10. ročník matematické olympiády

V. Řešení úloh ze soutěže

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 10. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1960-1961. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1962. pp. 46–172.

V. Řešení úloh ze soutěže

1. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. a) Dokažte, že je-li $0 < x < 1$, potom platí

$$1 - \tfrac{1}{2}x - \sqrt{1 - x} < \tfrac{1}{2}x^2. \qquad (1)$$

b) Narýsujte (např. na milimetrový papír pomocí tabulky hodnot) graf funkcí $y = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1 - x}$, $y = \frac{1}{2}x^2$ v intervalu $(0, 1)$; za jednotku délky zvolte 20cm.

c) Vypočtěte (na čtyři desetinná místa), o kolik se liší hodnoty pravé a levé strany dokazované nerovnosti v úloze a) pro $x = \frac{1}{2}$.

Řešení. a) Pro číslo x podle textu úlohy platí

$$0 < x < 1, \qquad (2)$$

takže

$$1 - x > 0; \qquad (3)$$

má tedy odmocnina v (1) smysl. Úpravami (1) dostaneme $2 - x - x^2 < 2\sqrt{1 - x}$ neboli

$$(2 + x)(1 - x) < 2\sqrt{1 - x}\ . \qquad (4)$$

Vzhledem ke vztahům (2), (3) jsou čísla $2 + x$, $1 - x$ kladná; proto obě strany ve (4) jsou kladná čísla; umocněním obou stran (4) na druhou dostáváme po úpravě $x^4 + 2x^3 - 3x^2 < 0$ neboli

$$x^2(x + 3)(x - 1) < 0.$$

Tento vztah vzhledem ke (2) vskutku platí pro všechna uvažovaná x; obrácením postupu dostaneme správnost vztahu (1), což jsme měli dokázat.

b) Položme $y_1 = \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1 - x}$; souřadnice bodů grafu první funkce budou $[x, y = y_1]$, $[x, y = y_2]$. Grafem první funkce je oblouk paraboly (grafem funkce $y = ax^2$, jak známo, je parabola); dá se dokázat, že i grafem druhé funkce je oblouk paraboly. Sestavme tabulku hodnot ke každé z obou funkcí (sloupce označené *) jsou mimo uvažovaný interval):

x	0 *)	0,2	0,44	0,5	0,6	0,8	1 *)
y_1	0	0,02	0,08	0,125	0,18	0,32	0,5

x	0 *)	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1 *)	Poznámka
$1 - \frac{1}{2}x$	1	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	přesně
$1 - x$	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,2	0	přesně
$\sqrt{1 - x}$	1	0,89	0,77	0,70	0,63	0,44	0	dolní hranice
y_2	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,16	0,50	horní hranice

c) Pro $x = 0{,}5$ mají funkce $y_1 = \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1 - x}$ hodnoty:

$$y_1 = \tfrac{1}{8} = 0{,}125,$$
$$y_2 = 1 - \tfrac{1}{4} - \sqrt{0{,}5} = 0{,}75 - \sqrt{0{,}5};$$

rozdíl

$$d = y_1 - y_2 = 0{,}125 - (0{,}75 - \sqrt{0{,}5}) = \sqrt{0{,}5} - 0{,}625.$$

Přitom je

$$0{,}707106 < \sqrt{0{,}5} < 0{,}707107,$$

tj.

$$0{,}707106 - 0{,}625 < d < 0{,}707107 - 0{,}625$$

neboli

$$0{,}082106 < d < 0{,}082107.$$

Je tedy

$$d = 0{,}0821 + k \,.\, 10^{-5},$$

kde $0 < k < 1$ je jisté reálné číslo, které nemá vliv na cifru 1 stojící na 4. desetinném místě.

2. Ak sú a, b, c dĺžky strán trojuholníka ABC a s jeho polovičný obvod, potom pre dĺžku u osi vnútorného uhla při vrchole A tohto trojuholníka platí vzťah

$$u^2 = \frac{4bc}{(b + c)^2}\, s(s - a);$$

dokážte.

Ak je trojuholník ABC pravouhlý s preponou BC, potom s použitím predchádzajúceho výsledku dokážte, že

$$u = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\,\frac{\sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega},$$

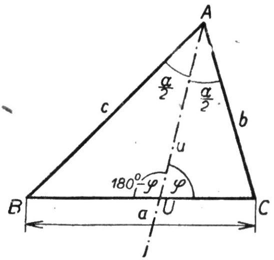
pričom je ω veľkosť hociktorého z oboch ostrých uhlov trojuholníka ABC.

Riešenie. I. Zavedieme označenie podľa obr. 1. Použitím sinusovej vety na trojuholníky ABU, ACU dostaneme

$$\frac{BU}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}; \qquad \frac{CU}{b} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}. \tag{1}$$

Porovnaním vzťahov (1) dostaneme

$$\frac{BU}{CU} = \frac{c}{b}. \tag{2}$$



Obr. 1

Pretože je $BU + CU = a$, je podľa (2) $\frac{c}{b} \cdot CU + CU =$ $= a$, tj.

$$CU = \frac{ab}{b+c} \tag{3a}$$

a podobne (výmenou strán b a c)

$$BU = \frac{ac}{b+c}. \tag{3b}$$

Teraz použijeme kosínusovú vetu na trojuholníky ABU, ACU; podľa vzorcov (3a), (3b) je

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= u^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - 2u\frac{ab}{b+c} \,.\, \cos\varphi, \\ c^2 &= u^2 + \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} + 2u\frac{ac}{b+c} \,.\, \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

pretože $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Rovnosti (4) vynásobíme po rade číslami c, b a sčítame. Dostaneme

$$bc(b+c) = u^2(b+c) + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}(b+c). \tag{5}$$

Rovnosť (5) delíme kladným číslom $b + c$ a po úprave dostaneme

$$u^2 = bc\left(1 - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right). \tag{6}$$

Vzťah (6) je jeden tvar hľadaného vzorca. Môžeme ho ďalej upraviť takto:

$$u^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2] \tag{7}$$

Pretože je

$$\begin{aligned}(b+c)^2 - a^2 &= (b+c+a)(b+c-a) = \\ &= 2s(2s-2a) = 4s(s-a),\end{aligned}$$

kde s znamená dĺžku polovičného obvodu trojuholníka, dostaneme z rovnosti (7) rovnosť

$$u^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}s(s-a), \tag{*}$$

čo je už hľadaný vzorec.

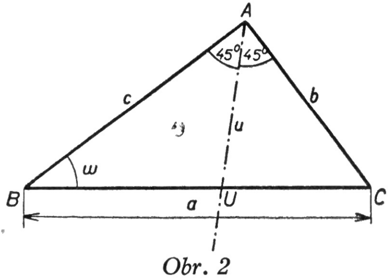
II. Nech je teraz $\sphericalangle CAB = 90°$. Pri odvodení vzťahu (*) vyjdeme zo vzorca (6). Ak je $\omega = \sphericalangle ABC$, je $\sin \omega = \dfrac{b}{a}$, $\cos \omega = \dfrac{c}{a}$. (Viď obr. 2.) Dosadíme do (6) $b = a\sin \omega$, $c = a\cos \omega$ a postupne dostaneme

$$u^2 = a^2 \sin \omega \cos \omega \left(1 - \frac{a^2}{a^2 (\sin \omega + \cos \omega)^2}\right),$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \sin 2\omega \left(1 - \frac{1}{1 + \sin 2\omega}\right),$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \sin 2\omega \, \frac{\sin 2\omega}{1 + \sin 2\omega},$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\omega}{(\sin \omega + \cos \omega)}.$$



Obr. 2

Pretože je $\omega < 90°$, je $\sin \omega > 0$, $\cos \omega > 0$, $\sin 2\omega >$ > 0, a teda

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega},$$

čo je už vzorec (*) z druhej časti úlohy. Pretože pre

$0 < \omega < 90°$ je $\sin(180° - 2\omega) = \sin 2\omega$, $\sin(90° - \omega) = \cos\omega$, $\cos(90° - \omega) = \sin\omega$, vyplýva z predchádzajúceho vzorca, že platí pre obidva ostré uhly ω, $90° - \omega$ pravouhlého trojuholníka ABC.

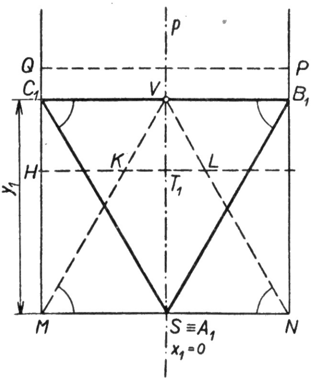
3. Je dán čtverec $MNPQ$. Uvažujme všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, které mají tyto dvě vlastnosti:

(1) Vrchol A leží na úsečce MN.

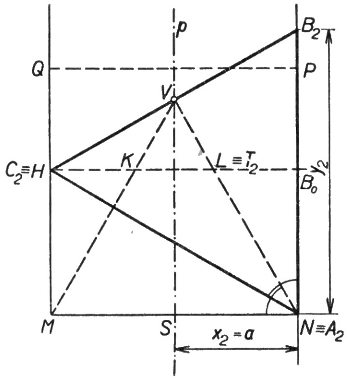
(2) Vrcholy B, C leží po řadě na polopřímkách NP, MQ.

Zjistěte, který útvar je geometrickým místem:

a) vrcholů B; b) středů úseček BC; c) těžišť trojúhelníků ABC. Potom sestrojte ten z trojúhelníků ABC, jehož těžiště padne na úsečku MP.



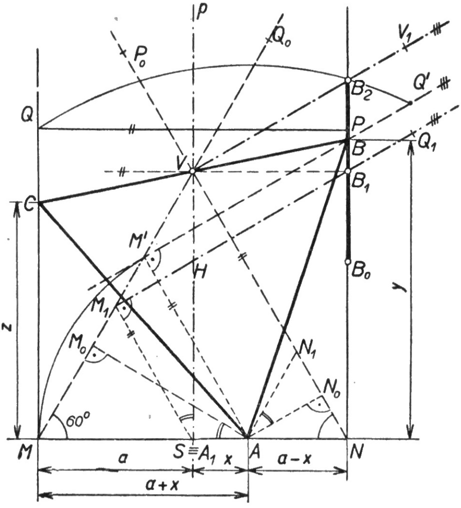
Obr. 3



Obr. 4

Řešení (viz označení z obr. 5, kde $MN = 2a$). Označme p osu úsečky MN a S střed této úsečky. Předpokládejme, že vrchol A hledaného trojúhelníka ABC leží na úsečce SN (možnost, že bod A padne na úsečku SM dostaneme z předchozího pomocí souměrnosti o ose p).

Případy, že je $A \equiv S$ nebo $A \equiv N$ jsou jednoduché, jak je vidět z obr. 3, 4.



Obr. 5

Nechť nadále je A bod ležící uvnitř úsečky SN.

a) Bod B v obr. 5 dostaneme otočením bodu C okolo bodu A o $60°$ v záporném smyslu; toto otáčení označme

Ω a otáčení obrácené nazveme Ω'. S bodem C se přitom otáčí i polopřímka MQ do polohy $M'Q'$, takže bod B je společným bodem polopřímek $M'Q'$, NP. Protože v otáčení Ω platí $AM' = AM$, $\sphericalangle MAM' = 60°$, je trojúhelník MAM' rovnostranný, takže bod M' leží uvnitř strany MV rovnostranného trojúhelníka MNV sestrojeného v polorovině MNP (bod V padne na přímku p). Přesněji řečeno, jestliže bod A probíhá úsečku SN, probíhá bod M' úsečku M_1V, kde M_1 je střed strany MV trojúhelníka MNV (viz obr. 5). Protože pro každou polohu bodu A je úhel $\sphericalangle MAM' = 60°$, jsou přímky AM' rovnoběžné s přímkou SM_1 pro všechny polohy bodu A; jsou tedy rovnoběžné i polopřímky $M'Q'$, které stojí kolmo na AM'. Polopřímky $M'Q'$ leží tedy v pásu rovnoběžek M_1Q_1, VV_1, které stojí kolmo k přímce SM_1 (počátky M' padnou na úsečku M_1V). Společná část pásu rovnoběžek M_1Q_1, VV_1 s polopřímkou NP je jistá úsečka B_1B_2. Jak patrno z obr. 5 je vzdálenost bodu B_2 od přímky MN větší o délku úsečky VH než NB_1, kde H je společný bod přímky p s polopřímkou M_1Q_1; zřejmě je $\sphericalangle VM_1Q_1 = 30° = \sphericalangle M_1VS$, takže $VH = M_1H = SM_1 \, . \operatorname{tg} 30°$ (neboť úhel $\sphericalangle M_1SV = 30°$), tj. $VH = \frac{1}{3}\sqrt{3} . MS = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a$. Dále je $SV = \frac{1}{2}\, MN . \sqrt{3} = a\sqrt{3}$. Je tedy $NB_2 = VH + SV = \frac{4}{3}\sqrt{3}a$, neboť $NB_1 = SV = a\sqrt{3}$ (bod B_1 je právě o délku VH blíže k přímce MN); viz též obr. 3, 4. Obráceně od každého bodu B vnitřku úsečky B_1B_2 obráceným postupem přes bod M'

vnitřku úsečky M_1V a otočením Ω' okolo bodu A můžeme dospět k bodu C polopřímky MQ.

Výsledek I. Geometrickým místem bodů B, odpovídajícím bodům A úsečky SN, je úsečka B_1B_2, ležící v polopřímce NP; přitom je $NB_1 = a\sqrt{3}$; $NB_2 = \frac{4}{3}a\sqrt{3}$, $MN = 2a$. Probíhá-li pak bod A celou úsečkou MN, vyplní bod B úsečku B_0B_2 o středu B_1.

b) Střed O úsečky BC dostaneme otočením bodu C kolem bodu A v záporném smyslu otáčení o úhel velikosti 30° a stejnolehlostí s konstantou $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (viz vzorec pro výšku rovnostranného trojúhelníka). Toto otáčení převede polopřímku MQ v polopřímku M_0Q_0, kde bod M_0 je zřejmě patou kolmice vedené bodem A na přímku MV; přímky MV, M_0Q_0 tedy splývají. Podobným způsobem dostaneme bod O z bodu B; příslušné otočení o úhel velikosti 30° má kladný smysl a polopřímku NP převádí v polopřímku N_0P_0, ležící v přímce NV. Společný bod polopřímek M_0Q_0, N_0P_0 je společným bodem přímek MV, NV, tj. bod V; je tedy $O \equiv V$.

Výsledek II. Geometrickým místem středů úseček BC je jediný bod V, tj. vrchol rovnostranného trojúhelníka MNV, který leží v polorovině MNP.

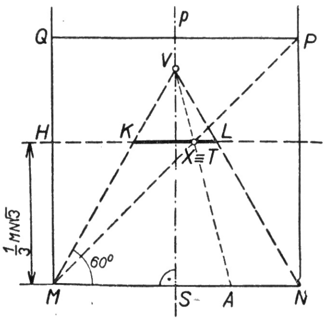
c) Těžiště T trojúhelníka ABC splňuje vztah $\frac{VT}{VA} = \frac{1}{3}$, bod T je tedy obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem $\frac{1}{3}$. Obrazy bodů úsečky MN vyplní úsečku KL rovnoběžnou s přímkou MN (viz obr. 6);

vzdálenost přímek KL, MN je $\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MN$. Tu je $HK = \frac{1}{3} \cdot MN$, $HL = \frac{2}{3}MN$. Úhlopříčka MP čtverce $MNPQ$ protne přímku HK v bodě X, jehož vzdálenost od bodu H je $HX = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MN \doteq 0{,}577MN$. Platí však

$$\tfrac{1}{3} < 0{,}577 < \tfrac{2}{3};$$

proto bod X náleží úsečce KL. Obráceně, ze zvoleného bodu X na úsečce KL odvodíme snadno vrchol A a další vrcholy B, C rovnostranného trojúhelníka ABC.

Výsledek III. Těžiště vyplní úsečku KL, jejíž konstrukce je patrna z obr. 6.



Obr. 6

Poznámka. Řešení úlohy užitím výpočtu (geometricky opřeném o předchozí postup) je patrné z obr. 5: Nechť bod A je bodem úsečky SN; označme x vzdálenost bodů S, A, dále y, z vzdálenosti bodů B, C od přímky MN. Snadno zjistíme, že $SV = \frac{1}{2}(y + z) = a\sqrt{3}$, kde $2a = MN$, čímž je odvozeno geometrické místo středů V úseček BC.

4. Nechť α, β, γ jsou velikosti úhlů trojúhelníka; označme

$$p = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma,$$
$$q = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1.$$

a) Je-li trojúhelník pravoúhlý, potom je $p = q$; dokažte.

b) Je-li $p = q$, potom je trojúhelník pravoúhlý; dokažte.

c) Které největší hodnoty může nabýt číslo p pro pravoúhlé trojúhelníky?

Řešení. a) Předpokládejme, že jsme označení trojúhelníka ABC zařídili tak, že platí

$$0 < \alpha \leqq \beta \leqq \gamma < 180°. \tag{1}$$

Vztah $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ užijeme zvláště ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \tfrac{1}{2}\gamma. \tag{2}$$

Je-li $\gamma = 90°$, je

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \sin\gamma = 1, \cos\gamma = 0. \tag{3}$$

Utvořme výraz $x = p - q$; platí postupně užitím vzorců pro součet funkcí, přičemž položíme

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos\gamma,\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sin\tfrac{1}{2}\gamma:$$

$$x = (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin\gamma - [(\cos\alpha + \cos\beta) + \\ + \cos\gamma + 1] = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + 1 - \\ - [2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + 1] = \\ = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)[\cos\tfrac{1}{2}\gamma - \sin\tfrac{1}{2}\gamma] = 0 \text{ [viz (3)]}.$$

Platí $x = 0$ neboli $p = q$, neboť poslední činitel je roven nule. Tím je tvrzení úlohy a) dokázáno.

b) Nechť platí $p = q$ [předpokládejme, že platí (1)] neboli

$\sin\alpha - \sin(90° - \alpha) + \sin\beta - \sin(90° - \beta) + \sin\gamma -$
$- \sin(90° - \gamma) = 1.$

Pomocí vzorce $\sin x - \sin y$ pro rozdíl funkcí dostaneme (přitom $2\cos 45° = \sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°$):

$$2\cos 45° \sin(\alpha - 45°) + 2\cos 45° \sin(\beta - 45°) + \\ + 2\cos 45° \sin(\gamma - 45°) = 1$$

neboli

$$\sin(\alpha - 45°) + \sin(\beta - 45°) = \sin 45° - \sin(\gamma - 45°).$$

Pomocí vzorce $\sin x + \sin y$ pro součet funkcí dostaneme

$$2\sin[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - 45°]\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \\ = 2\cos\tfrac{1}{2}\gamma \sin(45° - \tfrac{1}{2}\gamma);$$

odtud pomocí vztahu (2) dostaneme

$$\sin(45° - \tfrac{1}{2}\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos\tfrac{1}{2}\gamma \sin(45° - \tfrac{1}{2}\gamma),$$

tj.

$$\sin(45° - \tfrac{1}{2}\gamma)[\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\tfrac{1}{2}\gamma] = 0. \qquad (4)$$

Platí

$$z = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\tfrac{1}{2}\gamma =$$
$$= -2\sin\tfrac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma) \,.\, \sin\tfrac{1}{4}(\alpha - \beta - \gamma);$$

avšak

$$\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta, \quad -\beta - \gamma = \alpha - 180^\circ,$$

proto

$$z = -2\sin\tfrac{1}{4}(180^\circ - 2\beta)\sin\tfrac{1}{4}(2\alpha - 180^\circ) =$$
$$= 2\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta)\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Po dosazení do (4) máme, že pro úhly α, β, γ vedle $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ platí

$$\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta)\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma) = 0.$$

Protože úhly $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma$ jsou ostré, platí nutně jeden ze vztahů $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, tj. trojúhelník je pravoúhlý.

c) Pro $\gamma = 90^\circ$ je $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 45^\circ$; předpokládejme, že je $0 < \alpha \leqq \beta$, takže je

$$0 \leqq \beta - \alpha < 90^\circ. \qquad (5)$$

Přitom je

$$p = \sin\alpha + \sin\beta + \sin 90^\circ =$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) + 1 = 1 + \sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha);$$

vzhledem k (5) je p při $\gamma = 90^\circ$ maximální pro $\beta - \alpha = 0$, tj. pro $\alpha = \beta = 45^\circ$, tedy pro pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

5. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $2^n - 1$ druhou alebo vyššou mocninou (s celým exponentom) prirodzeného čísla.

Riešenie. *Rozbor.* Podľa textu úlohy máme nájsť prirodzené čísla n, $m > 1$, a, aby pre ne platilo

$$2^n - 1 = a^m. \tag{1}$$

Prípad [1]. Nech je $a = 1$. Potom vzťah (1) má tvar $2^n = 2$ pre všetky prirodzené čísla m. Z toho vyplýva, že nutne $n = 1$. Skutočne pre $a = n = 1$, $m > 1$ (ľubovoľné) je vzťah (1) splnený.

Prípad [2]. Nech je $a > 1$. Rozoznávajme možnosti [2a], [2b].

[2a] Nech je $n = 1$. Vzťah (1) má tvar $1 = a^m$ a nemožno ho splniť, pretože pre všetky prirodzené $m \geqq 1$, $a > 1$ je vždy $a^m > 1$. Tým je táto možnosť vylúčená.

[2b] Nech je $n > 1$. V tomto prípade je $2^n > 2$ párne číslo a $2^n - 1$ číslo nepárne. Zo vzťahu (1) vyplýva, že číslo a je nutne nepárne (inak by číslo a^m nebolo nepárne). Rozoznávajme d v e m o ž n o s t i (α), (β):

(α) Nech je $m > 1$ číslo párne. Položme $a = 2k + 1$, $m = 2p$, kde k, p sú prirodzené čísla. Po dosadení do (1) dostaneme $2^n - 1 = [(2k + 1)^2]^p$ čiže

$$2^n - 1 = [4(k^2 + k) + 1]^p; \tag{2}$$

po umocnení dostaneme na pravej strane číslo tvaru

$4Q + 1$, kde $Q \neq 0$ je prirodzené číslo. Vzťah (1) možno teda uviesť na tvar

$$2^n = 4Q + 2. \tag{3}$$

Pretože je $n > 1$, je číslo 2^n deliteľné štyrmi. Keďže pravá strana vzťahu (3) nie je štyrmi deliteľná, dospeli sme k sporu.

Zostáva m o ž n o s ť:

(β) Číslo $m > 1$ je nutne nepárne. Vzťah (1) možno písať v tvare $2^n = a^m + 1$ (kde je teda $m \geqq 2$). Na pravú stranu použijeme vzorec $x^b + y^b = (x + y) \cdot P$, kde $P = x^{b-1} - x^{b-2}y + \ldots - xy^{b-2} + y^{b-1}$, ktorý platí pre všetky nepárne prirodzené čísla $b \geqq 3$, pričom počet členov mnohočlena P je práve b.

