V. Zpráva o páté mezinárodní matematické olympiádě

1. Pořadatelem *V. mezinárodní matematické olympiády* (V. MMO) byla v roce 1963 polská vědecká matematická společnost *Towarzysztwo Matematyczne*. Program spojený s vlastní soutěží trval od pátku 5. července 1963 do neděle 14. července 1963. Československá delegace, která se skládala z osmi žáků, vedoucího delegace a pedagogického průvodce, přijela do Varšavy 5. července 1963 o 8.30 hod. VEČ a odcestovala 14. července 1963 o 4.15 hod. VEČ z Vratislavi do vlasti. Naše žákovská delegace byla vybrána z vítězů XII. ročníku československé celostátní matematické olympiády.

Soutěže se účastnilo celkem 8 socialistických zemí a každá byla zastoupena osmi žáky, takže celkový počet účastníků byl 64. Vedoucími delegací a pedagogickými průvodci podle jednotlivých zemí byly tyto osoby:

BLR (Bulharsko): *prof. A. Mateev; S. Budurov,* inspektor ministerstva osvěty BLR.
ČSSR: *doc. Jan Vyšín; Fr. Zítek* CSc.
SFRJ (Socialistická federativní republika Jugoslávie): *prof. M. Dajovićová; asistent M. Marjanović.*
MLR (Maďarsko): *prof. E. Hódi; redaktor T. Bakos.*
NDR: *prof. W. Engel; doc. H. Titze.*
PLR (Polsko): *Mgr. A. Mąkowski; Mgr. K. Wiśniewski.*
RLR (Rumunsko): *prof. G. D. Simionescu.*
SSSR: *doc. A. Morozovová; pedagog I. S. Petrakov.*

Předsedou polského přípravného komitétu

V. MMO byl známý *prof. St. Straszewicz*, jednatelem pak *prof. Mieczyslaw Czyżykowski*, oba z Varšavy. Profesor Straszewicz zároveň předsedal mezinárodní komisi soutěže (MK), jejímiž členy byli vedoucí delegací a jejíhož zasedání se účastnili i pedagogičtí průvodci.

Přípravný komitét vypracoval návrh na dvě šestice soutěžních úloh; k tomu užil textu úloh, které mu na jaře roku 1963 jednotlivé zúčastněné země zaslaly (z ČSSR bylo zasláno pět úloh). Ve dnech 4.—6. července 1963 pak MK vybrala šest soutěžních úloh, z nichž jedna je československého původu. Přitom byl zároveň stanoven maximální počet bodů pro klasifikaci jednotlivých úloh (žák mohl získat maximálně 40 bodů).

Neděle 7. července byla věnována jednak výletu do okolí Varšavy, jednak prohlídce historických pamětihodností města. V pondělí 8. července odjely delegace do Vratislavi, kde byly ubytovány v internátě Inspekce práce. V úterý 9. července dopoledne byl první soutěžní den. Ve středu 10. července měli žáci volno, kdežto vedoucí delegací a pedagogičtí průvodci prováděli hodnocení žákovských řešení; večer pro ně uspořádali profesoři vratislavské university večeři. Ve čtvrtek 11. července dopoledne byl druhý soutěžní den; dva jugoslávští žáci pracovali svá řešení v nemocnici vzhledem k jejich virovému onemocnění. Hodnocení žákovských řešení skončilo v pátek 12. července 1963 v 16.00 hod. Hned nato o 18. hod. se konalo závěrečné zasedání MK a schváleno hodnocení prací tak, jak se na tom dohodli vedoucí delegací s koordinátory; funkci koordinátorů konali členové Mezinárodní komise spolu s pedagogickými průvodci. Byl stanoven tento počet bodů pro udělení cen: první cena: 35—39 bodů (40 bodů nikdo nezískal); druhá cena: 28—34 bodů; třetí cena: 21 až 27 bodů.

Čs. žáci získali jednu první cenu (*Josef Daneš* — 35 bodů) a jednu třetí cenu (*Jaroslav Zemánek* — 23 bodů). V příloze č. 1 uvádíme jmenný seznam vítězů V. MMO.

