07. ročník matematické olympiády

IV. Řešení úloh ze soutěže

IV. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

1. Úlohy I. kola kategorie A

1. Dokážte, že pre všetky x platí:

a) $|\cos x + \sin x| \leqq \sqrt{2}$;

b) $\cos^4 x + \sin^4 x \geqq \frac{1}{2}$.

Riešenie. a) Platí postupne

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin(R - x) =$$
$$= 2\sin 45° \cos(x - 45°) = \sqrt{2}\cos(x - 45°)\,.$$

Preto je

$$|\cos x + \sin x| = |\sqrt{2}\cos(x - 45°)| = \sqrt{2}\,|\cos(x - 45°)|\,; \quad (1)$$

avšak pre všetky čísla x platí

$$|\cos(x - 45°)| \leqq 1$$

a preto je $\sqrt{2}\,|\cos(x - 45°)| \leqq \sqrt{2}$. Vzhľadom na vzťahy (1) odtiaľ dostaneme

$$|\cos x + \sin x| \leqq \sqrt{2}\,,$$

čo sme mali dokázať.

b) Platí postupne

$$\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2\,. \quad (2)$$

Pretože pre všetky x platí $|\sin 2x| \leqq 1$, je $\frac{1}{2}(\sin 2x)^2 \leqq$ $\leqq \frac{1}{2}$. Odtiaľ a zo vzťahov (2) dostávame

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 \geqq 1 - \frac{1}{2}$$

a teda

$$\cos^4 x + \sin^4 x \geqq \frac{1}{2},$$

čo sme mali dokázať.

2. Zjistěte průběh funkcí:

$$\text{a) } y = \frac{x + |x|}{2x^2}; \quad \text{b) } \frac{2x^2}{x + |x|}.$$

Grafy těchto funkcí narýsujte tuší.

Řešení. a) Funkce je definovaná pro $x \neq 0$.

I. Je-li $x > 0$, je $|x| = x$, tedy

$$y = \frac{x + x}{2x^2} = \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x}.$$

II. Pro $x < 0$ máme $|x| = -x$, tedy

$$y = \frac{x - x}{2x^2} = 0.$$

Příslušný graf je načrtnut na obr. 1, přičemž počátek O nenáleží grafu funkce a).

b) Abychom rozhodli, kdy je jmenovatel $x + |x|$ roven nule, řešíme rovnici

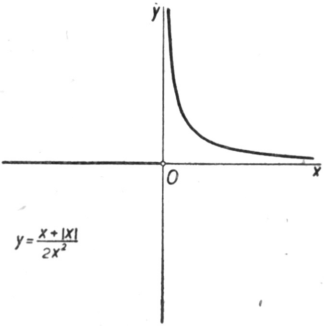
$$x + |x| = 0. \tag{1}$$

Pro $x > 0$ je $x + |x| = x + x = 2x > 0$, tedy kladné x není kořenem rovnice (1).

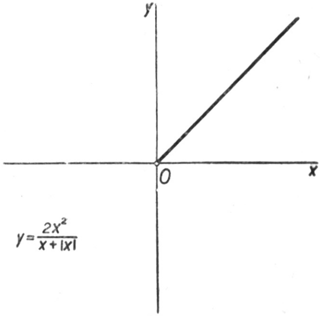
Pro $x \leqq 0$ je $x + |x| = x - x = 0$, tedy každé nekladné x je kořenem rovnice (1).

Daná funkce je tedy definována jen pro $x > 0$. Pak však platí

$$\frac{2x^2}{x + |x|} = \frac{2x^2}{x + x} = \frac{2x^2}{2x} = x\,, \quad \text{čili} \quad y = x\,.$$



Obr. 1



Obr. 2

Graf funkce je na obr. 2, přičemž počátek O nenáleží grafu funkce b).

3. Nechť $m \geqq n \geqq p$ jsou velikosti stěnových úhlopříček kvádru.

Vypočtěte velikosti hran a, b, c tohoto kvádru.

Dokažte, že podmínkou řešitelnosti je, aby se dal sestrojit trojúhelník ze stran o velikostech m, n, p a aby tento trojúhelník byl ostroúhlý.

Poznámka. V kvádru $ABCDA'B'C'D'$ (v němž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) zvolte toto označení: $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$, $m = AD'$, $n = AB'$, $p = AC$.

Řešení. I. V této části řešení určíme rozměry

$$a = AB,\ b = AD,\ c = AA' \qquad (1')$$

hledaného kvádru a stanovíme podmínky, při jejichž platnosti tento kvádr existuje. Řešení provedeme výpočtem (obr. 3).

Jestliže hledaný kvádr existuje, potom z pravoúhlých trojúhelníků DAA', BAA', BDA o jeho stěnových úhlopříčkách

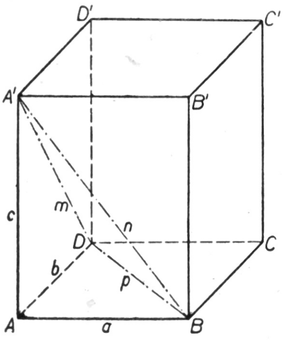
$$DA' = m,\ A'B = n,\ BD = p \qquad (1)$$

podle Pythagorovy věty platí

$$m^2 = b^2 + c^2\,, \qquad (2)$$
$$n^2 = c^2 + a^2\,, \qquad (3)$$
$$p^2 = a^2 + b^2\,. \qquad (4)$$

Přitom podle textu úlohy je

$$m \geqq n \geqq p\,. \qquad (5)$$



Obr. 3

Tento předpoklad není podstatný; lze ho dosáhnout vhodným způsobem označení.

Sečteme pravé i levé strany rovností (3), (4) a od součtu odečteme pravou a levou stranu vztahu (2); dostaneme

$$-\,m^2 + n^2 + p^2 = 2a^2$$

neboli

$$a^2 = \frac{1}{2}\,(-\,m^2 + n^2 + p^2)\,. \quad (^*)$$

Za předpokladu, že platí

$$-\,m^2 + n^2 + p^2 > 0\,,$$

dostaneme ze vztahu (*)

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}\,(-\,m^2 + n^2 + p^2)}\,.$$

Stejným způsobem odvodíme vztahy pro b, c. Celkem dostaneme

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(-m^2 + n^2 + p^2)}\,, \qquad (2'')$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}(m^2 - n^2 + p^2)}\,, \qquad (3'')$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{2}(m^2 + n^2 - p^2)}\,, \qquad (4'')$$

a to za předpokladu, že příslušní odmocněnci jsou čísla kladná (z geometrického hlediska nestačí, aby to byla jen čísla nezáporná) neboli že pořadě platí

$$m^2 < n^2 + p^2\,, \qquad (2')$$
$$n^2 < p^2 + m^2\,, \qquad (3')$$
$$p^2 < m^2 + n^2\,. \qquad (4')$$

O kladných číslech m, n, p platí (5); pak také platí

$$m^2 \geqq n^2 \geqq p^2 > 0\,. \qquad (**)$$

Odtud bezprostředně vyplývá, že vztahy (3′), (4′) jsou za předpokladu (5) splněny. Jestliže tedy má úloha řešení, musí platit vztah (2′).

Obráceně, nechť vedle vztahů (5) platí vztah (2′). Potom čísla a, b, c daná vztahy (2″), (3″), (4″) vzhledem k platnosti (**) existují a jsou kladná. Kvádr o rozměrech a, b, c daných formulemi (2″) až (3″) má stěnové úhlopříčky o velikostech m, n, p, jak požaduje úloha. O tom se lze snadno přesvědčit přímým výpočtem.

Tím je první část úlohy rozřešena.

II. V dalším budeme potřebovat tuto větu **V**: „Buď dán trojúhelník o stranách m, n, p, kde $m \geqq n \geqq p > 0$. Potom proti straně m leží úhel ostrý, pravý, tupý podle toho, zda platí vztah

$$m^2 \lesseqqgtr n^2 + p^2 \qquad (6)$$

a obráceně." (Přitom úhly proti stranám n, p jsou zřejmě vždy ostré.)

Důkaz věty **V** provedeme pomocí této věty **P**: „Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách tak, že první trojúhelník má úhel jimi sevřený menší než trojúhelník druhý, potom třetí strana prvního trojúhelníka je menší než zbývající strana druhého trojúhelníka (Geometrie pro 7. ročník, věta 12, str. 108 (263)). Obráceně, jestliže se dva trojúhelníky shodují ve dvou stranách tak, že první trojúhelník má třetí (zbývající) stranu menší než trojúhelník druhý, potom úhel prvního trojúhelníka protější k jeho třetí straně je menší než úhel protější ke třetí straně druhého trojúhelníka."

