jejích tělesových úhlopříček vyplývá, že také rovina EFG dělí tělesovou úhlopříčku AP v poměru 1:2.

2. Pokud je číslo x v intervalu $0 < x \leq \frac{1}{3}$, tvoří voda v nádobě pravidelný trojboký jehlan $AB_1C_1D_1$; jeho podstavou je rovnostranný trojúhelník $B_1C_1D_1$, příslušná výška jehlanu má délku x a pobočné stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnou délky s. Jako v odst. 1 vypočteme dvojím způsobem objem tohoto jehlanu; dostaneme

$$y = \frac{1}{6}s^3 = \frac{(s\sqrt{2})^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{x}{3}.$$

Z rovnosti objemů vyjde po úpravě $s = x\sqrt{3}$ a dále

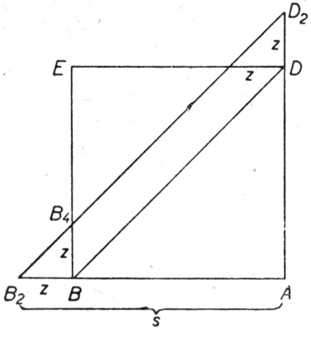
$$y = \frac{1}{2} x^3 \sqrt{3}. \tag{1}$$

3. Je-li číslo x v intervalu $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$, vytvoří voda v nádobě těleso, jež dostaneme, oddělíme-li od pravidelného trojbokého jehlanu $AB_2C_2D_2$ tři navzájem shodné jehlany (vyšrafované na obrázku 12).

Jako v odst. 2 označme $AB_2 = AC_2 = AD_2 = s$; stejně jako dříve dostaneme

$$s = x\sqrt{3}. \tag{2}$$

Objem jehlanu $AB_2C_2D_2$ je tedy opět $\frac{1}{2} x^3 \sqrt{3}$. Každý z vyšrafovaných jehlanů je pravidelný jehlan trojboký; délku jeho pobočné hrany označme z. Situaci v rovině ABD znázorňuje obr. 13. Protože je $AB = AD = \frac{1}{\sqrt{3}}$, je podle (2) $z = BB_2 = s - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(3x - 1)$. Objem každ-



Obr. 13

dého z vyšrafovaných jehlanů je $\frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(3x-1)^3 =$ $= \frac{\sqrt{3}}{54}(3x-1)^3$. Objem vody v případě 3 je tedy

$$y = \frac{1}{6}s^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{2}x^3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}(3x-1)^3 .$$

Po úpravě dostaneme

$$y = \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - 9x + 27x^2 - 18x^3) . \qquad (3)$$

Funkce (1), (3) jsou řešením úlohy. Rovnice (3) platí i pro $x = \frac{1}{3}$, jak se přesvědčíme dosazením: z (1) i (3) dostaneme pro $x = \frac{1}{3}$ výsledek $y = \frac{\sqrt{3}}{54}$.

4. Úlohy I. kola kategorie B

1. Řešte nerovnost

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leqq 1 . \qquad (1)$$

Řešení. Nutně je $x \neq 0$. Vztah (1) lze psát

$$\frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leqq 0 . \qquad (2)$$

Nechť je $1 - 2x^2 \geqq 0$, tedy

$$0 < |x| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2} . \qquad (2')$$

Rozlišme případy $x > 0$ a $x < 0$.

Případ [1]. Pro $x > 0$ musí ve (2) být

$$1 - x - \sqrt{1 - 2x^2} \leqq 0 \qquad (2'')$$

neboli

$$1 - x \leqq \sqrt{1 - 2x^2}\,.$$

Vlevo [viz (2′)] je nezáporné číslo, tj. $0 < x \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$; umocněním obou stran nerovnosti na druhou dostaneme postupně

$$1 - 2x + x^2 \leqq 1 - 2x^2\,, \qquad (2''')$$

$$x(3x - 2) \leqq 0\,.$$

Protože je $x > 0$, je nutně $3x - 2 \leqq 0$ neboli

$$0 < x \leqq \frac{2}{3}\,. \qquad (3)$$

Obrácením postupu pro takto stanovené x dospějeme ke (2‴). Tu musí být $1 - 2x^2 \geqq 0$ neboli $\frac{\sqrt{2}}{2} \geqq x$. Připusťme, že platí $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \frac{2}{3}$; umocněním na druhou dojdeme ke vztahu $\frac{1}{2} \leqq \frac{4}{9}$ neboli $\frac{9}{18} \leqq \frac{8}{18}$, což je spor. Lze tedy od (2‴) dále dospět až ke (2″), (2) a (1).

Případ [2]. Pro $x < 0$ musí ve (2) platit

$$1 - x - \sqrt{1 - 2x^2} \geqq 0$$

neboli

$$1 - x \geqq \sqrt{1 - 2x^2}\,. \qquad (4)$$

Vlevo je nutně nezáporné číslo, tj. $1 - x \geqq 0$ a tedy $1 \geqq x$, což je pro $x < 0$ splněno. Umocněme (4) na druhou; postupně dostáváme

$$1 - 2x + x^2 \geqq 1 - 2x^2 , \qquad (4')$$

$$x(3x - 2) \geqq 0 \qquad (4'')$$

a protože je $x < 0$, je nutně $3x - 2 \leqq 0$ neboli

$$x \leqq \frac{2}{3},$$

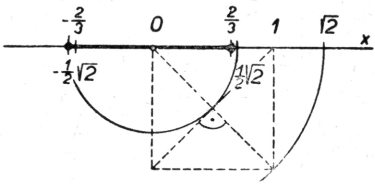
což podle předpokladu platí.

Obrácením postupu pro $x < 0$ od (4″) dospějeme ke (4′); chceme-li přejít ke (4), musíme požadovat, aby bylo $1 - 2x^2 \geqq 0$ neboli $|x| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, což vzhledem k $x < 0$ dává

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leqq x < 0 . \qquad (5)$$

Pak lze již přejít ke (2) a (1).

Z á v ě r. Řešení nerovnosti (1) jsou dána intervaly (3) a (5) (viz obr. 14).



Obr. 14

2. Dokážte, že číslo 48 je deliteľom čísla

$$N = n^2(n + 1)^2(n - 1)(n - 2)$$

pre každé prirodzené číslo $n > 2$.

Riešenie. Platí: $48 = 2^4 . 3$. Číslo N bude deliteľné číslom 48, ak je súčasne deliteľné číslami 3 a 16. No,

$$N = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)n(n + 1),$$

kde napr. čísla $(n - 1)$, n, $(n + 1)$ sú tri bezprostredne za sebou nasledujúce prirodzené čísla, o ktorých je známe, že práve jedno z nich je deliteľné číslom 3.

Teraz rozlišujme dve možnosti:

Prípad [1]. Nech n je párne číslo. Ďalej rozlišujme:

a) Nech $n = 2(2k + 1)$, kde prirodzené číslo $k \geqq 1$ (vzhľadom na predpoklad $n > 2$). Potom je $n - 2 = 2(2k + 1) - 2 = 4k$, t. j. je deliteľné štyrmi. Každý z činiteľov n^2, $n - 2$ čísla

$$N = (n - 2)(n - 1)n^2(n + 1)^2 \qquad (1)$$

je deliteľný štyrmi a teda číslo N je deliteľné číslom $4 . 4 = 16$.

b) Nech je $n = 2 . 2k = 4k$, kde prirodzené číslo $k \geqq 1$ (opäť vzhľadom na predpoklad $n > 2$). Potom je n^2 v (1) deliteľné číslom $4^2 = 16$.

Tým sme prípad [1] vybavili.

Prípad [2]. Nech je n nepárne číslo. Položme $n + 1 = m$, kde $m > 3$. Potom je

$$N = (m - 3)(m - 2)(m - 1)^2m^2$$

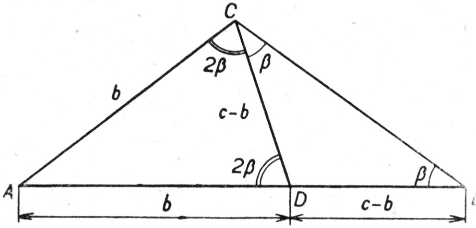
a opakujme úsudky z prípadu [1] pre párne číslo m (namiesto predchádzajúceho n). Platia rovnaké závery ako v odstavcoch [1a], [1b].

Tým sme vybavili prípad [2] a zároveň dokázali tvrdenie pre prirodzené čísla $n > 2$.

3. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané dĺžky strán

AB, AC a ak platí $\sphericalangle BCA = 3 . \sphericalangle ABC$. Určite podmienku riešiteľnosti.

Riešenie (obr. 15). Rozbor: O uhloch β, γ trojuholníka ABC podľa textu úlohy platí $\gamma = 3\beta$, t. j.



Obr. 15

$\gamma > \beta$ a tedy nutne platí $c > b$. Vo vnútri úsečky AB zostrojme bod D tak, aby platilo $DB = DC$, takže je $\sphericalangle BCD = \beta$. Potom v trojuholníku ADC je $\sphericalangle ACD = 2\beta$ a uhol $\sphericalangle ADC$ je vonkajším uhlom rovnoramenného trojuholníka DBC, ktorý má pri základni BC zhodné uhly veľkosti β, takže $\sphericalangle ADC = 2\beta$. Trojuholník ADC je teda taktiež rovnoramenný trojuholník so základňou DC, pri ktorej má uhly s veľkosťou 2β. Preto platí $AD = AC = b$ a teda $DC = DB = AB - AD = c - b$. Trojuholník ADC má tedy ramená $AD = AC = b$ a základňa $DC = c - b$. Z toho vyplýva konštrukcia:

Z daných dĺžok $b = CA$, $c = AB$ zostrojíme trojuholník ADC tak, aby platilo:

$$DC = c - b\,, \quad AC = AD = b\,.$$

Na predĺžení úsečky AD za bod D určíme bod B tak, aby platilo $DB = c - b$ a teda $AB = c$. Potom ABC je hľadaný trojuholník, pretože strany CA, AB majú dané veľkosti a platí $\sphericalangle ACD = 2 \,.\, \sphericalangle ABC$, čo hneď dokážeme:

V trojuholníku DBC je podľa konštrukcie $DB = DC$ a preto uhly pri základni BC majú rovnakú veľkosť β. Uhol $\sphericalangle ADC$ pri základni DC rovnoramenného trojuholníka (čo vyplýva z jeho konštrukcie) je vonkajším uhlom trojuholníka DBC a jeho veľkosť je teda 2β. Je teda $\sphericalangle ACD = 2\beta$ a preto $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = 2\beta + \beta = 3\beta$, čo sme mali dokázať.

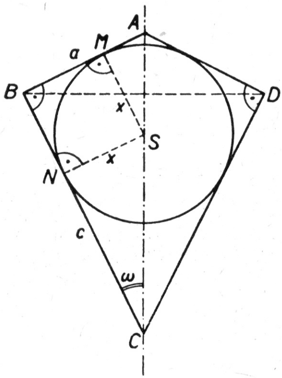
Diskusia. K tomu, aby sme mohli zostrojiť trojuholník ADC, musí pre dĺžky jeho strán platiť: $AC < AD + DC$, $AD < DC + AC$, $DC < AD + AC$, t. j. $b < b + c - b$, $c - b < b + b$. Z toho vyplýva, že úloha má jediné riešenie práve vtedy, keď o daných veľkostiach c, b úsečiek AB, AC platí: $b < c < 3b$.