V tabulce č. 1 je uveden celkový počet bodů, které získali jednotliví žáci a jednotlivá družstva celkem; v tabulce č. 2 uvádíme, kolik bodů získali jednotliví čs. žáci za každou ze šesti soutěžních úloh. V příloze II uvádíme texty a nástin řešení šesti soutěžních úloh; za každou úlohou v závorce je uvedena země, která úlohu zadala, a dále maximální počet bodů, které při řešení úlohy mohl žák získat.

Na závěr zasedání MK poděkoval *prof. Straszewicz* všem delegátům za jejich přátelskou spolupráci; *prof. Simionescu* pak poděkoval jménem zahraničních delegací hostitelům za družné přijetí.

V sobotu 13. července měli účastníci volno. Závěrečné slavnostní vyhlášení vítězů se konalo toho dne o 15.30 hod. v historické síni vratislavské radnice. Stalo se tak za předsednictví *prof. Straszewicze*. Hlavní projev k olympionikům měl *prof. Šikorski*, jako místopředseda Towarzystwa Matematicznego; mluvil o charakteru a významu matematiky. Po jeho projevu dostali žáci ceny a dárky. Jménem zahraničních delegací pak poděkoval *prof. E. Hódi*.

Závěrečný projev pronesl předseda Národní rady města Vratislavi *prof. Iwaskiewicz*. Poté se konala přátelská beseda, která skončila po 18. hod.

Tabulka č. 1

Celkový počet bodů, které získali žáci jednotlivých zemí

Žák číslo \ Země	BLR	ČSSR	SFRJ	MLR	NDR	PLR	RLR	SSSR
1	26	35	2	33	12	20	18	27
2	17	15	16	23	13	19	16	35
3	10	20	27	26	22	14	27	30
4	19	15	36	29	14	16	25	39
5	18	15	31	25	23	7	31	29
6	22	14	15	34	17	14	16	39
7	21	14	7	32	21	21	37	38
8	12	23	28	32	18	23	21	34
součet	145	151	162	234	140	134	191	271

Tabulka č. 2

Klasifikace řešení jednotlivých úloh čs. žáků

(v závorkách je uveden maximální počet bodů za dokonalé řešení úlohy)

Žák č.	Úloha č.						Získal celkem bodů (celkem max. 40 bodů)
	1 (6)	2 (7)	3 (7)	4 (6)	5 (6)	6 (8)	
1	6	7	5	5	6	6	35
2	4	3	0	1	0	7	15
3	3	7	1	0	5	4	20
4	4	5	0	3	0	3	15
5	2	3	2	2	1	5	15
6	2	4	0	2	0	6	14
7	2	5	0	1	0	6	14
8	5	5	5	0	1	7	23
						celkem	151

Příloha I.

Jmenný seznam vítězů V. mezinárodní matematické olympiády

I. cena

G. Maloletkin (SSSR); *R. Sarkisjan* (SSSR); *A. Zajcev* (SSSR); *A. Tolpygo* (SSSR); *L. Zsido* (RLR); *F. Dacar* (SFRJ); *J. Daneš* (ČSSR).

II. cena

V. Fišman (SSSR); *L. Lovász* (MLR); *F. Szidarovszky* (MLR); *L. Gerencsér* (MLR); *J. Pelikán* (MLR); *I. Boljevski* (SFRJ); *G. Lusztig* (RLR); *A. Zvjagincev* (SSSR); *P. Fazekas* (MLR); *S. Smirnov* (SSSR); *P. Petek* (SFRJ).

III. cena

K. Andreev (SSSR); *G. Eckstein* (RLR); *M. Mrševič* (SFRJ); *G. Corradi* (MLR); *V. Zaimov* (BLR); *S. Grigorescu* (RLR); *E. Makai* (MLR); *A. Mate* (MLR); *R. Riedel* (NDR); *B. Wajnryb* (PLR); *J. Zemánek* (ČSSR); *S. Bilcev* (BLR); *U. Küchler* (NDR); *G. Gancev* (BLR); *H. Schwarz* (NDR); *T. Spircu* (RLR); *H. Toruńczyk* (PLR).

2. Všimněme si stručně soutěžních úloh i nesnází, s nimiž žáci při jejich řešení museli zápasit.*)

K jednotlivým úlohám poznamenáváme stručně toto: Úlohy č. 1, 2, 4 byly vhodné pro soutěž. Přitom úloha

*) Texty a řešení soutěžních úloh jsou uvedeny v příloze II.