Důkaz přímé věty **V**. Případ rovnosti ve vztahu (6) je obrácení Pythagorovy věty, nebudeme ho dokazovat (Geometrie pro 9. ročník, věta 3, str. 103).

Nechť nyní platí

$$m^2 < n^2 + p^2 \,. \tag{6'}$$

Sestrojme pomocný trojúhelník $A_1'B_1D_1$, v němž je $A_1'B_1 = n$, $B_1D_1 = p$, $\sphericalangle B_1 = 90°$; o jeho přeponě $A_1'D_1 = m_1$ tedy podle Pythagorovy věty platí

$$m_1^2 = n^2 + p^2 \,. \tag{6''}$$

Trojúhelníky $A'BD$, $A_1'B_1D_1$ se shodují ve stranách $A'B = A_1'B_1 = n$, $BD = B_1D_1 = p$, avšak vzhledem k (6′), (6″) platí $m^2 < m_1^2$ neboli $m < m_1$. Podle obrácené věty **P** tedy je $\sphericalangle B < \sphericalangle B_1$ neboli $\sphericalangle B < 90°$. Trojúhelník $A'BD$ je tudíž ostroúhlý, což jsme právě měli dokázat.

Obrácenou větu **V** nebudeme dokazovat; důkaz lze provést sporem. Tím považujeme větu **V** za dokázanou.

Poznámka. Věta **V** vyplývá snadno z věty kosinové a věty k ní obrácené.

Řešení druhé části úlohy. V druhé části řešení úlohy dokážeme, že podmínkou řešitelnosti úlohy je, aby trojúhelník, jehož strany mají velikosti m, n, p, byl ostroúhlý (obr. 3).

To vzhledem k diskusi provedené v části I znamená, že vztah (2′) je ekvivalentní s požadavkem, aby zmíněný trojúhelník byl ostroúhlý; dokážeme, že tomu tak skutečně je. Důkaz rozdělíme na dvě části:

Tvrzení [1]. Dokážeme: „Trojúhelník $A'BD$ o stranách

$$DA' = m, \; A'B = n, \; BD = p \tag{7}$$

v kvádru $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech a, b, c je ostroúhlý.“

(Poznámka. To tedy platí v každém kvádru.)

Tvrzení [2]. Dokážeme: „Je-li dán ostroúhlý trojúhelník $A'BD$ o stranách daných vztahy (7), přičemž $m \geqq n \geqq p$ jsou daná kladná čísla, potom platí vztah (2′), takže existuje kvádr $ABCDA'B'C'D'$.“

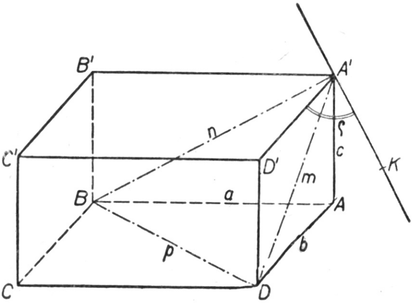
Důkaz tvrzení [1]. O stěnových úhlopříčkách u_1, u_2, u_3 kvádru o daných rozměrech a, b, c platí $u_1^2 = b^2 + c^2$, $u_2^2 = c^2 + a^2$, $u_3^2 = a^2 + b^2$; snadno zjistíme, že platí vztahy $u_1^2 < u_2^2 + u_3^2$, $u_2^2 < u_3^2 + u_1^2$, $u_3^2 < u_1^2 + u_2^2$. Odtud plyne podle věty **V**, že všechny úhly trojúhelníka, jehož stranami jsou stěnové úhlopříčky u_1, u_2, u_3 kvádru, jsou ostré a důkaz tvrzení [1] je tím proveden.

Důkaz tvrzení [2]. V ostroúhlém trojúhelníku $A'BD$ o stranách (7) podle obrácené věty **V** platí vztah $m^2 < < n^2 + p^2$ vedle vztahu $m \geqq n \geqq p$ a podle závěru části I existuje kvádr s rozměry ze vztahů (2″) až (4″). Tím je důkaz tvrzení [2] a celé části II ukončen.

Jiné řešení části II. Dokážeme: [1] „V každém kvádru $ABCDA'B'C'D'$ je trojúhelník $A'BD$ ostroúhlý.“ [2] „Nechť je dán ostroúhlý trojúhelník $A'BD$ o stranách (viz obr. 4)

$$DA' = m, \quad A'B = n, \quad BD = p, \tag{1}$$

kde m, n, p jsou daná čísla. Potom existuje kvádr $ABCDA'B'C'D'$ (o obdélníkové podstavě $ABCD$, přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$), jehož stěnové úhlopříčky jsou dány vztahy (1).“



Obr. 4

Tím bude podáno řešení druhé části dané úlohy.

Důkaz tvrzení [1] (viz obr. 4). Dokažme, že např. $\sphericalangle A'$ v trojúhelníku $A'BD$ je ostrý.

V rovině $ABB'A'$ sestrojme přímku

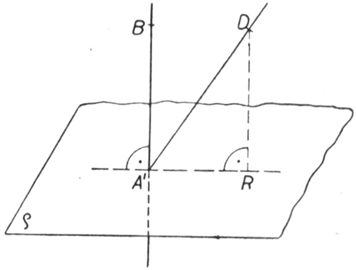
$$A'K \perp A'B\,. \tag{2}$$

Protože přímka $A'D'$ je kolmá k rovině $ABB'A'$, platí

$$\begin{aligned} A'D' &\perp A'B\,, \\ A'D' &\perp A'K\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Obě kolmice $A'D'$, $A'K$ určují rovinu $\varrho \equiv A'KD'$, která vzhledem ke (2), (3) stojí kolmo k přímce $A'B$. Obdélník $ABB'A'$ zřejmě leží až na bod A' uvnitř poloroviny $A'KB$ a celý kvádr $ABCDA'B'C'D'$ tedy leží až na hranu $A'D'$ uvnitř poloprostoru ϱB. Polopřímka $A'B \perp \varrho$ s polopřímkou $A'D$ leží tedy až na bod A' uvnitř poloprostoru ϱB a z obrázku 5 (kde R je pata kolmice vedené bodem D k rovině ϱ) se snadno usoudí, že úhel $\sphericalangle DA'B = \sphericalangle A'DR$ je ostrý. Tím je důkaz tvrzení [1] proveden.

Důkaz tvrzení [2]. Důkaz provedeme tak, že sestrojíme bod A takový, že z tohoto bodu je vidět strany ostroúhlého trojúhelníka $A'BD$ pod pravými úhly; čtyřstěn $AA'BD$ doplníme pak snadno na kvádr $ABCDA'B'C'D'$, jehož rozměry jsou udány velikostmi hran AB, AD, AA' tohoto čtyřstěnu (obr. 4, 5).



Obr. 5

Rozbor. Bod A musí ležet (podle Thaletovy věty) na kulových plochách $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, které pořadě sestrojíme nad úsečkami BD, DA', $A'B$ jako průměry. Odtud *konstrukce:*

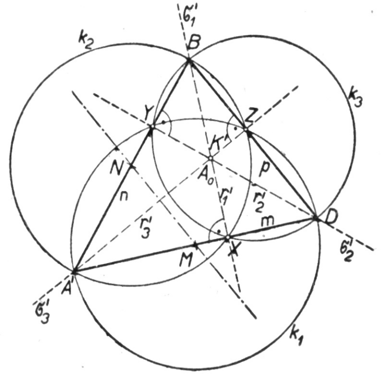
Sestrojíme právě uvedené plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. Nechť A je jeden jejich společný bod (pokud leží mimo rovinu $A'BD$). Potom je $AA'BD$ hledaný čtyřstěn, neboť podle Thaletovy věty jsou úhly $\sphericalangle A'AB$, $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAA'$ pravé (např. rovina $A'AB$ protne plochu $\varkappa_2$ v hlavní kružnici, jejímž průměrem je právě úsečka $A'B$).

Právě popsaná konstrukce bodu A závisí na tom, zda bod A existuje a zda padne mimo rovinu $\sigma \equiv A'BD$; dokážeme, že v případě, kdy je daný trojúhelník $A'BD$ ostroúhlý, tomu tak skutečně je (viz obr. 6).