4. Deltoid $ABCD$ má os súmernosti AC a jeho uhly pri vrcholoch B, D sú pravé.

Vyjadrite polomer kružnice vpísanej deltoidu pomocou dĺžok jeho strán.

Riešenie. Označme $AB = a$, $BC = c$, x dĺžku polomeru vpísanej kružnice. Nech S je stred hľadanej kružnice a M, N jej dotykové body po rade so stranami AB, BC. Potom platí: $x = SM = SN = BM = BN$ a $CN = c - x$ (pozri obr. 16). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov CSN, CAB (majú zhodné pravé úhly a uhol ω pri vrchole C) vyplýva

$$\frac{x}{a} = \frac{c - x}{c},$$



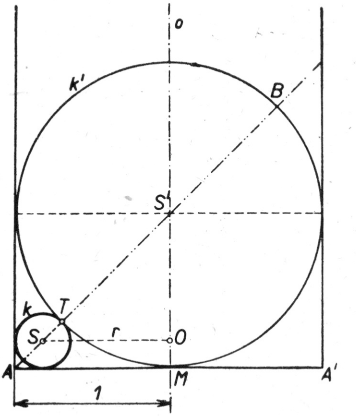
Obr. 16

z čoho dostaneme

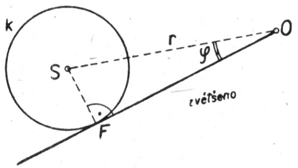
$$x = \frac{ac}{a + c}.$$

5. Do dutého rotačního válce s podstavou na vodorovné rovině je vepsána koule **K** o poloměru 1. Tato koule se dotýká jednak dolní podstavy, jednak pláště podél kružnice. Ve zbývajícím prostoru mezi dolní podstavou a koulí **K** spočívají na dolní podstavě shodné kuličky, které se dotýkají jak pláště válce, tak koule **K**.

Kolik lze nejvýše takových kuliček do zmíněného prostoru umístit?



Obr. 17



Obr. 18

Řešení. Viz označení v obr. 17 a 18, kde $S'M = S'T = MA = MA' = 1$, $ST = SF = x$, $SO \perp o$, $OS = r$, $\sphericalangle SFO = 90°$. Kružnice k', k jsou stejnolehlé podle středů stejnolehlosti T a A, konstanty stejnolehlosti mají absolutní hodnotu

$$\frac{ST}{S'T} = x = \frac{AT}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}\,.$$

Dále je

$$\frac{SO}{AM} = r = \frac{SS'}{AS'} = \frac{x+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 =$$

$$= 2\,(\sqrt{2} - 1)\,.$$

Je tedy

$$x = 3 - 2\sqrt{2}\,, \quad r = 2(\sqrt{2} - 1)\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku OSF (obr. 18), kde ostrý úhel $\sphericalangle SOF = \varphi$, dostáváme

$$\sin\varphi = \frac{x}{r} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2} > \frac{0{,}414}{2} = 0{,}207,$$

takže je jistě

$$0{,}207 < \sin\varphi < 0{,}208$$

a podle tabulek

$$11\frac{5}{6}^{\circ} < \varphi < 12^{\circ}\,,$$

$$23\frac{2}{3}^{\circ} < 2\varphi < 24^{\circ}.$$

Zorný úhel jedné kuličky z bodu O má tedy velikost 2φ. Pro hledaný počet p kuliček dostáváme meze

$$\frac{360}{24} < p < \frac{360}{23\frac{2}{3}}$$

neboli

$$15 < p < 17\,,$$

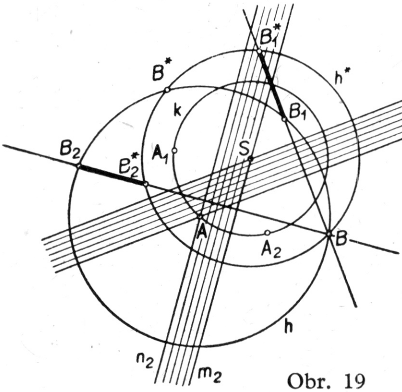
a tedy $p = 16$. Je totiž

$$\frac{360}{23\frac{2}{3}} = 16{,}9\ldots < 17\,.$$

Kuliček se vejde 16 a to volně (bez vzájemného dotyku).

6. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A; vně kružnice k je dán bod B. Označme A' bod ležící vně kružnice k, B' bod souměrně sdružený s bodem B podle osy úsečky AA'. Jaký útvar vyplní všechny takto vzniklé body B', proběhne-li bod A' vnějšek kružnice k?

Řešení (obr. 19). Veďme libovolnou přímku m_1 středem S kružnice k a označme A_1 bod souměrně sdružený s bodem A podle přímky m_1 (A_1 zřejmě leží na k). Zkoumejme, které přímky směru (m_1) mohou být osami



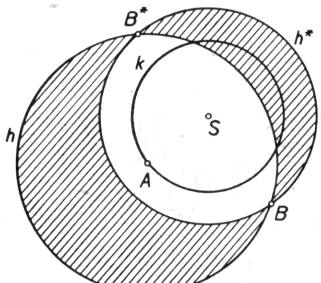
Obr. 19

úseček AA', má-li bod A' ležet vně kružnice k. Zřejmě jsou vyloučeny všechny přímky vyšrafovaného pásu roviny (obr. 19), který je ohraničen přímkou m_1 a přímkou n_1 směru (m_1) vedenou bodem A. Souměrnost podle osy n_1 převede bod B v jistý bod B_1, který náleží kružnici $h \equiv (A; AB)$, neboť je $AB = AB_1$. Souměrnost podle osy m_1 převede bod B v jistý bod $B_1^\star$, který náleží kružnici $h^\star \equiv (S; SB)$, neboť je $SB = SB_1^\star$; přímka m_1 totiž prochází bodem S. Probíhá-li osa pás roviny (m_1, n_1), probíhá obraz bodu B úsečku $B_1B_1^\star$ (i s jejími krajními body). Náleží-li tedy osa úsečky AA' směru (m_1), probíhá bod B' přímku BB_1 s vyloučením úsečky $B_1B_1^\star$.

Na obr. 19 je nakreslena situace pro další směr (m_2); zde je z přímky BB_2 vyloučena úsečka $B_2B_2^\star$.

Jestliže směr (m_1) splyne se směrem AS, pak se pás (m_1, n_1) redukuje na jedinou přímku m_1 a úsečka $B_1B_1^\star$ na jediný bod $B^\star$, souměrně sdružený s bodem B podle přímky AS; tento bod $B^\star$ nenáleží mezi body B'. Úsečky $B_1B_1^\star$ vyplní množinu bodů, z nichž každý leží buď na jedné z obou kružnic h, $h^\star$, nebo náleží vnitřku jedné a vnějšku druhé.

Závěr. Hledaný útvar **U** se skládá ze všech takových bodů B', které náleží současně vnějšku obou kružnic h, $h^\star$ nebo současně jejich vnitřkům. Útvar **U** obsahuje mimoto ještě bod B, pokud je $B \not\equiv B^\star$; tato poslední podmínka je splněna právě tehdy, neleží-li body A, B, S v přímce. Útvar **U** je znázorněn na obr. 20, je to nevyšrafovaná část roviny.



Obr. 20

5. Úlohy II. kola kategorie B

1. Součet druhých mocnin dvou přirozených čísel je dělitelný sedmi právě tehdy, jsou-li obě uvažovaná čísla dělitelná sedmi. Dokažte.

Řešení. Označme A, B uvažovaná přirozená čísla; pak lze určit s jediným výsledkem celá čísla a, z_1 a b, z_2 taková, že platí

$$A = 7a + z_1\,, \quad B = 7b + z_2\,,$$

kde čísla z_1, z_2 jsou rovna některému z čísel 0, ± 1, ± 2, ± 3.

Potom součet $N = A^2 + B^2$ lze psát

$$N = (49a^2 + 14az_1 + z_1^2) + (49b^2 + 14bz_2 + z_2^2) = \\ = 7x + z_1^2 + z_2^2\,, \qquad (1)$$

kde x je jisté celé číslo. Jsou-li čísla A, B dělitelná sedmi, je $z_1 = z_2 = 0$, takže v (1) je $N = 7x$, tj. dělitelné sedmi.

Předpokládejme nyní, že číslo N je dělitelné sedmi, potom, protože $7x$ je násobek sedmi, plyne z (1), že nutně i součet $s = z_1^2 + z_2^2$ je dělitelný sedmi. Pro tento součet s sestavme tabulku:

$z_1 \backslash z_2$	0	± 1	± 2	± 3
0	0	1	4	9
± 1	1	2	5	10
± 2	4	5	8	13
± 3	9	10	13	18

Avšak jediné číslo 0 z tabulky je dělitelné sedmi; toto číslo odpovídá případu $z_1 = z_2 = 0$, tedy případu, kdy obě uvažovaná čísla A, B jsou dělitelná sedmi. Tím je důkaz proveden.

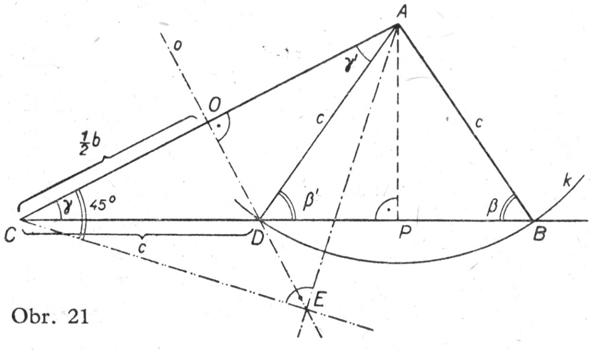
2. Trojuholník ABC má tieto dve vlastnosti:

(1) platí, že $\sphericalangle ABC = 2 \,.\, \sphericalangle BCA$,
(2) uhol $\sphericalangle ABC$ je ostrý.

Dokážte, že potom možno trojuholník ABC rozdeliť priamkou, vedenou vrcholom A, na dva rovnoramenné trojuholníky, z ktorých aspoň jeden je tupouhlý.

Zostrojte trojuholník ABC, ktorý má obidve predchádzajúce vlastnosti (1), (2), ak sú dané dĺžky strán $AC = b$, $AB = c$ a dokážte, že úloha má riešenie práve vtedy, keď platí: $c\sqrt{2} < b < 2c$.

Riešenie (obr. 21). Strany a uhly označíme obvyklým spôsobom. Nech hľadaná priamka (vedená vrcholom A) pretína stranu BC v bodě D. Pretože sú oba uhly $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ ostré, leží päta P kolmice spustenej z bodu A na priamku BC medzi bodmi B,C



Obr. 21

a je $AP < c$. Pre kružnicu $k \equiv (A; c)$ je teda bod P vnútorný a bod C vonkajší (je totiž $b > c$, pretože je $\beta > \gamma$). Preto medzi bodmi C, P leží bod D kružnice k.