č. 4 si vyžadovala rozklad mnohočlenu třetího stupně, jehož jeden kořen byl znám. Tato látka není v osnovách většiny zúčastněných zemí; avšak podle mínění vedoucích delegátů by měl každý olympionik nabýt potřebných znalostí toho druhu z vlastního studia. Úloha č. 3 sváděla žáky k tomu, aby používali intuitivních prvků (žáci nebyli s to matematicky zvládnout pojem konvexního mnohoúhelníku); cosi podobného bylo i při úloze č. 2. Úloha č. 5 vyžadovala určitého speciálního obratu, načež řešení bylo zcela krátké; to si však vyžadovalo jistou zkušenost a vynalézavost. Úloha č. 6 měla dlouhý text (dala se totiž nesnadno formulovat); sváděla k experimentálnímu řešení a vyžadovala obšírný výklad; to působilo nesnáze při hodnocení a koordinaci klasifikace (podobná nesnáz byla i při úloze č. 2).

3. K výkonům žáků v průběhu soutěže poznamenáváme toto: Všeobecně lze říci, že např. žáci sovětští byli mnohem pohotovější než naši. Je to především proto, že byli ze speciálních tříd a dovedli řešit úlohy podstatně rozličnými metodami. Při úloze č. 4 se např. ukázaly základní nedostatky při eliminaci neznámých z většího počtu rovnic. Obratnost řešitelů se např. jasně projevovala při řešení úlohy č. 2, kde u mnohých řešitelů chyběl důkaz. Úloha č. 5 mnoho neukázala; většina žáků ji snadno rozřešila pomocí vhodného obratu, avšak mnozí přes značnou námahu nedospěli ke kladnému závěru. Při úloze č. 6 asi žádný z řešitelů neodvodil jistou větu o permutacích, jak to předpokládalo autorské řešení; většinou se řešila experimentálně a tu ovšem záleželo na tom, aby řešitel provedl zručným způsobem analýzu.

Posuzujeme-li československé družstvo, pak jen asi polovina žáků měla skutečně mezinárodní úroveň, kdežto druhá polovina nebyla na soutěž patřičně připravena. Náš nejlepší žák zřejmě způsobil, že jsme se jako celek nedostali na poslední místo. Soutěž je závodem jednotlivců, ale přesto výkony celého družstva ukazují na kvalitu a připravenost nejlepších mladých matematiků té které země. A tak při porovnávání vidíme, že všichni žáci ze SSSR a MLR získali ceny, žáci z RLR až na jednoho. Zatímco průměrný počet bodů na jednoho sovětského žáka je 34, připadá na našeho jen 19; jako celek jsme se umístili téměř na spodní hranici výkonů.

Uveďme přehledně nejzákladnější a nejtypičtější nedostatky většiny našich žáků: malá znalost metod řešení, nedostatek pohotovosti zvolit správnou metodu; nedostatečná zběhlost v úpravách výrazů a malá znalost školské algebry; nedostatečná znalost provádění rozboru (dichotomické třídění); žáci „odvodili" pomocné věty, které zřejmě neplatí, a užívali jich při řešení; malá zběhlost v řešení geometrických polohových úloh.

Uvedené neznalosti netkví v nedostatku nadání, ale v nedostatečné přípravě žáka. Vlekou se pak v průběhu jeho celého studia a ani nejlépe organizovaná příležitostná školení (přípravné přednášky, soustředění olympioniků před odjezdem na MMO) nemohou nahradit soustavné a pečlivé vedení žáka učitelem po celou dobu jeho studia. V zahraničí zřejmě věnují nejlepším mladým matematikům mnohem větší pozornost než u nás; pečují o ně soustavně organizátoři soutěže i vysokoškolští pracovníci. Našim žákům zatím chybí určitá samostatnost, jsou zvyklí plnit své povinnosti poněkud formálně a nejsou vychováváni k tomu, aby sami intenzívně usilovali o to, aby nabyli co nejhlubších znalostí v matematice vlastním úsilím. K těmto závěrům naši žáci sami dospěli při diskusích se zahraničními žáky, u nichž obdivovali nejen hloubku a šířku vědomostí, ale i vážnost, s jakou jsou upjati na studium matematiky.