Důkaz. Označme X, Y, Z paty výšek vedených vrcholy

B, D, A' trojúhelníka $A'BD$; dále označme A_0 průsečík těchto výšek. Protože $A'BD$ je ostroúhlý trojúhelník, leží podle známé věty bod A_0 uvnitř tohoto trojúhelníka (a tedy uvnitř každé z úseček DY, $A'Z$).

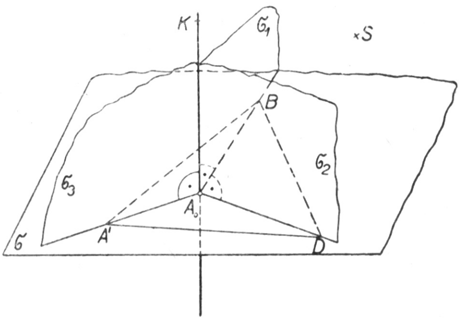
Plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ protnou rovinu σ po řadě v hlavních kružnicích k_1, k_2, k_3. Přitom např. kružnice k_1, opsaná nad



Obr. 6

průměrem $A'D$, prochází podle obrácené věty Thaletovy oběma body Y, Z, neboť je $\sphericalangle A'YD = \sphericalangle A'ZD = 90°$. Stejně se zjistí, že kružnice k_2 prochází body Z, X a kružnice k_3 body X, Y. Bod A_0 leží tedy uvnitř každé z kružnic k_1, k_2, k_3 a tím i uvnitř každé z kulových ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$.

Každá z ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ prochází body A', Z, přičemž středná MN těchto ploch (viz obr. 6) je střední příčkou trojúhelníka $A'BD$; plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ vzniknou rotací kružnic k_1, k_2 kolem této středné. Odtud plyne, že se obě plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ protínají v kružnici r_3 (opsané nad průměrem $A'Z$), jejíž rovina σ_3 prochází bodem A_0 a stojí kolmo ke středné ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a tím i k rovině σ. (Pravoúhlým průmětem r'_3 kružnice r_3 do roviny σ je úsečka $A'Z$.) Kromě této kružnice r_3 nemají plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ žádný jiný společný bod.



Obr. 7

Dvojice ploch $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ má společnou kružnici r_1 opsanou nad průměrem BX a rovina σ_1, v níž kružnice r_1 leží, prochází rovněž bodem A_0 a platí $\sigma_1 \perp \sigma$. Konečně dvojice ploch $\varkappa_3$, $\varkappa_1$ má společnou kružnici r_2 ležící v rovině $\sigma_2 \perp \sigma$ a procházející rovněž bodem A_0.

Roviny σ_1, σ_2, σ_3 procházejí bodem A_0 a zřejmě obsahují přímku $A_0K \perp \sigma$, kde bod K leží uvnitř poloprostoru σS (obr. 7), který je jedním z obou opačných poloprostorů vyťatých rovinou σ. Polopřímka A_0K má s každou z ploch σ_1, σ_2, σ_3 a s každou z kružnic r_1, r_2, r_3 po jediném společném bodu (počátek A_0 polopřímky A_0K leží totiž uvnitř našich ploch i kružnic). Označme A společný bod polopřímky A_0K s kružnicí r_3; tato kružnice leží na plochách $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, takže A je jediný společný bod polopřímky A_0K s každou z ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Avšak kružnice r_1 leží na ploše $\varkappa_2$ a bod A je jediným společným bodem polopřímky A_0K s plochou $\varkappa_2$; proto kružnice r_1 nutně prochází i bodem A. Protože kružnice r_1 leží též na ploše $\varkappa_3$, leží i bod A na kulové ploše $\varkappa_3$. Protože polopřímka A_0K má s každou z ploch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ společný jediný bod, je to podle předchozí úvahy právě bod A.

Tím jsme dokázali, že uvnitř poloprostoru σS existuje jediný bod A takový, že jsou z něho strany trojúhelníka $A'BD$ vidět pod pravými úhly. Je tedy $AA'BD$ pomocný čtyřstěn, který snadno doplníme na hledaný kvádr $ABCDA'B'C'D'$.

Tím je řešení II. části provedeno cestou stereometrickou.

4. V rovnici

$$(m + 2)^2x^2 - 2(m^2 - 4)x + n = 0 \qquad (1)$$

o neznámé x jsou m, n daná reálná čísla.

a) Určete všechna čísla m, n, pro něž má daná rovnice jediný kořen.

b) Stanovte všechna čísla m, n, pro něž jsou kořeny dané rovnice převrácená čísla.

Řešení. a) Jsou dvě možnosti, aby rovnice (1) měla jediný kořen:

[1] Rovnice (1) je lineární.

[2] Rovnice (1) je kvadratická a má dvojnásobný kořen.

Případ [1]. Tu musí být

$$m + 2 = 0; \qquad (2)$$

avšak $m^2 - 4 = (m + 2)(m - 2)$ a vzhledem k nutnému požadavku (2) je $m^2 - 4 = 0$. Proto případ [1] nemůže nastat.

Případ [2]. Tu musí být $m + 2 \neq 0$ neboli

$$m \neq -2. \qquad (3)$$

Podle známé věty z algebry má kvadratická rovnice o jedné neznámé dvojnásobný kořen právě tehdy, jestliže je její diskriminant D roven nule. V našem případě je

$$D = 4(m^2 - 4)^2 - 4n(m + 2)^2$$

neboli postupně

$$D = 4(m + 2)^2(m - 2)^2 - 4n(m + 2)^2 ,$$
$$D = 4(m + 2)^2[(m - 2)^2 - n] . \tag{4}$$

Podle předpokladu (3) je $(m + 2)^2 \neq 0$, a proto vzhledem ke (4) je $D = 0$ právě tehdy, je-li

$$(m - 2)^2 - n = 0$$

neboli

$$n = (m - 2)^2 . \tag{5}$$

Skutečně, dosadíme-li ze vztahu (5) do (1), pak po snadné úpravě levé strany (1) obdržíme

$$[(m + 2)x - (m - 2)]^2 = 0 ,$$

odkud dostaneme jediný kořen

$$x = \frac{m - 2}{m + 2}$$

rovnice (1).

b) Podle části a) musí být $m + 2 \neq 0$ neboli $m \neq -2$, jinak by rovnice nebyla kvadratická. Potom lze rovnici (1) uvést na tvar

$$x^2 - \frac{2(m - 2)x}{m + 2} + \frac{n}{(m + 2)^2} = 0 .$$

Podle známé věty z algebry platí o součinu x_1x_2 kořenů $x = x_1$, $x = x_2$ této rovnice

$$x_1x_2 = \frac{n}{(m + 2)^2} . \tag{6}$$

Přitom má platit $x_2 = \frac{1}{x_1}$ neboli $x_1 x_2 = 1$. Podle (6) tedy musí platit

$$\frac{n}{(m+2)^2} = 1\,.$$

Odtud plyne

$$n = (m+2)^2\,, \tag{7}$$

takže vzhledem k (3) je $n > 0$.

Dosadíme-li ze (7) do (1) za n, dostaneme rovnici

$$(m+2)^2x^2 - 2(m^2-4)x + (m+2)^2 = 0\,;$$

dělíme-li obě strany její strany číslem $m + 2 \neq 0$, dostaneme rovnicí

$$(m+2)x^2 - 2(m-2)x + m + 2 = 0\,. \tag{8}$$

Její diskriminant D je

$$D = 4(m-2)^2 - 4(m+2)^2$$

neboli postupně

$$\begin{aligned} D &= 4[(m-2)^2 - (m+2)^2]\,,\\ D &= 4[m^2 - 4m + 4 - (m^2 + 4m + 4)]\,,\\ D &= -\,32\,m. \end{aligned} \tag{9}$$

Jestliže je $D \geqq 0$ neboli vzhledem k (9) $m \leqq 0$, jsou kořeny x_1, x_2 rovnice (1) reálná čísla; jestliže je $D < 0$ neboli $m > 0$, jsou tyto kořeny imaginární.

Kořeny x_1, x_2 rovnice (8) jsou rovny číslům

$$\frac{2(m-2) \pm \sqrt{D}}{2(m+2)}\,;$$

po snadné úpravě dostaneme pro x_1, x_2 čísla

$$\frac{m - 2 \pm 2\sqrt{-2m}}{m+2}\,. \tag{11}$$

Tu platí postupně

$$x_1x_2 = \frac{m-2+2\sqrt{-2m}}{m+2}\cdot\frac{m-2-2\sqrt{-2m}}{m+2} =$$

$$= \frac{(m-2)^2-(2\sqrt{-2m})^2}{(m+2)^2} = \frac{m^2-4m+4+8m}{(m+2)^2} =$$

$$= \frac{(m+2)^2}{(m+2)^2} = 1\,,$$

takže kořeny x_1, x_2 dané vztahy (11) jsou vskutku převrácená čísla.