Trojuholník BDA je rovnoramenný so základňou BD a je $\sphericalangle ADB = \beta$. Tento uhol je vonkajším uhlom trojuholníka ACD, preto

$$\sphericalangle CAD = \beta - \gamma = \gamma\,. \tag{1}$$

Trojuholník ACD je teda tiež rovnoramenný so základňou AC a je $AD = CD = c$.

Konštrukcia. Zostrojíme pomocný trojuholník ACD z daných úsečiek b, c a pomocou kružnice k ho doplníme na trojuholník ABC.

Diskusia. Vzťah $2c > b$ zaisťuje existenciu pomocného rovnoramenného trojuholníka DAC, ktorého os súmernosti o rozpoľuje v bode O jeho základňu AC. Pretože je $\beta' = \beta < 90°$, je uhol $\sphericalangle ADC$ tupý. Obrátene, ak je v pomocnom trojuholníku DAC uhol $\sphericalangle ADC$ tupý, má úloha riešenie. Vyjadrime túto skutočnosť pomocou dĺžok b, c. Zostrojme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ACE s preponou AC, kde E leží na polpriamke OD. Pretože je $\gamma < 45°$, leží D nutne vo vnútri úsečky OE dĺžky $\frac{1}{2}b$. Obrátene, každý bod D, ktorý leží vo vnútri úsečky OE, vedie k tupouhlému trojuholníku DAC. Z Pythagorovej vety použitej na trojuholník CEO, kde $\sphericalangle COE = 90°$, dostaneme $CE^2 = 2\,.\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{2}b^2$, t. j. $CE = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Zrejme je $CD < CE$ čiže $c < \frac{b}{\sqrt{2}}$ a teda $b > c\sqrt{2}$. Obrátene, ak platí tento vzťah, padne bod D

do vnútra úsečky OE a trojuholník DAC má $\sphericalangle D$ tupý. Tým je tvrdenie o riešiteľnosti úlohy dokázané.

3. Sestrojte graf funkce

$$y = \frac{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} - \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}}{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} + \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}}, \tag{1}$$

kde p je dané kladné číslo.

Řešení. Vyšetříme nejprve definiční obor funkce (1). Aby zlomky pod odmocninami v (1) měly smysl, musí platit $p - x \neq 0$, $p + x \neq 0$ neboli

$$x \neq p\,, \quad x \neq -p\,. \tag{2'}$$

Dále musí být zlomky (1) nezáporné; to nastane právě tehdy, když platí $(p - x)(p + x) > 0$ neboli

$$-p < x < p\,. \tag{2}$$

Položme pro stručnost

$$\frac{p+x}{p-x} = a\,, \tag{3}$$

takže (1) zní

$$y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}}\,. \tag{4}$$

Z požadavku (2) plyne $a > 0$ a $\frac{1}{a} > 0$; proto má vždy smysl i zlomek na pravé straně (4); neboť je vždy $\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} > 0$.

Rozšiřme zlomek ve (4) výrazem

$$\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} \neq 0; \tag{5}$$

dostaneme

$$y = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2}{(\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} = \frac{(a - 1)^2}{(a - 1)(a + 1)};$$

tento vztah označíme (6'). Další úpravou dostaneme

$$y = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

Po dosazení ze (3) dostaneme

$$y = \frac{\frac{p + x}{p - x} - 1}{\frac{p + x}{p - x} + 1} = \frac{p + x - (p - x)}{p + x + p - x} = \frac{x}{p}$$

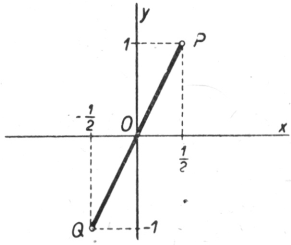
neboli

$$y = \frac{x}{p}. \tag{6}$$

Provedené zjednodušení platí za jistých předpokladů. Především, že platí (5), tj. že $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} \neq 0$. Ze vztahu $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} = 0$ plyne $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ (na obou stranách jsou kladná čísla), tj. $a = \frac{1}{a}$, $a^2 = 1$, $a = 1$ (neboť je $a > 0$). Ze (3) a z rovnosti $a = 1$ dostaneme

$$\frac{p + x}{p - x} = 1,$$

tj. $x = 0$. Tedy $a = 1$ pro $x = 0$; pro $x \neq 0$ je $0 < a \neq 1$ a výrazy $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}$, $a - \frac{1}{a}$, $a^2 - 1$, které se vyskytují v (6'), jsou různé od nuly, takže platí i (6). Avšak pro $x = 0$ dostaneme z (1), že $y = 0$; k tomuto výsledku však dospějeme i z (6) pro $x = 0$. Vztah (6) poskytuje pro x z intervalu (2) tytéž hodnoty jako (1). Grafem funkce (6) je přímka o směrnici $\frac{1}{p}$ jdoucí počátkem O souřadnic; s omezením (2) pak jako graf funkce dostaneme vnitřek úsečky $P \equiv [p; 1]$, $Q \equiv [-p; -1]$ $\left(\text{viz obr. 22 pro } p = \frac{1}{2}\right)$. Tím je řešení provedeno.

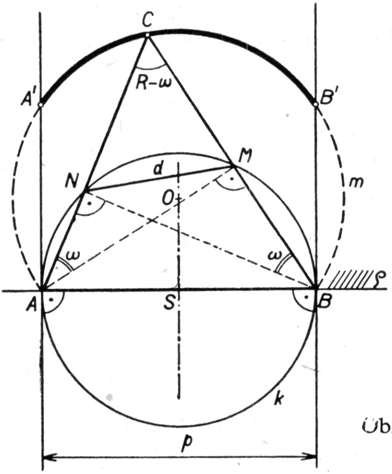


Obr. 22

4. Nad danou úsečkou AB, která má délku c, jsou v jedné z polorovin vyťatých přímkou AB sestrojeny všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC takové, že vzdálenost pat výšek vedených vrcholy A, B je rovna danému číslu d.

Vyšetřte množinu všech vrcholů C uvažovaných trojúhelníků. Proveďte diskusi vzhledem ke kladným číslům c, d.

Řešení (obr. 23). Trojúhelník ABC požadovaných vlastností, který leží v polorovině ϱ, leží nutně (až na stranu AB) uvnitř pásu p rovnoběžek AA', BB', kolmých k přímce AB. Je známo, že v ostroúhlém trojúhelníku padnou paty výšek dovnitř jeho stran. Proto paty M, N výšek jdoucích vrcholy A, B trojúhelníku ABC leží uvnitř pásu p i uvnitř poloroviny ϱ; tam leží tedy i celá úsečka MN i bod C. Trojúhelníky ABM, ABN jsou pravoúhlé a body M, N tedy leží na Thaletově kružnici $k \equiv \left(S; \frac{1}{2}c\right)$. Úhly $\sphericalangle MAN$, $\sphericalangle MBN$ jsou po řadě částmi ostrých úhlů



Obr. 23

$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CBA$ a tudíž ostré; jsou to obvodové úhly v kružnici k nad tětivou MN a oba tedy leží na větším oblouku $\widehat{MN}$ kružnice k. Jsou proto shodné a o jejich velikosti ω platí $\omega < 90°$. Z trojúhelníků ACM, BCN, kde $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90°$, plyne, že $\gamma = \sphericalangle BCA = 90° - \omega < 90°$. Bod C tedy leží uvnitř p a uvnitř ϱ na jistém oblouku m, z jehož bodů je úsečku AB vidět pod ostrým úhlem $90° - \omega$. Zvolme body A', B' přímek AA', BB' právě na oblouku m; bod C tedy leží uvnitř oblouku $\widehat{A'B'}$.

Je-li obráceně C zvolený bod uvnitř oblouku $\widehat{A'B'}$, je $\sphericalangle BCA = 90° - \omega$ a polopřímky AC, BC leží uvnitř pravých úhlů $\sphericalangle BAA'$, $\sphericalangle ABB'$; proto obě tyto polopřímky protnou k uvnitř ϱ v bodech M, N a je $AM \perp BC$, $BN \perp AC$. Proto i trojúhelníky ACM, BCN mají při M, N pravé úhly a platí $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CBN = \omega$. Je tedy tětivu MN kružnice k z bodů A, B vidět pod konstantním ostrým úhlem ω, tj. všechny úsečky MN mají konstantní délku d. Takto sestrojený trojúhelník ABC splňuje proto požadavky textu úlohy. Tím je obrácení provedeno.

Hledanou množinou všech bodů C je tedy vnitřek popsaného oblouku $\widehat{A'B'}$.

Pokud jde o existenci trojúhelníků ABC, je zřejmě nutné a stačí, aby tětiva MN délky d padla celá dovnitř ϱ; pak jsou však úhly $\sphericalangle ABM$, $\sphericalangle BAN$ ostré, jejich součet menší než $180°$ a podle Eukleidova axiómu mají polopřímky AN, BM společný bod C uvnitř ϱ a uvnitř pásu p. Tětiva MN kružnice k tedy není průměrem, tj. úloha má řešení, právě když je $d < c$.

6. Úlohy I. kola kategorie C

1. Je dána rovnice s neznámou x:

$$\frac{x+a}{b+c} + \frac{x+b}{c+a} + \frac{x+c}{a+b} = \frac{1}{6}; \qquad (1)$$

přitom reálná čísla a, b, c (vesměs různá od nuly) splňují podmínku $a + b + c = 0$.

a) Dokažte, že rovnice má kořen a vyjádřete ho pomocí čísel a, b, c.

b) Dokažte, že kořen rovnice a číslo abc jsou téhož znamení.

Řešení. Protože je $a + b + c = 0$, lze rovnici (1) psát ve tvaru

$$\frac{x+a}{a} + \frac{x+b}{b} + \frac{x+c}{c} + \frac{1}{6} = 0;$$

po znásobení číslem $6abc \neq 0$ dostáváme postupně

$$6(bc + ca + ab)x + 3 \,.\, 6abc + abc = 0\,,$$
$$3 \,.\, 2(bc + ca + ab)x = -19abc\,. \qquad (2)$$

Ze vztahu $a + b + c = 0$ umocněním na druhou dostáváme

$$2(bc + ca + ab) = -(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (3)$$

a po dosazení do levé strany (2) máme

$$3(a^2 + b^2 + c^2)x = 19abc\,, \qquad (4)$$

kde $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, neboť čísla a, b, c jsou vesměs různá od nuly; rovněž $abc \neq 0$.

Ze (4) dostaneme

$$x = \frac{19abc}{3(a^2 + b^2 + c^2)}\,. \qquad (5)$$

Protože ve jmenovateli posledního zlomku je kladné číslo, mají čísla abc a x stejná znaménka, přičemž je $x \neq 0$.