Pro nás z předchozího vyplývá, že musíme hledat cesty, jak máme žáky vést odpovědně, plánovitě a soustavně, aby si zvykali na poctivou práci, aby sami v sobě potlačovali jakoukoli polovičatost a plně si uvědomovali, že jejich úkolem ve škole je uvědoměle a usilovně studovat. Čím dříve se nám podaří vnést do myslí našich žáků tyto zásady, tím dříve překonáme nesnáze, které dnes máme při výchově mladých kádrů.

Příloha II.

Soutěžní úlohy z V. mezinárodní matematické olympiády

1. Najděte všecky reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x\,,$$

kde p je reálný parametr. (ČSSR — max. 6 bodů)

Řešení. Danou rovnici upravíme na tvar

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - p}$$

a obě strany této rovnice umocníme dvěma; vyjde po úpravě

$$2x^2 + (p - 4) = -2x\sqrt{x^2 - p}\,.$$

Po dalším umocnění a úpravě dostaneme:

$$4(4 - 2p)x^2 = (p - 4)^2\,. \tag{1}$$

Je-li daná rovnice řešitelná, je i rovnice (1) řešitelná; proto je $p \neq 2, 4$ [v případě $p = 4$ dá (1) kořen $x = 0$, který nevyhovuje rovnici (1)]. Je-li $p \neq 2, 4$, plyne z (1) $4 - 2p > 0$ neboli $p < 2$. V úvahu pak přichází kořen rovnice (1) daný vzorcem

$$x = \frac{|p-4|}{2\sqrt{4-2p}}, \tag{2}$$

neboť z dané rovnice vyplývá, že x musí být nezáporné číslo. Je ovšem ještě třeba provést zkoušku. Vypočteme

$$x^2 - p = \frac{(p-4)^2}{4(4-2p)} - p = \frac{(3p-4)^2}{4(4-2p)};$$

odtud

$$\sqrt{x^2 - p} = \frac{|3p-4|}{2\sqrt{4-2p}}.$$

Dále vypočteme

$$x^2 - 1 = \frac{(p-4)^2}{4(4-2p)} - 1 = \frac{p^2}{4(4-2p)};$$

odtud

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{|p|}{2\sqrt{4-2p}}.$$

Kořen (2) bude tedy splňovat danou rovnici právě pro ty hodnoty p, pro něž bude platit

$$|3p-4| + 2|p| = |p-4|. \tag{3}$$

Při řešení rovnice (3) rozlišíme čtyři intervaly:

a) $p \leqq 0$,
b) $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$,
c) $\frac{4}{3} \leqq p \leqq 4$,
d) $p \geqq 4$.

V případě a) má rovnice (3) tvar $-3p + 4 - 2p = 4 - p$ a má jediné řešení $p = 0$. V případě b) má rovnice (3) tvar $-3p + 4 + 2p = 4 - p$ a vyhovuje jí kterékoli p z tohoto intervalu. V případě c) má rovnice (3) tvar $3p - 4 + 2p = 4 - p$ a má jediné řešení $p = \frac{4}{3}$. Konečně v případě d) má rovnice (3) tvar $3p - 4 + 2p = p - 4$ a vyhovuje jí jediné číslo $p = 0$.

Výsledek *zkoušky*: jediný možný kořen (2) vyhovuje dané rovnici jen v případě, že jsou splněny nerovnosti $p < 2$ a $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$. Podmínka řešitelnosti tedy je

$$0 \leqq p \leqq \tfrac{4}{3}.$$

2. Je dán bod A a úsečka BC. Určete geometrické místo všech bodů v prostoru, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno obsahuje bod A a druhé rameno má s úsečkou BC společný aspoň jeden bod.

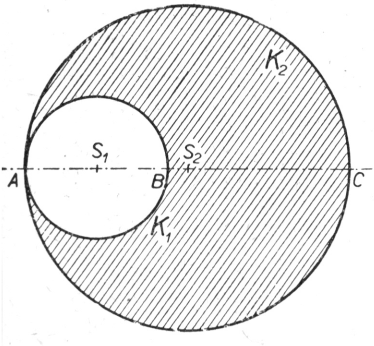
(SSSR — max. 7 bodů)

Řešení (jednoho ze sovětských účastníků). Je zřejmé, že bod A náleží vyšetřovanému geometrickému místu $\mathbf{M}$. Je-li $X \not\equiv A$ bod útvaru $\mathbf{M}$, pak rovina ϱ kolmá k přímce $p \equiv AX$ a procházející bodem X má s úsečkou BC aspoň jeden společný bod Y. Obráceně: vedeme-li libovolným bodem Y úsečky BC rovinu ϱ kolmou k libovolné přímce p procházející bodem A, pak průsečík X roviny ϱ s přímkou p náleží útvaru $\mathbf{M}$.