Vzťah (1) potom prejde do tvaru

$$2^n = (a + 1) \cdot A, \tag{4}$$

kde $A = a^{m-1} - a^{m-2} + \ldots - a + 1$ je súčtom nepárneho počtu m nepárnych čísel. Je to teda nepárne číslo. Pritom pre prirodzené $2 \leqq k \leqq m - 1$ je $z_k = a^k - a^{k-1} = a^{k-1}(a - 1) > 0$. Keďže číslo A je súčtom aspoň jedného čísla z_k a čísla 1, je $A > 1$, teda $A \geqq 3$. No, ľavá strana vo vzťahu (4) nie je deliteľná nepárnym číslom $A \geqq 3$; tým sme dosiahli spor.

Záver. Jediné prirodzené číslo n, ktoré splňuje požiadavky úlohy, je číslo $n = 1$ a dané číslo $2^n - 1$ sa rovná 1.

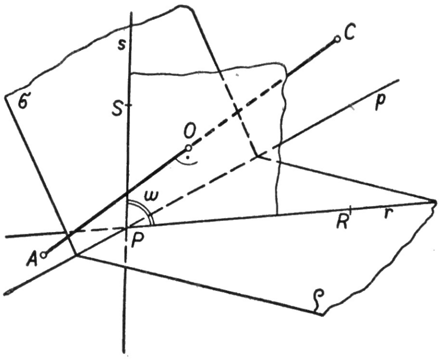
6. Jsou dány dvě různoběžné roviny ϱ, σ a úsečka AC, která nemá s žádnou z obou rovin ϱ, σ společný bod a která není kolmá k průsečnici rovin ϱ, σ.

Sestrojte rovnoramenný rovnoběžník (kosočtverec nebo čtverec) $ABCD$ těchto vlastností:

(1) Body A, C jsou jeho protější vrcholy.

(2) Bod B leží v rovině ϱ a bod D leží v rovině σ.

Proveďte prostorové řešení úlohy a diskusi řešitelnosti.



Obr. 7

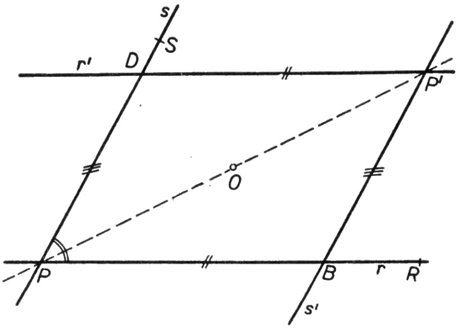
Řešení (viz obr. 7). Označme p průsečnici rovin ϱ, σ. Podle textu úlohy neplatí $p \perp AC$; proto rovina $\omega \perp AC$, která prochází středem O úsečky AC, je s přímkou p různoběžná (tj. má s ní jediný společný bod). Kdyby platilo $p \parallel \omega$, existovala by přímka $p' \parallel p$

jdoucí bodem O a ležící v rovině ω; pak by ale bylo $p' \perp AC$ a $p \perp AC$, což je proti znění úlohy.

Je-li $ABCD$ hledaný rovnostranný rovnoběžník, je $BD \perp AC$, takže body B, D i s přímkou BD leží v rovině ω. Označme r, s průsečnice roviny ω po řadě s rovinami ϱ, σ. Bod O leží v jednom ze čtyř dutých úhlů, v něž rovinu ω dělí různoběžky r, s (přímky r, s jsou jistě různé, protože přímka p protíná rovinu ω v bodě P, jímž procházejí i přímky r, s); tento úhel označme $\sphericalangle RPS$. Tím je úloha převedena na planimetrickou úlohu **U**: „V rovině ω je dán dutý úhel $\sphericalangle RPS$ a uvnitř tohoto úhlu bod O. Na polopřímkách RP, PS určete po řadě body B, D tak, aby úsečka BD měla střed O." Odtud *konstrukce:*

Sestrojíme středem O úsečky AC rovinu $\omega \perp AC$ a označíme P její průsečík s přímkou p a r, s průsečnice dvojic rovin ω, ϱ a ω, σ. Označme $\sphericalangle RPS$ ten z dutých úhlů, v něž přímky r, s dělí rovinu ω, uvnitř něhož leží bod O (takový úhel je zřejmě jediný); přitom body R, S leží po řadě v rovinách ϱ, σ. Nyní v rovině ω rozřešíme úlohu **U**, a to takto (obr. 8): Označme r', s' obrazy přímek r, s v souměrnosti o středu O a B, D průsečíky dvojic různoběžek r, s' a s, r'.

Protože bod O leží uvnitř úhlu $\sphericalangle RPS$, existuje rovnoběžník omezený přímkami $r \parallel r'$, $s \parallel s'$ o středu O a bod O půlí jeho úhlopříčku BD. Přitom přímka BD leží v rovině $\omega \perp AC$, takže je $BD \perp AC$. Ve čtyřúhelníku $ABCD$ podle sestrojení jsou úhlopříčky AC, BD navzájem kolmé a navzájem se půlí; z těchto dvou vlastností se užitím osové a středové souměrnosti snadno



Obr. 8

dokáže, že je to rovnostranný rovnoběžník (za osy souměrnosti volíme úhlopříčky, za střed souměrnosti střed O úseček AC, BD). Přitom existence řešení vyplývá z toho, že neplatí $AC \perp p$, jak je patrno z rozboru úlohy. Tím je dokázáno, že úloha má jediné řešení.

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Daný je trojuholník ABC, o ktorého vnútorných uhloch α, β pri vrcholoch A, B platí vzťah $\alpha = 2\beta$. Na predĺžení strany AB za bod B je daný bod D tak, že platí $BD = \frac{1}{3}AB$.

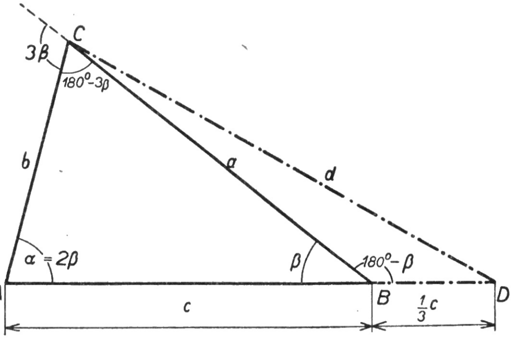
Vypočítajte rozdiel $CD - CA$ pomocou dĺžky c strany AB a uhla β.

Riešenie. Vonkajší úhol pri vrchole C trojuholníka ABC je $\alpha + \beta = 3\beta < 180°$, t.j.

$$\beta < 60°. \tag{1}$$

Označme $CA = b$, $CB = a$, $CD = d$. Veľkosti úsečiek a, b určíme použitím sinusovej vety z trojuholníka ABC. Je (obr. 9)

$$b = c\,\frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}, \quad a = c\,\frac{\sin 2\beta}{\sin 3\beta}. \tag{2}$$



Obr. 9

Platí

$$\begin{aligned}\sin 3\beta &= \sin(2\beta + \beta) = \sin 2\beta \cos\beta + \cos 2\beta \sin\beta = \\ &= 2\sin\beta \cos^2\beta + (1 - 2\sin^2\beta)\sin\beta = \\ &= 2\sin\beta\,(1 - \sin^2\beta) + \sin\beta(1 - 2\sin^2\beta) = \\ &= 3\sin\beta - 4\sin^3\beta;\end{aligned}$$

čiže

$$\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta.$$

Po dosadení do (2) dostaneme

$$b = \frac{c}{3 - 4\sin^2 \beta}, \quad a = \frac{2c\cos\beta}{3 - 4\sin^2\beta}. \tag{3}$$

Aby sme určili veľkosť úsečky d, použijeme na trojuholník BCD kosínusovú vetu. Vzhľadom k (3) dostaneme

$$d^2 = 4c^2 \frac{\cos^2\beta}{(3 - 4\sin^2\beta)^2} + \frac{c^2}{9} -$$

$$- 2 \cdot \frac{2c\cos\beta}{3 - 4\sin^2\beta} \cdot \frac{c}{3} \cdot \cos(180^\circ - \beta)$$

čiže

$$d^2 = \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} [36\cos^2\beta + (3 - 4\sin^2\beta)^2 +$$

$$+ 12\cos^2\beta(3 - 4\sin^2\beta)] =$$

$$= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} [81 - 144\sin^2\beta + 64\sin^4\beta] =$$

$$= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} (9 - 8\sin^2\beta)^2. \tag{4}$$

Vzhľadom k (1) je $0 < \sin\beta < \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a teda

$$3 - 4\sin^2\beta > 3 - 4 \cdot \tfrac{3}{4} = 0. \tag{5}$$

Pretože je $\sin^2\beta < 1$, je zrejme

$$9 - 8\sin^2\beta > 0. \tag{6}$$

Výsledok (4) možno vzhľadom k (5) a (6) upraviť takto:

$$d = \frac{c}{3(3 - 4\sin^2\beta)} (9 - 8\sin^2\beta).$$

Odtiaľ a z (3) dostávame

$$d - b = \frac{c}{3(3 - 4\sin^2\beta)}[(9 - 8\sin^2\beta) - 3] =$$

$$= \frac{2c(3 - 4\sin^2\beta)}{3(3 - 4\sin^2\beta)} = \frac{2c}{3},$$

takže je

$$d - b = \tfrac{2}{3}c.$$

Tým je úloha vyriešená.

Riešila Marta Kasalická,
3. g tr. SVVŠ,
Zátkova ul., České Budějovice.

2. Určete parametr p tak, aby funkce

$$y = \frac{6x - 6}{x^2 - 2x + p} \qquad (1)$$

byla definována pro všechna reálná čísla x a aby pro $x = 2$ nabývala své největší hodnoty.

Načrtněte přibližný graf funkce a dokažte o něm, že je středově souměrný podle bodu $X \equiv [1, 0]$.

Řešení I. Aby funkce (1) byla definována pro všechna reálná čísla x, nesmí být trojčlen $x^2 - 2x + p$ roven nule pro žádné x. Rovnice $x^2 - 2x + p = 0$ nesmí mít tedy reálné kořeny, tj. její diskriminant $4 - 4p$ musí být záporný; musí platit $4 - 4p < 0$ neboli

$$p > 1. \qquad (2)$$

Pro $p > 1$ skutečně je

$$x^2 - 2x + p = (x-1)^2 + (p-1) > 0,$$

neboť je $(x-1)^2$ nezáporné číslo a $p - 1 > 0$.

Označme $f(x)$ hodnotu zlomku na pravé straně (1) pro dané reálné číslo x. Aby funkce (1) pro $x = 2$ nabývala své největší hodnoty, je nutné, aby platilo $f(2) > f(2+k)$ pro všechna reálná čísla $k \neq 0$; máme tedy určit, pro která čísla p platí vztah

$$\frac{6}{p} > \frac{6(1+k)}{k(2+k)+p},$$

jestliže je $k \neq 0$. Dokázali jsme již, že oba jmenovatelé v této nerovnosti jsou kladná čísla; ekvivalentními úpravami dospějeme ke vztahu

$$k^2 + 2k > pk. \tag{3}$$

Rozeznávejme $k > 0$ a $k < 0$.

P ř í p a d [1]. Nechť je $k > 0$; potom ze (3) plyne pro číslo p požadavek $k + 2 > p$, který musí platit pro libovolné $k > 0$, tj. musí být

$$p \leqq 2. \tag{3'}$$

P ř í p a d [2]. Nechť je $k < 0$; ze (3) podobně dostáváme požadavek $k + 2 < p$ neboli

$$p \geqq 2. \tag{3''}$$

Má-li být $f(2)$ maximum, musí platit (3) pro všechna reálná $k \neq 0$ neboli musí být $p = 2$ [viz (3′), (3″)], tj. jedná se o funkci

$$y = \frac{6(x-1)}{x^2 - 2x + 2}\,. \tag{1′}$$

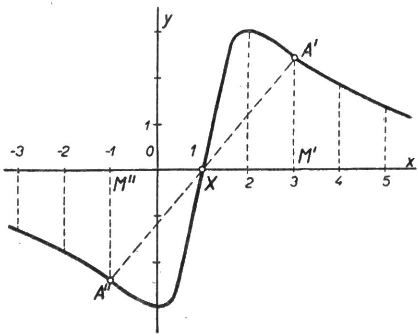
Ta pro $x = 2$ nabývá hodnoty 3; to je maximum naší funkce, jak plyne z obrácení postupu v případech [1], [2].

II. Nyní dokažme, že graf funkce (1′) je středově souměrný podle bodu $X = [1, 0]$ neboli, že platí $f(1 + k) = -f(1 - k)$, kde $k \neq 0$; přitom je $f(1) = 0$.

Dosaďme do (1) jednak $x = 1 + k$, jednak $x = 1 - k$; dostaneme

$$f(1 + k) = \frac{6k}{k^2 + 1}\,,$$

$$f(1 - k) = -\frac{6k}{k^2 + 1}$$



Obr. 10

Tím je důkaz proveden, nebo body $[1 + k, f(1 + k)]$, $[1 - k, f(1 - k)]$ jsou souměrně sdružené ve středové souměrnosti o středu X.

Na základě toho snadno sestrojíme graf (obr. 10), k jehož sestrojení užijeme tabulky:

x	1	2	3	4	5	1,5
y	0	3	2,4	1,8	113	2,4

Řešil Tomáš Jech,
žák 3. tř. SVVŠ Jana Nerudy,
Praha 1 — Malá Strana, Hellichova ul. 3.

II. Náčrt jiného řešení. Jako v přechozím řešení usoudíme, že nutně platí $p > 1$. První derivace funkce (1) je

$$y' = \frac{6x^2 + 12x + 6p - 12}{(x^2 - 2x + p)^2}. \tag{6}$$

Má-li funkce (1) pro $x = 2$ maximum, pak podle známých vět pro $x = 2$ platí $y' = 0$. Avšak jmenovatel ve zlomku pravé strany (6) je pro $p > 1$ pro všechna x kladný, proto je nutně pro $x = 2$ čitatel tohoto zlomku roven nule; po dosazení $x = 2$ dostáváme, že nutně je $6(p - 2) = 0$ neboli

$$p = 2.$$

Pro $p = 2$ funkce (1) zní

$$y = \frac{6(x-1)}{(x-1)^2+1}. \tag{7}$$

Pro $x = 2$ ze (7) dostáváme

$$f(2) = 3. \tag{8}$$

Pro $x \neq 2$ položme $x = 2 + k$, kde $k \neq 0$ je libovolné číslo; je

$$f(1+k) = \frac{6(1+k)}{(1+k)^2+1}. \tag{9}$$

Pomocí (8) a (9) dostaneme

$$f(2) - f(1+k) = \frac{3k^2}{(1+k)^2+1},$$

což je kladné číslo pro všechna $k \neq 0$; pro $x = 2$ má tedy funkce (7) vskutku maximum.
Souměrnost grafu se dokáže jako v předchozím řešení.

Řešení podal Michal Kretschmer,
žák 3. tř. SVVŠ,
Praha 10 — Vršovice, Omská ul. 1300.

3. Určite všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých najmenší spoločný násobok je o päť väčší ako ich najväčší spoločný deliteľ.

Riešenie. Nech je D najväčší spoločný deliteľ hľadaných čísel r, s, o ktorých môžeme predpokladať, že je

$$r \geqq s. \tag{1}$$

Predovšetkým je

$$r = r_1 D, \qquad s = s_1 D, \tag{2}$$

kde r_1, s_1 sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, o ktorých vzhľadom k (1) platí

$$r_1 \geqq s_1. \tag{3}$$

Označme n najmenší spoločný násobok čísel r, s, takže podľa známej vety platí

$$n = r_1 s_1 D. \tag{4}$$

Podľa textu úlohy má byť $n = D + 5$, takže po dosadení do (4) dostaneme

$$r_1 s_1 D = D + 5$$

čiže

$$r_1 s_1 = 1 + \frac{5}{D}.$$

Číslo $r_1 s_1$ je prirodzené a preto je nutne $\frac{5}{D}$ tiež prirodzené číslo, čiže je buď $D = 1$ alebo $D = 5$.

P r í p a d [1]. Nech je $D = 1$, takže vzhľadom k (5) máme $r_1 s_1 = 6$. Je teda buď $r_1 = 6$, $s_1 = 1$ a teda vzhľadom k (2)

$$r = 6, \quad s = 1 \tag{6}$$

alebo $r_1 = 3$, $s_1 = 2$ a teda vzhľadom k (2)

$$r = 3, \quad s = 2. \tag{7}$$

P r í p a d [2]. Nech je $D = 5$, takže vzhľadom k (5) máme $r_1 s_1 = 2$ čiže $r_1 = 2$, $s_1 = 1$ a teda vzhľadom k (2)

$$r = 10, \quad s = 5. \tag{8}$$

Tým sú všetky možnosti vyčerpané.

Záver. Požiadavkám úlohy vyhovujú jedine dvojice čísel 6,1; 3,2 a 10,5.

Riešenie podali: Alexander Groda,
žiak 3. tr. SVVŠ.
Kollárova 5, Praha 8 — Karlín a
Ján Lusk,
žiak 3. tr, SVVŠ,
České Budějovice, Zátkova ul. 29.

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, o jehož odvěsnách platí $CB < CA$. Určete množinu všech bodů X trojúhelníka ABC, pro něž platí zároveň tyto vztahy:

$$XA \geqq XB \geqq XC, \quad x_1 \geqq x_2 \geqq x_3,$$

kde x_1, x_2, x_3 po řadě značí vzdálenosti bodu X od stran BC, CA, AB trojúhelníka ABC.

Řešení (viz označení v obr. 11). Při řešení úlohy užijeme těchto vět:

Věta ***U***. Buď dán dutý úhel $\sphericalangle CAB$; označme X libovolný bod tohoto úhlu a x_2, x_3 po řadě jeho vzdálenosti od přímek AC, AB. Potom množinou všech bodů X, o nichž platí $x_2 \geqq x_3$, je ostrý úhel $\sphericalangle BAK$, kde polopřímka AK je osou daného úhlu $\sphericalangle BAK$.

Věta ***V***. Buď dána úsečka AB; označme o_3 její osu. Množinou všech bodů v rovině, o nichž platí $XA \geqq XB$ (včetně nulových vzdáleností), je polorovina o_3B.

Věta ***W***. Je-li $\sphericalangle BCM$ daný dutý úhel a prochází-li polopřímka CK vnitřkem tohoto úhlu, protne polopřímka CK úsečku BM v jejím vnitřním bodě.

Řešení úlohy rozdělme na části I, II; v první části vyšetříme množinu všech bodů X trojúhelníka ABC, o nichž platí $XA \geqq XB \geqq XC$, v druhé části dokončíme řešení úlohy.

I. Označme po řadě o_1, o_2, o_3 osy stran a, b, c daného trojúhelníka ABC, dále M', M'', M středy těchto stran, AK, BK, CK osy jeho vnitřních úhlů, při čemž K je střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané (o něm víme, že leží uvnitř trojúhelníka). Podle textu úlohy platí

$$a < b; \tag{1}$$

proto o ostrých úhlech α, β trojúhelníka ABC platí

$$0 < \alpha < 45° < \beta < 90°. \tag{2}$$

Z věty ***V*** vyplývá: Každý bod X trojúhelníka ABC, o němž platí $XA \geqq XB$, leží v polorovině o_3B; každý bod X trojúhelníka ABC, o němž platí $XB \geqq XC$, leží v polorovině o_1C. Bod X, o němž platí

$$XA \geqq XB \geqq XC, \tag{3}$$

leží zároveň v pravém úhlu $\sphericalangle BCA$ a v ostrém úhlu $\sphericalangle QMM'$, kde Q je průsečík přímek AC, o_3; úhel $\sphericalangle QMM'$ je totiž společnou částí polorovin o_1C a o_3B. Než stanovíme, co body X vyplní, proveďme dvě vašetřování:

[1] Platí $o_1 \parallel AC$, neboť je $AC \perp CB$, $o_1 \perp CB$.

[2] Platí $MA = MB = MC$, (4)

neboť M je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Je tedy trojúhelník MAC rovnoramenný a o_2 je jeho osa souměrnosti; odtud plyne: $\sphericalangle CMM'' = \sphericalangle AMM'' = \beta$ (neboť v trojúhelníku AMM'' je $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle M'' = 90°$, $\sphericalangle M = \beta$). Úhel $\sphericalangle QMM'' = \alpha$, takže je $\sphericalangle XMM'' > \sphericalangle QMM''$ [viz (2)]; leží tedy polopřímka MQ v úhlu $\sphericalangle CMM''$ a tím bod Q uvnitř úsečky CM''. Body X trojúhelníka ABC, o nichž platí (3) tedy vyplní lichoběžník $CQMM'$o větší základně

$$MM' = \tfrac{1}{2}b. \tag{5}$$

II. Z věty ***U*** vyplývá: Každý bod X trojúhelníka ABC, pro nějž platí $x_1 \geqq x_2$,

$$\text{leží v ostrém úhlu } \sphericalangle ACK; \tag{6}$$

každý bod X trojúhelníka ABC, pro nějž platí $x_2 \geqq x_3$,

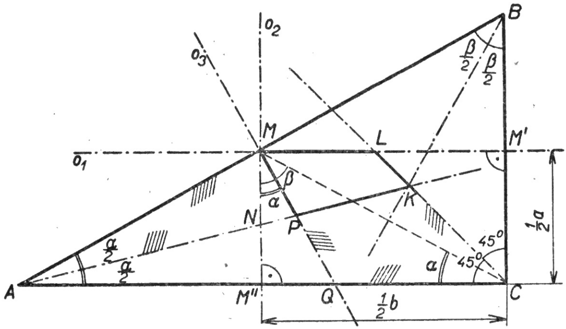
$$\text{leží v ostrém úhlu } \sphericalangle BAK. \tag{7}$$

Označme L průsečík osy CK úhlu $\sphericalangle BCA$ s přímkou o_1. Podle (4) je trojúhelník MBC rovnoramenný a platí

$\sphericalangle BCM = \sphericalangle CBM = \beta > 45°$ [viz (2)], takže je $\sphericalangle BCM > \sphericalangle BCK = 45°$; leží tedy polopřímka CL uvnitř úhlu $\sphericalangle BCM$ a má podle věty **W** s úsečkou MM' společný bod L ležící mezi body M, M'. Odtud plyne, že společnou částí lichoběžníka $CQMM'$ [viz (5)] a úhlu $\sphericalangle ACK$ [viz (6)] je

$$\text{lichoběžník } CQML. \tag{8}$$

Zbývá vyšetřit, co je společnou částí lichoběžníka



Obr. 11

$CQML$ [viz (8)] a úhlu $\sphericalangle BAK$ [viz (7)]. Polopřímka AK leží uvnitř úhlu $\sphericalangle CAB$ neboli úhlu $\sphericalangle QAM$ a podle věty **W** má s úsečkou QM společný bod P, který leží mezi body Q, M. Dále bod K (střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC) jistě leží uvnitř trojúhelníka

ABC; dokážeme však, že bod K padne dovnitř úsečky CL.

V trojúhelníku KBC platí $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle C = 45°$; polovina ostrého úhlu β je však menší než $45°$, takže je $\sphericalangle B < \sphericalangle C$. Proti většímu úhlu $\sphericalangle C$ trojúhelníka KBC leží větší strana, tj. je $KC < KB$ a podle věty **V** (užité pro ostrou nerovnost) padne bod K dovnitř poloroviny o_1C, a tím nutně dovnitř úsečky CL; tím je důkaz proveden.

Bod P tedy leží uvnitř úsečky QM a bod K leží uvnitř úsečky CL; proto společnou částí lichoběžníka $CQML$ a úhlu $\sphericalangle BAK$ je čtyřúhelník (vypuklý) $KPML$.