Proveďme ještě zkoušku dosazením výsledku (5) do (1): Výsledek (5) lze pomocí (3) psát ve tvaru

$$x = \frac{19abc}{-6(bc + ca + ab)}\,. \qquad (6)$$

Protože $b + c = -a$, platí

$$\frac{x+a}{b+c} = \frac{x+a}{-a} = -\frac{x}{a} - 1;$$

po dosazení za x ze vztahu (6) najdeme

$$\frac{x + a}{b + c} = \frac{19bc}{6(bc + cab + ab)} - 1 \,.$$

Podobné výrazy dostaneme i po dosazení za x do obou zlomků na levé straně rovnice (1); hodnota L levé strany rovnice (1) tedy po dosazení ze (6) je

$$L = \frac{19bc + 19ca + 19ab}{6(bc + ca + ab)} - 3$$

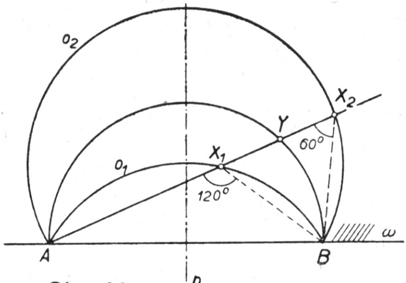
neboli je postupně

$$L = \frac{19(bc + ca + ab)}{6(bc + ca + ab)} - 3 = \frac{19}{6} - 3 = \frac{1}{6} ,$$

což je pravá strana rovnice (1). Krácení výrazem $bc + ca + ab$ lze provést, neboť je různý od nuly [viz vztah (3)]. Tím je zkouška provedena.

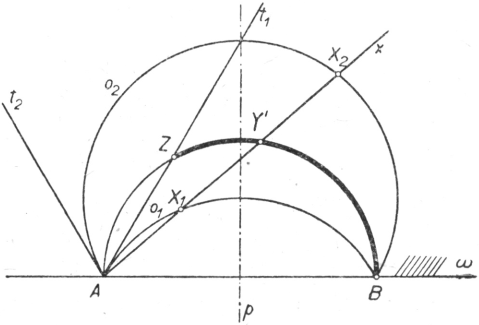
2. Nad danou úsečkou AB jsou sestrojeny v téže polorovině ω vyťaté přímkou AB kruhové oblouky o_1, o_2, ze kterých je úsečku AB vidět po řadě pod zornými úhly velikostí 120° a 60°. Bodem A je vedena taková přímka, která má s oblouky o_1, o_2 po řadě další společné body X_1, X_2.

Vyšetřte množinu středů Y všech takových úseček X_1X_2.



Obr. 24

Řešení (obr. 24). I. Úhel $\sphericalangle AX_1B$ velikosti 120° je vnějším úhlem v trojúhelníku BX_1X_2, kde $\sphericalangle X_2 = 60°$, takže $\sphericalangle B = 60°$; je tedy trojúhelník BX_1X_2 rovnostranný a jeho těžnice BY je kolmá k přímce AX_1X_2 neboli $\sphericalangle AYB = 90°$. Bod Y tedy leží na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem, a to uvnitř poloroviny ω; všechny body Y tedy leží na polokružnici $\widehat{AB}$ uvnitř poloroviny ω.



Obr. 25

II. Je třeba ještě zjistit, zda každý vnitřní bod Y' uvažované polokružnice $\widehat{AB}$ je středem jisté úsečky X_1X_2, kde X_1, X_2 leží po řadě na obloucích o_1, o_2 a přitom přímka AX_1 prochází bodem X_2. Sestrojme bodem A tečnu t_1 (t_2) k oblouku o_1 (o_2) — viz obr. 25. Přímka procházející bodem A a ležící uvnitř poloroviny ω a uvnitř poloroviny t_1B (t_2B) protne oblouk o_1 (o_2) ve vnitřním bodě X_1 (X_2). Úsečky X_1X_2, vyhovující úloze, mohou ležet jen uvnitř společné části polorovin t_1B, t_2B a ω, a to na přímkách x procházejících bodem A. Všechny tyto přímky x zřejmě protínají i polokružnici $\widehat{AB}$; písmenem Y' označme libovolný z těchto průsečíků. Průsečík tečny t_1 s polokružnicí $\widehat{AB}$ označíme Z.

Protože úhel $AY'B$ je pravý, je přímka BY' výškou trojúhelníku X_1X_2B. Tento trojúhelník je (viz odst. I) rovnostranný, takže bod Y' je středem úsečky X_1X_2 a patří hledané množině. Z provedené úvahy plyne, že hledanou množinou je pouze vnitřek oblouku $\widehat{ZB}$, který je částí polokružnice $\widehat{AB}$ (a nikoli tato polokružnice celá).

3. Riešte sústavu rovníc

$$px + 2y = 3\,, \tag{1}$$

$$2x + py = p - 1 \tag{2}$$

s neznámymi x, y.

Preveďte skúšku dosadením a preveďte diskusiu vzhľadom na parameter p.

Riešenie. Vynásobme po rade číslami p, -2 rovnice (1), (2) a sčítajme. Dostaneme $(p^2 - 4)x = 3p - 2p + 2$ čiže

$$(p + 2)(p - 2)x = p + 2\,. \tag{3}$$

Potom vynásobme rovnice (1), (2) po rade číslami -2, p a sčítajme. Dostaneme $(p^2 - 4)y = p^2 - p - 6$ čiže

$$(p + 2)(p - 2)y = (p + 2)(p - 3)\,. \tag{4}$$

Rozlišujme teraz tieto možnosti:

Prípad [1]. Nech je $(p + 2)(p - 2) \neq 0$, t. j. $-2 \neq p \neq 2$. Potom z (3), (4) dostaneme

$$x = \frac{1}{p - 2}\,, \quad y = \frac{p - 3}{p - 2}\,. \tag{5}$$

Skúška. Označme L_1, L_2 ľavé strany rovníc (1), (2) po dosadení výsledku (5):

$$L_1 = \frac{p}{p-2} + \frac{2(p-3)}{p-2} = \frac{3p-6}{p-2} = \frac{3(p-2)}{p-2} = 3\,;$$

$$L_2 = \frac{2}{p-2} + \frac{p^2-3p}{p-2} = \frac{(p-2)(p-1)}{p-2} = p-1\,.$$

Čísla L_1, L_2 sú teda po rade rovné pravým stranám rovníc (1), (2).

Prípad [2]. Nech je $p + 2 = 0$, t. j. $p = -2$. Potom nemožno použiť výsledky (3), (4), pretože tieto vzťahy sú splnené pre každú dvojicu čísel x, y. Sústava (1), (2) má tvar

$$-2x + 2y = 3\,, \quad 2x - 2y = -3\,.$$

Ak vynásobíme prvú rovnicu číslom -1, dostaneme druhú. Možno teda napr. x voliť ľubovoľne a y vypočítame z rovnice $2x - 2y = -3$. Riešenie teda je:

$$x \text{ je ľubovoľné číslo, } y = x + \frac{3}{2}\,. \qquad (6)$$

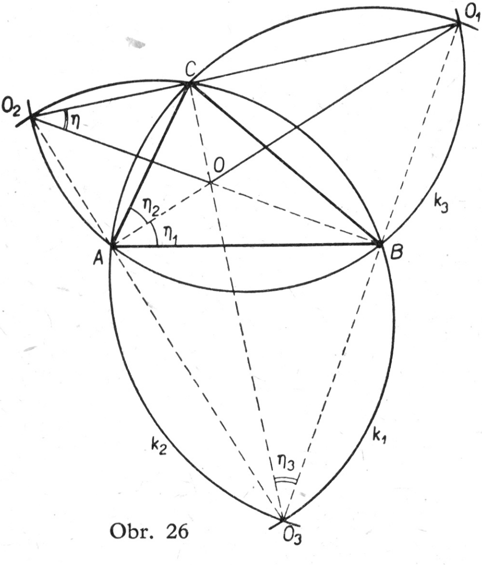
Prípad [3]. Nech $p - 2 = 0$, t. j. $p = 2$. Potom vzťah (3) nie je splnený pre žiadne číslo, pretože na ľavej strane (3) je 0, na pravej číslo 4. Daná sústava má tvar

$$2x + 2y = 3, \quad 2x + 2y = 1\,,$$

čo zrejme nemožno splniť súčasne žiadnymi číslami, pretože $3 \neq 1$. Záver je zrejmý z tabuľky:

Parameter p	rôzny od -2, 2	-2	2
Počet riešení x, y danej sústavy	jediné riešenie dané vzťahmi (5)	sústave vyhovuje každá dvojica čísel (6)	sústava nemá riešenie

4. Je daný trojuholník OO_1O_2.
Zostrojte trojuholník ABC tak, aby bod O bol stredom kružnice trojuholníku ABC vpísanej a aby body O_1, O_2 boli po rade stredmi kružníc vpísaných trojuholníku ABC zvonku ku stranám BC, CA. Preveďte diskusiu.



Obr. 26

Riešenie. Na obr. 26 máme hľadaný trojuholník ABC a stred O kružnice jemu vpísanej ako aj stredy O_1, O_2, O_3 kružníc zvonku vpísaných. Pretože osi vedľajších uhlov sú navzájom kolmé, je vždy os vnútorného uhla trojuholníka ABC kolmá k osi vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole tohto trojuholníka. Ak označíme po rade α, β, γ vnútorné uhly hľadaného trojuholníka ABC, potom o uhloch daného trojuholníka OO_1O_2 platí:

$$\sphericalangle O_1OO_2 = \sphericalangle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° +$$

$$+ \frac{1}{2}[180° - (\alpha + \beta)] = 90° + \frac{1}{2}\gamma > 90°,$$

takže uhly pri vrcholoch O_1 a O_2 sú nutne ostré. Úloha teda môže mať riešenie, ak je

$$\sphericalangle O_1OO_2 > 90°.$$

Ďalej je $OO_1 \perp AO_2$, $OO_2 \perp BO_1$, $O_1O_2 \perp OC$, t. j. body A, B, C sú päty výšok v trojuholníku OO_1O_2, ktorého priesečníkom výšok je bod O_3. Podľa toho prevedieme konštrukciu: Označme A, B, C po rade päty kolmíc vedených bodmi O_2, O_1, O k priamkam OO_1, OO_2, O_1O_2 a označme O_3 priesečník výšok trojuholníka OO_1O_2, v ktorom je uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ tupý a teda oba ostatné uhly ostré. Tým je konštrukcia prevedená.

Dokážeme správnosť prevedenej konštrukcie: Použijeme pri tom túto známu vetu: Ak vedieme vnútorným bodom jedného ramena ostrého (tupého) uhla kolmicu k jeho druhému ramenu, padne jej päta do vnútra (na opačnú polpriamku) tohto druhého ramena. Z toho vyplýva, že bod C leží vo vnútri úsečky O_1O_2 (pretože uhly $\sphericalangle O_1$, $\sphericalangle O_2$ trojuholníka OO_1O_2 sú ostré a úsečka O_1O_2 je spoločná časť polpriamok O_1O_2, O_2O_1); naproti tomu body A, B padnú po rade na predĺženie úsečiek O_1O, O_2O za bod O, t. j. na polpriamky opačné k polpriamkam OO_1, resp. OO_2 (pretože uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ je tupý). Pritom je napr. $\sphericalangle AO_2O_1$ tiež ostrý (druhý ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku O_1O_2A), práve tak aj $\sphericalangle BO_1O_2$, takže ich súčet je menší než 180° a podľa Euklidovej axiómy leží bod O_3 v polrovine O_1O_2O (v ktorej ležia body A, B). Ešte musíme dokázať, že priamky

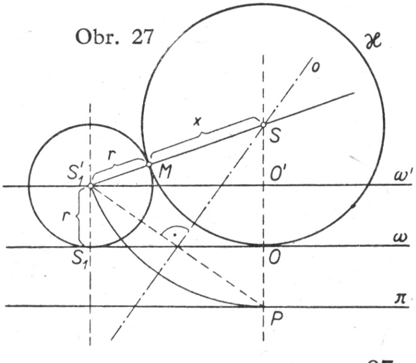
OO_1, OO_2, O_1O_2 sú osami uhlov po rade pri vrcholoch A, B, C výsledného trojuholníka ABC. Stačí zrejme dokázať, že bod O je priesečníkom osí uhlov $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$. Dokážeme pre prvý z uhlov, že jeho osa prechádza bodom O; pre druhý z nich je dôkaz obdobný:

Opíšme nad úsečkami O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 ako nad priemermi po rade kružnice k_1, k_2, k_3. Podľa Thaletovej vety ležia na k_1 body B, C; atď. Pri označení obvodových uhlov podľa obrázka 26 platí: $\eta_1 = \eta$ (ležia na k_3), $\eta = \eta_3$ (ležia na k_1), $\eta_3 = \eta_2$ (ležia na k_2). Je teda $\eta_1 = \eta_2$, čo sme mali dokázať.