Závěr. Rovnice (1) má za kořeny převrácená čísla právě tehdy, jestliže je $n = (m+2)^2$, kde $m \neq -2$ je libovolné reálné číslo. Pro $m \leqq 0$ jsou tyto kořeny reálné, pro $m > 0$ jsou imaginární.

5. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geqq \frac{1}{2}\,. \qquad (1)$$

Riešenie. Nech číslo x je riešením nerovnosti (1); potom zo vzťahu (1) vyplýva

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} - \frac{1}{2} \geqq 0\,. \qquad (1')$$

Upravme teraz ľavú stranu tejto nerovnosti; dostaneme

$$L(x) = \frac{2(x-X+x+X)-(x-X)(x-X)}{2(x+X)(x-X)} =$$

$$= \frac{4x-[x^2-(2-x^2)]}{2[x^2-(2-x^2)]} = \frac{-x^2+2x+1}{2(x^2-1)}\,;$$

pritom je $X = \sqrt{2-x^2}$.

Pretože platí

$$x^2-2x-1 = (x-1-\sqrt{2})\,(x-1+\sqrt{2}),$$

platí ďalej

$$L(x) = \frac{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})}{-2(x + 1)(x - 1)}. \tag{2}$$

Vzhľadom na vzťah (1′) pre číslo x musí platiť $L(x) \geqq 0$ čiže

$$\frac{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})}{2(x + 1)(x - 1)} \leqq 0. \tag{2'}$$

Teraz rozoznávajme dve možnosti:

Prípad [1]. Nech je

$$(x + 1)(x - 1) < 0, \tag{3'}$$

takže pre číslo x nutne platí

$$-1 < x < 1. \tag{3}$$

Potom zo vzťahu (2′) vyplýva, že musí byť

$$(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) \geqq 0. \tag{4}$$

Odtiaľ vyplýva, že musí platiť práve jeden zo vzťahov:

$$x \geqq 1 + \sqrt{2}, \tag{5'}$$

$$x \leqq 1 - \sqrt{2}. \tag{5''}$$

Možnosť daná vztahom (5′) odpadá, lebo je v spore so vzťahmi (3).

Pretože je $-1 < 1 - \sqrt{2} < 1$, musí podľa vzťahov (3), (5″) pre číslo x platiť

$$-1 < x \leqq 1 - \sqrt{2}. \tag{6}$$

Teraz sa pýtajme, či číslo x dané vzťahmi (6) vyhovuje nerovnosti (1) (urobme to v odseku A, B).

A. Predovšetkým pre číslo x musí platiť

$$2 - x^2 \geqq 0, \tag{7}$$

inak by nemala odmocnina $\sqrt{2 - x^2}$ zmysel; zo vzťahu

(7) dostaneme

$$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leqq 0\,,$$

$$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}\,. \tag{8}$$

Túto požiadavku však číslo x dané vzťahom (6) splňuje.

B. Ďalej musia mať oba zlomky na ľavej strane nerovnosti (1) zmysel, t.j. nesmie platiť ani jedna z týchto rovností:

$$x + \sqrt{2 - x^2} = 0\,, \tag{9}$$

$$x - \sqrt{2 - x^2} = 0\,. \tag{10}$$

Riešme rovnicu

$$x = -\sqrt{2 - x^2}\,, x = \sqrt{2 - x^2};$$

z obidvoch dostaneme postupne

$$x^2 = 2 - x^2\,,$$
$$x^2 - 1 = 0\,,$$
$$(x + 1)(x - 1) = 0;$$

je teda buď

$$x = -1\,, \tag{11}$$

buď

$$x = 1\,. \tag{12}$$

Číslo $x = -1$ je koreňom rovnice (9), číslo $x = 1$ je koreňom rovnice (10). Avšak medzi číslami x danými vzťahmi (6) nie je žiadne z čísel -1, 1. Každé číslo x dané vzťahom (6) má teda tú vlastnosť, že ľavá strana nerovnosti (1) a tým aj nerovnosti (1′) má po dosadení tohoto čísla zmysel. Avšak podľa výpočtu, ktorý sme vyššie urobili, číslo x zo vzťahu (6) splňuje vzťah (3′) aj vzťah (4) a preto je riešením nerovnosti (1′) a tým aj nerovnosti (1).

Výsledok [1]. Číslo x dané vzťahom (6) je riešením nerovnosti (1).

Prípad [2]. Nech je

$$(x + 1)(x - 1) > 0\,, \tag{13}$$

takže pre číslo x nutne platí práve jeden zo vzťahov

$$x > 1\,, \tag{14}$$

$$x < -1\,. \tag{15}$$

Potom zo vzťahu (2′) vyplýva, že musí byť

$$(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) \leqq 0\,. \tag{16′}$$

Odtiaľ vyplýva požiadavka

$$1 - \sqrt{2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{2}\,. \tag{16}$$

Pretože je $-1 < 1 - \sqrt{2}$, neprichádza číslo x dané vzťahom (15) do úvahy. Zo vzťahov (14) a (16) potom vyplýva, že pre číslo x musí platiť

$$1 < x \leqq 1 + \sqrt{2}\,. \tag{17}$$

Avšak rovnako ako v odstavci A musia pre číslo x platiť vzťahy (8); kombináciou požiadaviek (8), (17) pre číslo x dostávame

$$1 < x \leqq \sqrt{2}\,. \tag{18}$$

Medzi číslami x, ktoré sú dané vzťahmi (18), nie je žiadne z čísel -1, 1, takže pre takéto čísla x ľavá strana nerovnosti (1′) a tým aj nerovnosti (1) má zmysel (pozri odstavec B).

Pýtajme sa teraz, či číslo x dané vzťahmi (18) je riešením nerovnosti (1) čiže nerovnosti (1′). Po dosadení čísla x do výrazu (2) vzhľadom na urobený výpočet platia zároveň vzťahy (13), (16′), takže je $L(x)$ nezáporné číslo; pre takéto x teda platí (1′) a tým aj (1).

Výsledok [2]. Číslo x dané vzťahmi (18) je riešením nerovnosti (1).

Záver. Riešením nerovnosti (1) sú všetky čísla x, ktoré splňujú jeden zo vzťahov

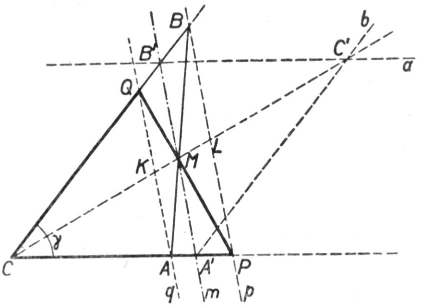
$$-1 < x \leqq 1 - \sqrt{2}\,,$$

$$1 < x \leqq \sqrt{2}$$

a žiadne iné. Pozri graf na obr. 8.

Obr. 8

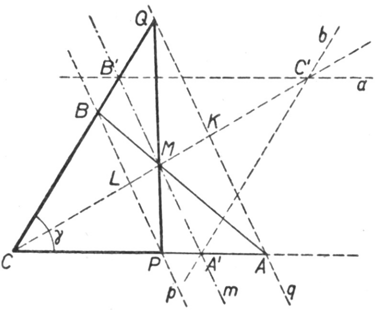
6. Buď dán trojúhelník ABC a uvnitř strany AB buď dán bod M. Bodem M veďte přímku PQ tak, aby body P, Q pořadě ležely na polopřímkách CA, CB a aby trojúhelníky ABC, PQC měly sobě rovné obsahy.



Obr. 9

Řešení. *Rozbor* (obr. 9). Přímka AMB splňuje také požadavky úlohy. Předpokládejme, že úloha má ještě jiné řešení než přímku AMB. Jestliže bod $P \neq A$ padne na prodloužení úsečky CA za bod A, musí bod Q padnout dovnitř úsečky CB (obr. 9). Jestliže bod $P \neq A$ padne dovnitř úsečky CA, musí bod Q padnout na prodloužení úsečky CB za bod B (obr. 10). To snadno dokážeme např. užitím vzorce $\Delta = \frac{1}{2} bv_b$ pro obsah trojúhelníka ze známé velikosti strany a příslušné výšky anebo ze vzorce $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, kde a, b jsou velikosti dvou stran trojúhelníka a γ je velikost úhlu stranami a, b sevřeného.