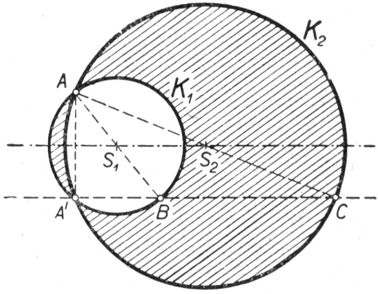
Všecky body X útvaru $\mathbf{M}$ ležící na pevné přímce p procházející bodem A dostaneme, vedeme-li příslušné roviny ϱ všemi body Y úsečky BC. Průsečíky X přímky p s rovinami ϱ buď splynou v jediný bod, nebo vyplní úsečku omezenou průsečíky přímky p s rovinami β, γ k ní kolmými, vedenými body B, C.

Vedeme-li ke všem přímkám p příslušné roviny β, vyplní příslušné body X kulovou plochu $\mathbf{K}_1$, sestrojenou nad průměrem AB. (Je-li $A \equiv B$, redukuje se tato plocha na jediný bod A.) Obdobně: vedeme-li ke všem přímkám p příslušné roviny γ, vyplní příslušné body X kulovou plochu $\mathbf{K}_2$, sestrojenou nad průměrem AC. (Je-li $A \equiv C$, redukuje se tato plocha na jediný bod A.)

Útvar $\mathbf{M}$ popíšeme takto: skládá se z obou kulových ploch $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ a ze všech bodů prostoru, které leží vně jedné z nich a uvnitř druhé.



Obr. 51



Obr. 52

Příklady: Leží-li bod A uvnitř úsečky BC, skládá se útvar $\mathbf{M}$ z obou koulí určených plochami $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$. Leží-li bod A na přímce BC mimo úsečku BC, vznikne útvar $\mathbf{M}$ rotací vyšrafovaného obrazce (i s hranicí) kolem přímky BC (viz obr. 51). Obdobně se vytvoří útvar $\mathbf{M}$, když bod A neleží na přímce BC (viz obr. 52); v tomto případě je osou rotace osa úsečky AA', kde A' je pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku BC.

3. Konvexní n-úhelník, jehož po sobě následující strany mají délky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ má tyto vlastnosti:

a) všecky jeho vnitřní úhly jsou shodné;

b) pro délky jeho stran platí nerovnosti

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n . \tag{1}$$

Pak je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Dokažte.

(MLR — max. 7 bodů)

Řešení (autorské). Označme $P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ daný konvexní n-úhelník; přitom platí $P_iP_{i+1} = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(P_{n+1} \equiv P_1)$. Myšlenka důkazu je v tom, že se pokoušíme sestrojit kružnici opsanou n-úhelníku (ukáže se, že n-úhelník je pravidelný), a to tak, že vycházíme postupně ze všech jeho stran.

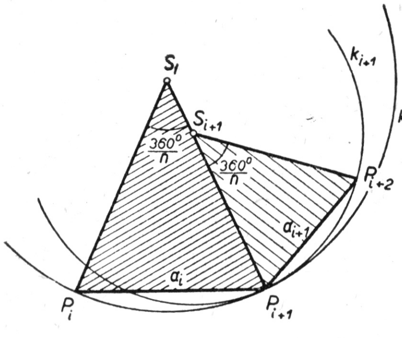
Nad stranou P_iP_{i+1} jako základnou sestrojíme rovnoramenný trojúhelník $P_iP_{i+1}S_i$ tak, aby úhel $\sphericalangle P_iS_iP_{i+1}$ proti základně měl velikost $\dfrac{360°}{n}$; trojúhelník sestrojíme v té polorovině s hranicí P_iP_{i+1}, v níž leží daný n-úhelník (n-úhelník je podle předpokladu konvexní). Kružnice $k_i \equiv (S_i; S_iP_i)$ by měla být kružnicí n-úhelníku opsanou.