V našem vyšetřování jsme se opírali o věty **U**, **V**, které jednají o množinách *všech bodů* jisté vlastnosti. Proto je čtyřúhelník $KPML$ množinou všech bodů, které splňují požadavky úlohy. Tím je řešení úlohy provedeno.

3. ÚLOHY III. KOLA KATEGORIE A

1. Je dána posloupnost

$$1, \quad 2, 2, \quad 3, 3, 3, \quad 4, 4, 4, 4, \quad 5, \quad \ldots .$$

Vypočítejte její tisící člen.

Řešení. Členy dané posloupnosti zařaďme do skupin podle tohoto vzoru:

Členy posloupnosti	1	2, 2	3, 3, 3	...	$n, n, \ldots, n$
Index skupiny	1	2	3	...	n

Všimněme si toho, že index skupiny udává zároveň skupinu a počet členů, které má skupina. Prvních n skupin obsahuje

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1)$$

členů dané posloupnosti.

Jestliže tisící člen dané posloupnosti se nachází v n-té skupině, je $s_n \geqq 1000$
neboli

$$\tfrac{1}{2}n(n + 1) \geqq 1000;$$

po úpravě dostaneme pro číslo n požadavek

$$n^2 + n - 2000 \geqq 0. \qquad (1)$$

Po rozkladu levé strany této nerovnosti dostaneme

$$(n - n_1)(n - n_2) \geqq 0, \qquad (2)$$

kde $n_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{8001}) > 0$, $n_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{8001}) < 0$; je tedy $n - n_1 > 0$, a proto musí platit

$$n \geqq n_1. \qquad (3)$$

Avšak $90 > \sqrt{8001} > 89$; proto je

$$n_1 > \frac{-1 + 89}{2} = 44, \quad n_1 < \frac{-1 + 90}{2} = 44{,}5.$$

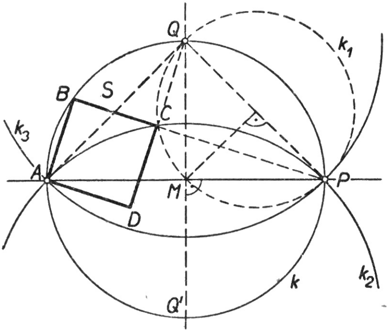
Vztah (3) tedy platí pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovná číslu 45, tj. tisící člen je ve skupině s_{45}, a je tedy roven číslu 45.

Podle řešení Michala Kretschmera,
11.b SVVŠ,
Omská 1300, Praha 10 a
Svatopluka Fučíka,
11.b SVVŠ J. K. Tyla,
Hradec Králové.

2. Daný je pravouhlý rovnoramenný trojuholník APQ s preponou AP. Zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby priamky BC, CD prechádzali po rade bodmi P, Q. Vyjadrite dĺžku strany štvorca $ABCD$ pomocou dĺžky a odvesny daného trojuholníka.

Riešenie. Označme $k \equiv (M, MA)$ kružnicu opísanú trojuholníku APQ. Rozoznávajme tieto d v a p r í p a d y: [1] Bod B leží vo vnútri polroviny APQ. [2] Bod B leží vo vnútri polroviny opačnej k polrovine APQ.

P r í p a d [1]. *Rozbor* (obr. 12). Je $\sphericalangle ABC = 90°$ a bod B leží vo vnútri štvrťkružnice AQ (inak priamka CD neprechádza bodom Q). Bod C zrejme leží vo vnútri úsečky BP. Označme S spoločný bod úsečiek AQ, PB. V pravouhlom trojuholníku PSQ je C päta výšky QC, je teda $\sphericalangle SQC = \sphericalangle SPQ$ a $\triangle AQD \cong \triangle QPC$ (usu), lebo je $AQ = QP = a$. Platí teda: $AD = QC = b$. Ďalej platí $b = DC = AD$ (pretože $ABCD$ je štvorec). Musí preto platiť: $QC = DC$. Je teda C stred úsečky QD a S stred úsečky AQ (je $CS \parallel AD$ a CS je stredná priečka v trojuholníku AQD).



Obr. 12

Konštrukcia (obr. 12). Zostrojme stred S úsečky AQ a označme $B \neq P$ spoločný bod polpriamky PS a kružnice k. Označme C obraz bodu B v súmernosti so stredom S, takže platí $SC = SB$. Trojuholník ABC (kde $\sphericalangle ABC = 90°$) doplníme na rovnobežník $ABCD$, ktorý vyhovuje požiadavkám úlohy, ako hneď dokážeme.

Dôkaz. Zo súmernosti so stredom S vyplýva, že

$\triangle SQC \cong \triangle SAB$ a teda $\sphericalangle SCQ = 90°$. Preto strana CD rovnobežníka $ABCD$ prechádza bodom Q a všetky jeho uhly sú pravé.

Ďalej je $SA = SQ$ a teda aj

$$CD = CQ. \tag{1}$$

No, $\triangle AQD \cong \triangle QPC$ (usu) — viď rozbor — a teda

$$CQ = DA. \tag{2}$$

Z (1) a (2) vyplýva, že $CD = DA$ a teda rovnobežník $ABCD$ má všetky strany i uhly rovnaké, t. j. je štvorec.

Diskusia. Bod S možno vždy zostrojiť a preto existuje práve jeden štvorec $ABCD$ s vrcholom B vo vnútri polroviny APQ.

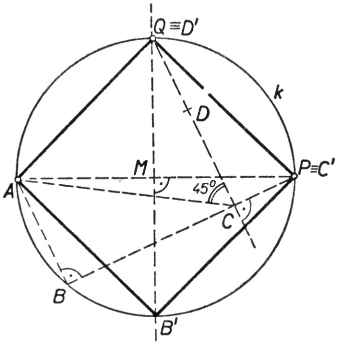
Z trojuholníka QSC, kde $\sphericalangle QCS = 90°$, $SC = \frac{1}{2}b$, $QC = AB = b$, pomocou Pythagorovej vety dostaneme $QS^2 = SC^2 + QC^2$ čiže

$$\frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}\,b^2,$$

odkiaľ

$$b = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

P r í p a d [2] (obr. 13). Nech bod B leží vo vnútri polroviny opačnej k polrovine APQ. Pritom nutne padne na kružnicu $k \equiv (M, MA)$ a uhol $\sphericalangle ABP = 90°$. Bod C leží teda na geometrickom mieste bodov, z ktorých vidno úsečku AQ pod uhlom $45°$. To je v našom prípade väčší oblúk kružnice $k \equiv (M, MA)$ s koncovými bodmi A, Q. Bod $C \not\equiv B$ leží na PB a k, takže nutne je $C \equiv P$ a teda aj $D \equiv Q$. Konštrukcia je samozrejmá (viď obr. 13 — na ňom štvorec $AB'C'D'$). V tomto prípade je strana štvorca $AB' = a$.



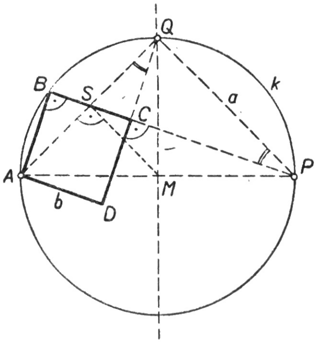
Obr. 13

Záver. Úloha má práve dve riešenia.

Podla riešenia Dušana Mikloša,
3c tr. SVVŠ,
Novohradská ul. Bratislava.

Iné riešenie (n á č r t — viď obr. 14). Ak je bod C rôzny od P, Q, potom je
$\sphericalangle PCQ = 90°$, $\sphericalangle ACP = 135°$ alebo $\sphericalangle ACP = 45°$. Zostrojme kružnicu k_1 nad úsečkou PQ ako priemerom

a kružnice $k_2 \equiv (Q', QA)$, $k_3 \equiv (Q, QA)$, kde Q' je obraz bodu Q v súmernosti podľa osi AP. Kružnice k_1, k_3 sa dotýkajú v bode P. Kružnice k_1, k_2 sa v bode P pretínajú a sú na seba kolmé. Musia mať zrejme ďalší spoločný bod C v polrovine PQA (vo vnútri opačnej



Obr. 14

polroviny neleží totiž žiadny bod kružnice k_2), ktorý nemôže padnúť do polroviny opačnej k polrovine APQ. Tým je dané jedno riešenie. Druhé riešenie dostaneme pre prípad, že je $C \equiv P$ (prípad $C \equiv Q$ zrejme nemôže nastať) — viď štvorec $AB'C'D'$ na obr. 13.

3. Dva cyklisté vyjedou současně z téhož místa kruhové dráhy a jezdí po této dráze v opačných smyslech, první stálou rychlostí c_1m/vt, druhý stálou rychlostí

c_2m/vt. Kolikrát se potkají v době, v které první cyklista objede kruhovou dráhu n-krát?

Proveďte výpočet pro $c_1 = 10$, $c_2 = 7$, $n = 11$.

Řešení. Označme T čas (ve vteřinách), který uplynul od vyjetí cyklistů až do jejich prvního střetnutí; dále označme o obvod kruhové dráhy.

Platí

$$Tc_1 + Tc_2 = o$$

neboli

$$T = \frac{o}{c_1 + c_2}. \tag{1}$$

Za dobu xT, kde x je přirozené číslo, dojde k x setkáním; označíme-li t čas od vyjetí cyklistů až do určitého okamžiku mezi x-tým a $(x + 1)$-tým setkáním, potom platí

$$xT \leqq t < (x + 1)T. \tag{2}$$

Jestliže v okamžiku t objel 1. cyklista obvod právě n-krát, pak platí $o \,.\, n = c_1 t$ neboli

$$t = \frac{o \,.\, n}{c_1}.$$

Po dosazení z (1), (3) do (2) máme

$$x \,.\, \frac{o}{c_1 + c_2} \leqq \frac{o \,.\, n}{c_1} < (x + 1) \,.\, \frac{o}{c_1 + c_2};$$

po znásobení číslem $\frac{c_1 + c_2}{o}$ pro číslo x dostaneme

$$x \leqq n \,.\, \frac{c_1 + c_2}{c_1} < x + 1$$

neboli

$$x = \left[n \,.\, \frac{c_1 + c_2}{c_1}\right],$$

kde symbol $[a]$ značí tzv. celistvou část čísla a (pro celá a je $[a] = a$, pro necelé a je $[a]$ nejbližší celé číslo menší než a).

V daném příkladě je

$$x = \left[11 \,.\, \frac{17}{10}\right] = \left[18{,}7\right] = 18;$$

cyklista objel dráhu 11krát, cyklisté se setkali 18krát.

Řešil Antonín Lukš, 3.c tř.
SVVŠ, tř. Jiřího z Poděbrad,
Olomouc.

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku 1. Vrchol X proměnného rovnostranného trojúhelníka XYZ leží na polopřímce AB, vrchol X na úsečce AD, vrchol Z na polopřímce DC.

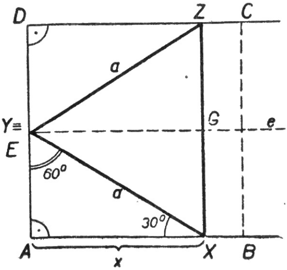
Zjistěte, jak závisí délka strany trojúhelníka XYZ na vzdálenosti AX. Odtud vypočtěte, který z trojúhelníků XYZ má nejmenší a který má největší obsah.

Řešení (viz obr. 15, 16). Omezíme se na případ, že bod Y probíhá úsečku ED, kde E je střed úsečky AB (to lze učinit vzhledem k souměrnosti o ose e, kde $e \perp$ $\perp AD$ je osou úsečky AD).

Označme $AD = 1$, $XY = YZ = ZX = a$, x vzdálenost bodů A, X, $\sphericalangle AYX = \alpha$; při našem omezení polohy bodu Y snadno v dalším ukážeme, že je $30° \leqq \leqq \alpha \leqq 60°$.

Uvažujme dvě možnosti: [1] Je $Y \equiv E$; [2] $Y \not\equiv E$ je bodem úsečky ED.

P ř í p a d [1]. Platí $x = AX = AE \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ a obsah P trojúhelníka XYZ je $P = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ (viz obr. 15).



Obr. 15

P ř í p a d [2] (viz obr. 16). Označme G střed strany XZ trojúhelníka XYZ, dále F patu kolmice vedené bodem X na přímku DC a H střed úsečky XF.

Označme T bod uvnitř čtverce $ABCD$ takový, že $\sphericalangle TYA = 90°$; bod G zřejmě leží uvnitř úhlu $\sphericalangle AYT$. Protože je $\sphericalangle XYG = 30°$, je $\sphericalangle AYX < 60°$; zřejmě platí $30° \leqq \sphericalangle AYX < 60°$.

Platí $\sphericalangle YXF = \sphericalangle AYX = \alpha$ (střídavé úhly); proto polopřímka XF leží v úhlu $\sphericalangle YXZ$, takže bod H padne dovnitř úsečky EG a bod F dovnitř úsečky DZ.

Z trojúhelníka XZF (kde $\sphericalangle F = 90°$, $XF = 1$) plyne

$$XZ = XF \cdot \frac{1}{\cos(60° - \alpha)}$$

neboli

$$a = \frac{1}{\cos(60° - \alpha)}. \tag{1}$$

Dále je

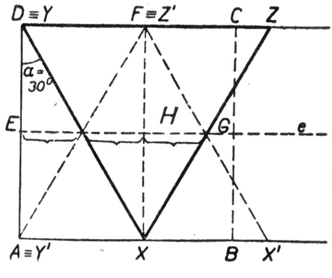
$$EG = YG \cdot \cos(60° - \alpha) = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \cos(60° - \alpha);$$

po dosazení z (1) máme

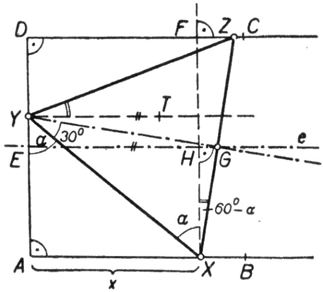
$$EG = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tag{2}$$

takže bod G, který leží na přímce e, je týž pro všechny trojúhelníky XYZ (i pro případ [1]). Snadno zjistíme, že o čísle x platí (viz obr. 15a, 16).

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{3'}$$



Obr. 15a



Obr. 16

Platí (viz pravoúhlý trojúhelník XGH, kde $\sphericalangle H =$ $= 90°$, $HX = \frac{1}{2}$, $HG = EG - EH = \frac{1}{2}\sqrt{3} - x$)

$$GX^2 = HG^2 + HX^2;$$

po dosazení a znásobení obou stran rovnosti číslem 4 dostaneme

$$a^2 = (\sqrt{3} - 2x)^2 + 1. \tag{3}$$

Tím jsme určili stranu a v závislosti na $x = AX$; tento výsledek pro $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ platí i v případě [1].

Minimum (maximum) obsahu P trojúhelníka XYZ nastane pro minimum (maximum) čísla $a > 0$.

Ze (3) plyne, že minimum a nastane, je-li $\sqrt{3} - 2x =$ $= 0$ neboli $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (viz případ [1] a obr. 15).

Funkci

$$y = (\sqrt{3} - 2x)^2 + 1 \tag{4}$$

musíme vyšetřit v intervalu (3′); dokážeme, že je klesající.

Mějme čísla $x_1 > x_2$ taková, že

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{3} \leqq x_1 < x_2 \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad (5)$$

a označme y_1, y_2 hodnoty funkce (4) po řadě pro x_1, x_2. Platí

$$y_2 - y_1 = (\sqrt{3} - 2x_2)^2 - (\sqrt{3} - 2x_1)^2 =$$
$$= 4(x_1 - x_2)\,.\,(\sqrt{3} - x_2 - x_1) =$$
$$= 4(x_1 - x_2)[(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - x_2) + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - x_1)].$$

Vzhledem k (5) je $x_1 - x_2 < 0$, $\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_2 \geqq 0$, $\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_1 > 0$ a tedy $y_2 - y_1 < 0$ neboli $y_2 > y_1$, což jsme měli dokázat.

Minimum tedy nastane pro $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, maximum pro $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a pro $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (uvažujme trojúhelník $Z'Y'X'$ souměrně sdružený s trojúhelníkem XYZ z obr. 15a vzhledem k ose e úsečky AD).

Podle řešení Jana Luska,
žáka 3.d tř. SVVŠ,
České Budějovice.

4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. Závod dodává p procent svých výrobků pro vývoz, zbytek na domácí trh.

a) Závod dostane za úkol zvýšit vývoz o $q\%$, domácí dodávky o $r\%$. O kolik procent musí zvýšit celkem výrobu?

b) Závod zvýší celkovou výrobu o $s\%$; z tohoto zvýšení dodá třikrát více vývozu než na domácí trh. O kolik procent vzrostly jeho dodávky pro vývoz a o kolik procent dodávky pro domácí trh?

Řešení. a) Označme n původní počet výrobků (v jistém období). Z toho připadlo vývozu $\frac{p}{100}n$ výrobků, domácímu trhu $\left(1-\frac{p}{100}\right)n$ výrobků. Při zvýšení výroby připadne vývozu $\left(1+\frac{q}{100}\right)\frac{p}{100}n$ výrobků, domácímu trhu $\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)n$ výrobků. Je-li celková zvýšení výroby dáno x procenty, je zvýšené množství výrobků $\left(1+\frac{x}{100}\right)n$. Podle podmínky úlohy a) je

$$\left(1+\frac{q}{100}\right)\frac{p}{100}n+\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)n=\left(1+\frac{x}{100}\right)n.$$

Znásobíme-li tuto rovnost číslem $\frac{100}{n}$, dostaneme

$$\left(1+\frac{q}{100}\right)p+\left(1+\frac{r}{100}\right)(100-p)=100+x.$$

Po vynásobení

$$p+\frac{pq}{100}+100+r-p-\frac{pr}{100}=100+x,$$

a odtud

$$x=r+\frac{p}{100}(q-r). \tag{1}$$

Pro $p=40$, $q=20$, $r=25$ vyjde $x=23$.

b) V druhé úloze platí mezi čísly p, s a q, r (to jsou hledané počty procent zvýšení dodávek) podle (1) vztahu:

$$s = r + \frac{p}{100}(q - r) \qquad (2a)$$

Vzrůst dodávek pro vývoz je $\frac{q}{100} \cdot \frac{p}{100} n = \frac{pq}{100^2} n$ výrobků, vzrůst dodávek pro domácí trh je $\frac{r}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)n$ výrobků. Podle podmínky je

$$\frac{pq}{100^2} n = 3 \cdot \frac{r}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right) n.$$

Znásobíme-li tuto rovnici číslem $\frac{100^2}{n}$, vyjde

$$pq = 3r(100 - p). \qquad (2b)$$

Rovnice (2a), (2b) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé q, r.

Rovnici (2a) znásobíme číslem 100, rovnici (2b) uspořádáme podle q, r; tím uvedeme soustavu na tvar:

$$pq + (100 - p)r = 100s,$$
$$pq - 3(100 - p)r = 0.$$

Vyloučíme-li r, dostaneme

$$q = \frac{75s}{p}, \qquad (3a)$$

vyloučíme-li q, dostaneme

$$r = \frac{25s}{100 - p}. \qquad (3b)$$

Vzorce (3a), (3b) dávají řešení úlohy b).

2. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané veľkosti výšok v_a, v_b a veľkosť ťažnice t_a.

Udajte podmienky riešiteľnosti.

Riešenie. *Rozbor* (obr. 18—20). Musí zrejme platiť

$$v_a \leqq t_a. \qquad (1)$$

Nech sú M, N po rade päty výšok trojuholníka ABC vedených bodmi A, B a S stred strany BC, takže je

$$AM = v_a, \; BN = v_b, \; AS = t_a.$$

Opíšme kružnicu $k \equiv (S, \frac{1}{2}v_b)$. Táto sa dotýka priamky AC v bode T. Pritom je ST strednou priečkou v trojuholníku BCN, takže je T stredom úsečky CN alebo je $N \equiv C \equiv T$ (viď obr. 20).

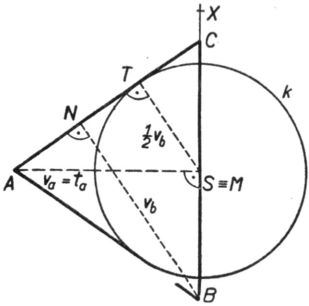
Pri konštrukcii treba rozoznávať d v a p r í p a d y:

[1] Je $v_a = t_a$, t. j. $M \equiv S$ (obr. 17);

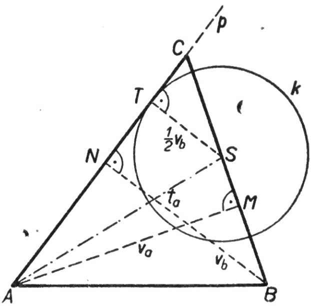
[2] je $v_a < t_a$, t. j. $M \not\equiv S$ (obr. 18—20).

P r í p a d [1] (viď obr. 17). Zvolme úsečku $AS = t_a = v_a$, uhol $\sphericalangle ASX = 90°$ a opíšme kružnicu $k \equiv (S, \frac{1}{2}v_b)$. Požadujme, aby bod C padol do polroviny ASX čiže na polpriamku SX. Označme T dotykový bod dotyčnice vedenej z bodu A ku kružnici k, ktorý leží v polrovine ASX. Spoločný bod polpriamek AT, SX

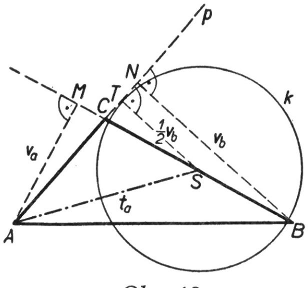
označme C a jeho obraz v súmernosti so stredom S nech je B. Potom je ABC hľadaný trojuholník.



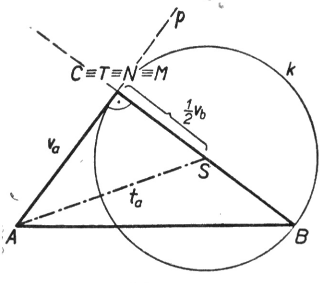
Obr. 17



Obr. 18



Obr. 19



Obr. 20

Dôkaz konštrukcie nebudeme prevádzať, pretože sa zrejme jedná o rovnoramenný trojuholník s hlavným vrcholom A.

Podmienkou riešiteľnosti je, aby bod A ležal mimo kružnice k (nie na kružnici k) čiže $\frac{1}{2}v_b < v_a = t_a$, t. j.

$$v_b > 2v_a = 2t_a. \qquad (2)$$

P r í p a d [2] (viď obr. 18—20). Ak je $t_a > v_a$, zostrojme trojuholník ASM tak, aby platilo $\sphericalangle AMS = 90°$, $AM = v_a$, $AS = t_a$. Ďalšia konštrukcia je takmer taká istá ako v prípade [1]. Označíme C priesečník priamky MS a dotyčnice p vedenej bodom A ku kružnici k a zostrojíme obraz B bodu C v súmernosti so stredom S. Potom trojuholník ABC splňuje požiadavky úlohy.

Dôkaz a *diskusia*. V trojuholníku ABC má ťažnica AS dĺžku t_a a výška AM dĺžku v_a. Ak bod A leží mimo kružnice k (t. j. pre $2t_a > v_b$), je dotyčnica p rôznobežná s priamkou MS a bod $C \neq S$ existuje. Pritom je $BN = 2.TS = v_b$ (viď obr. 18—20), pretože TS je stredná priečka v trojuholníku BCN. Má teda výška trojuholníka ABC vedená bodom B dĺžku v_b.