Dále snadno dokážeme známou větu **V**: „Buď dán trojúhelník ABC a uvnitř polopřímek CA, CB pořadě body P, Q takové, že jsou obsahy trojúhelníků ABC, PQC sobě rovny. Potom platí $AQ \parallel BP$.“ (Platí též obrácená věta.)



Obr. 10

Podle věty **V** je čtyřúhelník $AQBP$ lichoběžník se základnami $AQ \parallel BP$; bod M je společným bodem jeho úhlopříček AB, PQ. Označme K, L pořadě středy úseček AQ, PB; potom body K, L leží na přímce CM neboli body C, M leží na přímce KL (pomocná věta **W**).

Důkaz. Uvažujme stejnolehlost o středu C, která převádí bod B v bod Q a tedy úsečku BP v úsečku QA.

V této stejnolehlosti je obrazem středu L úsečky PB střed K úsečky AQ. Leží tedy bod C na přímce KL.

Ve stejnolehlosti o středu M, která převádí bod B v bod A, je obrazem bodu P bod Q a tedy obrazem úsečky BP úsečka AQ. V této stejnolehlosti je obrazem středu L úsečky BP střed K úsečky AQ. Leží tedy bod M na přímce KL.

Tím je důkaz věty W proveden.

Označme A', B' průsečíky přímky $m \parallel AQ$, vedené bodem M, pořadě s polopřímkami CA, CB. Podle právě dokázané věty je bod M středem úsečky $A'B'$ (jak se snadno dokáže). Na základě tohoto výsledku provedeme konstrukci.

Konstrukce. Bodem M máme sestrojit přímku m, která má s polopřímkami CA, CB pořadě společné body A', B' a to tak, že M je středem úsečky $A'B'$ (obr. 9, 10).

Za tím účelem sestrojíme pomocný rovnoběžník $A'C'B'C$ o středu M a to takto: Sestrojme obraz C' bodu C ve středové souměrnosti o středu M. Bodem C' veďme přímky $a \parallel CA$, $b \parallel CB$ a označme A', B' společné body dvojic různoběžek (b, CA), (a, CB). Pak se snadno dokáže, že M je středem úsečky $A'B'$.

Dále veďme body A, B pořadě přímky $q \parallel A'B'$, $p \parallel A'B'$ a označme Q společný bod přímek q, CB a dále P společný bod přímek p, CA.

Potom je CPQ hledaný trojúhelník.

Důkaz. Předpokládejme, že je $A' \neq A$ a tím i $B' \neq B$. Potom zřejmě existuje lichoběžník $AQBP$; to plyne ze dvou stejnolehlostí o středu C (v jedné bodu $B \neq B'$ přísluší bod B', ve druhé bodu $A' \neq A$ přísluší bod A). Je třeba dokázat, že společný bod M' úhlopříček AB, PQ našeho lichoběžníka $AQBP$ splývá s daným bodem M.

Podle pomocné věty **W** leží body C, M' na přímce KL, kde K, L jsou pořadě středy základen AQ, BP lichoběžníka $AQBP$. Přitom vnitřní body polopřímky CK mají tuto vlastnost: Jsou množinou středů všech úseček $XY \parallel A'B'$, kde X je vnitřní bod polopřímky CB a Y vnitřní bod polopřímky CA (tato věta se snadno dokáže pomocí stejnolehlosti).

Protože podle konstrukce úsečky AQ je $AQ \parallel A'B'$, leží střed M úsečky $A'B'$ uvnitř polopřímky CK; na ní však podle věty **W** leží i bod M' (společný bod úseček AB, PQ). Ale přímky CK, AB mají společný jediný bod a tím je podle konstrukce úsečky $A'B'$ právě bod M; proto je $M' \equiv M$. Bod M je tedy společným bodem úseček AB, PQ (úhlopříček lichoběžníka $AQBP$). Tím je důkaz konstrukce proveden.

Diskuse. Řekli jsme, že je známo, že úsečka $A'B'$ vedená bodem M je jediná. Důkaz konstrukce spočíval na předpokladu, že je $A' \not\equiv A$ (a tím též $B' \not\equiv B$). Jestliže je $A' \equiv A$, je M středem úsečky BA a jediným řešením úlohy je přímka AMB. Jestliže však není M středem úsečky AB, pak existuje výše popsaná přímka $A'B'$ různá od přímky AB a je $A' \not\equiv A$; úloha pak má podle popsané konstrukce právě jedno řešení.

Tím je řešení dané úlohy provedeno.

Jiné řešení. *Rozbor* (obr. 11). Přímka AMB splňuje také požadavky úlohy; nadále předpokládejme, že AB, PQ jsou různé přímky. Jestliže úloha má řešení, jsou obsahy trojúhelníků ABC, PQC sobě rovné. Tudíž jsou si rovny i obsahy trojúhelníků AMP, BMQ, jejichž úhly při vrcholu M mají touž velikost φ (úhly vrcholové); o obsazích těchto trojúhelníků tedy platí

$$\frac{1}{2} MA \,.\, MP \,.\, \sin\varphi = \frac{1}{2} MB \,.\, MQ \,.\, \sin\varphi \,.$$

Odtud snadno odvodíme vztah

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MQ}{MP} . \tag{1}$$

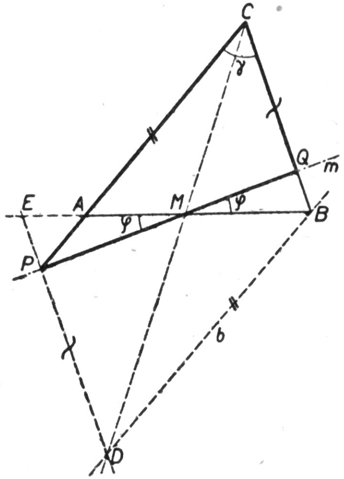
Bodem B veďme přímku $b \parallel AC$ a označme D společný bod přímek b, CM. Pak jsou trojúhelníky MAC, MBD stejnolehlé podle středu M stejnolehlosti a platí

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD} . \tag{2}$$

Porovnáním vztahů (1), (2) dostaneme

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{MC}{MD} , \tag{3}$$

takže trojúhelníky MCQ, MDP, jejichž úhly (vrcholové) CMQ, DMP jsou si rovny, jsou rovněž stejnolehlé podle středu M stejnolehlosti; je tedy $DP \parallel CQ$ neboli $DP \parallel CB$ a $CBDP$ je rovnoběžník. Odtud plyne konstrukce.



Obr. 11

Konstrukce. Bodem B veďme přímku $b \parallel AC$ a označme D společný bod přímek b, CM. Dále sestrojme rovnoběžník $CBDP$ a označme Q společný bod přímek CB, MP. Potom je PMQ hledaná přímka.

Důkaz. Podle konstrukce je $CB \parallel PD$, $CA \parallel BD$. Ze stejnolehlosti trojúhelníků MPD, MQC plyne vztah

$$\frac{CQ}{PD} = \frac{MC}{MD} ;$$

avšak $PD = BC$ (protější strany rovnoběžníka $CBDP$), takže z předchozího vztahu plyne

$$\frac{CQ}{BC} = \frac{MC}{MD} . \tag{4}$$

Ze stejnolehlosti trojúhelníků MAC, MBD plyne

$$\frac{AC}{BD} = \frac{MC}{MD}$$

a protože $BD = CP$, dostaneme odtud

$$\frac{AC}{CP} = \frac{MC}{MD} . \tag{5}$$

Porovnáním vztahů (4), (5) dostaneme

$$\frac{AC}{CP} = \frac{CQ}{BC}$$

neboli

$$AC \,.\, BC = CP \,.\, CQ ,$$

a tedy (označme $\sphericalangle ACB = \gamma$)

$$\frac{1}{2} AC \,.\, BC \,.\, \sin\gamma = \frac{1}{2} CP \,.\, CQ \sin\gamma ;$$

mají tedy trojúhelníky CPQ, CAB sobě rovné obsahy. Sestrojená přímka PMQ vyhovuje tedy požadavkům úlohy.