Vyšetříme vzájemnou polohu kružnic k_i, k_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n$, $k_{i+1} \equiv k_1$). Je-li $a_i = a_{i+1}$ neboli $P_iP_{i+1} = P_{i+1}P_{i+2}$, splynou body S_i, S_{i+1}, a tedy i kružnice k_i, k_{i+1}.

Je-li $a_i > a_{i+1}$, leží bod S_{i+1} mezi S_i, P_{i+1} (viz obr. 53), kružnice k_1, k_{i+1} mají pak vnitřní dotyk v bodě P_{i+1}, a to tak, že k_{i+1} leží (s výjimkou bodu P_{i+1}) uvnitř k_i. Z předchozího vyplývá, že kruh k_{i+1} náleží kruhu k_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), tj., že kruh k_n náleží kruhu k_1. Nyní provedeme nepřímý důkaz. Nechť mezi vztahy (1) platí aspoň v jednom případě nerovnost. Pak kruh k_n leží uvnitř k_1 s možnou výjimkou jediného bodu, totiž bodu P_n.*) To znamená, že bod $P_1 \not\equiv P_n$ leží zároveň

*) Ta by nastala v případě, kdyby platilo $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} > a_n$.

na kružnici k_1 a zároveň uvnitř k_1 (na k_n). Tím je nalezen spor s předpokladem; závěr: platí $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, jak jsme měli dokázat.



Obr. 53

4. Určete všecka řešení x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soustavy rovnic

$$\left.\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1\,, \\ x_1 + x_3 &= yx_2\,, \\ x_2 + x_4 &= yx_3\,, \\ x_3 + x_5 &= yx_4\,, \\ x_4 + x_1 &= yx_5\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

kde y je parametr. (SSSR — max. 6 bodů)

Řešení. Eliminujeme nejprve x_5 z první, čtvrté a páté rovnice; dostaneme novou soustavu

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= y(x_1 - x_4)\,, \\ x_4 + x_1 &= y(yx_1 - x_2)\,, \\ x_1 + x_3 &= yx_2\,, \\ x_2 + x_4 &= yx_3\,; \end{aligned}$$

po úpravě

$$\left.\begin{aligned} yx_1 - x_2 + x_3 - yx_4 &= 0\,, \\ (1 - y^2)x_1 + yx_2 + x_4 &= 0\,, \\ x_1 + x_3 &= yx_2\,, \\ x_2 + x_4 &= yx_3\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Nyní eliminujeme z první, druhé a čtvrté rovnice soustavy (2) neznámou x_4; vyjde

$$\begin{aligned} yx_1 - x_2 + x_3 - y^2x_3 + yx_2 &= 0\,, \\ (1 - y^2)x_1 + yx_2 + yx_3 - x_2 &= 0\,, \\ x_1 + x_3 &= yx_2; \end{aligned}$$

po úpravě

$$\left.\begin{aligned} yx_1 + (y - 1)x_2 + (1 - y^2)x_3 &= 0\,, \\ (1 - y^2)x_1 + (y - 1)x_2 + yx_3 &= 0\,, \\ x_1 + x_3 &= yx_2\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Dále eliminujeme x_3; vyjde po úpravě

$$\left.\begin{aligned} (y^2 + y - 1)x_1 + (-y^3 + 2y - 1)x_2 &= 0, \\ (1 - y - y^2)x_1 + (y^2 + y - 1)x_2 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Rozložíme

$$-y^3 + 2y - 1 = (y^2 + y - 1)(1 - y); \qquad (5)$$

soustava (4) přejde užitím (5) v soustavu

$$\left.\begin{aligned} (y^2 + y - 1)[x_1 - (y - 1)x_2] &= 0\,, \\ (y^2 + y - 1)(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

a) Je-li $y^2 + y - 1 \neq 0$, plyne z (6) $x_1 = x_2$, $x_1(2 - y) = 0$. Je-li $y \neq 2$, pak $x_1 = x_2 = 0$, a dále $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Toto řešení skutečně vyhovuje soustavě (1), jak ukazuje zkouška.

b) Je-li $y^2 + y - 1 \neq 0$, ale $y = 2$, je opět $x_2 = x_1$, a dále $x_3 = x_1$, $x_4 = x_1$, $x_5 = 2x_1 - x_2 = x_1$; číslo x_1 je možno volit libovolně, jak ukazuje zkouška.

c) Je-li $y^2 + y - 1 = 0$, tj. $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, lze zvolit x_1, x_2 libovolně, x_3, x_4, x_5 se určí ze soustavy (1) pomocí vztahů:

$$\begin{aligned}
x_3 &= yx_2 - x_1 \,, \\
x_4 &= yx_3 - x_2 = (y^2 - 1)x_2 - yx_1 \,, \\
x_5 &= yx_1 - x_2 \,.
\end{aligned}$$

Zkouška se provede buď obrácením předchozího postupu, nebo dosazením.