Úloha má za predpokladu, že uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ je tupý, zrejme vždy jediné riešenie.

5. Ve vodorovné rovině je dán rovnostranný trojúhelník $S_1S_2S_3$ o straně délky 2. V každém z jeho vrcholů spočívá na rovině $S_1S_2S_3$ jedna ze tří shodných koulí o poloměru $r \leqq 1$.

Vyšetřete konstruktivně i výpočtem poloměr koule, která se všech tří daných koulí dotýká vně a mimoto se dotýká roviny $S_1S_2S_3$. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k danému číslu r.



Obr. 27

Řešení (viz označení v obr. 27). Označme O střed a ω rovinu daného rovnostranného trojúhelníku $S_1S_2S_3$; dále označme S_1', S_2', S_3' středy daných koulí s poloměrem r. Jsou-li M_1, M_2, M_3 dotykové body hledané koule $\varkappa \equiv (S;\ x)$ s danými koulemi, potom platí (za předpokladu, že je $r \leqq 1$)

$$r + x = SS_1' = SS_2' = SS_3',$$

a proto roviny souměrnosti úseček $S_1'S_2'$, $S_2'S_3'$, $S_3'S_1'$, a tím i úseček S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1 procházejí bodem S a zároveň bodem O dotyku plochy kulové $\varkappa$ s rovinou ω; roviny souměrnosti tedy obsahují přímku $p \equiv \equiv SO \perp \omega$. Rovina $\omega' \equiv S_1'S_2'S_3' \parallel \omega$ protne přímku p v bodě O'a platí $S_1'O' = S_1O = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (úsek těžnice rovnostranného trojúhelníku $S_1S_2S_3$ od jeho těžiště k jeho vrcholu).

V trojúhelníku SMO je $SM = SO = x$ a v trojúhelníku $SS_1'P$ viz obr. 27, kde $OP = r$, $\pi \parallel \omega$) je $SS_1' = SP = r + x$, takže osy základen těchto rovnoramenných trojúhelníků splývají v jedinou přímku o, která prochází bodem S ležícím na přímce p. Konstrukci tedy provedeme takto: Nad úsečkou $OS_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ sestrojíme kružnici $k_1 \equiv (S_1', r)$, která se dotýká přímky S_1O v bodě S_1 a v bodě O sestrojíme přímku $p \perp S_1O$. Od bodu O naneseme na přímku p úsečku délky r tak, aby její druhý krajní bod P neležel v polorovině S_1OS_1'. Potom osa o úsečky PS_1' protne přímku p v hledaném středu S koule $\varkappa$. Protože úhel $\sphericalangle OPS_1'$ je ostrý, jsou přímky o, p vždy kosé a bod S existuje nezávisle na velikosti r. Úloha má zřejmě vždycky řešení (což potvrdí i následující výpočet).

Jestliže přímka o prochází bodem O', je $r = x$, $r = = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$ neboli

$$x = r = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,. \tag{1}$$

Jestliže přímka o neprochází bodem O', vzniká pravoúhlý trojúhelník SS_1O' (kde $\sphericalangle O' = 90°$); o jeho stranách platí

$$1 < S_1O = O'S_1' = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \; SS_1 = x + r,$$

$$SO' = |x - r|,$$

neboť musíme rozeznávat obě možnosti: zda bod S padne dovnitř úsečky PO' nebo na její prodloužení za bod O'. Užitím Pythagorovy věty na tento trojúhelník dostaneme

$$(x + r)^2 - (x - r)^2 = \frac{4}{3}$$

a odtud

$$x = \frac{1}{3r};$$

tento výsledek platí i pro (1). Úvaha byla provedena za předpokladu, že hledaná koule existuje. Obrácením postupu zjistíme, že bod S na polopřímce OO' ve vzdálenosti x od bodu O jakožto střed a číslo $x = \frac{1}{3r}$ (pro $r \leqq 1$) jakožto poloměr koule vyhovují naší úloze. Řešení je jediné.

6. V debne boli dopravované tri druhy plechoviek so súčiastkami. Plechovky mali váhy 0,8 kg, 1,5 kg, 2 kg a po rade objemy 1,5 dm^3, 4 dm^3, 5 dm^3. Celková váha zásielky (bez váhy debny) bola 3,3 q. Celkový objem plechoviek bol 0,78 m^3. Plechoviek každého druhu bolo aspoň 55 kusov. Z týchto údajov vypočítajte, koľko plechoviek každého druhu bolo v zásielke.

Riešenie. Počet najmenších plechoviek označme x, počet stredných plechoviek y, počet najväčších plechoviek z. Z podmienok úlohy dostaneme tieto dve rovnice

$$\begin{aligned} 0{,}8x + 1{,}5y + 2z &= 330 \text{ (kg)}, \\ 1{,}5x + 4y \quad + 5z &= 780 \text{ (dm}^3\text{)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Z oboch rovníc (1) vylúčime z (prvú rovnicu vynásobíme číslom 5, druhú číslom -2 a sčítame). Dostaneme rovnicu

$$x - 0{,}5y = 90,$$

z ktorej

$$x = 90 + 0{,}5y. \tag{2}$$

Ak dosadíme z (2) do prvej rovnice (1), vyjde po úprave

$$z = 129 - 0{,}95y. \tag{3}$$

Čísla x, y, z sú podľa svojho významu prirodzené. Pretože v (3) musí byť číslo $0{,}95y = \frac{19}{20}y$ celé, musí byť y deliteľné dvadsiatimi.

Zostavíme tabuľku pre $y = 60, 80, 100, 120, \ldots$ (hodnoty $y = 20, 40$ sú neprípustné, pretože $y \geqq 55$).

y	60	80	...
x	120	130	...
z	72	53	...

Údaje uvedené v druhom a treťom riadku boli vypočítané z rovníc (2), (3). Z rovnice (3) je zrejmé, že z s rastúcim y klesá. Pretože už pre $y = 80$ je $z = 53 < 55$, je pre každé $y > 80$ tiež $z < 55$.

Úloha má teda jediné riešenie:

$$x_1 = 120,\ y_1 = 60,\ z_1 = 72.$$

7. Úlohy II. kola kategorie C

1. V rovine pravouhlých súradníc x, y znázornite množinu všetkých bodov $[x, y]$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnostiam

$$x + |y| \leqq 1\,, \tag{1}$$

$$y + |x| \leqq 1\,. \tag{1'}$$

Riešenie. Ak je dvojica x, y riešením nerovnosti (1), ako vyplýva z definície absolutnej hodnoty, je buď

$$y \geqq 0, \quad y \leqq 1 - x \tag{2a}$$

alebo

$$y \leqq 0, \quad y \geqq x - 1\,. \tag{2b}$$

Ak je dvojica x, y riešením nerovnosti (1′), je buď

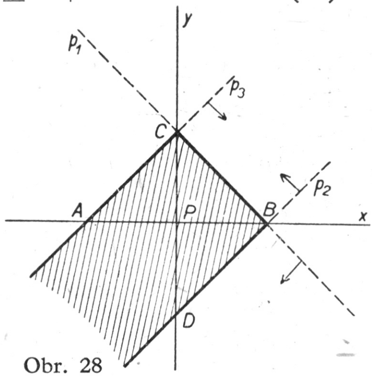
$$x \geqq 0, \quad y \leqq 1 - x \tag{3a}$$

alebo

$$x \leqq 0, \quad y \leqq 1 + x\,. \tag{3b}$$

Zostrojme v rovine pravouhlých súradníc x, y body $P \equiv [0, 0]$, $A \equiv [-1, 0]$, $B \equiv [1, 0]$, $C \equiv [0, 1]$, $D \equiv [0, -1]$ a priamky $p_1 \equiv BC$, $p_2 \equiv BD$, $p_3 \equiv AC$, kde $p_2 \parallel p_3$, $p_1 \perp p_2$, $p_1 \perp p_3$ (obr. 28). Priamka p_1 má rovnicu $y = 1 - x$, priamky p_2, p_3 majú po rade rovnice

$$y = x - 1, \; y = 1 + x.$$



Obr. 28

V rovine pravouhlých súradníc x, y určujú

a) nerovnosti (2a) polroviny xC, p_1P, ktorých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle CBA$;

b) nerovnosti (2b) polroviny xD, p_2P, ktorých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle ABD$.

Obrazy $[x, y]$ riešení x, y nerovnosti (1) ležia teda v uhle $\sphericalangle CBD$.

V rovine pravouhlých súradníc x, y určujú

a) nerovnosti (3a) polroviny yB, p_1P, ktorých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle BCD$;

b) nerovnosti (3b) polroviny yA, p_3P, ktorých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle DCA$.

Obrazy $[x, y]$ riešení x, y nerovnosti (1′) ležia teda v uhle $\sphericalangle BCA$. Obrazy spoločných riešení daných nerovností vyplnia teda spoločnú časť pravých uhlov $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle BCA$. Je to tá časť pásu ohraničeného rovnobežkami p_2, p_3, ktorá padne do polroviny p_1P (pozri vyšrafovanú časť obr. 28 včítane polpriamok CA, BD a úsečky BC).

2. V rovině je dána úsečka AB. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB uvažujme všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC o přeponě AB. Označme X patu kolmice vedené bodem B k ose úhlu $\sphericalangle BCA$.

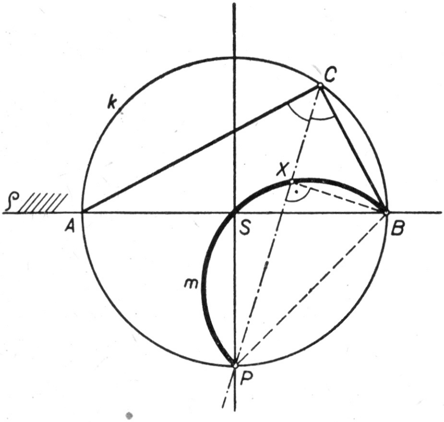
Dokažte, že všechny takové osy úhlů procházejí pevným bodem a vyšetřte množinu všech bodů X.

Řešení. Zvolenou polorovinu s hranicí AB označme ϱ; bod C leží uvnitř ϱ na Thaletově kružnici $k \equiv \left(S; \dfrac{c}{2}\right)$, opsané nad úsečkou AB jako průměrem (obr. 29).