Diskuse. Rovnoběžník $CBDP$ lze vždycky sestrojit, neboť přímky CM, AC jsou různoběžné. Pokud je $P \not\equiv A$, jsou trojúhelníky CPQ, CAB různé. Jestliže je $P \equiv A$, pak oba trojúhelníky splývají; potom je nutně M středem rovnoběžníka $CBDP$ a M je tedy středem strany AB.

Jestliže je obráceně M středem strany AB, je $P \equiv A$, $Q \equiv B$ a AB je jediné řešení. Není-li bod M středem strany AB, pak podle předchozí úvahy je nutně $P \not\equiv A$, přičemž P padne vždy dovnitř polopřímky CA. Existuje tedy jediná přímka $PQ \neq AB$, která splňuje požadavky úlohy.

Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení s. Josefa Houšky, žáka 11.a tř. 2. jsš, České Budějovice.

7. V posloupnosti $\{a_n\}$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n},$$

existuje největší člen. Určete jej.

Řešení. V dalších úvahách značí n přirozené číslo. Každý člen a_n dané posloupnosti $\{a_n\}$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}, \tag{1}$$

je kladné číslo, neboť čitatel i jmenovatel posledního zlomku je číslo kladné.

Úlohu rozdělíme na dvě části: V části I dokážeme, že rozdíl

$$r_n = a_n - a_{n+1}$$

je kladné číslo pro každé číslo $n > 99$, tj. že platí

$$a_{100} > a_{101} > a_{102} > \dots . \tag{2}$$

V části II dokážeme, že platí

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{99} < a_{100} . \tag{3}$$

Spojením obou výsledků (2), (3) pak plyne, že člen $a_{100} = \dfrac{10}{100 + 100} = 0{,}05$ je největším číslem dané posloupnosti. Provedením důkazu platnosti vztahů (2), (3) bude řešení úlohy provedeno.

Část I. Protože členy posloupnosti $\{a_n\}$ jsou kladná čísla, plyne ze vztahu $a_n > a_{n+1}$ vztah $a_n^2 > a_{n+1}^2$ a obráceně ze vztahu $a_n^2 > a_{n+1}^2$ plyne platnost vztahu $a_n > a_{n+1}$. Uvažujme rozdíl $r_n = a_n^2 - a_{n+1}^2$ neboli

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{100+n}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{n+1}}{101+n}\right)^2. \tag{4}$$

Platí

$$r_n = \frac{(101+n)^2 . n - (100+n)^2 . (n+1)}{(100+n)^2(101+n)^2}.$$

V dalším budeme vyšetřovat číslo

$$r'_n = (101+n)^2 n - (100+n)^2(n+1). \tag{5}$$

Platí postupně

$$\begin{aligned} r'_n &= 101^2 n + 202n^2 + n^3 - \\ &- 100^2 n - 200n^2 - n^3 - \\ - 100^2 &- 200n - n^2 = \\ &= n^2 + (101^2 - 100^2)n - 200n - 100^2 = \\ &= n^2 + (101 - 100)(101 + 100)n - \\ &- 200n - 100^2 = \\ &= n^2 + n - 100^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Pro $n \geqq 100$ je tedy zřejmě

$$r'_n \geqq n > 0$$

a tedy též

$$r_n > 0.$$

Tím je dokázána platnost vztahů (2).

Část II. Tu máme dokázat, že číslo r_n ze vztahu (4) je záporné pro všechna čísla

$$1 \leqq n \leqq 99$$

neboli, že pro tato čísla je číslo r'_n ze vztahu (5) číslem záporným.

Upravme r'_n ze vztahu (6) postupně takto:

$$\begin{aligned} r'_n &= n^2 + n - (99 + 1)^2 = \\ &= n^2 + n - 99^2 - 2 \,.\, 99 - 1 = \\ &= (n^2 - 99^2) + (n - 99) - 100 \,. \end{aligned}$$

Z posledního výrazu je vidět, že pro $n \leqq 99$ jsou všechny tři jeho sčítanci čísla nekladná (poslední je záporné); je tedy $r'_n < 0$. Proto je $r_n < 0$ pro všechna $n \leqq 99$ a tudíž platí vztahy (3).

Tím je řešení úlohy provedeno; největší člen posloupnosti $\{a_n\}$ je $a_{100} = 0{,}05$.

8. Buďte dány dvě k sobě kolmé roviny pA, pB, kde p je jejich průsečnice; dále buď dáno kladné číslo d. Uvažujme úsečku $XY = 2d$, přičemž je X bodem poloroviny pA a Y bodem poloroviny pB.

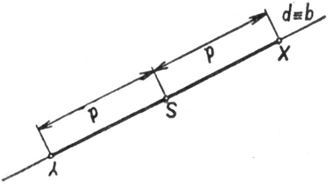
Vyšetřte množinu středů všech úseček XY, které splňují výše uvedené požadavky.

Řešení. V tomto řešení se budeme odvolávat na obrázky, abychom nemusili široce vykládat některá zaváděná označení. Dokážeme tuto větu **P** (jako výsledek řešení úlohy): Množinou Σ středů všech úseček XY, o nichž mluví daná úloha, je společná část určitého válcového prostoru **V** a pravoúhlého klínu **U**. Klín **U** je společnou částí poloprostorů pAB, pBA. Válcový prostor **V** je omezen rotační válcovou plochou ω, která má poloměr d a přímku p za osu rotace (viz obr. 13).

Množina Σ je tedy čtvrtina válcového prostoru **V**; dostaneme ji také takto: V rovině $\pi \perp p$ sestrojíme čtvrtkruh **K** o středu $Y_1 \equiv p \,.\, \pi$ a poloměru d, přičemž příslušná čtvrtkružnice $k \equiv (Y_1, d)$ má krajní body S_1, S_2 pořadě v polorovinách pA, pB. Každým bodem čtvrtkruhu **K** vedeme přímku $p' \parallel p$; množina všech bodů přímek p' je množina Σ. Právě zavedených označení budeme v dalším užívat.

Množina Σ vznikne složením určitých čtyř množin bodů; tyto čtyři množiny nemají, jak dále uvidíme, žádné společné body; o každém z bodů těchto množin také hned dokážeme, že je středem jisté úsečky $XY = 2d$, která vyhovuje požadavkům úlohy.

Rozeznávejme tyto čtyři možnosti vzájemné polohy přímky p a přímky $q \equiv XY$, kde XY je úsečka sestrojená podle textu úlohy.



Obr. 12

Případ [1]. Nechť p, q jsou rovnoběžky (obr. 12). Pak je nutně $p \equiv q$ a oba body X, Y jsou body přímky p a tudíž i bod S je bodem přímky p.

Obráceně je každý bod S přímky p zřejmě středem jisté úsečky $XY = 2d$, přičemž body X, Y jsou body přímky p. Přímka p je tedy jednou z částí množiny Σ (tvrzení T_1).

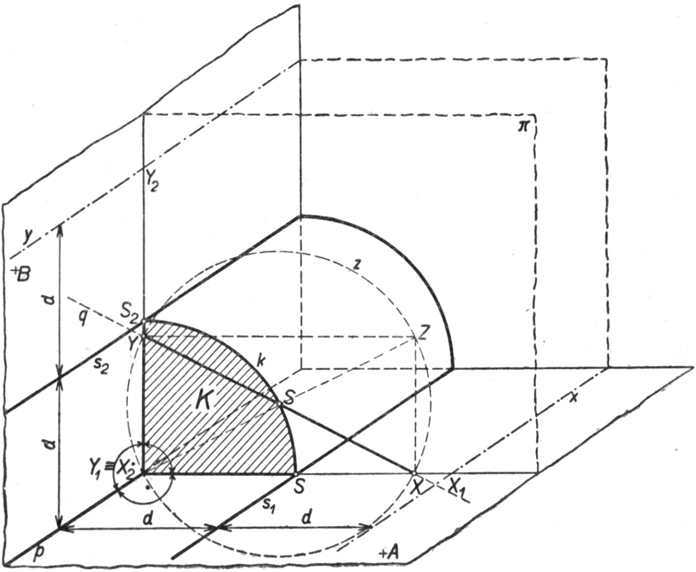
Případ [2]. Nechť je $p \perp q$ (viz obr. 13). Přímkou q položme rovinu $\pi \perp p$; taková rovina π zřejmě existuje jediná; tím je úloha převedena na planimetrickou úlohu v rovině π. Přímka q může mít jednu z těchto odlišných poloh:

[a] Přímka q leží v rovině pA; příslušnou úsečku XY označme X_1Y_1, kde $Y_1 \equiv p\,.\,\pi$ a X_1 leží uvnitř poloroviny pA. Střed úsečky X_1Y_1 označme S_1. Označme pořadě $x \parallel s_1 \parallel p$ přímky (obě leží v rovině pA) vedené body X_1, S_1 (porovnej s obr. 14).