Řešení lze zkrátit, odvodíme-li ze soustavy (1) další rovnici sečtením všech pěti rovnic.

5. Dokažte, že platí

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}\,.$$

(NDR — max. 6 bodů)

Řešení (vedoucího bulharské delegace). Důkaz se velmi zjednoduší, použijeme-li umělého obratu: levou stranu dokazované rovnosti znásobíme číslem

$$2\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{7}\right) = 2\cos\frac{\pi}{14}\,.$$

S použitím vzorce

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

dostaneme

$$2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) = \cos\frac{3\pi}{14} +$$
$$+ \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} =$$
$$= \cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{14}\,.$$

Je tedy

$$\cos\frac{\pi}{14}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)-1\right]=0\,.$$

Protože je $\cos\dfrac{\pi}{14}\neq 0$, vyplývá odtud dokazovaná rovnost.

6. Soutěže se zúčastnilo pět žáků A, B, C, D, E. Kdosi předpověděl, že výsledné umístění bude $ABCDE$. Tato předpověď se však nesplnila: žádný soutěžící nebyl na předpověděném místě a žádná dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících nebyla předpověděna správně.

Kdosi jiný předpověděl umístění $DAECB$. Tato předpověď byla správnější: právě dva soutěžící byli na předpověděných místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících byly předpověděny správně.

Určete, jaké bylo skutečně výsledné umístění.

(MLR — max. 8 bodů)

Řešení. I. Úlohu lze řešit ryze experimentálně, tj. napsat všech 120 permutací pěti prvků a vyškrtat všecky nevyhovující. Zůstane jediná permutace

$$EDACB\,, \tag{1}$$

která je skutečně řešením úlohy (prvky C, B jsou na předpověděných místech, správně byly předpověděny sledy DA, CB).

Toto experimentální řešení trvá asi půl hodiny.

II. „Matematičtější" řešení (autorské) se opírá o tuto snadno odvoditelnou pomocnou větu **V**:

Nechť permutace *XYZTU* (pěti prvků) má vzhledem k permutaci *KLMNP* tento vztah: právě dva z prvků *K*, *L*, *M*, *N*, *P* jsou na týchž místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou jdoucích prvků (tj. *KL*, *LM*, *MN*, *NP*) jsou zachovány.

Pak je buď $X = K$, $Y = L$, nebo $T = N$, $P = U$.

Důkaz pomocné věty **V**. Experimentálně zjistíme, že permutace *XYZTU* nemůže mít žádný z tvarů

$$K.M..;\quad K..N.;\quad K...P;\quad .LM..;$$
$$.L.N.;\quad .L..P;\quad ..MN.;\quad ..M.P.$$

Zbývají tedy jedině permutace, v nichž první dva nebo poslední dva prvky zůstávají na svých místech.

III. Podle pomocné věty **V** má v našem případě hledaná permutace tvar buď *DA* . . ., nebo . . . *CB*. V prvním případě jsou možnosti:

DACBE, *DACEB*, *DABCE*, *DAEBC*,
DABEC, *DAEBC*,

z nichž žádná nevyhovuje (důvod vyznačen podtržením). Vyplývá to ze srovnání s první předpovědí.

V druhém případě jsou možnosti:

ADECB, *AEDCB*, *DAECB*,
EADCB, *DEACB*, *EDACB*.

Z nich první, druhá a pátá opět odpadají (důvod vyznačen podtržením), třetí je předpověděná permutace — proto také nevyhovuje. Čtvrtá permutace zachovává sled jen jediné dvojice *CB*; proto také nevyhovuje.

Zbývá jen šestá permutace, která je skutečně řešením úlohy.

Jak je patrné, je toto řešení kombinací pokusů a deduktivních úvah, jichž se použilo k rychlejší eliminaci nevyhovujících permutací.