Z bodu A možno viesť ku kružnici k dve rôzne dotyčnice. Sú teda dve riešenia práve vtedy, keď je

$$2t_a > v_b.$$

Inak úloha riešenie nemá.

Záver. Ak platí: [1] $v_a = t_a$, $v_b < 2t_a$, má úloha dve riešenia.

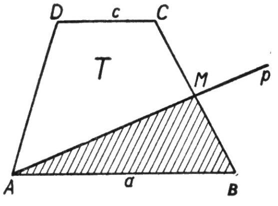
[2] $v_a < t_a$, $v_b < 2t_a$ má úloha taktiež dve riešenia. Inak úloha riešenie nemá.

Riešenie zaslal s. Karol Trnovský,
učitel SVVŠ, Ružomberok.

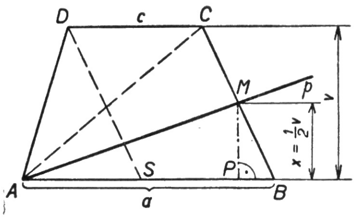
3. Máme rozdělit lichoběžník ve tři nepřekrývající se trojúhelníky o stejných obsazích.

Zjistěte, zda je úloha řešitelná pro každý lichoběžník. V případech, kdy je úloha řešitelná, najděte všechny způsoby takového rozdělení.

Řešení. Označme $a = AB$, $c = CD$ základny a v výšku uvažovaného lichoběžníka $ABCD$; nechť přitom platí $a > c$ (toho lze dosáhnout vhodným označením vrcholů lichoběžníka). Obsah každého z hledaných dílčích trojúhelníků pak je $\frac{1}{6}(a + c)v$.



Obr. 21



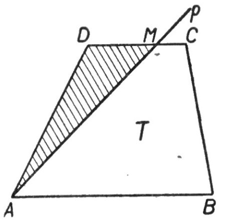
Obr. 21 a

Přímka, která neobsahuje žádný vrchol trojúhelníka, zřejmě úloze nevyhovuje; taková přímka dělí lichoběžník buď ve dva čtyřúhelníky, nebo na trojúhelník a pětiúhelník (ten nelze jednou další přímkou rozdělit ve dva trojúhelníky). Proto musí hledaná přímka p obsahovat alespoň jeden vrchol lichoběžníka. Jsou dvě možnosti: Přímka p oddělující dílčí trojúhelník prochází vrcholem:

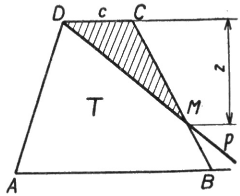
[1] větší základny a a protíná rameno lichoběžníka (srovnej s obr. 21).

[2] větší základny a a protíná menší základnu c (srovnej s obr. 22).

[3] menší základny a protíná rameno (srovnej s obr. 23).



Obr. 22



Obr. 23

[4] menší základny a protíná větší základnu (srovnej s obr. 24). (Výrokem „p ř í m k a p r o t í n á ú s e č k u" tu rozumíme, že má s úsečkou jediný společný bod, který leží uvnitř uvažované úsečky.)

Případy [1] až [4] prozkoumáme ve sledu [2], [4], [1], [3]:

P ř í p a d [2] nevede k řešení, neboť čtyřúhelník **T** v obr. 22 je lichoběžník a ten nelze rozdělit přímkou, která obsahuje úhlopříčku, ve dva rovnoploché trojúhelníky.

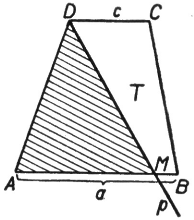
P ř í p a d [4] povede k řešení právě tehdy, je-li v obr. 24 čtyřúhelník $T \equiv BCDM$ rovnoběžníkem, tj. platí-li

$$cv = 2.\tfrac{1}{6}(a + c)v$$

neboli

$$a = 2c. \tag{1}$$

Skutečně, tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující; tím je tento případ vyřízen (viz obr. 21, 24a, 24b).



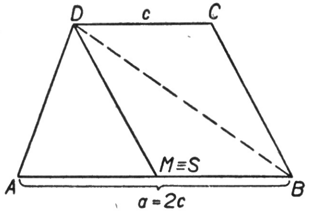
Obr. 24

P ř í p a d [1]. Označme v obr. 21a x výšku trojúhelníka ABM; tu platí

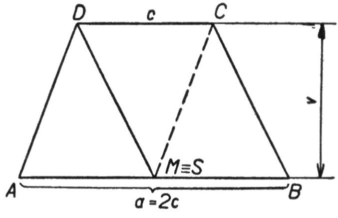
$$\frac{1}{2}ax = \frac{1}{6}(a + c)v,$$

tj.

$$x = \frac{a + c}{3a} \cdot v. \tag{2}$$



Obr. 24a



Obr. 24b

Máme dvě možnosti pro rozdělení čtyřúhelníka T ve dva rovnoploché trojúhelníky:

a) Čtyřúhelník T v obr. 21a rozdělme úhlopříčkou AC ve dva trojúhelníky; pro obsah P trojúhelníka ACD platí

$$P = \tfrac{1}{2}cv = \tfrac{1}{6}(a + c)v$$

neboli

$$a = 2c. \tag{1'}$$

Po dosazení (2) dostáváme

$$x = \tfrac{1}{2}v \tag{3}$$

což vede k řešení (viz obr. 21a) a trojúhelníky mají obsah cv.

b) Úhlopříčka DM (viz obr. 21) vzhledem k (1'), (3) nedělí čtyřúhelník T ve dva rovnoploché trojúhelníky, neboť obsah Q trojúhelníka CDM je

$$Q = \tfrac{1}{2}c(v - x) = \tfrac{1}{6}(a + c)v; \tag{4}$$

pomocí vztahu (2) však je

$$v - x = \frac{2a - c}{3a}\, v \text{ a po dosazení do (4) máme}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{(2a - c)}{a} \cdot cv = \frac{1}{6}(a + c)v$$

neboli

$$a^2 - ac + c^2 = 0,$$

tj.

$$\frac{a^2}{c^2} - \frac{a}{c} + 1 = 0.$$

Trojčlen $y^2 - y + 1 = (y - 1)^2 + y$ je pro všechna kladná čísla y kladný; avšak $\frac{a}{c}$ je kladné číslo, proto rovnice (5) nemá reálné řešení a dělení lichoběžníka je nemožné.

P ř í p a d [3]. Označme z výšku příslušnou ke straně CD trojúhelníka CDM v obr. 23; pak musí být

$$\tfrac{1}{2}cz = \tfrac{1}{6}(a + c)v,$$

tj.

$$z = \frac{a + c}{3c}\,v.$$

Celé další vyšetřování dostaneme z případu [1] výměnou písmen a, c. Protože je $a > c$, je vztah $c = 2a$ [obdobný ke vztahu (1')] nemožný; proto případ [3] nemůže nastat.

Závěr. Úloha je při $a > c$ řešitelná jedině, platí-li $a = 2c$; pak má tři řešení — viz obr. 21a, 24a, b.

4. Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prirodzených čísel x, y, z, ktoré majú tu vlastnosť, že súčet každých dvoch čísel trojice je deliteľný zostávajúcim tretím číslom trojice.

Riešenie. Predpokladajme, že sme našli prirodzené čísla, ktoré splňujú požiadavky úlohy. Najmenšie z nich označme x, najväčšie z a stredné, čo do veľkosti, označme y. Platí teda

$$0 < x < y < z. \tag{1}$$

Z nerovností

$$x < z, \; y < z \tag{1'}$$

dostaneme sčítaním

$$x + y < 2z. \tag{2}$$

Podľa textu úlohy je súčet $x + y$ deliteľný číslom z, teda platí

$$x + y = kz, \tag{3}$$

kde k je nejaké prirodzené číslo. Pomocou vzťahu (3) prejde vzťah (2) do tvaru

$$kz < 2z, \qquad \text{čiže} \qquad 0 < (2 - k)z.$$

Pretože je $z > 0$, je nutne $2 - k > 0$ čiže $2 > k$. Pretože k je prirodzené číslo, je nutne $k = 1$ a vzťah (3) má preto tvar

$$x + y = z. \tag{3'}$$

Podľa textu úlohy pre čísla x, y, z okrem vzťahu (3) platia ešte vzťahy

$$x + z = ny, \tag{4}$$

$$y + z = mx; \tag{5}$$

pričom m, n sú určité prirodzené čísla. Ak do (4) a (5) dosadíme za z z (3'), dostaneme

$$2x + y = ny, \tag{4'}$$

$$x + 2y = mx. \tag{5'}$$

Zo vzťahu (5′) vyplýva, že x je deliteľom čísla $2y$, tj.

$$2y = px, \tag{6}$$

kde p je nejaké prirodzené číslo. Zo vzťahu (4′) vyplýva, že y je deliteľom čísla $2x$, t. j.

$$2x = qy, \tag{7}$$

kde q je prirodzené číslo. Vynásobme navzájom ľavé a pravé strany vzťahov (6) a (7). Dostaneme

$$4xy = pqxy.$$

Keďže je $xy \neq 0$, vyplýva z téjto rovnice

$$pq = 4.$$

Prirodzené čísla p, q nemôžu byť $p = q = 2$, lebo potom zo (7) vyplýva $x = y$, čo je v spore s predpokladom (1). Taktiež nie je možné, aby bolo $p = 1$; $q = 4$, pretože potom zo (7) vyplýva $x = 2y$, čo je opäť v spore s predpokladom (1). Zostáva teda posledná možnosť: $p = 4$, $q = 1$. Zo vzťahov (6) a (7) dostaneme $y = 2x$ a stadiaľ a z (3′) obdržíme $z = 3x$. Dostali sme trojicu čísel

$$x, \ y = 2x, \ z = 3x,$$

kde x je ľubovolné prirodzené číslo. Tieto čísla vyhovujú požiadavkám úlohy, ako sa ľahko presvedčíme. Opravdu čísla

$$\frac{x+y}{z} = 1, \quad \frac{y+z}{x} = 5, \quad \frac{z+x}{y} = 2$$

sú prirodzené.

Hľadaná trojica čísel je teda

$$r,\ 2r,\ 3r,$$

pričom r je ľubovoľne zvolené prirodzené číslo.

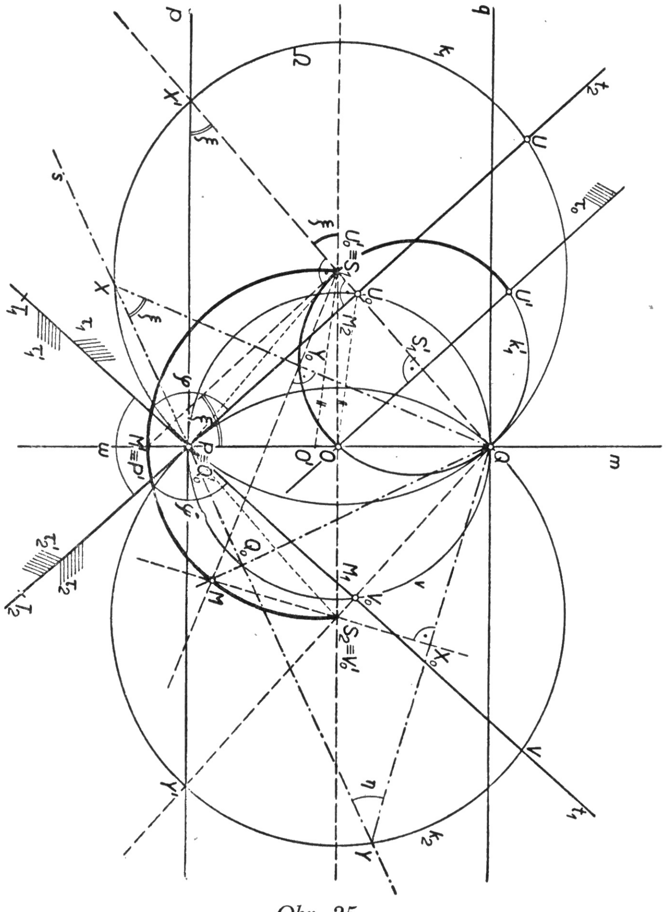
5. Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2, které se protínají ve svou různých bodech P, Q. Bodem P veďme přímku, která protne obě kružnice ještě v dalších bodech X, Y navzájem oddělených bodem P.

a) Vyšetřte geometrická místa středů stran trojúhelníka QXY.

b) Vyšetřte, který útvar vyplní středy kružnic opsaných trojúhelníkům QXY.

Řešení. Užijeme označení z obrázku 25, kde $t_1 \equiv \equiv PT_1$, $t_2 \equiv PT_2$ jsou po řadě tečny daných kružnic $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$ ve společném jejich bodě P. Přitom kružnice k_1 leží v polorovině $\tau_1 \equiv t_1O$, kde O je střed úseček PQ, S_1S_2. Přímky p, q jsou rovnoběžné s S_1S_2 a po řadě procházejí body P, Q. Dutý úhel $\omega \equiv \sphericalangle T_1PT_2$ je společnou částí polorovin τ_1', τ_2'; úhly $\varphi \equiv \sphericalangle T_1PU$, $\varphi' \equiv \sphericalangle T_2PV$ jsou vrcholové a k úhlu ω vedlejší. Přímka t_2 je různá od t_1; obě přímky mají společný bod P, takže jsou různoběžné a protože je $t_2 \not\equiv t_1$, je t_2 sečnou kružnice k_1. Průsečíky přímky t_2 s k_1 označme P, $U \not\equiv P$; podobně je V druhý průsečík přímky t_1 s k_2.

Označme $s \equiv XPY$ přímku, která má vedle bodu P



Obr. 25

s kružnicemi k_1, k_2 po řadě další společný bod X, popř. Y, a to takový, že bod P odděluje body X, Y. Dokážeme, že každá přímka, která prochází bodem P a vnitřkem úhlu φ, je přímkou typu s; všechny ostatní přímky jdoucí bodem P nejsou přímkami typu s.

Především přímky t_1, t_2 nejsou typu s; každá přímka o, která prochází vnitřkem úhlu ω, nemá s žádnou z kružnic k_1, k_2 uvnitř úhlu ω společný bod; úhel ω je společnou částí polorovin τ_1', τ_2' a např. uvnitř poloroviny τ_1' neleží žádný bod kružnice k_1, proto bod P nemůže oddělovat body X, Y, které padnou do úhlu ω', který je k úhlu ω vrcholový.

Zbývají nám přímky, které procházejí bodem P a vnitřky vrcholových úhlů φ, φ'. Buď s jedna taková přímka; dokažme, že má např. s kružnicí k_1 společný bod X, ležící uvnitř úhlu φ. Přímka s prochází bodem P a není tečnou t_1 kružnice k_1, je tedy nutně sečnou této kružnice; druhý její průsečík $X \neq P$ však nemůže padnout dovnitř poloroviny τ_1' (v této polorovině má kružnice k_1 pouze bod P). Padne tedy bod X nutně dovnitř úhlu φ. Stejně dokážeme, že druhý průsečík $Y \neq P$ přímky s s kružnicí k_2 padne dovnitř úhlu φ'. Úhly φ, φ' jsou vrcholové, nemají žádný společný vnitřní bod a proto bod P odděluje body X, Y.

Protože přímka typu s neprochází vnitřkem úhlu ω', v němž leží bod Q, nepadne bod Q na přímku s a ke každé přímce $s \equiv XPY$ existuje tudíž trojúhelník QXY, o němž se mluví v textu úlohy. Označme $\xi \equiv \sphericalangle PXQ$, $\eta \equiv \sphericalangle PYQ$; platí $\xi = \eta$, což ihned dokážeme. Úhel ξ má vrchol na k_1 a uvnitř poloroviny τ_2', jeho ramena procházejí body P, Q kružnice k_1; je tedy ξ obvodový úhel v kružnici k_1 a úhel $\sphericalangle PS_1Q$ je k němu příslušný úhel středový, takže je $\xi = \frac{1}{2}\sphericalangle PS_1Q$. Stejně se dokáže, že $\eta = \frac{1}{2}\sphericalangle PS_2Q$; avšak je $\sphericalangle PS_1Q = \sphericalangle PS_2Q$ (úhly souměrně sdružené vzhledem k ose m úsečky S_1S_2), a tím $\xi = \eta$. Je tedy trojúhelník QXY rovnoramenný s hlavním vrcholem Q. Dále je patrné, že všechny trojúhelníky QXY jsou navzájem podobné, neboť se shodují v úhlech; toho užijeme v části b) této úlohy.

a) Označme Q_0, X_0, Y_0 po řadě středy stran XY, YQ, QX trojúhelníka QXY. Dokážeme dvě věty.

Věta $\boldsymbol{V}_1$: Geometrickým místem bodů Q_0 je vnitřek oblouku U_0PV_0 kružnice $v \equiv (O, OP)$, kde O je střed úseček S_1S_2, PQ; body U_0, V_0 jsou po řadě středy úseček PU, PV.

Věta $\boldsymbol{V}_2$: Geometrickým místem bodů Y_0 je vnitřek oblouku OS_1U' kružnice k'_1, která je obrazem kružnice k_1 ve stejnolehlosti o středu Q s koeficientem $\frac{1}{2}$; přitom je U' středem úsečky QU. (Podobná věta platí o bodu X_0.)

D ů k a z v ě t y $\boldsymbol{V}_1$: Je-li přímka typu s kolmá k přímce PQ (v obr. je to přímka p), je $Q_0 \equiv P$ a bod Q_0 leží na oblouku U_0PV_0. Je-li $s \not\equiv p$, vzniká pravoúhlý trojúhelník PQQ_0 s přeponou PQ; podle Thaletovy věty leží bod Q_0 na kružnici v opsané nad úsečkou PQ jako průměrem. Z bodů kružnice v mohou přijít v úvahu pro bod Q_0 jen vnitřní body oblouku U_0PV_0 (kde U_0, V_0 jsou středy tětiv PU, PV), neboť ty body leží v jednom z úhlů φ, φ' (jen vnitřky těchto úhlů procházejí přímky typu s). Je-li $Q_0 \neq P$ bod tohoto oblouku, potom přímka PQ_0 je typu s a Q_0 je zřejmě středem příslušné úsečky XY. Tím je věta $\boldsymbol{V}_1$ dokázána.

D ů k a z v ě t y $\boldsymbol{V}_2$: Libovolná přímka typu s má s k_1 společný bod $X \neq P$; bod X leží uvnitř úhlu φ a uvnitř oblouku $\Omega = PU$, tj. toho, který neobsahuje bod Q. Bod Y_0 je však obrazem bodu X ve stejnolehlosti o středu Q s koeficientem $\frac{1}{2}$; body O, U' jsou obrazy bodů P, U v této stejnolehlosti. Obrazy bodů X oblouku Ω v této stejnolehlosti leží na oblouku OS_1U' kružnice sestrojené nad úsečkou S_1Q jako průměrem (bod S_1 je obrazem bodu X' diametrálního k bodu Q na kružnici k_1). Ve stejnolehlosti k předchozí obrácené je vnitřek oblouku Ω obrazem vnitřku oblouku OS_1U'; každý bod vnitřku oblouku OS_1U' je tedy středem Y_0 strany QX jistého trojúhelníka našeho typu QXY. Tím je věta $\boldsymbol{V}_2$ dokázána a řešení části a) dané úlohy provedeno.

b) Již jsme dokázali, že každé dva rovnoramenné trojúhelníky QXY, $Q'X'Y'$, které vyhovují požadavkům textu úlohy, jsou navzájem podobné (podle věty uuu). Označme M, M' středy kružnic těmto trojúhelníkům opsaných; ty leží po řadě na polopřímkách QQ_0, QQ'_0, kde Q_0, Q'_0 jsou středy základen XY, $X'Y'$. Proto platí

$$\frac{QM}{QQ_0} = \frac{QM'}{QQ'_0} = \lambda, \tag{1}$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta; je tedy $QM = \lambda \,.\, QQ_0$. Body M, $M' \equiv P'$ jsou tedy po řadě obrazy bodů Q_0, P ve stejnolehlosti o středu Q s konstantou λ stejnolehlosti. Bod M proto vyplní vnitřek oblouku $U'_0M'V'_0$, který je v této stejnolehlosti obrazem již dříve vyšetřovaného oblouku U_0PV_0.

Obráceně, ke zvolenému bodu M uvnitř oblouku $U_0M'_0V_0$ přísluší v obrácené stejnolehlosti bod Q_0 uvnitř oblouku U_0PV_0; víme již, že ke každému takovému bodu Q_0 přísluší jediný trojúhelník QXY a ten má zřejmě bod M za střed opsané kružnice.

Geometrickým místem středů M kružnic opsaných trojúhelníkům QXY je vnitřek jistého oblouku $S_1P'S_2$, který má sečnu PQ za osu souměrnosti, přitom je $S_1 \equiv$

$\equiv U'_0$, $S_2 \equiv V'_0$.

Poznámka. Konstanta λ se dá jednoduše vyjádřit pomocí čísel r, t, kde $2t = PQ$ je délka společné tětivy kružnic k_1, k_2. Je

$$\lambda = \frac{QU'_0}{QU_0}; \; QU'_0 = QS_1 = r, \; QU_0 = PQ \,.\, \sin\xi = \frac{2t^2}{r},$$

takže

$$\lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

Nebo označme $QX'Y'$ ten z uvažovaných trojúhelníků, který má přímku $m \equiv PQ$ za osu souměrnosti (takže je $X'Y' \perp m$); tu bod S_1 je středem ramene QX' a střed M' kružnice trojúhelníku $QX'Y'$ opsané je průsečíkem přímky m a kolmice vedené bodem S_1 k přímce QS_1. Bod P je středem základny $X'Y'$ rovnoramenného trojúhelníka $QX'Y'$, tj. $Q_0' \equiv P$. Poměr λ ze vztahu (1) je

$$\lambda = \frac{QM'}{QQ'_0} = \frac{QS_1 : \sin\xi}{2t} = \frac{r}{2t \,.\, \sin\xi}$$

a protože je

$$\sin\xi = \frac{OQ}{QS_1} = \frac{t}{r},$$

dostaneme

$$\lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

6. Je-li x nezávisle proměnná, dokažte:

a) Funkce $y = x + 2\sqrt{1 - x}$ je klesající v intervalu $(0, 1)$.

b) Funkce $y = \dfrac{10x}{x^2 + 25}$ je v intervalu $\langle -5, 5 \rangle$ rostoucí, kdežto v obou intervalech $(-\infty, -5\rangle$, $\langle 5, \infty)$ je klesající; načrtněte přibližný graf funkce.

V y s v ě t l e n í. Funkce $y = f(x)$ se nazývá v určitém intervalu klesající, jestliže pro každá dvě čísla $x_1 < x_2$ tohoto intervalu platí $f(x_1) > f(x_2)$; nazývá se v intervalu rostoucí, jestliže pro každá dvě čísla $x_1 < x_2$ tohoto intervalu platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Řešení. a) Mějme čísla x_1, x_2, o nichž platí

$$0 < x_1 < x_2 < 1; \tag{1}$$

máme dokázat, že potom platí

$$x_1 + 2\sqrt{1 - x_1} > x_2 + 2\sqrt{1 - x_2}. \tag{2'}$$

Podle (1) mají pro uvažovaná čísla x_1, x_2 odmocniny $\sqrt{1 - x_1}$, $\sqrt{1 - x_2}$ význam a jsou kladné.