[b] Přímka q leží v rovině pB; příslušnou úsečku označme X_2Y_2, kde $X_2 \equiv Y_1$, přičemž Y_2 leží uvnitř poloroviny pB. Střed úsečky X_2Y_2 označme S_2 a dále

pořadě označme $y \parallel s_2 \parallel p$ přímky (obě leží v rovině pB) vedené body Y_2, S_2.

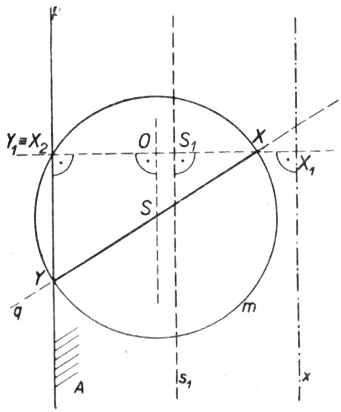
[c] Přímka $q \perp p$ je mimoběžná s přímkou p a body X, Y leží pořadě uvnitř polopřímek Y_1X_1, X_2Y_2 (viz obr. 13); tento předpoklad není na újmu obecnosti. Dokážeme, že střed S úsečky XY je vnitřním bodem čtvrtkružnice $k \equiv \widehat{S_1S_2}$.



Obr. 13

Stačí sestrojit obdélník XY_1YZ v rovině π; jeho střed je středem S úhlopříčky $XY = 2d$, a proto je $Y_1S = = \frac{1}{2} \cdot XY = d$ a bod S skutečně leží na čtvrtkružnici k.

Dokážeme tvrzení $\mathbf{T}_2$: Každá čtvrtkružnice $k \equiv \equiv \widehat{S_1S_2}$ o poloměru d, o středu Y_1 na přímce p, ležící v rovině $\pi \perp p$ a v klínu $\mathbf{U}$, je množinou středů úseček XY, které vyhovují podmínkám úlohy. Přitom je $Y_1S_1 = Y_1S_2 = d$, $Y_1S_1 \perp p$, $Y_1S_2 \perp p$ a body S_1, S_2 leží pořadě uvnitř polorovin pA, pB.



Obr. 14.

Důkaz. Body S_1, S_2 jsou zřejmě pořadě středy jistých úseček $X_1Y_1 \equiv \equiv X_2Y_2$, jichž sestrojení je vidět z obr. 13 a patří tedy k množině.

Buď S libovolným bodem vnitřku čtvrtkružnice $k \equiv \widehat{S_1S_2}$. Sestrojme v rovině π kružnici $z \equiv \equiv (S, d)$, která prochází bodem $Y_1 \equiv X_2$ a protne polopřímky Y_1X_1, X_2Y_2 ještě pořadě v bodech $X \not\equiv X_1$, $Y \not\equiv Y_2$. Je-li Y_1Z průměrem kružnice z, je XY_1YZ obdélník; snadno dokážeme, že úhlopříčka XY tohoto obdélníka má za střed bod S a platí $XY = 2d$. Sestrojili jsme tedy úsečku XY (podle podmínek úlohy), která má za střed daný bod S. Tím je tvrzení $\mathbf{T}_2$ dokázáno a část válcové plochy ω, která padne do klínu $\mathbf{U}$, náleží k množině Σ; tato část je omezena oběma přímkami $s_1 \parallel s_2 \parallel p$ plochy ω.

Případ [3]. Nechť jsou přímky p, q kosé a různoběžné (viz obr. 14, kde je zobrazena jen rovina pA; porovnej s obrázkem 13). V tomto případě musí právě jeden z bodů X, Y padnout na přímku p. Uvažujme případ, že bod Y leží na p a tedy bod X uvnitř poloroviny pA (případ, že X leží na p a Y uvnitř poloroviny pB se řeší obdobně).

Podle předpokladu o přímkách p, q existuje trojúhelník XYY_1 ($\sphericalangle Y$ je ostrý, $\sphericalangle Y_1 = 90°$), a proto je

$$XY_1 < XY = 2d\,, \qquad (1)$$

takže bod X padne dovnitř úsečky X_1Y_1 o délce $2d$; její střed označme S_1 a O střed úsečky XY_1. Ze vztahu (1) plyne

$$\frac{1}{2}XY_1 < \frac{1}{2}XY = d$$

neboli

$$X_1O < Y_1S_1 = d$$

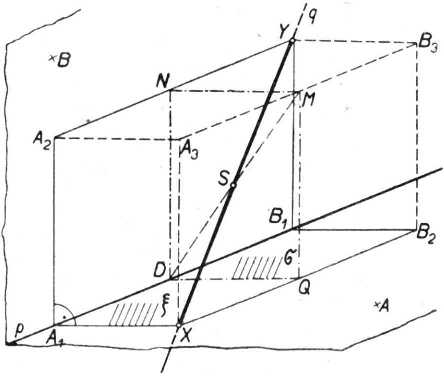
a bod O tedy padne dovnitř úsečky Y_1S_1; proto přímka $OS \parallel p$ (S je středem úsečky XY) leží uvnitř pásu rovnoběžek p, s_1 a s přímkou OS uvnitř tohoto pásu leží i bod S.

Dokážeme toto tvrzení $\mathbf{T}_3$: Vnitřek právě zmíněného pásu rovnoběžek p, s_1 spolu s vnitřkem obdobného pásu rovnoběžek p, s_2 z poloroviny pB (viz obr. 13) je třetí částí vyšetřované množiny.

Důkaz. Buď S bodem vnitřku pásu rovnoběžek p, s_1 (viz obr. 14). Šířka pásu je d a bod S má od přímky p vzdálenost menší než d; proto přímka p má s kružnicí $m \equiv (S, d)$ dva společné body $Y \not\equiv Y_1$. Označme XY průměr kružnice m, takže je $\sphericalangle YY_1X = 90°$ a $\sphericalangle XYY_1 < 90°$; je patrné, že bod S je středem úsečky XY, která vyhovuje podmínkám úlohy.

Tím je tvrzení $\mathbf{T}_3$ dokázáno.

Případ [4]. Nechť jsou přímky p, q kosé a mimoběžné (viz obr. 15). Úsečka XY leží až na krajní body X, Y uvnitř klínu $\mathbf{U}$; bod X leží uvnitř poloroviny pA, bod Y uvnitř poloroviny pB. Označme $A_1 \not\equiv B_1$ pořadě paty kolmic vedených body X, Y k přímce p. Sestrojme v polorovině pA obdélník $XA_1B_1B_2$ a v polorovině pB obdélník $YB_1A_1A_2$. Považujme obdélník $XA_1B_1B_2$ za stěnu kvádru Ω a bod Y za vrchol jeho druhé stěny $A_3A_2YB_3$ s předchozí rovnoběžné (je tedy $A_3X \parallel A_2A_1 \parallel$



Obr. 15

$\parallel YB_1 \parallel B_3B_2$). Střed S úsečky XY, která je tělesovou úhlopříčkou kvádru Ω, je středem tohoto kvádru. Rovina $\sigma \perp p$, která prochází bodem S, vytne na kvádru střední řez (obdélník) $MNDQ \cong A_3A_2A_1X$. Velikost úsečky DS je vzdálenost bodu S od přímky p. Z vlastností kvádru plyne, že $SD = \frac{1}{2}.DM$, $DM = A_1A_3$, $XY = 2d$ (stěnová úhlopříčka kvádru je menší než jeho tělesová úhlopříčka); je tedy $SD < \frac{1}{2}.XY$ neboli $SD < < d$. Leží tedy bod S uvnitř klínu $\mathbf{U}$ a zároveň uvnitř rotační válcové plochy $\boldsymbol{\omega}$.

Dokážeme toto tvrzení **T₄**: Každý bod S, který leží uvnitř klínu $\mathbf{U}$ a zároveň uvnitř rotační válcové plochy $\boldsymbol{\omega}$, je středem úsečky $XY = 2d$, která splňuje podmínky úlohy.