Osa úsečky AB protne kružnici k v polorovině opačné k ϱ v bodě P. Menší oblouky AP, BP jsou čtvrtkružnice; proto platí pro příslušné obvodové úhly

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP .$$

Je tedy polopřímka CP osou úhlu $\sphericalangle ACB$. Pata X kolmice spuštěné z bodu B na polopřímku CP náleží polokružnici m sestrojené nad průměrem BP a obsahující střed S úsečky AB (nebo kružnice k).



Obr. 29

Označme m' kružnici sestrojenou nad průměrem BP. Je-li Y libovolný bod vnitřku oblouku m, označme dále C průsečík kružnice k s přímkou PY. Bod C náleží polorovině ϱ; protože tečna kružnice m' v bodě Pprochází bodem A, přímka PY, která je sečnou kružnice m', protne úsečku AB, a tudíž i kružnici k v bodě C poloroviny ϱ. Sestrojíme-li k trojúhelníku ABC patu X kolmice spuštěné z vrcholu B na osu úhlu $\sphericalangle ACB$, zjistíme, že je $X \equiv Y$.

Z á v ě r. Hledanou množinou všech pat X je vnitřek oblouku m.

3. Je dán výraz

$$V = \frac{(x-a)^2}{ab - bc + ca - a^2} + \frac{(x-b)^2}{bc - ca + ab - b^2} + \frac{(x-c)^2}{ca - ab + bc - c^2}, \qquad (1)$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Dokažte, že výraz V, pokud má smysl, nabývá pro všechna reálná čísla x konstantní hodnoty. Zároveň udejte podmínky pro čísla a, b, c, kdy výraz V nemá smysl.

Řešení. Je

$$ab - bc + ca - a^2 = b(a-c) - a(a-c) = \\ = (b-a)(a-c) = (a-b)(c-a);$$

podobně

$$bc - ca + ab - b^2 = (b-c)(a-b);$$
$$ca - ab + bc - c^2 = (c-a)(b-c).$$

Výraz V ztrácí smysl, je-li některý jmenovatel v (1) roven nule, tj. platí-li některá z rovností:

$$a - b = 0; \quad b - c = 0, \quad c - a = 0$$

neboli

$$a = b, \quad b = c, \quad c = a. \qquad (2)$$

Upravíme výraz V za předpokladu, že neplatí žádný ze vztahů (2); společný jmenovatel n zlomků v (1) vzhledem k provedeným rozkladům je

$$n = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Dostaneme

$$V = \frac{1}{n}\,[(x^2 - 2ax + a^2)(b - c) + (x^2 - 2bx + b^2)(c - a) +$$

$$+ (x^2 - 2cx + c^2)(a - b)] = \frac{1}{n}\{x^2[b - c + c - a + a - b] -$$

$$- 2x\,[a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)] +$$

$$+ a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)\} =$$

$$= \frac{1}{n}[a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)]\,.$$

Ale

$$n = -a^2(b - c) + ab(b - c) - bc(b - c) + ca(b - c) =$$

$$= -a^2(b - c) - b^2(c - a) - c^2(a - b);$$

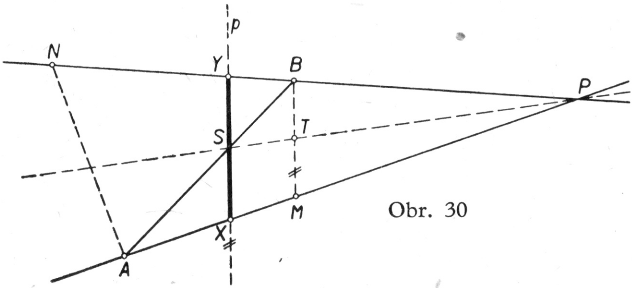
je tedy

$$V = -n : n = -1\,.$$

Závěr. Výraz V má smysl právě tehdy, jestliže žádná dvě z čísel a, b, c si nejsou rovna; v tom případě je $V = -1$.

4. V rovině je dán čtyřúhelník $AMBN$.
Na polopřímkách AM, BN sestrojte po řadě body X, Y tak, aby bylo $XY // BM$ a aby přímka AB půlila úsečku XY.

Řešení. Jestliže v daném čtyřúhelníku $AMBN$ je $AM // BN$ (rovnoběžník nebo lichoběžník), potom podle známé věty střední příčka, která půlí strany AN, MB, vytíná na úsečce AB bod S; jím vedeme přímku $p // BM$ a její společné body s polopřímkami AM, BN po řadě označíme X, Y. Dále nechť přímky AM, BN mají společný bod P, který leží buď na prodloužení úsečky AM za bod M (viz obr. 30), nebo na prodloužení úsečky



Obr. 30

BN za bod N (čtyřúhelník leží v úhlu $\sphericalangle MPB$ trojúhelníku PMB). Je-li XY hledaná úsečka, jejíž střed S padne na přímku AB, pak $XMBY$ je lichoběžník se základnami BM, XY. Stejnolehlost o středu P, která převádí úsečku XY v úsečku MB, převádí střed S úsečky XY ve střed T úsečky MB. Odtud konstrukce:

Sestrojíme střed T úsečky MB. V úhlu $\sphericalangle MPB$ sestrojíme polopřímku PT, která prochází vnitřním bodem S úsečky AB; bodem S vedeme přímku $p \parallel MB$ a průsečíky přímky p s přímkami AM, BN označíme po řadě X, Y. Potom je XY hledaná úsečka.

Důkaz, že S je středem úsečky XY, vyplývá ze stejnolehlosti, která převádí úsečku MB v úsečku XY. Přitom bod S existuje, neboť polopřímka PT prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle APB$, a protíná tudíž každou jeho příčku, tedy i úsečku AB v jejím vnitřním bodě S.

Úloha má proto vždy jediné řešení.

8. Úlohy I. kola kategorie D

1. Dopravní síť města se skládá ze tří trolejbusových linek. Celková délka trolejového vedení je 13 km. Jednotlivé linky mají po řadě délky 5,7 km, 5,8 km a 6,9 km.

První a druhá linka mají společný úsek délky 1,8 km. Druhá a třetí linka mají společný úsek délky 2,3 km. Třetí a první linka mají společný úsek délky 2,7 km.

Rozhodněte, zda existuje úsek společný všem třem linkám; jestliže ano, pak vypočtěte jeho délku. Načrtněte, jak asi vypadá plánek tří tratí a vepište do něho délky jednotlivých úseků.

Řešení. (Délky udáváme v kilometrech.) Linky označme čísly 1, 2, 3. Celkovou délku trolejového vedení rozdělíme do tří skupin a vyjádřeme ji jako součet délek vedení každé ze skupin. Označíme:

a) d_1, d_2, d_3 délky těch částí tratí č. 1, 2, 3, v nichž probíhají jednoduše (sólově);

b) d_{12}, d_{23}, d_{31} délky těch částí tratí, u nichž probíhají „dvojitě" (nikoli však trojitě); tak např. d_{12} značí délku společné části tratí č. 1 a č. 2;

c) x délku části společné všem třem linkám.

Celková délka vedení 13 (km) je součtem právě zavedených čísel, tj.

$$(d_1 + d_2 + d_3) + (d_{12} + d_{23} + d_{31}) + x = 13\,. \quad (1)$$

Nyní se pokusíme součty $d_1 + d_2 + d_3$, $d_{12} + d_{23} + d_{31}$ vyjádřit pomocí údajů uvedených v textu úlohy a pomocí neznámého čísla x.

Platí např. $d_{12} + x = 1{,}8$, takže je $d_{12} = 1{,}8 - x$; dostaneme tak celkem

$$d_{12} = 1{,}8 - x;\ d_{23} = 2{,}3 - x;\ d_{31} = 2{,}7 - x\,. \quad (2)$$

Podle textu úlohy a podle významu čísla d_1 platí $d_1 = 5{,}7 - (d_{12} + d_{31} + x)$; podobně najdeme d_2, d_3. Máme tak

$$d_1 = 5{,}7 - (d_{12} + d_{31} + x);\ d_2 = 5{,}8 - (d_{12} + d_{23} + x);$$
$$d_3 = 6{,}9 - (d_{31} + d_{23} + x)\,. \quad (3)$$

Pomocí (2) platí

$$d_{12} + d_{23} + d_{31} = (1,8 + 2,3 + 2,7) - 3x = \\ = 6,8 - 3x \,. \tag{4}$$

Pomocí vztahů (3) a (4) najdeme

$$d_1 + d_2 + d_3 = \\ = (5,7 + 5,8 + 6,9) - 2(d_{12} + d_{23} + d_{31}) - 3x = \\ = 18,4 - 2(6,8 - 3x) - 3x = 3x + 4,8 \,. \tag{5}$$

Nyní výsledky (4), (5) dosadíme do (1); postupně dostaneme

$$(3x + 4,8) + (6,8 - 3x) + x = 13 \,, \\ x + 11,6 = 13 \,, \\ x = 1,4 \,. \tag{6}$$

Tím jsme našli délku společného úseku všem třem tratím.

Provedeme zkoušku: Pomocí (2) a (6) dostaneme

$$d_{12} = 0,4; \quad d_{23} = 0,9; \quad d_{31} = 1,3 \,. \tag{7}$$

Pomocí (7) a (3) najdeme

$$d_1 = 2,6; \quad d_2 = 3,1; \quad d_3 = 3,3 \,. \tag{8}$$

Celkové délky tratí č. 1, č. 2, č. 3 po řadě jsou:

$$d_1 + d_{12} + d_{31} + x = 2,6 + 0,4 + 1,3 + 1,4 = 5,7; \\ d_2 + d_{23} + d_{12} + x = 3,1 + 0,9 + 0,4 + 1,4 = 5,8; \\ d_3 + d_{31} + d_{23} + x = 3,3 + 1,3 + 0,9 + 1,4 = 6,9 \,.$$

Společné úseky mají délky:

a) pro tratě č. 1 a č. 2 je to

$$d_{12} + x = 0,4 + 1,4 = 1,8;$$

b) pro tratě č. 2 a č. 3 je to

$$d_{23} + x = 0,9 + 1,4 = 2,3;$$

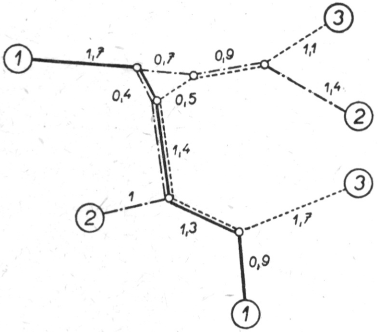
c) pro tratě č. 3 a č. 1 je to

$$d_{31} + x = 1,3 + 1,4 = 2,7 \,.$$

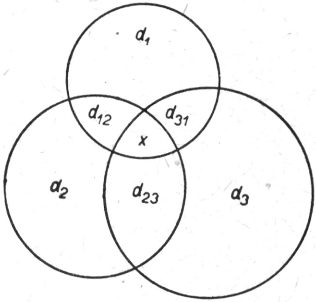
Přitom skutečně platí

$$(d_1 + d_2 + d_3) + (d_{12} + d_{23} + d_{31}) + x = 13\,,$$

jak se snadno pomocí výsledků (8), (7), (6) přesvědčíme. Připojený plánek je jedna z mnoha možných situací (obr. 31).