Důkaz proveďme nepřímo; nechť platí

$$x_1 + 2\sqrt{1 - x_1} \leqq x_2 + 2\sqrt{1 - x_2}; \tag{2}$$

případ rovnosti se snadno vyloučí. Vyloučíme-li tedy ve vztahu (2) rovnost, potom platí postupně

$$2(\sqrt{1 - x_1} - \sqrt{1 - x_2}) > x_2 - x_1,$$

$$2 \, . \, \frac{(\sqrt{1 - x_1})^2 - (\sqrt{1 - x_1})^2}{\sqrt{1 - x_1} + \sqrt{1 - x_2}} < x_2 - x_1,$$

$$2 \, . \, \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - x_1} + \sqrt{1 - x_2}} < x_2 - x_1.$$

Po znásobení obou stran číslem $\dfrac{1}{x_2 - x_1} > 0$ dostaneme

$$\frac{2}{\sqrt{1 - x_1} + \sqrt{1 - x_2}} < 1.$$

Znásobme obě strany této nerovnosti číslem $\sqrt{1 - x_1} + \sqrt{1 - x_2} > 0$; dostaneme

$$2 < \sqrt{1 - x_1} + \sqrt{1 - x_2}. \tag{3}$$

Avšak pro x z intervalu $(0,1)$ platí $0 < 1 - x < 1$ a tím též $0 < \sqrt{1 - x} < 1$; je proto pravá strana ve vztahu (3) menší než 2 a vztah (3) vyjadřuje spor, k němuž vede předpoklad (2). Tím je důkaz proveden.

Náčrt jiného řešení úlohy. a) Položme $y = \sqrt{1 - x}$ pro $0 < x < 1$; zřejmě je

$$0 < y < 1. \tag{4}$$

Odtud plyne $x = 1 - y^2$. Pro x_1, x_2 z intervalu (1) máme dokázat vztah (2′); položme $y_1 = \sqrt{1 - x_1}$, $y_2 = \sqrt{1 - x_2}$. Potom lze (2′) psát ve tvaru $1 - y_1^2 + 2y_1 > 1 - y_2^2 + 2y_2$, jehož platnost máme dokázat.

Platí-li tento vztah, platí postupně $(1 - y_2)^2 > (1 - y_1)^2$, $1 - y_2 > 1 - y_1$ [viz (4)], $y_2 > y_1$, $\sqrt{1 - x_2} < \sqrt{1 - x_1}$, $1 - x_2 < 1 - x_1$, $x_1 < x_2$. Obrácením postupu dostaneme naše tvrzení.

b) Mějme reálná čísla $x_1 > x_2$, takže je

$$x_2 - x_1 > 0. \tag{5}$$

Utvořme rozdíl r funkčních hodnot $f(x_2) - f(x_1)$ funkce

$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}.$$

Platí

$$r = \frac{10x_2}{x_2^2 + 25} - \frac{10x_1}{x_1^2 + 25} = \frac{10[x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 25x_2 - 25x_1]}{(x_2^2 + 25)(x_1^2 + 25)} =$$

$$= \frac{10(x_2 - x_1)(25 - x_1x_2)}{(x_2^2 + 25)(x_1^2 + 25)}.$$

V jmenovateli posledního zlomku jsou kladná čísla; též číslo $10(x_2 - x_1)$ je kladné. Znaménko čísla r je tedy shodné se znaménkem čísla $u = 25 - x_1x_2$.

Platí jednak

$$u = 25 - x_1x_2 < 25 + 5(x_2 - x_1) - \\ - x_1x_2 = (5 - x_1)(5 + x_2), \qquad (6)$$

jednak

$$u = 25 - x_1x_2 > 25 - 5(x_2 - x_1) - \\ - x_1x_2 = (5 + x_1)(5 - x_2). \qquad (7)$$

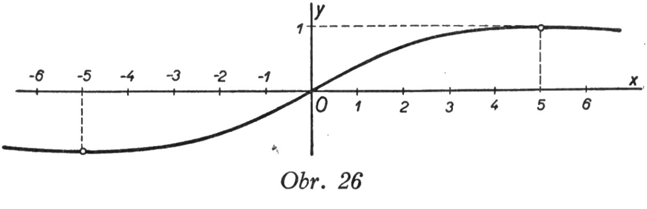
Uvažujme t y t o m o ž n o s t i:

[1] Je $x_1 < x_2 \leqq -5$. Potom je $5 - x_1 > 0$, $5 + x_2 \leqq 0$; odtud a z (6) plyne, že je $u < 0$ a tím $r < 0$.

[2] Je $5 \leqq x_1 < x_2$. Potom je $5 - x_1 \leqq 0$, $5 + x_2 > 0$; odtud a ze (6) plyne, že je $u < 0$ a tím $r < 0$.

[3] Je $-5 \leqq x_1 < x_2 \leqq 5$, Potom je $5 + x_1 \geqq 0$, $5 - x_2 \geqq 0$; odtud a ze (7) plyne, že je $u > 0$ a tím $r > 0$.

Tím je dokázáno, že v intervalech $(-\infty, -5\rangle, \langle 5, \infty)$ je daná funkce klesající (možnosti [1], [2]), kdežto v intervalu $\langle -5, 5\rangle$ je tato funkce rostoucí (možnost [3]).



Obr. 26

Protože je $f(-x) = -f(x)$, je graf (obr. 26) funkce souměrný podle počátku O pravoúhlých souřadnic. Stačí sestavit tabulku hodnot funkce pro $x \geqq 0$.

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	$\frac{1}{5{,}05} < 0{,}2$	$\frac{5}{13} \doteq 0{,}4$	$\frac{20}{29} \doteq 0{,}7$	$\frac{15}{17} \doteq 0{,}9$	$\frac{40}{41} < 1$	1	$\frac{60}{61} < 1$

Je patrné, že v bodě $[5,1]$ je maximum, v bodě $[-5, -1]$ minimum. S rostoucím $x > 5$ se graf blíží ose x shora; pro $x < -5$, která rostou v absolutní hodnotě, se graf blíží ose x zdola.

5. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B*

1. Nákladní vlak projede trať dlouhou 100 km za 2 hodiny 50 minut, z toho stráví 20 minut čekáním, takže se za jízdy pohybuje průměrnou rychlostí 40 km/h.

Při nové úpravě jízdního řádu vzrostla doba čekání o p %. O kolik procent je třeba zvýšit průměrnou rychlost jízdy vlaku, aby zůstala celková doba jízdy vlaku (tj. včetně čekání) nezměněna?

Řešení. Původní doba jízdy je

$$\frac{100}{40} + \frac{1}{60} \cdot 20. \qquad (1)$$

Nová doba jízdy je

$$\frac{100}{40\left(1+\frac{q}{100}\right)}+\frac{1}{60}\,.\,20\left(1+\frac{p}{100}\right); \qquad (2)$$

přitom q značí počet procent, o nějž je třeba zvýšit rychlost jízdy. Podle podmínky úlohy jsou si čísla (1), (2) rovna. Po úpravě dostaneme

$$\frac{17}{6}=\frac{5}{2\left(1+\frac{q}{100}\right)}+\frac{1}{3}\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Po další úpravě

$$15=15\,.\,\frac{1}{1+\frac{q}{100}}+\frac{p}{50}$$

a odtud

$$q=\frac{100p}{750-p}.$$

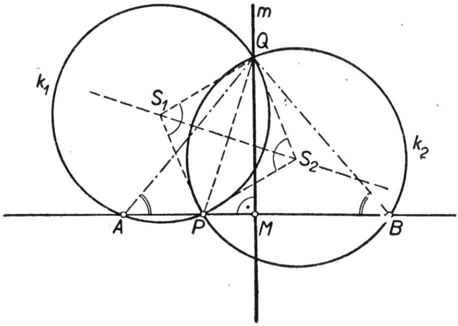
Např. pro $p = 50$ (10 min) je $q = \frac{50}{7} \doteq 7$ (%) (zvýšení rychlosti jízdy je tedy asi o 2,8 km/h).

2. V rovině je dána úsečka AB a uvnitř této úsečky je dán bod P tak, že platí $AP < PB$.

Najděte geometrické místo bodů Q té vlastnosti, že oba trojúhelníky APQ, PBQ mají shodné opsané kružnice.

Označte Q_0 ten z bodů Q, kterým jsou určeny nejmenší z těchto opsaných kružnic, a sestrojte všechny takové body Q_0. Vyšetřte, jakou polohu má kružnice opsaná každému trojúhelníku APQ_0 vzhledem k nalezenému geometrickému místu bodů Q.

Řešení (viz obr. 27). I. Nechť APQ, BPQ je jedna dvojice trojúhelníků, jimž opsané kružnice k_1, k_2 o středech S_1, S_2 jsou navzájem shodné; přitom je nutně $P \neq Q$, takže se jedná o protínající se kružnice. Oba



Obr. 27

úhly $\sphericalangle PS_1Q$, $\sphericalangle PS_2Q$ jsou souměrně sdružené podle přímky PQ, je tedy $\sphericalangle S_1 = \sphericalangle S_2$; proto je též $\sphericalangle A$ trojúhelníka PQA roven úhlu $\sphericalangle B$ trojúhelníka PQB (obvodové úhly příslušné ke středovým úhlům $\sphericalangle S_1 = \sphericalangle S_2$). Proto je trojúhelník QAB rovnoramenný (proti shodným úhlům $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ leží shodné strany), tj. platí $QA = QB$. Osa m souměrnosti tohoto trojúhelníka prochází bodem Q a středem M základny AB, přičemž je $m \perp AB$.

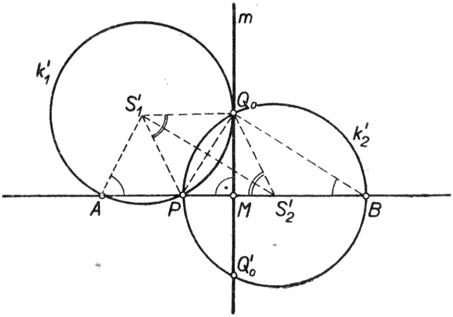
Leží tedy každý bod Q na přímce m právě popsané.

II. Obráceně, nechť Q je libovolný bod přímky m. Je-li $Q \neq M$, pak lze oběma trojúhelníkům APQ, BPQ po řadě opsat kružnice k_1, k_2, které zřejmě nemohou splynout (bod P odděluje body A, B). Přitom je $QA = QB$ (neboť m je osa úsečky AB) a tudíž $\sphericalangle A$ prvního trojúhelníka je shodný s úhlem $\sphericalangle B$ druhého; obvodové úhly $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ jsou ostré (úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka), takže body A, B leží po řadě na větších obloucích (s krajními body P, Q) kružnic k_1, k_2. Středové úhly $\sphericalangle S_1$, $\sphericalangle S_2$, příslušné po řadě v kružnicích k_1, k_2 k obvodovým úhlům $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, jsou tedy shodné, a proto je $\triangle PQS_1 \cong \triangle PQS_2$ (rovnoramenné trojúhelníky o společné základně PQ a shodných úhlech $\sphericalangle S_1$, $\sphericalangle S_2$ proti základnám); je tedy $S_1P = S_2Q$ a obě kružnice k_1, k_2 jsou shodné.

Protože je $AP < PB$, padne střed M úsečky AB dovnitř úsečky PB. Kružnice k_1 jdoucí body A, P nemůže procházet bodem $Q \equiv M$. Z toho plyne, že bod M nepatří k hledanému geometrickému místu bodů.

Závěr: Geometrickým místem bodů Q je osa m úsečky AB, přičemž z ní musíme vyloučit střed M úsečky AB.

III. Kružnice, která je z určité množiny kružnic nejmenší (obr. 28), má nejmenší průměr. Nejmenší z kružnic, které v úloze uvažujeme, je nutně kružnice k_2' opsaná nad úsečkou PB jako průměrem (všechny její tětivy nejsou větší než PB); kružnici k_1' shodnou s k_2' lze body A, P proložit, neboť je $AP < PB$. Označme k_1', k_2' shodné kružnice, z nichž první jde body A, P a druhá má úsečku PB za průměr. Tyto kružnice se protínají v bodech P, Q_0 (nemohou se v P dotýkat, jinak by středy S_1', S_2' těchto kružnic ležely v přímce AB a nutně by bylo $AP = PB$, což je proti předpokladu); přitom je Q_0 jeden z průsečíků přímky m s kružnicí k_2' (tento bod



Obr. 28

existuje, neboť m prochází vnitřním bodem M kružnice k_2', takže m je sečnou kružnice k_2'). Čtyřúhelník o úhlopříčkách PQ_0, $S_1'S_2'$, který určují středy S_1', S_2' a průsečíky P, Q_0 dvou shodných kružnic, je nutně kosočtverec (úhlopříčky se totiž navzájem půlí a jsou k sobě kolmé). Je tedy $PS_2' = Q_0S_1'$ (jsou to poloměry shodných kružnic k_2, k_1) a $Q_0S_1' \parallel PS_2'$ neboli $Q_0S_1' \perp$

$\perp m$; z toho však plyne, že kružnice k_1 se dotýká přímky m v bodě Q_0.

Konstrukce (obr. 28): Nad průměrem PB sestrojíme kružnici k_2' (ta existuje právě jedna) a označíme Q_0, Q_0' její průsečíky s přímkou m; oba tyto body jsou různé a souměrně sdružené podle přímky AB. Obě různé kružnice k_1', k_1'', opsané trojúhelníkům APQ_0, APQ_0', jsou podle předchozího shodné s k_2'; dvojice k_1', k_2' a dvojice k_1'', k_2' jsou všechna řešení úlohy. Tím je řešení úlohy provedeno; úloha má vždy dvě řešení (pokud jde o body Q_0 a dvojice shodných kružnic).

3. Je dána funkce

$$V = \tfrac{1}{2}(|1 + \sqrt{4 - x^2}| + |1 - \sqrt{4 - x^2}|). \qquad (1)$$

Sestrojte její graf v intervlau $-2 \leqq x \leqq 2$ a dokažte, že se skládá ze dvou úseček a kruhového oblouku.

Řešení. Funkce (1) nabývá vesměs kladných hodnot (neboť člen $|1 + \sqrt{4 - x^2}|$ je kladné číslo, člen $|1 - \sqrt{4 - x^2}|$ je číslo nezáporné) pro všechna x, pro něž je $4 - x^2 < 0$ neboli

$$-2 \leqq x \leqq 2. \qquad (2)$$

Protože pro čísla x, $-x$ dostáváme z rovnice (1) touž funkční hodnotu, je graf této funkce souměrný podle osy y.

Pro další vyšetřování je třeba rozlišit dvě možnosti.

P ř í p a d [1]. Nechť je $1 - \sqrt{4 - x^2} \geqq 0$ neboli $1 \geqq \sqrt{4 - x^2}$; umocněním obou stran této nerovnosti na druhou dostaneme, že tento vztah platí právě pro tato x:

buď

$$x \geqq \sqrt{3},$$

anebo

$$x \leqq -\sqrt{3}. \tag{3}$$

Potom je $|1 - \sqrt{4 - x^2}| = 1 - \sqrt{4 - x^2}$ a ze vztahu (1) dostáváme

$$y = \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{4 - x^2} + 1 - \sqrt{4 - x^2}] = 1 \tag{4}$$

neboli

$$y = 1.$$

Spojením vztahů (2), (3) a výsledku (4) máme (viz obr. 29): Grafem funkce (1) v intervalech $\langle -2, -\sqrt{3} \rangle$, $\langle \sqrt{3}, 2 \rangle$ jsou úsečky MN, PQ, kde

$$M \equiv [-2, 1],\ N \equiv [-\sqrt{3}, 1],\ P \equiv [\sqrt{3}, 1],\ Q \equiv [2, 1].$$

P ř í p a d [2]. Nechť je $1 - \sqrt{4 - x^2} \leqq 0$ neboli $1 \leqq \sqrt{4 - x^2}$; umocněním obou stran této nerovnosti na druhou dostaneme, že tento vztah platí právě pro tento interval:

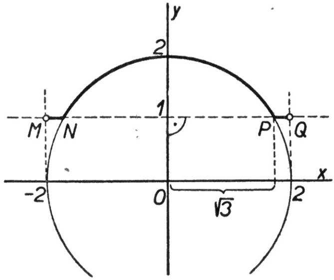
$$-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3} \tag{5}$$

Potom je $|1 - \sqrt{4 - x^2}| = \sqrt{4 - x^2} - 1$ a ze vztahu (1) dostáváme

$$y = \tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - x^2} - 1] = \sqrt{4 - x^2}$$

neboli

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$



Obr. 29

Umocněním obou stran této rovnice na druhou obdržíme

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{6}$$

takže příslušné body grafu funkce (1) leží na kružnici opsané kolem počátku souřadnic poloměrem 2. Přitom je $y > 0$ a jedná se o body této kružnice, pokud příslušné souřadnice x náleží do intervalu (5); pro $x = \pm\sqrt{3}$ a $y > 0$ z rovnice (6) dostáváme $y = 1$. Tedy (obr. 29) grafem funkce (1) v intervalu $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$ je oblouk NP kružnice o středu v počátku souřadnic a poloměru 2; tento oblouk leží nad osou x.

4. Daný je lichobežník $ABCD$ s väčšou základnou AB.

Zostrojte vo vnútri úsečky AD bod P a vo vnútri úsečky BC bod Q tak, aby súčasne platilo: $PQ \parallel AB$, $AQ \parallel PC$. Vypočítajte veľkosti úsečiek AP, BQ pomocou veľkostí strán daného lichobežníka.

Riešenie (viď označenie v obr. 30). *Rozbor*. Označme M priesečník priamok AD, BC. Všimnime si toho, že rovnoľahlosť ($\boldsymbol{M}$) so stredom M, ktorá prevádza bod A do bodu P, prevádza úsečku AB do úsečky PQ, bod B do bodu Q. Ďalej prevádza úsečku AQ do úsečky PC (pretože je $PC \parallel AQ$), takže bod Q prevádza do bodu C. Z toho však vyplýva, že úsečku QP prevádza do úsečky CD a teda bod P do bodu D. Označme $x > 0$ koeficient rovnoľahlosti ($\boldsymbol{M}$). Potom platí:

$$MP = x \,.\, MA, \quad MD = x \,.\, MP.$$

Z toho delením odpovedajúcich si strán oboch rovností dostaneme

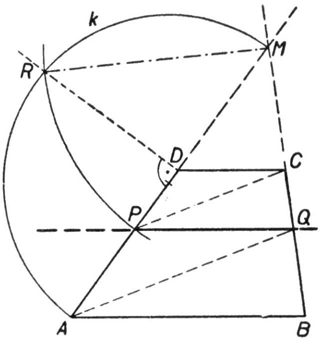
$$\frac{MP}{MD} = \frac{MA}{MP},$$

t. j.

$$MP^2 = MA \,.\, MD.$$

Je teda dĺžka úsečky MP strednou geometrickou úmernou zostrojenou z dĺžok MA, MD.

Z toho vyplýva *konštrukcia*: Nad úsečkou MA ako priemerom opíšme polkružnicu k. V bode D zostrojme kolmicu k priamke MA a spoločný bod tejto kolmice a polkružnice k označme R. Podľa Eukleidovej vety o odvesne vyplýva, že je $MR^2 = MA \,.\, MD$, takže



Obr. 30

$MP = MR$, čím je bod P zostrojený. Bod Q leží na úsečke BC a na rovnobežke vedenej bodom P k priamke AB. Tým je konštrukcia úsečky PQ prevedená.

Dôkaz. Podľa konštrukcie je

$$MP = \sqrt{MA \,.\, MD}$$

a teda aj

$$MQ = \sqrt{MB \,.\, MC}, \tag{1}$$

pretože je $PQ \parallel AB$. Musíme dokázať, že platí $AQ \parallel PC$. K tomu stačí dokázať, že je

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MQ}{MC}, \tag{2}$$

čiže $MA \,.\, MC = MP \,.\, MQ$. Podľa (1) je

$$MP \,.\, MQ = \sqrt{MA \,.\, MD \,.\, MB \,.\, MC}\,. \tag{3}$$

No, z homotetie so středom M, ktorá prevádza úsečku AB do úsečky DC, vyplýva

$$\frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB},$$

t. j.

$$MB \,.\, MD = MA \,.\, MC. \tag{4}$$

Po dosadení výsledku (4) do (3) dostaneme

$$MP \,.\, MQ = MA \,.\, MC,$$

čím je dokázaný vzťah (2) a platí teda $AQ \parallel PC$, čo sme mali dokázať.

Z konštrukcie vyplýva, že úloha má jediné riešenie.

Ešte vypočítame dĺžky úsečiek AP, BQ. Označme $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

Z rovnoľahlosti (**M**) vyplýva $DP = x \,.\, PA$, $PQ = x \,.\, AB$, $CD = x \,.\, PQ$, čiže

$$DP = x \,.\, PA, \quad PQ = ax, \quad c = x \,.\, PQ. \tag{5}$$

Po dosadení druhého vzťahu do tretieho dostaneme $c = ax^2$ a teda

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\,. \tag{6}$$

Ďalej platí $DP + PA = AD$, t. j. $DP + PA = d$. Ak sem dosadíme z prvého vzťahu (5), dostaneme

$$PA(x + 1) = d$$

a stadiaľ po dosadení za x zo (6)

$$PA\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + 1\right) = d,$$

t. j.

$$PA(\sqrt{c} + \sqrt{a}) = d\sqrt{a}.$$

Stadiaľ vypočítame, že

$$PA = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Podobne dostaneme

$$QB = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Tým je riešenie úlohy prevedené.

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Rozhodněte, který z obou zlomků

$$\frac{5678901234}{6789012345}, \quad \frac{5678901235}{6789012347}$$

je větší.

Řešení. Položme $x = 5678901234, y = 6789012345$; potom rozdíl r zlomků daných v úloze (v napsaném pořádku) lze psát

$$r = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - (xy + y)}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}.$$

Zřejmě platí $2x > y$ neboli $2x - y > 0$; je tedy

$$r > 0.$$

Odpověď. První zlomek je větší než druhý.

2. Z cihelny v místě A se vozí nákladními auty cihly na stavbu v místě B. Řidič nákladního vozu nastupuje a končí práci v místě A; jezdí průměrnou rychlostí 45 km/h s vozem plným a 48 km/h s vozem prázdným. Při každé jízdě trvá nakládání vozu 35 minut, jeho vyložení 20 minut.

Vypočtěte vzdálenost místa A od místa B, víte-li, že řidič při osmihodinové pracovní době odvezl z cihelny na staveniště 5 vozů cihel.

O kolik minut při každé jízdě je nutno zkrátit dobu nakládání a skládání (počítáno dohromady), aby neklesl osmihodinový výkon řidiče, je-li nakládané auto nuceno jet z místa A do B (i zpět) objížďkou, která je o čtvrtinu delší než původní silnice.

Řešení. Označme d vzdálenost (v km) míst A, B (měřeno na původně užívané si nici); potom cesta prázdným vozem trvá $\frac{d}{48}$ hodiny, cesta plným vozem trvá $\frac{d}{45}$ hodiny. Na naložení a vyložení jednoho vozu je třeba $\frac{55}{60}$ hodiny. Na jednu okružní cestu vozu (včetně naložení, vyložení a návratu) je třeba

$$\frac{d}{45} + \frac{d}{48} + \frac{55}{60} \text{ hodin;}$$

na pět okružních cest za den bylo třeba celkem 8 hodin neboli platí

$$5\left(\frac{d}{45} + \frac{d}{48} + \frac{55}{60}\right) = 8;$$

odtud postupně dostáváme

$$\frac{31d}{9\,.\,16} = \frac{41}{12},$$

$$d = \frac{41\,.\,12}{31},$$

$$d = \frac{492}{31} = 15\frac{27}{31}.$$

Vzdálenost míst A, B je skoro 16 km ($15\frac{27}{31}$ km).

V případě objížďky koná auto při cestě tam i při cestě zpět dráhu o $\frac{1}{4}d$ delší, čímž se doba jízdy prodlužuje o

$$x = \frac{1}{4}d\,.\,\frac{1}{45} + \frac{1}{4}d\,.\,\frac{1}{48} = \frac{1}{4}d\,.\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{48}\right) \text{ hodin,}$$

kde

$$\frac{1}{45} + \frac{1}{48} = \frac{16 + 15}{3\,.\,3\,.\,5\,.\,16};$$

je tedy

$$x = \frac{1}{4}\,.\,\frac{41\,.\,12}{31}\,.\,\frac{31}{9\,.\,5\,.\,16} = \frac{41}{3\,.\,5\,.\,16} = \frac{41}{240}$$

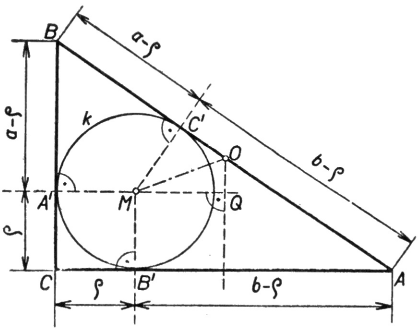
neboli v minutách

$$\frac{41}{240}\,.\,60 = \frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}\,.$$

Odpověď. Dobu 55 minut potřebnou na nakládání a vykládání auta musí zkrátit o $10\frac{1}{4}$ minuty, tj. asi na 45 minut ($44\frac{3}{4}$ min).

3. Jsou dány poloměry r, ϱ opsané a vepsané kružnice pravoúhlému trojúhelníku.

Vyjádřete vzdálenost středů obou těchto kružnic pomocí čísel r, ϱ.



Obr. 31

Řešení. Je-li ABC daný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c, potom pro poloměr r kružnice tomuto trojúhelníku opsané platí $r = \frac{1}{2}c$; označme $2s$ obvod daného trojúhelníka ABC. Z obr. 31 je patrno, že délky tečen vedené z bodů C, B, A k vepsané kružnici k po řadě jsou ϱ, $a - \varrho$, $b - \varrho$. Podle Pythagorovy věty platí

$$a^2 + b^2 = c^2 = 4r^2. \tag{1}$$

V obr. 31 jsou A', B', C' dotykové body vepsané kružnice se stranami trojúhelníka ABC, M střed kružnice vepsané a O střed kružnice opsané (bod O je středem úsečky AB a bod P středem úsečky AC); je tedy $OP \parallel BC$ střední příčka daného trojúhelníka. Označme Q patu kolmice vedené bodem M k přímce OP. Zřejmě je $BA' > A'C$, tj. $a - \varrho > \varrho$, takže je $a - \varrho > 0$; proto je $\frac{1}{2}a = OP > CA' = QP = \varrho$. Z toho plyne, že bod Q padne dovnitř úsečky OP a existuje trojúhelník MOQ s pravým úhlem $\sphericalangle Q$; označme $x = OM$ vzdálenost, kterou podle textu úlohy máme zjistit. Je $OQ = OP - PQ = \frac{1}{2}a - \varrho$; stejně se vyšetří, že $MQ = CP - CB' = \frac{1}{2}b - \varrho$. Užitím Pythagorovy věty na trojúhelník MOQ obdržíme $MO^2 = MQ^2 + OQ^2$ neboli

$$x^2 = (\tfrac{1}{2}a - \varrho)^2 + (\tfrac{1}{2}b - \varrho)^2,$$

tj.

$$x^2 = \tfrac{1}{4}[a^2 + b^2 - 4\varrho(a + b) + 8\varrho^2]. \qquad (2)$$

Přitom podle obr. 31 je $a + b = (a - \varrho) + (b - \varrho) + 2\varrho = c + 2\varrho = 2(r + \varrho)$; tento výsledek a výsledek (1) dosaďme do (2); dostaneme

$$x^2 = r^2 - 2\varrho(r + \varrho) + 2\varrho^2$$

neboli

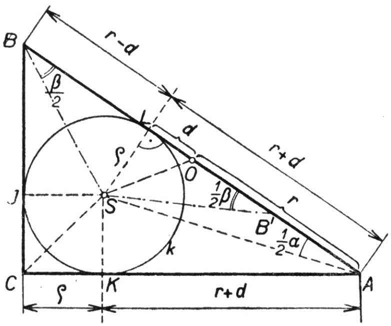
$$x^2 = r^2 - 2r\varrho,$$

čímž je řešení provedeno.

Je tedy

$$x = \sqrt{r(r - 2\varrho)}.$$

Jiné řešení (viz označení v obr. 32). Můžeme předpokládat, že je $\alpha < \beta$, neboli $BC < AC$ (případ $BC = AC$ vyřídíme na závěr). Označme J, K, L dotykové body kružnice $k \equiv (S, \varrho)$ vepsané trojúhelníku ABC



Obr. 32

s jednotlivými stranami a O střed přepony AB, jejíž délka je $2r$ (průměr opsané kružnice). Platí

$$SJ = SK = SL = CK = CJ = \varrho, \quad OL = d \tag{1}$$

a tedy

$$AL = AK = r + d, \quad BL = BJ = r - d \tag{2}$$

(délky tečen vedených po řadě z bodů A, B ke kružnici k); zřejmě je totiž $BL < AL$ (stačí určit obraz B' bodu

B v souměrnosti o ose SL a všimnout si toho, že je $\sphericalangle SB'L = \frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle SAL$, kde $\sphericalangle SB'L$ je vnější a $\sphericalangle SAL$ vnitřní nesousední úhel v trojúhelníku ASB').

Pomocí Pythagorovy věty užité na trojúhelník ABC vzhledem k (1) dostáváme

$$(AK + CK)^2 + (BJ + CJ)^2 = (AL + BL)^2;$$

po dosazení z (2)

$$(r + d + \varrho)^2 + (r - d + \varrho)^2 = (r + d + r - d)^2$$

neboli

$$d^2 = r^2 - \varrho^2 - 2r\varrho. \qquad (3)$$

Z trojúhelníka OSL, kde $\sphericalangle L = 90°$, pomocí Pythagorovy věty pro hledanou délku $x = OS$ dostaneme $OS^2 = SL^2 + OL^2$ neboli

$$x^2 = \varrho^2 + d^2;$$

odtud po dosazení ze (3) plyne

$$x = \sqrt{r(r - 2\varrho)}. \qquad (4)$$

Řešení podal Jaroslav Jerhout,
žák 1.b SVVŠ J. Fučíka,
nám. Odborářů, Plzeň.

4. Ak sú p, q prirodzené čísla, potom je číslo

$$\frac{10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^k + 4}{36}$$

celé. Dokážte.

Riešenie. O čísle $y = 10^{p+q} + 2 \,.\, 10^p + 2 \,.\, 10^q + 4$ platí

$$y = 10^p(10^q + 2) + 2(10^q + 2) =$$
$$= (10^2 + 2)(10^q + 2).$$

Pretože p, q sú prirodzené čísla, sú čísla 10^p, 10^q párne a práve tak sú párne aj čísla $10^p + 2$ a $10^q + 2$. Zápis čísla $10^p + 2$ v dekadickej sústave obsahuje jednu číslicu 1, jednu číslicu 2, ostatné číslice sú pre $p > 1$ všetko nuly. Preto je súčet číslic tohto čísla $1 + 2 = 3$ a číslo $10^p + 2$ je deliteľné troma. Číslo $10^p + 2$ je teda deliteľné dvoma a troma a preto aj šiestimi. To isté platí aj o čísle $10^q + 2$. Číslo y je teda deliteľné číslom $6 \,.\, 6 = 36$. Tým je dokázané, že číslo $\frac{y}{36}$ je prirodzené.

Iné riešenie. Zápis čísla $y = 10^{p+q} + 2 \,.\, 10^p + 2 \,.\, 10^q + 4$ v dekadickej sústave má súčet číslic $1 + 2 + 2 + 4 = 9$ (to platí aj v tom prípade, keď $p = q$). Číslo y je teda deliteľné deviatimi. Každé z čísel 10^{p+2}, $2 \,.\, 10^p$, $2 \,.\, 10^2$, 4 je deliteľné štyrmi: Číslo $10^{p+q} = 10^p \,.\, 10^q$ je súčinom dvoch párnych čísel, čo je zrejmé z uvedeného zápisu, kde p, q sú prirodzené čísla. Podobne číslo $2 \,.\, 10^p$ i číslo $2 \,.\, 10^2$ sú súčiny dvoch párnych čísel. Číslo y je teda deliteľné nesúdeliteľnými číslami 9 a 4 a podľa známej vety je deliteľné aj ich súčinom. Číslo $\frac{y}{36}$ je teda prirodzeným číslom.

5. Zvolte ostrý úhel $\sphericalangle PVQ$ a uvnitř tohoto úhlu bod C. Uvažujme všechny trojúhelníky ABC, kde A je vnitřní bod polopřímky VP a B vnitřní bod polopřímky VQ.

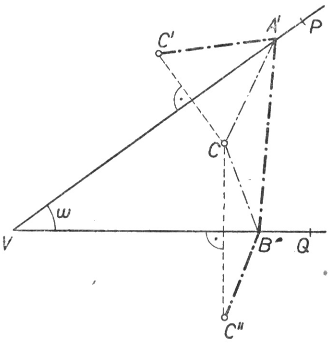
Sestrojte body A, B tak, aby trojúhelník ABC, který tak vznikne, měl ze všech uvažovaných trojúhelníků nejmenší obvod.

Dokažte, že se takový trojúhelník dá sestrojit právě jeden.

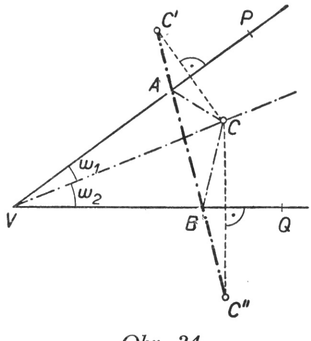
Řešení (obr. 33, 34). *Rozbor*. Buďte C', C'' obrazy bodu C v souměrnostech o osách VP, VQ; jsou-li A', B' po řadě libovolně zvolené body přímek VP, VQ, potom platí

$$A'C' = A'C, \quad B'C'' = B'C.$$

Délka x obvodu trojúhelníka $A'B'C$ je $x = CA' + A'B' + B'C$ a tedy $x = C'A' + A'B' + B'C''$;

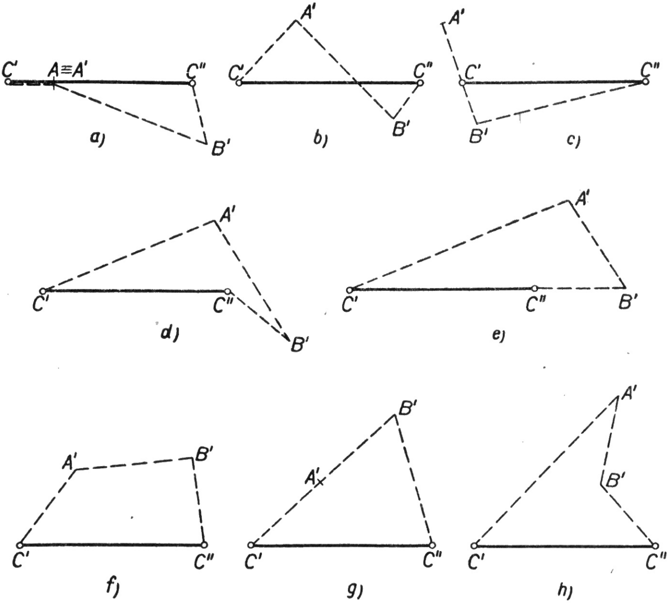


Obr. 33



Obr. 34

jedná se tedy o délku lomené čáry $C'A'B'C''$. Máme body A', B' určit tak, aby délka této čáry byla nejkratší. Podle známé věty z planimetrie (důkaz se opírá o větu, že součet dvou stran trojúhelníka je větší než strana třetí – viz obr. 35a—h) je známo, že úsečka $C'C''$ je nejkratší lomená čára, která spojuje body C', C''. Odtud *konstrukce:*



Obr. 35a—h

Sestrojme tedy body C', C'' (viz nahoře) a určeme společné body A, B úsečky $C'C''$ s polopřímkami VP, VQ (obr. 34); existují-li tyto body, potom je ABC hledaný trojúhelník. Důkaz vyplývá z rozboru.

Diskuse. Dokážeme, že body A, B existují a leží po řadě uvnitř polopřímek VP, VQ. Označme $\omega \equiv \sphericalangle PVQ$ podle textu úlohy je $\omega < 90°$. Dále označme $\omega_1 \equiv \equiv \sphericalangle PVC$, $\omega_2 \equiv \sphericalangle CVQ$, přičemž je $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Body C', C'' jsou zřejmě různé a existuje úsečka $C'C''$. Přitom je $\sphericalangle C'VC = 2\omega_1$, $\sphericalangle CVC'' = 2\omega_2$, a tedy $180° > 2\omega = 2\omega_1 + 2\omega_2 = \sphericalangle C'VC + \sphericalangle VCC''$ (dva úhly styčné a duté), tj. $\sphericalangle C'VC'' < 180°$, takže se jedná skutečně o dutý úhel, ve kterém leží ostrý úhel $\sphericalangle PVQ$; polopřímky VP, VQ procházejí vnitřkem úhlu $\sphericalangle C'VC''$, a proto protínají úsečku $C'C''$ v bodech A, B. Tím je důkaz proveden; úloha má tedy právě jedno řešení.

6. Dané sú dve zhodné kružnice $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv \equiv (S_2, r)$, ktoré sa navzájom pretínajú. Označme O stred úsečky S_1S_2.

Bodom O veďte takú priamku, aby jej priesečníky s kružnicami k_1, k_2 boli krajnými bodmi troch navzájom zhodných úsečiek bez spoločných vnútorných bodov.

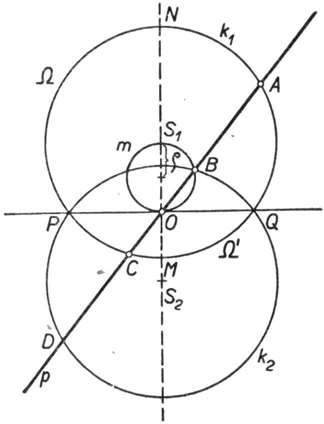
Udajte podmienky riešiteľnosti pomocou čísel r, c, kde $c = S_1S_2$.

Riešenie (obr. 36). Označme si P, Q priesečníky kružníc k_1, k_2 ($P \not\equiv Q$). Zrejme je $S_1S_2 < PS_1 + PS_2$ (čo platí o stranách trojuholníka PS_1S_2) čiže $S_1S_2 < 2r$. Preto je $S_1O < r$, $S_2O < r$ a bod O leží vo vnútri každej z kružníc k_1, k_2. Kružnice k_1, k_2 sú súmerne združené podľa bodu O a podľa priamky PQ. Priamka PQ rozdeľuje kružnicu k_1 na dva oblúky Ω, Ω' s krajnými bodmi P, Q. Bod O leží vo vnútri k_1 a preto oddeľuje oba krajné body A, C každej tetivy AC kružnice k_1, pokiaľ priamka AC prechádza bodom O a je rôzna od priamky PQ. Body A, C oddeľuje teda aj priamka PQ, takže patria vnútrajškom oboch rôznych oblúkov Ω, Ω'. Zo súmernosti so stredom O vyplýva, že to isté platí o obrazoch D, B bodov A, C, a to vzhľadom ku kružnici k_2. Z tej istej súmernosti vyplýva, že je

$$OA = OD, \ AB = CD, \ OB = OC. \qquad (1)$$

Našou úlohou je zostrojiť body A, B, C na priamke p idúcej bodom O tak, aby platilo $AB = CD$ a aby bod B ležiaci na kružnici k_2 delil tetivu AC kružnice k_1 na dve rovnaké časti. Je známe, že geometrickým miestom stredov tetív AC kružnice k_1 idúcich vnútorným bodom O tejto kružnice je kružnica m zostrojená nad úsečkou OS_1 ako priemerom (vyplýva to z Thaletovej vety, pričom aj body S_1, O patria ku geometrickému miestu m ako stred tetivy MN, resp. PQ — viď obr. 36).

Konštrukcia (obr. 36). Zostrojme kružnicu m nad úsečkou OS_1 ako priemerom. Označme B spoločný bod kružníc m, k_2 (pokiaľ bod B existuje). Potom priamka $p \equiv OB$ je jedným riešením úlohy, pretože bod B patrí ku geometrickému miestu m a teda je stredom tetivy



Obr. 36

AC, ktorú na kružnici k_1 vytína priamka p. Súmernosť so stredom O prevádza kružnicu k_1 na k_2 a obrátene, body B, C, A po rade do bodov C, B, D, takže platí: $BA = BC$, $CD = CB$ a teda $BA = BC = CD$.

Diskusia. Treba rozhodnúť o počte spoločných bodov kružníc k_2, m, ktorých polomery si označíme r, ϱ. Je $\varrho = \frac{1}{4} S_1S_2$. Spojnica stredov kružníc k_2, m má dĺžku 3ϱ. Kružnice k_1, k_2 sa podľa predpokladu pretínajú (v dvoch rôznych bodoch), preto platí $0 > S_1S_2 > 2r$ čiže $0 < 4\varrho < 2r$, t. j. $2\varrho < r$. Je teda $0 < \varrho < r - \varrho$ a preto $r > \varrho$.

Pretože bod O ležiaci na kružnici m je vnútorným bodom kružnice k_2, môžu pre vzájomnú polohu kružníc k_2, m nastať t r i r ô z n e p r í p a d y.

Nech o dĺžke 3ϱ spojnice stredov kružníc k_2, m platí:

[1] $r - \varrho < 3\varrho < r + \varrho$ čiže $r < 4\varrho$, $2\varrho < r$ (tento vzťah už platí). Potom existujú dva rôzne spoločné body kružníc k_2, m a úloha má dve rôzne riešenia (súmerne združené vzhľadom k priamke S_1S_2).

[2] $r - \varrho = 3\varrho$ čiže $4\varrho = r$. Úloha má jediné riešenie: priamka S_1S_2 je hľadaná priamka.

[3] $r - \varrho > 3\varrho$ čiže $r > 4\varrho$. V tomto prípade úloha riešenie nemá.

Pretože $S_1S_2 = 4\varrho$, možno *záver* vysloviť takto:

Ak je dĺžka spojnice stredov daných kružníc k_1, k_2 väčšia ako ich polomer r (pritom je nutne menšia ako $2r$), má úloha dve rôzne riešenia. Ak sa dĺžka spojnice stredov rovná polomeru r, má úloha jediné riešenie. Inak úloha riešenie nemá.

P o z n á m k a. Jednoduché riešenie úlohy sa dostane použitím rovnoľahlosti so stredom O a koeficientom $\frac{1}{3}$.

1. Jsou dány rovnoběžky b, c a uvnitř pásu jimi určeného je dán bod A.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrchol B ležel na přímce b a vrchol C ležel na přímce c. Kolik řešení má úloha?

Řešení (viz obr. 37). *Rozbor.* Je-li $ABCD$ hledaný čtverec, potom existuje pravoúhlý trojúhelník ABM o přeponě $AB = d$, kde M je pata kolmice vedené bodem A k přímce b. Označme v něm $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$ (viz obr. 37); je tedy $\alpha + \beta = 90°$. Dále označme N patu kolmice vedené z bodu C na přímku b. Potom je úhel označený v obr. 37 písmenem α' nutně roven α. Úhel označený ω v obr. 37 je pravý, a tedy $\alpha' + \beta' = 90°$ neboli $\alpha' = \alpha$. Je tedy α' úhel ostrý, a proto pata N kolmice vedené z bodu C na jeho rameno padne dovnitř tohoto ramene, tj. na prodloužení úsečky MB za bod B.

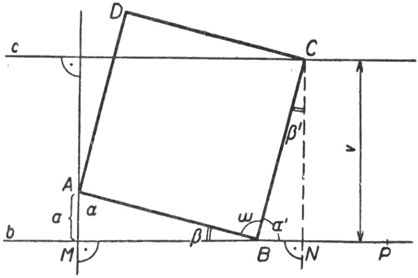
Označme ještě $AM = a$, $CN = v$. Platí

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN \text{ (usu)},$$

neboť je $AB = BC = d$ (strana čtverce $ABCD$), $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Odtud plyne:

$$MB = NC = v, \quad BN = AM = a$$

Z tohoto odvodíme *konstrukci* (viz obr. 37): Sestrojme patu M kolmice vedené bodem A na přímku b; bod M dělí přímku b ve dvě opačné polopřímky MP, MQ. Další konstrukci provedeme pro polopřímku MP (pro polopřímku MQ je konstrukce obdobná).



Obr. 37

Na polopřímce MP sestrojme úsečku $MB = v$, kde v je vzdálenost daných rovnoběžek b, c. Na prodloužení úsečky MB za bod B sestrojme úsečku $BN = a$, kde $a = AM$; v bodě N sestrojme kolmici k přímce b a označme C její průsečík s přímkou c. Trojúhelník ABC doplňme na rovnoběžník $ABCD$, což je hledaný čtverec.

Důkaz. Podle konstrukce je

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN \text{ (sus)},$$

neboť jsme sestrojili $AM = BN$, $MB = NC$, $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90°$. Je tedy $AB = BC$ a $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$

(viz obrázek); proto je $\beta + \alpha' = 90°$, a tudíž $\sphericalangle ABC = 180° - 90° = 90°$ neboli $AB \perp BC$. Je tedy rovnoběžník $ABCD$ pravoúhlý a rovnostranný neboli je to čtverec.

Diskuse. Právě popsané řešení $ABCD$ existuje. Obraz $A'B'C'D'$ čtverce $ABCD$ v souměrnosti o ose AM je rovněž řešením úlohy (které odpovídá polopřímce MQ). Body B, B' jsou odděleny bodem M, a tedy je $B \neq B'$, a tím i oba čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$ jsou různé.

Úloha má právě dvě řešení.

2. Uvažujme číslo

$$x = 1 \,.\, 10^{p+q+r} + 2 \,.\, 10^{p+q} + 4 \,.\, 10^{q} + 8,$$

kde p, q, r jsou daná přirozená čísla (např. zvolíme-li $p = 2$, $q = 1$, $r = 3$, obdržíme číslo 1 002 408).

Dokažte, že číslo x je dělitelné číslem 24, ať zvolíme přirozená čísla p, q, r jakkoliv.

Řešení. Platí věta: Je-li číslo dělitelné dvěma nesoudělnými čísly, je dělitelné i jejich součinem. Pro dělitelnost 24 máme tedy větu: Číslo je dělitelné 24, je-li dělitelné třemi a osmi.