Obr. 31



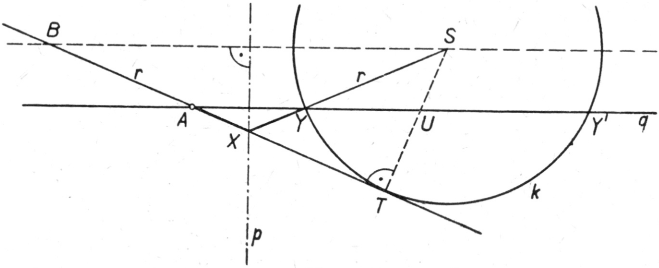
Obr. 32

Poznámka. Zobrazíme-li délky tratí kruhy (obr. 32), pak z obrázku snadno dospějeme k rovnici (1), jakož i ke vztahům (2), (3).

2. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a vně této kružnice je dán bod A, z něhož je ke kružnici k sestrojena tečna AT s dotykovým bodem T.

Uvnitř úsečky AT sestrojte takový bod X, aby platilo $AX = XY$, přičemž Y je průsečík úsečky SX s kružnicí k.

Řešení (obr. 33). Je-li Y bod, který je řešením úlohy, je trojúhelník AYX rovnoramenný s rameny $AX = XY$.



Obr. 33

Osa p jeho základny AY převede střed S v jistý bod B ležící na polopřímce XA; přitom platí

$$AB = BX - AX = SX - XY = r\,.$$

Sestrojíme tedy na polopřímce opačné k polopřímce AT bod B tak, aby bylo $AB = r$. Bodem A vedeme přímku $q \parallel BS$; hledaný bod Y náleží jednak přímce q, jednak kružnici k. Tím je rozbor úlohy ukončen.

Přímka AB je tečnou kružnice k, přímka BS nikoli; proto také přímka $q \parallel BS$ není tečnou kružnice k a protne ji ve dvou různých bodech Y, Y'. Zvolme označení tak, aby bylo $AY < AY'$. Označme U průsečík přímky q s úsečkou ST. Přímka SY protne stranu AU trojúhelníku ATU v jejím vnitřním bodě Y, prodlouženou stranu TU protne v bodě S; proto protne podle Paschovy věty stranu AT v jejím vnitřním bodě X. Obrácením předchozího postupu zjistíme, že bod X je řešením úlohy.

Naproti tomu polopřímka SY' je buď s přímkou AT rovnoběžná, nebo ji protne vně úsečky AT; proto bod Y' nevede k žádnému řešení úlohy.

Závěr. Úloha má vždy jediné řešení.

3. Rozhodnite, ktoré z oboch čísel

$$a = 639^9 \, , \; b = 638^9 + 638^8$$

je väčšie. Svoje rozhodnutie odôvodnite.

Riešenie. Máme porovnať čísla

$$a = 639^9, \; b = 638^9 + 638^8 \, . \qquad (1)$$

Pokúsime sa napísať číslo a v tvare súčtu dvoch mocnín, ktoré sa dajú porovnať s oboma číslami vyskytujúcimi sa vo vyjadrení čísla b. Platí

$$a = 639 \, . \, 639^8 = (638 + 1) \, . \, 639^8 = 638 \, . \, 639^8 + \\ + 639^8 \, . \qquad (2)$$

Je známe, že mocnina s väčším kladným mocnencom je väčšia; je preto $639^8 > 638^8$. Ak teda v súčte na pravej strane (2) nahradíme obe mocniny 639^8 mocninami 638^8, dostaneme číslo menšie než a. Tak postupne dostaneme

$$a > 638 \, . \, 638^8 + 638^8 = 638^9 + 638^8 = b \, .$$

Je teda $a > b$, čím je úloha vyriešená.

P o z n á m k a. Platnosť vzťahu $639^8 > 638^8$ medzi kladnými číslami overíme napr. tak, keď dokážeme, že zlomok $\frac{639^8}{638^8}$ je väčší než jedna.

Platí:

$$\frac{639^8}{638^8} = \left(\frac{639}{638}\right)^8 = \left(\frac{638 + 1}{638}\right)^8 = \left(1 + \frac{1}{638}\right)^8 .$$

Číslo v zátvorke je väčšie než jedna. No, súčin dvoch čísel $(1 + m)(1 + n)$, kde m, n sú kladné čísla, sa rovná číslu $(1 + m + n + mn)$, ktoré je väčšie než jedna. Preto aj ôsma mocnina čísla väčšieho než 1 je väčšia než 1. Tým je dôkaz prevedený.

K dôkazu možno však použiť aj vzorec pre rozdiel druhých mocnín: Položme $x = 639$, $y = 638$. Máme dokázať, že je $x^8 - y^8 > 0$. Platí:

$$r = x^8 - y^8 = (x^4)^2 - (y^4)^2 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = \\ = [(x^2)^2 - (y^2)^2] \cdot (x^4 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \cdot \\ \cdot (x^4 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

Všetky 4 činitele posledného súčinu sú kladné čísla, preto je $r > 0$, čo sme mali dokázať.

4. Druhú mocninu prirodzeného čísla N delíme číslom 12. Zistite, aký zvyšok (t. j. niektoré z celých čísel 0, 1, 2, ..., 11) môže pri tomto delení vyjsť. Sú len štyri možnosti.

(Pokyn: Každé prirodzené číslo N možno písať v tvare $N = 12k + z$, kde k je celé nezáporné číslo a o celom čísle z platí $0 \leqq z < 12$.)

Riešenie. Ku každému prirodzenému číslu N možno nájsť jedinú dvojicu nezáporných celých čísel k, z, kde

$$0 \leqq z < 12\,,$$

takých, že platí $N = 12k + z$ (nájdu sa napr. delením čísla N číslom 12). Je teda

$$N^2 = (12k + z)^2 = 144k^2 + 24kz + z^2 = 12(12k^2 + \\ + 2\,kz) + z^2\,. \tag{1}$$

Číslo z^2 možno taktiež jediným spôsobom napísať v tvare $z^2 = 12m + z'$, kde m, z' sú celé nezáporné čísla a platí $0 \leqq z' < 12$. Po dosadení do (1) teda dostaneme

$$N^2 = 12(12k^2 + 2kz + m) + z'\,.$$

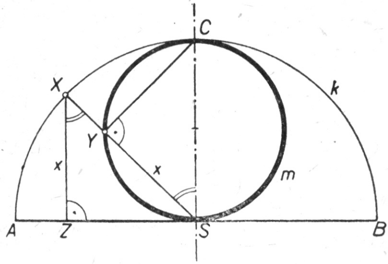
Tento výsledok hovorí, že zvyšok z' pri delení čísla N^2 číslom 12 je ten istý ako zvyšok pri delení čísla z^2 číslom 12. Zvyšky, ktoré dostaneme pri delení čísla z^2 číslom 12 zostavme do tabuľky:

číslo z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
číslo z^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
zvyšok pri delení čísla z^2 číslom 12	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Z tabuľky je zrejmé, že zvyšok pri delení čísla N^2 číslom 12 je práve jedno z čísel 0, 1, 4, 9 a žiadne iné. Sú teda skutočne len 4 možnosti, ako sa tvrdí v texte úlohy.

5. Je daná polkružnica k so stredom S a s priemerom AB. Označme x vzdialenosť ľubovoľného bodu X polkružnice k od priamky AB. Na polpriamke SX zostrojme bod Y tak, aby $SY = x$.

Vyšetrite geometrické miesto bodov Y.



Obr. 34

Riešenie (obr. 34). Označme $k \equiv (S; r = 1)$ danú polkružnicu s priemerom AB a ďalej C bod tejto polkružnice, ktorý má rovnaké vzdialenosti od bodov A, B, takže je $SC \perp AB$. Zvoľme niekoľko polôh bodu X a zostrojme príslušné body Y. Pri tom zistíme, že ak je $X \equiv A$, je $Y \equiv S$ a ak je $X \equiv C$, je tiež $Y \equiv C$. Ľahko dospejeme k domnienke, že body Y padnú na kružnicu m zostrojenú nad úsečkou SC ako priemerom.

Najskôr dokážme, že každý bod Y leží na kružnici m:

[1] O bodoch $X \equiv A$, $X \equiv B$ a $X \equiv C$ to zrejme platí.

[2] Nech je X bod polkružnice k rôzny od bodov A, B, C. Potom vznikne pravouhlý trojuholník SXZ, kde Z je päta kolmice vedenej bodom X ku priamke AB, takže je $XZ // SC$. Trojuholníky SXZ, CSY sú však potom zhodné podľa vety *sus*, pretože sa zhodujú v stranách $SX = CS = 1$, $XZ = SY = x$ a v uhloch $\sphericalangle SXZ = \sphericalangle CSY$ (uhly striedavé medzi rovnobežkami XZ, SC). Je teda $\sphericalangle SYC = \sphericalangle XZS = 90°$ a preto bod Y leží na Thaletovej kružnici m opísanej nad úsečkou SC ako priemerom.

Obrátene, nech je Y bod kružnice m (môžeme zrejme predpokladať, že Y je rôzny od bodov S, C, pre ktoré je vec samozrejmá). Označme X priesečník polpriamky SY s polkružnicou k a Z pätu kolmice vedenej bodom X k priamke AB. Potom sú trojuholníky SCY a XSZ zhodné podľa vety *usu*, pretože je $SC = XS = 1$, $\sphericalangle CSY = \sphericalangle SXZ$ (uhly striedavé medzi rovnobežkami $SC // XZ$), $90° = \sphericalangle CYS = \sphericalangle SZX$ a teda aj $\sphericalangle SCY = \sphericalangle XSZ$. Je teda skutočne $YS = XZ = x$.

Z á v e r. Hľadané geometrické miesto bodov Y je kružnica m, zostrojená nad úsečkou SC ako priemerom, kde C je spoločný bod polkružnice k a osi úsečky AB.

6. Najděte všechna celá čísla p, pro která je výraz

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2 - 2p + 1} - \frac{p^3 + 1}{(p - 1)^3}\right] \cdot (p^2 - 2p + 1) + \frac{p - 3}{p + 1} - \frac{p^2 - 3p}{p^2 - 1} \qquad (1)$$

roven celému číslu.

Řešení. Protože je $p^2 - 2p + 1 = (p - 1)^2$, dostaneme po dosazení do lomené závorky, že první člen výrazu V je

$$z = \frac{1}{2}\left[p^2 + p + 1 - \frac{p^3 + 1}{p - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(p - 1)(p^2 + p + 1) - (p^3 + 1)}{p - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(p^3 - 1) - (p^3 + 1)}{p - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{p - 1} = \frac{-1}{p - 1}.$$

Pak je

$$V = \frac{-1}{p - 1} + \frac{p - 3}{p + 1} - \frac{p^2 - 3p}{p^2 - 1} =$$

$$= \frac{-(p + 1) + (p - 3)(p - 1) - (p^2 - 3p)}{(p - 1)(p + 1)} =$$

$$= \frac{-p - 1 + p^2 - 4p + 3 - p^2 + 3p}{(p - 1)(p + 1)} =$$

$$= \frac{-2p + 2}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{-2(p - 1)}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{-2}{p + 1}. \tag{2}$$

Abychom tedy dostali celé číslo, musí o čísle $p + 1$ platit některý ze vztahů:

$$p + 1 = -2; \quad p + 1 = -1; \quad p + 1 = 1; \quad p + 1 = 2,$$

neboť číslo -2 lze dělit právě čísly: -2; -1; 1; 2. Odtud dostáváme tyto možnosti:

$$p = -3; \quad p = -2; \quad p = 0; \quad p = 1.$$

Z těchto možností vyloučíme $p = 1$, neboť je $p - 1 = 0$ a pak některé zlomky ve výrazu (1) mají jmenovatele rovné nule. Hledaná čísla p tedy jsou

$$-3;\ -2;\ 0\,. \tag{3}$$

Provedeme ještě zkoušky dosazením těchto hodnot do (1) a (2), zda skutečně vyhovují požadavkům úlohy:

[1] Pro $p = -3$ dostáváme

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{9-3+1}{(-4)^2} - \frac{-27+1}{(-4)^3}\right](-4)^2 + \frac{-6}{-2} - \frac{9+9}{9-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{7}{16} - \frac{26}{64}\right]\cdot 16 + \frac{6}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2}\left[7 - \frac{13}{2}\right] +$$

$$+ \frac{6}{2} - \frac{9}{4} = \frac{14-13+12-9}{4} = \frac{4}{4} = 1\,.$$

[2] Pro $p = -2$ dostáváme

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{4-2+1}{(-3)^2} - \frac{-8+1}{(-3)^3}\right](-3)^2 + \frac{-5}{-1} - \frac{4+6}{4-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 - \frac{7}{3}\right] + 5 - \frac{10}{3} = \frac{9-7+30-20}{6} = 2\,.$$

[3] Pro $p = 0$ dostáváme

$$V = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{-1}\right] + \frac{-3}{1} - \frac{0}{-1} = \frac{1}{2}\cdot 2 - 3 = -2\,.$$

Tato dosazení souhlasí s dosazeními do výrazu (2). Čísla (3) jsou tedy všechna řešení úlohy.

9. Úlohy II. kola kategorie D

1. Otec aj matka sa zúčastňujú na závodnom sporení. Každý z nich má svoju vkladnú knižku. Pri výhernom zlosovaní vytiahli obe knižky. Otec na svoju knižku vyhral 20% svojho vkladu a matka vyhrala 100% svojho vkladu. Obaja mali potom spolu aj s vkladmi 10 040 Kčs. Ak by však bola výhra na otcovu knižku 100% a na matkinu 20 %, mali by po výhre celkom 9 480 Kčs.

Vypočítajte pôvodný vklad aj výhru každého z rodičov.

Riešenie. Čiastky uvádzame v korunách. Otec mal po výhre celkom x, matka $10\,040 - x$. Pôvodný otcov vklad bol $\frac{100x}{120} = \frac{5}{6}x$, matkin $\frac{10\,040 - x}{2}$. Ak by situácia, pokiaľ sa jedná o percento výhry, bola opačná, bol by otcov vklad po výhre $\frac{5x}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3}x$ a matkin
$\frac{10\,040 - x}{2} \cdot \frac{120}{100} = \frac{10\,040 - x}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}(10\,040 - x)$.
Súčet týchto čiastok by bol

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{5}(10\,040 - x) = 9\,480\,.$$

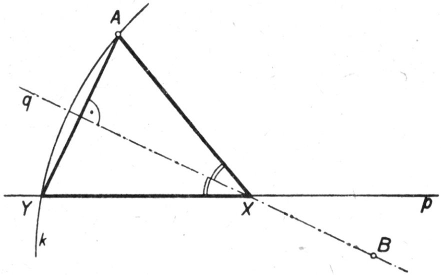
Ak poslednú rovnicu vynásobíme číslom 15, postupne dostaneme

$$25x + 9(10\,040 - x) = 9\,480\,.\,15\,,$$
$$x = 3\,240\,.$$

Ďalej je $10\,040 - 3\,240 = 6\,800$. Po výhre má otec celkom 3 240, matka 6 800. Pôvodne mal otec $\frac{3\,240\,.\,5}{9} = 2\,700$ a matka $6\,800 \cdot \frac{1}{2} = 3\,400$. Výhry teda sú 540 a 3 400.

Odpoveď. Pôvodný vklad otca bol 2 700 Kčs, matky 3 400 Kčs. Otec vyhral 540 Kčs, matka 3 400 Kčs.

2. V rovine je daná priamka p a dva body A, B ktoré ležia vo vnútri opačných polrovín vyťatých priamkou p. Na priamke p zostrojte body X, Y tak, aby AXY bol rovnoramenný trojuholník s ramenami XA, XY a aby priamka BX rozpoľovala uhol $\sphericalangle AXY$.



Obr. 35

Riešenie (obr. 35). Zrejme je (podľa podmienky úlohy) priamka BX osou základne AY. Preto platí

$$BA = BY .$$

Bod Y teda zostrojíme ako spoločný bod kružnice $k \equiv (B; BA)$ a priamky p. Kružnica má s priamkou vždy spoločné dva rôzne body Y, Y_1, pretože priamka p oddeľuje body A, B. Na obr. 35 je jeden z týchto spoločných bodov označený Y.

Bod X zostrojíme ako priesečník osy q úsečky AY s priamkou p. Pretože X leží na osi q, je $AX = XY$ a trojuholník AXY je teda skutočne rovnoramenný so základňou AY. Úloha má vždy dve riešenia.

Poznámka. Na obr. 35 je naznačené len jedno z oboch riešení.

3. Součet $7\,251^5 + 6\,159^7$ je dělitelný číslem 90. Dokažte.

Řešení. I. Nejprve dokážeme pomocnou větu V: Jsou-li a, b dvě přirozená čísla, jejichž dekadický zápis končí ciframi m, n, potom dekadický zápis součinu ab končí touž cifrou jako dekadický zápis součinu mn. Důkaz provedeme takto:

Čísla a, b lze s jediným výsledkem napsat ve tvaru

$$a = 10A + m\,, \quad b = 10B + n\,,$$

kde A, B jsou celá nezáporná čísla a m, n jsou některá z čísel 0, 1, 2, ..., 9. Je tedy $ab = (10A + m)(10B + n) = 10(10AB + An + Bm) + mn$. V tomto výsledku je první člen dělitelný deseti, a proto neovlivňuje jednotky dekadického zápisu čísla ab; čísla ab, mn mají tedy v dekadických zápisech na místech jednotek tytéž cifry. Tím je důkaz proveden.

II. Máme dokázat, že číslo

$$n = 7\,251^5 + 6\,159^7 \tag{1}$$

je dělitelné číslem 90. Je $90 = 9 \,.\, 10$, kde 9, 10 jsou nesoudělná přirozená čísla; číslo n je dělitelné devadesáti, jestliže je dělitelné čísly 10 a 9.

Opakovaným užitím věty V dostáváme, že dekadický zápis čísla $7\,251^5$ končí cifrou 1. Z téže věty plyne, že mocniny první, druhá, třetí atd. až sedmá čísla 6 159 končí po řadě ciframi 9, 1, 9, . . ., 9; stačí totiž uvažovat čísla $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 81 \,.\, 9, \ldots; 9^7 = (\ldots.1) \,.\, 9 = (\ldots.9)$ (sudé mocniny končí jedničkou, liché devítkou). Proto číslo n má na místě jednotek cifru jako součet $1 + 9 = 10$, tedy nulu; je proto n dělitelné číslem 10.

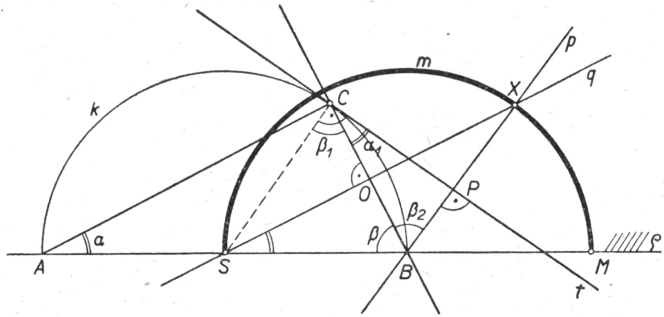
Každé z čísel 7 251, 6 159 je dělitelné třemi; proto mocniny těchto čísel od druhé počínajíc jsou dělitelné devíti a tím i jejich součet. Např. platí $7\,251^5 =$

$$= (3\,.\,2\,417)^5 = 3^5\,.\,2\,417^5, \qquad \frac{3^5\,.\,2\,417^5}{3^2} = 3^3\,.\,2\,417^5\,.$$

Tím je důkaz proveden.

4. Je dána polokružnice o průměru AB a středu S. Na polokružnici zvolme bod C různý od bodů A, B a sestrojme v něm k polokružnici tečnu t. Bodem B veďme kolmici p k přímce t a bodem S kolmici q k přímce BC. Označme X průsečík přímek p, q.

Vyšetřete množinu všech bodů X, jestliže bod C probíhá danou polokružnicí.



Obr. 36

Řešení (viz označení z obr. 36). Označme ϱ polorovinu (s hranicí AB), ve které leží daná polokružnice k. Podle textu úlohy je $p \perp t$, $q \perp BC$; paty těchto kolmic označme po řadě P, O. O středu S polokružnice k platí

$$SA = SB = SC = r\,. \tag{1}$$

Označme α, β úhly při vrcholech A, B pravoúhlého trojúhelníka ABC (bod C leží totiž na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem). Proto o úhlech vyznačených v obr. 36 platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

(ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku ABC),

$$\beta_1 = \beta$$

(trojúhelník SBC podle (1) je rovnoramenný se základnou BC),

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ\,, \quad \text{tj.} \quad \alpha_1 = \alpha \;(\text{je } SC \perp t)\,,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 90^\circ\,, \quad \text{tj.} \quad \beta_2 = \beta$$

(součet ostrých úhlů v trojúhelníku BCP, kde $\sphericalangle P = 90^\circ$). Přímka BC tedy půlí úhel $\sphericalangle SBX$, přičemž je $BC \perp q$; je tedy BSX rovnoramenný trojúhelník s rameny BS, BX a vzhledem k (1) platí $r = BS = BX$. Je tedy $\sphericalangle SBX$ dutý a bod X padne dovnitř poloroviny ϱ na polokružnici m, která má střed B a průměr SM. Trojúhelníky SBC, BSX mají kolmé základny BC, SX, které se navzájem půlí; proto je $SBXC$ rovnostranný rovnoběžník (čtverec nebo kosočtverec) a polokružnice k, m vzniknou jedna z druhé posunutím o délku SB ve směru SB (nebo opačném).

Obráceně, je-li X bod uvnitř oblouku SM (polokružnice m), sestrojíme rovnostranný rovnoběžník $SBXC$; je $SC = SB$, tj. bod C padne dovnitř oblouku AB (polokružnice k) a najdeme-li k bodu C příslušné přímky p, q, je jejich průsečíkem zvolený bod X. Odtud závěr:

Množinou všech bodů X jsou body polokružnice $m \equiv (B;\ \frac{1}{2}AB)$ ležící v polorovině ϱ, a to bez obou jejích krajních bodů S, M.