Protože mocnitelé $p + q + r$, $p + q$, p čísla 10 v zápise čísla x jsou různá přirozená čísla [je $p + q + r - (p + q) = r > 0$, $p + q + r - p = q + r > 0$, $p + q - p = q > 0$], vyskytují se v zápise čísla x v dekadické soustavě jen cifry 1, 2, 4, 8 a nuly (popřípadě žádná nula); ciferný součet čísla x tedy je $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, tj. je dělitelný třemi.

Uvažujme, jak v dekadickém zápise čísla x vypadá poslední trojčíslí tohoto zápisu. Jsou tyto možnosti (vesměs pro $r \geqq 1$):

Pro $p = 1$, $q = 1$ je to 248.
Pro $p = 1$, $q = 2$ je to 048.
Pro $p = 2$, $q = 1$ je to 408.
Pro $p = 2$, $q = 2$ je to 008; totéž trojčíslí dostaneme pro $p > 2$, $q > 2$. Avšak každé z čísel: 248; 48; 408; 8 je dělitelné osmi. Je tedy číslo x dělitelné osmi.

Číslo x je tedy dělitelné čísly 3 a 8, a tím i číslem 24.

3. V roce 1960 měl únor pět pondělků. Který nejbližší rok bude mít tutéž vlastnost?

Řešení. Má-li být v únoru 5 pondělků, musí to být přestupný rok. Protože se v každém novém obyčejném roce posunuje např. pondělí (pokud jde o datum) o jeden den dopředu, kdežto v přestupném roce o dva dny dopředu, znamená to za 4 roky přesun o 5 dní dopředu.

Hledaný rok musí být tedy přestupný a musí na 1. února padnout pondělí; jedná se tedy o to, ve kterém prvním roce po roce 1960 se pondělek posune opět na 1. února. Posunutí za 1. čtyřletí je o 5 dní, za dvě čtyřletí je posunutí o 10 dní, za tři čtyřletí o 15 dní atd. Hledáme tedy první násobek pěti, který je dělitelný sedmi (abychom dostali posunutí pondělku zase na pondělek); je to zřejmě 35 dní = 5 dní . 7 neboli nastane to za 7 čtyřletí, tj. za 4 . 7 = 28 let (viz tabulku — čti ji ve vodorovných řádcích).

Po	Ú	St	Č	Pá	So	Ne
1960	....	....	....	....	1964	....
....	....	....	1968	....	....	....
....	1972	....	....	....	....	1976
....	....	....	....	1980	....	....
....	....	1984	....	....	....	....
1988	....	....	....	....	....	....

Hledaný rok, který bude mít 5 pondělků v únoru jako rok 1960, je rok 1988.

Řešil Václav Limponek, žák 1. tř.
SVVŠ, Strakonice.

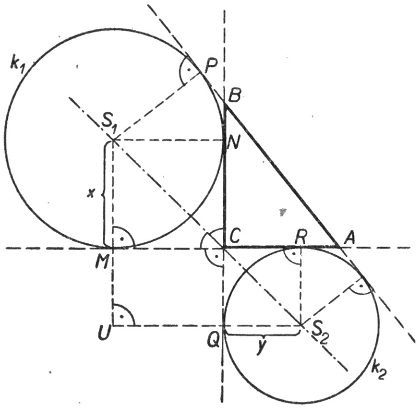
4. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Označme k_1, k_2 kružnic zvonku vpísané trojuholníku ABC, ktoré sa po rade dotýkajú úsečiek BC, CA.

Pomocou dĺžek a, b, c strán trojuholníka ABC vyjadrite dĺžku dotyčnic vedených z bodu C ku kružniciam k_1, k_2 a vypočítajte vzdialenosť stredov kružníc k_1, k_2.

Riešenie (viď označenie na obr. 38). Označme $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Dĺžky dotyčníc vedených z bodu C ku kružnici k_1 sú rovnaké. Označme ich $x = CM = CN$. Dĺžky dotyčníc BN, BP z bodu B ku kružnici k_1 sú si tiež rovné, teda platí $BP = BN = a - x$.

Je teda $AP = AB + BP = c + (a - x)$ čiže

$$AP = a + c - x. \qquad (1)$$



Obr. 38

Dĺžky dotyčníc vedených ku kružnici k_1 z bodu A sú taktiež rovnaké, teda $AP = AM$, kde AP je dané vzťahom (1) a $AM = AC + CM$, t. j.

$$AM = b + x. \qquad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1) a (2) dostaneme

$$b + x = a + c - x$$

čiže

$$x = \tfrac{1}{2}(a - b + c) = s - b,$$

kde s je polovičný obvod trojuholníka ABC. Pritom je CMS_1N štvorec a jeho strana x je polomer kružnice k_1. Je teda

$$x = s - b. \qquad (3)$$

Rovnako sa zistí, že polomer $y = CR = CQ$ kružnice k_2 je

$$y = s - a. \qquad (4)$$

Polpriamky CS_1, CS_2 sú osami vrcholových pravých uhlov $\sphericalangle MCN$, $\sphericalangle QCR$ a sú preto navzájom opačné, takže bod C leží vo vnútri úsečky S_1S_2. Priamky S_1M, S_2Q sú na seba kolmé a s priamkou S_1S_2 ohraničujú pravouhlý trojuholník S_1S_2U s preponou S_1S_2. Jeho odvesny sú zhodné úsečky a platí

$$S_1U = S_2U = x + y = 2s - a - b = c.$$

Prepona $S_1S_2 = S_1U \,.\, \sqrt{2}$ (ako uhlopriečka štvorca) čiže

$$S_1S_2 = c\sqrt{2}.$$

Záver. Vzdialenosť stredov kružníc k_1, k_2 je $c\sqrt{2}$, kde c je dĺžka prepony daného trojuholníka ABC.

8. *ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D*

1. V zápise dělení dvou přirozených čísel chybí některé cifry. Nahraďte chybějící cifry tak, aby zápis byl správný. Zápis zní: 12* 76 : 23* = *2 (každá hvězdička značí jednu chybějící cifru).

Řešení. Označme x, y, z po řadě chybějící cifry. Platí tedy

$$(12\,x\,76) = (23y)\,.\,(z2).$$

Číslo $(z2)$, a tím i hledanou cifru z, dostaneme dělením $(12\,x\,76) : (23y)$. Přitom dělenec je větší než 12 000 a menší než 13 000, dělitel je přirozené číslo mezi 230 a 239 (popříp. jedno z těchto čísel). Tu platí

$$5 < \frac{12\,000}{239} < 6, \quad 5 < \frac{13\,000}{230} < 6\,;$$

je proto nutně $z = 5$ (dělili jsme největšího z možných dělenců nejmenším dělitelem a nejmenšího dělence největším dělitelem).

Součin čísel y, 2, která stojí na místě jednotek v činitelích $(23y)$, 52, je $2y$; na místě jednotek součinu $(12\,x\,76)$ stojí číslo 6. Znásobením čísel 0, 1, 2, ..., 9 číslem 2 dostaneme v součinu na místě jednotek číslo 6 jen ve dvou případech:

$$3\,.\,2 = 6, \qquad 8\,.\,2 = 16.$$

Musí tedy být buď $y = 3$ anebo $y = 8$; avšak pro $y = 3$ máme

$$233\,.\,52 = 12\,116,$$

což nevyhovuje. Pro $y = 8$ dostáváme

$$238 \,.\, 52 = 12\,376,$$

takže je $x = 3$. Je tedy jediné řešení $x = 3$, $y = 8$, $z = 5$.

Uvažovaný součin tedy je $238 \,.\, 52 = 12\,376$.

2. Daná je úsečka AB so stredom S. Označme a, b kolmice zostrojené po rade v bodoch A, B k priamke AB. Ďalej zvoľme bod M na predĺžení úsečky AB za bod A.

Bodom M zostrojte priamku p tak, aby jej priesečníky X, Y s priamkami a, b a bod S boli vrcholmi pravouhlého trojuholníka s preponou XY.

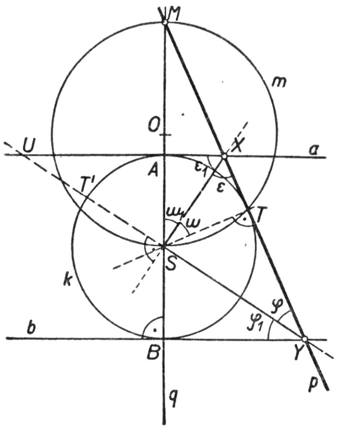
Riešenie. *Rozbor* (obr. 39a). Nech MXY je hľadaná priamka, takže je $\sphericalangle XSY = 90°$. Označme U priesečník priamok SY, a. Je $\triangle SBY \cong \triangle SAU$ (usu), pretože je $SA = SB$, $\sphericalangle BSY = \sphericalangle ASU$ (uhly vrcholové), $\sphericalangle YBS = \sphericalangle UAS = 90°$. Preto je $SU = SY$. (To možno dokázať tiež pomocou súmernosti so stredom S, v ktorej sú priamky a, b súmerné združené.) Podľa textu úlohy je $\sphericalangle XSY = 90°$. Preto je trojuholník XYU rovnoramenný so základňou YU a osou súmernosti XS, ktorá rozpoluje uhol $\sphericalangle UXY$. V osovej súmernosti s osou XS je obrazom polpriamky XU polpriamka XY a obraz T bodu A padne teda na polpriamku XY. Z tejto súmernosti vyplýva, že

$$ST = SA. \tag{1}$$

Obrazom pravého uhla $\sphericalangle XAS$ je uhol $\sphericalangle XTS$, ktorý je teda tiež pravý a platí:

$$ST \perp MX. \tag{2}$$

Zo vzťahu (1) vyplýva, že body A, B, T ležia na kružnici $k \equiv (S, SA)$. Pretože platí (2), je priamka MX dotýčnicou kružnice k.



Obr. 39a

Z toho *konštrukcia*: Opíšme kružnicu $k \equiv (S, SA)$ a s použitím známej konštrukcie veďme z bodu M dotýčnice ST, ST' ku kružnici k. [Nad priemerom MS opíšeme kružnicu $m \equiv (O, OM)$ a označíme T, T' priesečníky kružníc m, k.] Priamka $p \equiv MT$ pretne priamky a, b po rade v bodoch X, Y, ako hneď dokážeme.

K dôkazu použijeme túto vetu ***V***: „Ak sú A, T dotykové body dotyčnic XA, XT vedených z bodu X ku kružnici $k \equiv (S, SA)$, potom je priamka XS osou súmernosti štvoruholníka $SAXT$ aj kružnice k. Je teda na obrázku $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\omega = \omega_1$, pričom je $\omega + \varepsilon = 90°$ (súčet ostrých uhlov v trojuholníku SXT)."

Podľa vety ***V*** je $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\omega = \omega_1$, $\varphi = \varphi_1$ (v tomto prípade ide o dotyčnice YB, YT ku kružnici k). Platí však

$$\sphericalangle BYX + \sphericalangle YXA = 180° \tag{3}$$

(uhly priľahlé medzi rovnobežkami a, b, preťatými priečkou $p \equiv MXY$). Ale $\sphericalangle BYX = \varphi + \varphi_1 = 2\varphi$, $\sphericalangle YXA = \varepsilon + \varepsilon_1 = 2\varepsilon$. Po dosadení do (3) máme $2\varphi + 2\varepsilon = 180°$ čiže

$$\varphi + \varepsilon = 90°.$$

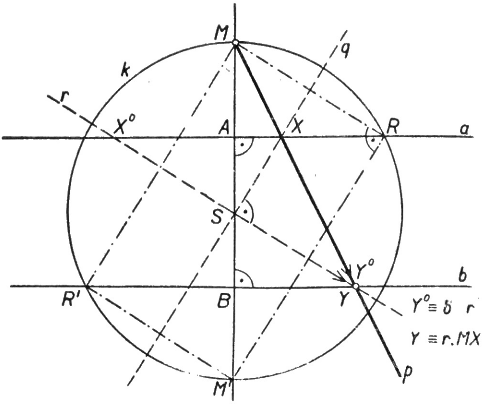
Preto v trojuholníku XYS je

$$\sphericalangle XSY = 180° - (\varphi + \varepsilon) = 90°.$$

Je teda $SX \perp SY$, čo sme mali dokázať.

Diskusia. Pretože bod M leží na predĺžení úsečky AB za bod A, padne mimo kružnice k a podľa známej vety možno z bodu M zostrojiť dve rôzne dotyčnice MT, MT', z ktorých každá vyhovuje požiadavkám úlohy. Úloha má teda dve riešenia.

Iný spôsob riešenia (n á č r t — obr. 39b). Zostrojme pomocnú kružnicu $k \equiv (S, SM)$ a jej druhý priesečník s priamkou AB označme M'. Niektorý z priesečníkov kružnice k s priamkou a označme R. Stredom S úsečky AB veďme priamky $r \parallel MR$, $q \parallel RM'$. Je teda $r \perp q$ (podľa Thaletovej vety je $\sphericalangle MRM' = 90°$). Priesečník priamok a, q označme X, priesečník priamok MX, r označme Y. Potom X, Y sú bodmi hľadanej priamky p.



Obr. 39b

Dôkaz (viď obr. 39b). Uvažujme o rovnobežníku $MRM'R'$. Keďže je $\sphericalangle MRM' = 90°$, je to obdĺžnik. Priamky r, q sú jeho stredné priečky. Podľa konštrukcie je trojuholník XYS pravouhlý ($\sphericalangle XSY = 90°$).

Označme Y^0 priesečník priamok b, r. Dokážeme, že je $Y^0 \equiv Y$: V osovej súmernosti podľa osi $q \equiv SX$ je priamka a obrazom priamky MXY^0, lebo priamka q

je stredná priečka obdĺžníka $MRM'R'$. Bod Y pritom prejde do priesečníka X^0 priamok a, r a platí $X^0Y \perp \perp q$. Zrejme je $SY = SX^0$. Vieme, že bod S je stredom súmernosti, ktorá prevádza priamku b do priamky a a obrátene. Táto stredová súmernosť prevádza spoločný bod X^0 priamok a, r do spoločného bodu priamok b, r. Je teda $Y^0 \equiv Y$, čo sme mali dokázať. Priamka MX prechádza teda bodom Y a je hľadanou priamkou p.

3. Majme tri prirodzené čísla a, b, c. Utvorme

$$(a + + b + c)^2, (a + b - c)^2, (a - b + c)^2,$$
$$(-a + b + c)^2, (a - b - c)^2, (-a + b - c)^2,$$
$$(-a - b + c)^2, (-a - b - c)^2$$

a označme s súčet týchto ôsmich čísel.

a) Napíšte súčet s v najjednoduchšom tvare.

b) Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c tak, aby výsledný súčet s bol rovný 240.

Riešenie. Platí vzorec $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Ak tu položíma napr. $-b$ namiesto b, dostaneme

$$\begin{aligned}(a - b + c)^2 &= \\ = a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2[a(-b) + (-b)c + ca] &= \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab - bc + ca).\end{aligned}$$

Kvôli stručnosti bude vhodné označiť $X = a^2 + b^2 +$

$+ c^2$. Označme ďalej výrazy uvedené v texte úlohy po rade $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_8$. Platí:

$$\begin{aligned}
V_1 &= X + 2(ab + bc + ca),\\
V_2 &= X + 2(ab - bc - ca),\\
V_3 &= X + 2(-ab - bc + ca),\\
V_4 &= X + 2(-ab + bc - ca),\\
V_5 &= X + 2(-ab + bc - ca),\\
V_6 &= X + 2(-ab - bc + ca),\\
V_7 &= X + 2(ab - bc - ca),\\
V_8 &= X + 2(ab + bc + ca).
\end{aligned}$$

a) Ihneď je zrejmé, že $s = 8X$, čiže

$$s = 8(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Máme nájsť prirodzené čísla a, b, c tak, aby platilo $8(a^2 + b^2 + c^2) = 240$ čiže

$$a^2 + b^2 + c^2 = 30.$$

Tieto čísla nájdeme pomocou tabulky. Je zrejmé, že každé z čísel a, b, c musí byť menšie ako 6, pretože $6^2 = 36 > 30$. Pri hľadaní čísel a, b, c môžeme predpokladať, že je

$$a \leqq b \leqq c$$

(ostatné možnosti určíme na záver). Hneď môžeme vylúčiť tiež prípad, že sú všetky tri čísla párne; potom by totiž druhé mocniny čísel a teda aj ich súčet boli deliteľné štyrmi. Musia byť preto nutne dve z čísel a, b, c

nepárne a tretie párne (v tabuľke uvádzame len také trojice).

a	1	1	1	2	2	3	4
b	1	2	2	3	3	3	5
c	2	3	5	3	5	4	5
a^2	1	1	1	4	4	9	16
b^2	1	4	4	9	9	9	25
c^2	4	9	25	9	25	16	25
$a^2 + b^2 + c^2$	6	14	30	22	38	34	66

Z posledného stĺpca tabuľky je vidieť, že musí byť $a < 4$. Jediná vyhovujúca trojica v tabuľke je $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$. Z nej dostaneme zámenou ďalších 5 trojíc.

Našej požiadavke vyhovujú teda iba tieto trojice (o tom, že vyhovujú, sa ľahko presvedčíme skúškou):

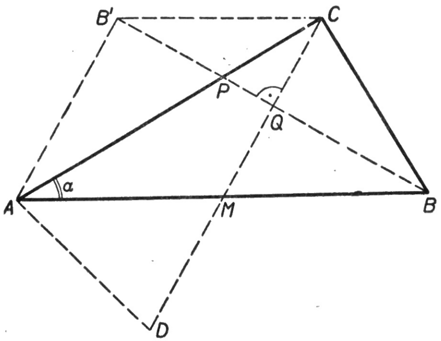
a	1	1	2	2	5	5
b	2	5	1	5	1	2
c	5	2	5	1	2	1

Tým je riešenie prevedené.

4. Na obrázku 40 je ABC pravoúhlý trojúhelník o přeponě AB; M je střed přepony, $CD = CA$; B' je bod souměrně sdružený s bodem B vzhledem k přímce CD, přičemž je $\alpha < 45°$.

Vnitřní úhly všech trojúhelníků, které se vyskytují na obr. 40, vyjádřete pomocí úhlu α.

Na závěr proveďte výpočet pro $\alpha = 42°$.



Obr. 40

Řešení. Užijeme označení z obrázku 41. Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB, takže je

$$\sphericalangle ABC = 90° - \alpha; \tag{1}$$

bod M je středem přepony AB a kružnice opsaná kolem bodu M poloměrem MA je trojúhelníku ABC opsána (Thaletova kružnice), takže je

$$MC = MA.$$

Je tedy trojúhelník MAC rovnoramenný se základnou AC, při které má shodné úhly; je tedy

$$\sphericalangle ACM = \alpha, \quad \sphericalangle AMC = 180° - 2\alpha. \tag{2}$$

Dále

$$\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC = 2\alpha \tag{3}$$

(vnější úhel v trojúhelníku AMC).

Trojúhelník CAD je rovnoramenný (neboť podle textu úlohy je $CA = CD$) o základně AD; proto platí $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle ACD) = 90° - - \frac{1}{2}\alpha$, tj.

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha. \tag{4}$$

Je tedy

$$\sphericalangle MAD = \sphericalangle CAD - \sphericalangle CAM = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha - \alpha = \\ = 90° - \tfrac{3}{2}\alpha,$$

tj.

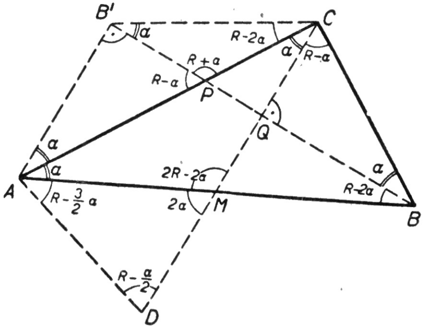
$$\sphericalangle MAD = 90° - \tfrac{3}{2}\alpha. \tag{5}$$

Trojúhelník MBC je rovnoramenný (je $MA = = MB = MC$) se základnou BC, takže $\sphericalangle C = \sphericalangle B$, tj. [viz druhý vztah (2)]

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle BCM &= \tfrac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha, \\ \sphericalangle CBM &= 90° - \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

což souhlasí s tím, že je $\sphericalangle BCM + \sphericalangle ACM = 90°$ [viz první vztah (2)].

Všechny čtyři úhly o vrcholu Q jsou podle textu úlohy pravé; na základě toho snadno vypočítáme dosud neznámé velikosti úhlů o vrcholech B, C, P, B'.



Obr. 41

Z trojúhelníka PCQ (kde $\sphericalangle Q = 90°$) plyne

$$\sphericalangle QBC = 90° - \sphericalangle BCM = \alpha \text{ [viz(6)].} \qquad (7)$$

Z trojúhelníka BMQ (kde $\sphericalangle Q = 90°$) plyne

$$\sphericalangle MBQ = 90° - \sphericalangle BMC = 90° - 2\alpha \text{ [viz vztah (3)].}$$

Z trojúhelníka CPQ (kde $\sphericalangle Q = 90°$) o úhlech $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle APB'$ plyne

$$\sphericalangle APB' = \sphericalangle CPB = 90° - \sphericalangle ACM = 90° - \alpha \qquad (8)$$

[viz první vztah (2)]; o úhlech k nim vedlejších platí

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CPB' = 90° + \alpha. \qquad (9)$$

Ze souměrnoti o ose CM vyplývá, že Q je středem úsečky BB' a že je

$$\sphericalangle QB'C = \sphericalangle QBC = \alpha \text{ [viz (7)]}, \tag{8'}$$

dále, že $\sphericalangle QCB' = \sphericalangle QCB$ neboli

$$\sphericalangle QCB' = \sphericalangle BCM = 90° - \alpha \tag{9}$$

[viz první vztah (6)].

Avšak [viz (9′) a první vztah (2)]

$$\sphericalangle ACB' = \sphericalangle QCB' - \sphericalangle ACM =$$
$$= 90° - \alpha - \alpha = 90° - 2\alpha. \tag{10}$$

Protože bod M je středem úsečky AB a Q je středem úsečky BB', je úsečka MQ střední příčkou v trojúhelníku ABB', tj. platí

$$MQ \parallel AB'.$$

Odtud plyne, že přilehlé úhly $\sphericalangle MQB' = 90°$ a $\sphericalangle AB'Q$ mezi rovnoběžkami AB', MQ proťatými příčkou QB' mají součet 180°; je tedy

$$\sphericalangle AB'Q = 90°. \tag{11}$$

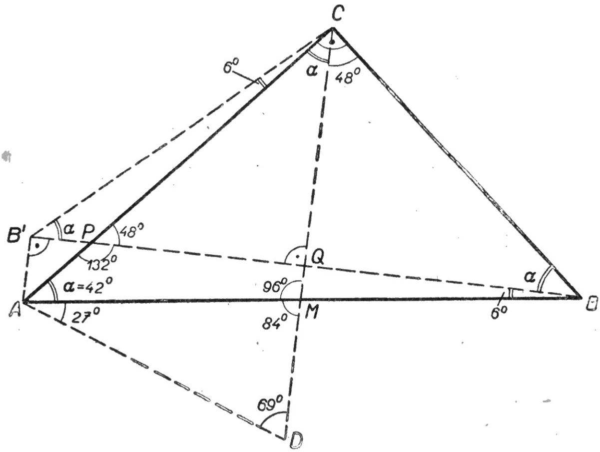
Poslední úhel, který máme vypočítat, je úhel $\sphericalangle PAB'$ v pravoúhlém trojúhelníku APB' [kde $\sphericalangle B' = 90°$ – viz (11)]; v něm je úhel $\sphericalangle APB' = 90° - \alpha$ [viz (8)]. Je tedy

$$\sphericalangle PAB' = 90° - \sphericalangle APB' = 90° - (90° - \alpha) = \alpha,$$

tj.

$$\sphericalangle PAB' = \alpha; \tag{12}$$

odtud plyne, že polopřímka AC je osou úhlu $\sphericalangle BAB'$. Tím je výpočet velikostí úhlů proveden. Velikosti všech úhlů (až na vrcholové) jsou zapsány v obr. 41, pro případ, že je $\alpha = 42°$, pak na obr. 42.

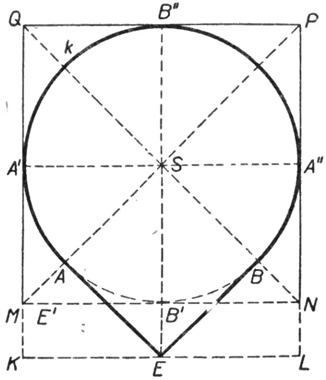


Obr. 42

Zkoušku správnosti výpočtů můžeme např. provést tak, že si ověříme, zda je součet úhlů v každém z trojúhelníků na obr. 41 roven 180° a součet úhlů ve čtyřúhelníku $APQM$ roven 360°.

5. Tenký drát jsme stočili do tvaru číslice 8 tak, že se skládá ze dvou shodných smyček. Smyčku tvoří oblouk $\widehat{AB}$ kružnice k a části tečen sestrojených v bodech A, B ke kružnici k; délka oblouku $\widehat{AB}$ je $\frac{3}{4}$ délky kružnice k. Víme, že výška zhotovené číslice je 48 cm. Vypočtěte šířku číslice a délku spotřebovaného drátu.

Řešení. Buď x délka (v cm) spotřebovaného drátu. Označme r poloměr a p obvod kružnice k, jejíž větší



Obr. 43

oblouk $\widehat{AB}$ tvoří část jedné smyčky číslice 8 (viz označení v obr. 43). Oblouk $\widehat{AB}$ se skládá ze tří čtvrtkružnic, neboť úsečky $A'A''$, $B'B''$ jsou středními příčkami čtverce $MNPQ$ a platí $A'A'' \perp B'B''$; je tedy délka

o oblouku AB dána výrazem $o = \frac{3}{4}\,p$. Oblouk na druhé smyčce má touž délku a oba dohromady mají délku

$$2o = \tfrac{3}{2}p = \tfrac{3}{2} \,.\, 2\pi r = 3\pi r$$

neboli

$$2o = 3\pi r. \tag{1}$$

Jedna smyčka je vedle oblouku $\widehat{AB}$ tvořena úsečkami AE, BE (viz obr. 43). Protože je $SA = SB = r$ a $SA \perp SB$, je čtyřúhelník $SAEB$ čtverec; je tedy $AE = BE = r$ a $AE + BE = 2r$. Stejnou délku mají obdobně dvě úsečky na druhé smyčce; abychom dostali délku drátu spotřebovaného na osmičku, musíme k výsledku (1) přičíst číslo $4r$. Je tedy $x = 2o + 4r$ neboli [viz (1)] $x = 3\pi r + 4r = r(3\pi + 4)$.

Položme $\pi \doteq \dfrac{22}{7}$; pak je

$$x \doteq r\left(\frac{66}{7} + \frac{28}{7}\right) = \frac{94}{7}\,r.$$

Označme $y = MN$ šířku číslice 8; zřejmě je

$$y = 2r. \tag{3}$$

Pro další výpočet potřebujeme určit délku r pomocí výšky $v = 48$ cm zhotovené číslice. Z obrázku 43 je vidět, že $\frac{1}{2}\,v = SB'' + SE$; přitom je $SB'' = r$, $SE = r\sqrt{2}$, kde $\sqrt{2} \doteq 1{,}4$ (což plyne ze vzorce pro úhlopříčku SE čtverce $SAEB$, jehož strana má délku r). Je tedy

$$\tfrac{1}{2}v = r + r\sqrt{2}$$

neboli

$$\tfrac{1}{2}v = r(1 + \sqrt{2}).$$

Znásobme obě strany této rovnice o neznámé r číslem $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$; dostaneme

$$\frac{v}{2(1+\sqrt{2})} = r.$$

Přibližně tedy je

$$r \doteq \frac{48}{2(1+1{,}4)} = \frac{24}{2{,}4} = 10.$$

Ze vztahů (2) a (3) po dosazení za $r = 10$ dostaneme

$$x \doteq \frac{940}{7} = 134\,\frac{2}{7} \doteq 134, \quad y \doteq 20.$$

Odpověď. Šířka číslice je asi 20 cm, délka spotřebovaného drátu asi 134 cm.

6. Je dán výraz

$$V = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) : \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right). \quad (1)$$

a) Zjednodušte daný výraz V.
b) Udejte, pro která čísla a, b nemá výraz V smysl.
c) Udejte, pro která čísla a, b je $V = 0$; dále, kdy je kladný a kdy záporný.

Řešení. a) Provedeme postupně tuto úpravu výrazu V [zvláště užijeme vzorce $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$]:

$$V = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} : \frac{(a + b)^2 - (a - b^2)}{(a - b)(a + b)} =$$

$$= \frac{[a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)][a^2 + b^2 + a^2 - b^2]}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(a - b)(a + b)}{[a + b - (a - b)][a + b + a - b]} =$$

$$= \frac{4a^2b^2}{(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)} \cdot \frac{(a - b)(a + b)}{4ab} .$$

Po zkrácení obou zlomků dostaneme

$$V = \frac{ab}{a^2 + b^2} . \tag{2}$$

b) Výraz V nemá smysl především tehdy, je-li roven nule některý ze jmenovatelů na pravé straně rovnosti (1). Platí $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; ze vztahu

$$(a - b)(a + b) = 0$$

vyplývá, že jeden z činitelů $a - b$, $a + b$ je roven nule. Tedy $a - b = 0$ anebo $a + b = 0$; odtud plyne

$$a = b \quad \text{anebo} \quad a = -b. \tag{3}$$

Tím je rozhodnuto i o obou jmenovatelích $a - b$, $a + b$ ve výrazu (1). Výraz $a^2 + b^2$ je součtem dvou nezáporných čísel a ten je roven nule jedině tehdy, jsou-li obě čísla a^2, b^2 rovna nule, tj. platí-li $a^2 = 0$, $b^2 = 0$. Avšak zde ze vztahu $a^2 = 0$ plyne $a = 0$; podobně se najde i vztah $b = 0$. Je tedy $a^2 + b^2$ rovno nule jedině pro $a = b = 0$, což je již zahrnuto ve vztazích (3).

Výraz V nemá dále smysl tehdy, je-li dělitel $d = \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$ na pravé straně (1) roven nule; podle provedeného výpočtu však je

$$d = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} .$$

Jestliže je $4ab = 0$, je $d = 0$ (a obráceně); ze vztahu $4ab = 0$ plyne buď $a = 0$, nebo $b = 0$. Musí tedy být obě čísla a, b různá od nuly, tj. $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Odpověď. Výraz V ztrácí smysl, jestliže je $a = b$ nebo $a = -b$ nebo je-li jedno z čísel a, b rovno nule.

c) Výraz (1), pokud má smysl, je roven číslu

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} \qquad (4)$$

[viz (2)]; má-li být $V = 0$, musí být ve zlomku (4) čitatel roven nule (avšak jmenovatel různý od nuly), tj. musí platit $ab = 0$. Odtud dostaneme, že musí platit buď $a = 0$ nebo $b = 0$. Avšak v žádném z obou případů nemá výraz (1) smysl.

Odpověď. Výraz V je různý od nuly pro všechna čísla a, b, pro něž má smysl.

O znaménku výrazu (1) rozhodneme pomocí vztahu (2). Jmenovatel $a^2 + b^2$ je součtem dvou kladných čísel, neboť např. a^2 je druhá mocnina čísla různého od nuly, a tedy kladné číslo. Proto o znaménku zlomku rozhodne čitatel ab zlomku (2).

Snadno usoudíme, že je správná tato odpověď:

Jsou-li čísla a, b týchž znamének (tedy i různá od nuly), je ab kladné číslo; jsou-li čísla a, b různých znamének, je ab záporné číslo. T e d y: jsou-li a, b různá čísla týchž znamének, potom je V číslo kladné; jsou-li a, b čísla opačných znamének a mají-li různé absolutní hodnoty, potom je V záporné číslo.

Závěr. Jsou-li a, b různá čísla a mají-li táž znaménka, je $V > 0$; jsou-li a, b čísla různých znamének a není-li $a = -b$, je $V < 0$.

9. *ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D*

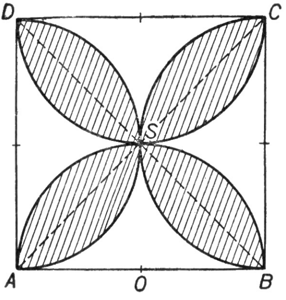
1. Daný je štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky d. Zo stredu každej jeho strany opíšme polkružnicu, ktorá prechádza stredom štvorca $ABCD$ (viď obrázok 44). Koľko percent z obsahu štvorca je obsah vyčiarkovaného obrazca?

Riešenie (obr. 44). Obsah daného obrazca dostaneme, keď obsah obrazca na obr. 45 vynásobíme štyrmi, t. j. obsah polkruhu s polomerom $\frac{1}{2}d$ zmenšený o $\frac{1}{4}$ obsahu štvorca so stranou d. Teda

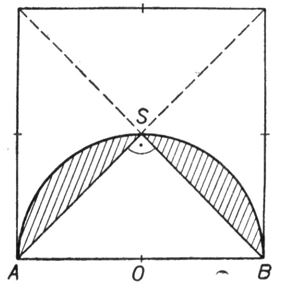
$$P = 4[\tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{1}{2}d)^2 - \tfrac{1}{4}d^2] = d^2(\tfrac{1}{2}\pi - 1).$$

Obsah štvorca $ABCD$ je $P' = d^2$. Pre hľadaný počet p percent platí:

$$p = P : \frac{P'}{100} = \frac{100P}{P'}.$$



Obr. 44



Obr. 45

Po dosadení za P a P' dostaneme

$$p = \frac{100d^2}{d^2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right) = 100\left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right) \doteq 57.$$

Obsah vyčiarkovaného obrazca je približne 57 % obsahu štvorca.

Riešila Viera Kožiaková,
8. b tr. ZDŠ,
Hnúšťa, okr. Rimavská Sobota.

2. V továrně pracovalo 1440 zaměstnanců (mužů a žen). Za vzorně vykonanou práci obdrželo prémie $18\frac{3}{4}$ % ze všech mužů a $22\frac{1}{2}$ % ze všech žen. Vedení továrny vyhlásilo, že prémiemi bylo odměněno 20 % zaměstnanců.

Kolik mužů a kolik žen bylo zaměstnáno v továrně?

Řešení. Označme x počet mužů, kteří pracovali v továrně; potom počet žen, které pracovaly v továrně je $1440 - x$. Bylo odměněno:

$18\frac{3}{4}$ % z počtu všech mužů je $\frac{x}{100} \cdot 18\frac{3}{4} = \frac{75x}{400}$,

$22\frac{1}{2}$ % z počtu všech žen je $\frac{1440 - x}{100} \cdot 22\frac{1}{2} =$

$$= \frac{1440 - x}{100} \cdot \frac{45}{2} = \frac{45(1440 - x)}{200};$$

20 % ze všech zaměstnanců je $\frac{1440}{100} \cdot 20 = \frac{1440}{5}$.

Součet počtu odměněných mužů a počtu odměněných žen je roven počtu odměněných zaměstnanců, tj. platí

$$\frac{75x}{400} + \frac{45(1440 - x)}{200} = \frac{1440}{5}.$$

Dostali jsme rovnici pro neznámou x; budeme ji řešit. Znásobme obě strany rovnice číslem 400 a postupně ji upravujeme:

$$75x + 90(1440 - x) = 80 \cdot 1440,$$
$$1440 \cdot (90 - 80) = (90 - 75)x,$$
$$14400 = 15x,$$
$$x = \frac{14400}{15} = \frac{2880}{3} = 960.$$

Počet mužů je tedy $x = 960$; počet žen je $1440 - 960 = 480$.

Zkouška. Platí $960 + 480 = 1440$. Dále je:

$18\frac{3}{4}$ % z 960 je $\frac{960}{100} \cdot \frac{75}{4} = 180$ (počet odměněných mužů);

$22\frac{1}{2}$ % z 480 je $\frac{480}{100} \cdot \frac{45}{2} = 108$ (počet odměněných žen);

20 % z 1440 je $1440 \cdot \frac{1}{5} = 288$ (počet odměněných zaměstnanců).

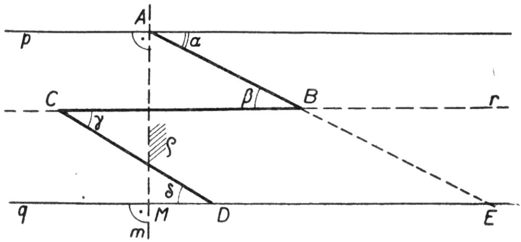
Skutečně je $180 + 108 = 288$.

3. Dané sú dve rovnobežky p, q o vzdialenosti $v = 6$ cm. Na priamke p je daný bod A.

Zostrojte lomenú čiaru $ABCD$ takého tvaru ako na obrázku 46, aby štyri uhly na obrázku vyznačené (oblúčkami) boli zhodné a aby úsečky AB, BC, CD mali tieto dĺžky:

$$AB = 4 \text{ cm}, \quad BC = 7 \text{ cm}, \quad CD = 6 \text{ cm}.$$

Je táto úloha riešiteľná pre $AB = 2$ cm, $BC = 7$ cm, $CD = 3$ cm? Odôvodnite.



Obr. 46

Riešenie (viď označenie na obr. 46). *Rozbor*. Podľa textu úlohy je $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Uhly α, β sú striedavé uhly medzi priamkami p, BC, preťatými priamkou AB. Z rovnosti $\alpha = \beta$ vyplýva podľa známej vety, že je $BC \parallel p$. Pretože však je $p \parallel q$, vyplýva z toho, že je

$$p \parallel BC \parallel q. \tag{1}$$

Taktiež uhly β, γ sú striedavé medzi priamkami AB, CD, preťatými priamkou BC. Z rovnosti $\beta = \gamma$ preto vyplýva, že je

$$AB \parallel CD. \tag{2}$$

Označme E priesečník priamok q, AB. Potom podľa (1), (2) sú protiľahlé strany štvoruholníka $EBCD$ navzájom rovnobežné, takže $EBCD$ je rovnobežník. Preto je

$$\left.\begin{aligned} ED = BC = 7\text{ cm}, \\ BE = CD = 6\text{ cm}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

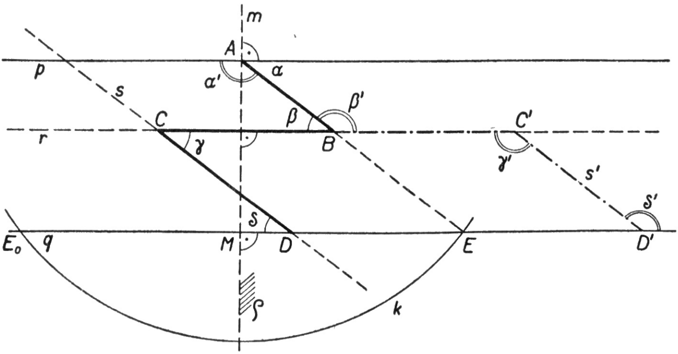
Keďže $AE = AB + BE$, je $AE = 4\text{ cm} + 6\text{ cm} =$ $= 10\text{ cm}$, t. j.

$$AE = 10\text{ cm}. \tag{4}$$

Na základe výsledkov (4), (3) a (1), (2) prevedieme *konštrukciu* (viď obr. 47):

Označme m kolmicu vedenú bodom A k priamke q. Jej pätu označme M. Konštrukciu bodu E prevedieme v polrovine ϱ, čo je jedna z polrovín vyťatých priamkou m. Výsledok v polrovine opačnej k ϱ dostaneme pomocou osovej súmernosti podľa priamky m.

Pretože je $AE = 10$ cm, je bod E jedným z priesečníkov priamky q a kružnice $k \equiv (A, 10 \text{ cm})$. Na polpriamke EM a polpriamke k nej opačnej zostrojme podľa vzťahu (3) po rade úsečky $ED = 7$ cm a $ED' = 7$ cm. Na polpriamke AE zostrojme úsečku $AB = 4$ cm. Bodom B veďme priamku $r \parallel q$. Bodmi D, D' veďme rovnobežky s, s' k priamke AE a označme po



Obr. 47

rade C, C' ich priesečníky s priamkou r. Potom lomené čiary $ABCD$, $ABC'D'$ vyhovujú požiadavkám úlohy.

Dôkaz prevedieme pre čiaru $ABCD$ (označenie viď na obr. 47). (Pre čiaru $ABC'D'$ sa dôkaz prevedie podobne.) Podľa konštrukcie je $BCDE$ rovnobežník a preto je

$$\beta = \gamma \tag{5}$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami BE, CD preťatými priamkou BC). Ďalej je

$$\gamma = \delta \tag{6}$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami q, r preťatými priamkou DC). Konečne je

$$\alpha = \beta \tag{7}$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami r, p preťatými priamkou AE). Spojením (5), (6), (7) dostávame $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

Podľa konštrukcie je $AE = 10$ cm, $AB = 4$ cm, takže $BE = AE - AB = 6$ cm. Pretože CD, BE sú protiľahlé strany rovnobežníka $BCDE$, je $CD = BE = 6$ cm. Podľa konštrukcie je $ED = 7$ cm, pričom protiľahlé strany BC, ED rovnobežníka $BCDE$ sú zhodné, t. j. $BC = ED = 7$ cm. Majú teda časti lomenej čiary $ABCD$ dĺžky předpísané v texte úlohy. Tým je dôkaz prevedený.

Diskusia. Vzdialenosť $v = 6$ cm stredu A kružnice k od priamky q je menšia ako jej polomer, ktorý je 10 cm. Preto je q sečnicou kružnice k a vo vnútri polroviny ϱ leží priesečník $E \equiv M$ čiar q, k (druhý priesečník čiar

q, k dostaneme ako obraz bodu E v súmernosti podľa priamky m).

Dostali sme dve riešenia $ABCD$, $ABC'D'$ prislúchajúce k bodu E. Ďalšie dve riešenia dostaneme ako obrazy týchto riešení v súmernosti podľa priamky m. Úloha má teda celkom štyri riešenia.

Pre údaje $AB = 2$ cm, $CD = 3$ cm nemá úloha riešenie, pretože úsečka AE, pomocou ktorej sme úlohu riešili, by mala dĺžku $AE = AB + CD = 5$ cm. No, kružnica $k' \equiv (A, 5\text{ cm})$ nepretína priamku q, pretože $v > 5$ cm.

Podrobné riešenie tejto úlohy podal Ján Lupták,
9. a tr. SVVŠ,
Vazovova 6, Bratislava.

4. Je dán výraz

$$V = \left[\frac{4x}{x^2+4} \cdot \left(\frac{2}{x^2-2x} + \frac{x}{2x-4}\right) - \frac{4}{x^2-4}\right] : \frac{x}{x-2}.$$

a) Daný výraz zjednodušte a určete všecka čísla x, pro která ztrácí daný výraz smysl.

b) Najděte všechna celá čísla x, pro která je výraz V roven celému číslu.

Řešení. a) V okrouhlé závorce máme zlomky o jmenovatelích

$$x(x-2), \quad 2(x-2);$$

jejich společný násobek je

$$2x(x - 2).$$

Proto první zlomek v okrouhlé závorce rozšíříme číslem 2 a druhý číslem x; dostaneme nyní postupně:

$$V = \left[\frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \left(\frac{4}{2x(x - 2)} + \frac{x^2}{2x(x - 2)}\right) - \frac{4}{x^2 - 4}\right] :$$

$$: \frac{x}{x - 2} = \left[\frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \frac{x^2 + 4}{2x(x - 2)} - \frac{4}{x^2 - 4}\right] : \frac{x}{x - 2}.$$

V lomené závorce první člen zkrátíme číslem

$$2x(x^2 + 4);$$

tím dostaneme

$$V = \left[\frac{2}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4}\right] : \frac{x}{x - 2}.$$

Společný jmenovatel obou zlomků v lomené závorce je $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; proto musíme první zlomek v lomené závorce rozšířit číslem $x + 2$. Dostáváme postupně:

$$V = \left[\frac{2(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{4}{(x - 2)(x + 2)}\right] : \frac{x}{x - 2} =$$

$$= \frac{2x}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{x}{x - 2}.$$

Po provedení dělení pak máme

$$V = \frac{2x}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x - 2}{x} .$$

Po zkrácení čísly x, $x - 2$ je

$$V = \frac{2}{x + 2}. \qquad (1)$$

Provedená úprava výrazu je správná, pokud daný výraz V má smysl, tj. jsou-li jmenovatelé všech zlomků, jež se v daném výrazu vyskytují, různí od nuly; tito jmenovatelé jsou $x(x - 2)$, $2(x - 2)$, $x^2 + 4$, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Musí tedy být $x \neq 0$, $x - 2 \neq 0$, $x^2 + 4 \neq 0$ (což vždy platí, neboť je $x^2 \geqq 0$), $x + 2 \neq 0$. Odtud plyne, že x musí být různé od čísel

$$0, \ 2, \ -2.$$

Vedle toho dělitel $\frac{x}{x - 2}$ musí být různý od nuly, tj. musí být $x \neq 0$.

Závěr a). Daný výraz V je roven zlomku $\frac{2}{x + 2}$ a má smysl pro každé číslo x různé od čísel $-2, 0, 2$.

b) Dosadíme-li do výrazu $\frac{2}{x + 2}$ za x celé číslo, je $x + 2$ rovněž celé číslo; naším úkolem nyní je najít celé číslo $x + 2$, které je dělitelem čísla 2. Avšak číslo 2 je dělitelné právě těmito čtyřmi čísly:

$$2, \ 1, \ -1, \ -2. \qquad (3)$$

Musí tedy platit jedna z rovnic

$$x + 2 = 2, \ x + 2 = 1, \ x + 2 = -1, \ x + 2 = -2.$$

Jejich řešení po řadě jsou:

$$x = 0; \quad x = -1; \quad x = -3; \quad x = -4.$$

První případ ve (3) jsme však v části a) vyloučili [viz (2)]. Zbývá tedy provést zkoušku pro ostatní tři čísla.

Pro $x = -1$ je $V = \frac{2}{-1 + 2} = 2.$

Pro $x = -3$ je $V = \frac{2}{-3 + 2} = -2.$

Pro $x = -4$ je $V = \frac{2}{-4 + 2} = -1.$

Závěr b). Je-li x celé číslo, pak výraz V je roven celému číslu jedině pro $x = -1$ nebo pro $x = -3$ nebo pro $x = -4$.