Důkaz (obr. 15). Označme D patu kolmice vedené bodem S k přímce p; podle předpokladu je $0 < SD < d$. Sestrojme v rovině (S, p) kružnici $n \equiv (S, d)$; protože platí $SD < d$, má kružnice n s přímkou p dva společné body $A_1 \not\equiv B_1$ (bod D je středem úsečky A_1B_1). Označme A_3, B_3 obrazy bodů B_1, A_1 v souměrnosti o středu S. Protože bod S leží uvnitř klínu $\mathbf{U}$, leží A_3, B_3 rovněž uvnitř klínu $\mathbf{U}$; přitom je $SA_1 = SB_1 = d$ (podle konstrukce), $SA_3 = SB_1 = d$, $SB_3 = SA_1 = d$ (ze souměrnosti podle S) neboli v rovnoběžníku $A_1B_1B_3A_3$ jsou úhlopříčky $A_1B_3 = B_1A_3 = 2d$, tj. je to obdélník. Proto je $A_3A_1 \perp p$, $B_3B_1 \perp p$; leží tedy bod A_1 v rovině $\xi \perp p$ vedené bodem A_3. Označme X, A_2 paty kolmic vedených bodem A_3 pořadě k rovinám pA, pB. Protože $\mathbf{U}$ je pravoúhlý klín a A_3 leží uvnitř tohoto klínu, padne X dovnitř poloroviny pA a A_2 dovnitř poloroviny pB, tj. $X \not\equiv A_1$, $A_2 \not\equiv A_1$; přitom body A_3, X, A_1, A_2 leží v rovině ξ a jsou vrcholy obdélníka $XA_1A_2A_3$. Uvažujme kvádr Ω o stěně $XA_1A_2A_3$ v rovině ξ a o hraně $A_1B_1 \perp \xi$. Protože podle konstrukce bodu A_3 je S středem úsečky A_3B_1, je tento bod středem kvádru; stěnu $YB_3B_2B_1$ protější ke stěně $XA_1A_2A_3$ dostaneme pomocí souměrnosti o středu S. O tělesové úhlopříčce XY tedy platí $XY = 2 . SX = 2 . SA_1 = 2d$; úsečka $XY = 2d$ má tedy střed S a vyhovuje podmínkám úlohy. Tím je tvrzení $\mathbf{T}_4$ dokázáno.

Protože přímky p, q nemohou mít žádné jiné vzájemné polohy než ty, jež jsme v případech [1] až [4] uvedli, nedostaneme žádné další středy úseček XY. Tím jsme dokázali větu $\boldsymbol{P}$ a provedli řešení dané úlohy. Množina Σ se tedy skládá: [1] z přímky p; [2] z části plochy $\boldsymbol{\omega}$, pokud leží v klínu $\mathbf{U}$; [3] z vnitřků obou pásů rovnoběžek p, s_1 a p, s_2; [4] z bodů, které zároveň leží uvnitř plochy $\boldsymbol{\omega}$ a uvnitř klínu $\mathbf{U}$.

9. V rovine je daná kružnica $k \equiv (S, r)$ a na nej dva rôzne body A, B. Uvažujme o trojuholníku ABC, kde C je bod kružnice k; označme X priesečník výšok tohto trojuholníka.

Čo vyplnia všetky body X, keď bod C prebieha všetky body kružnice k (s výnimkou bodov A, B)?

Riešenie. Rozoznávajme dve možnosti: 1. Tetiva AB je priemerom kružnice k; 2. tetiva AB nie je priemerom kružnice k.

Prípad, keď AB je priemer, je veľmi jednoduchý. Trojuholník ABC je pravouhlý a je $X \equiv C$ (priesečník výšok v pravouhlom trojuholníku je vrchol pravého uhla).

Záver. Body X vyplnia teda celú kružnicu s výnimkou bodov A, B.

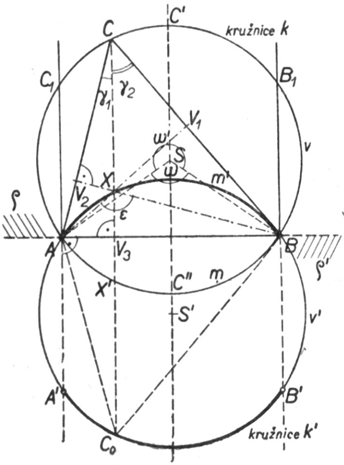
Prípad, keď AB nie je priemer, budeme teraz riešiť (obr. 16). Body X vyplnia určitú množinu, ktorú označíme ξ. Zaveďme tieto označenia: Os úsečky AB nazvime p. Väčší oblúk AB kružnice k nazvime v a menší oblúk m. Polrovinu ABS nazvime ϱ, polrovinu opačnú ϱ'. Spoločný bod priamky p a oblúka v nazvime C', spoločný bod oblúka m a priamky p nazvime C''. Stredový uhol $\sphericalangle ASB$ označme ω, vypuklý uhol ASB nazvime ω'; je

$$\omega' = 360° - \omega\,.$$

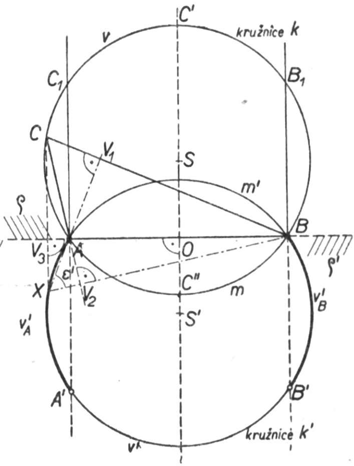
Zostrojme v bode A kolmicu k priamke AB a označme C_1 jej spoločný bod s oblúkom v. Bod C_1 existuje. Stačí bodom B viesť priemer kružnice k a označiť C_1 protiľahlý bod k bodu B; podľa Thaletovej vety je uhol $\sphericalangle BAC_1 = 90°$. Označme B_1 obraz bodu C_1 v súmernosti s osou p. (V ďalšom sa pri zavádzaní označení odvolávame na obrázok.)

Pretože celý útvar je súmerný podľa osi p, budeme skúmať len tie body C, ktoré ležia v polrovine pA. Sú tri možnosti.

P r í p a d [1] (obr. 16). a) Bod $C \not\equiv C_1$ leží na oblúku $C'C_1$ (v polrovine ϱ). Pretože C leží v pravom uhle



Obr. 16



Obr. 17

$\sphericalangle BAC_1$, je uhol $\sphericalangle BAC$ ostrý. Z toho istého dôvodu je ostrý aj uhol $\sphericalangle ABC$. Uhol $\sphericalangle BCA$ je obvodový nad oblúkom m a preto sa rovná $\frac{1}{2}\omega < 90°$ a teda je ostrý. Trojuholník ABC je preto ostrouhlý a priesečník X jeho výšok AV_1, BV_2, CV_3 padne podľa známej vety dovnútra trojuholníka. Bod V_3 leží vnútri úsečky AB a polpriamka CV_3 delí uhol $\sphericalangle BCA = \frac{1}{2}\omega$ na uhly

γ_1, γ_2, kde

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{2}\,\omega\,. \tag{1}$$

Vypočítame veľkosť uhla $\sphericalangle AXB = \varepsilon$. Platí

$$\varepsilon = \sphericalangle AXV_3 + \sphericalangle BXV_3\,, \tag{2}$$

$$\sphericalangle AXV_3 = \sphericalangle V_1XC = 90^\circ - \gamma_2 \tag{3}$$

(z trojuholníka XCV_1),

$$\sphericalangle BXV_3 = \sphericalangle V_2XC = 90^\circ - \gamma_1 \tag{4}$$

(z trojuholníka XCV_2).

Po dosadení z (3) a (4) do (2) máme vzhľadom na (1)

$$\varepsilon = 90^\circ - \gamma_2 + 90^\circ - \gamma_1 = 180^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2) =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\,\omega\,,$$

čiže

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(360^\circ - \omega) = \frac{1}{2}\,\omega'\,.$$

To znamená, že úsečku AB vidieť z každého bodu X pod tým istým uhlom $\frac{1}{2}\,\omega'$. Body polroviny ϱ', z ktorých vidieť úsečku pod týmto uhlom, vyplnia podľa známej vety oblúk m. Body X ležia v polrovině ϱ a preto ležia na oblúku m', ktorý je obrazom oblúka m v súmernosti s osou AB. Osou oblúka m' je aj priamka p. Oblúk m' je časťou kružnice $k' \equiv (S', r)$, ktorá je obrazom kružnice $k \equiv (S, r)$ v súmernosti s osou AB. Druhá časť kružnice k' (po odobratí oblúka m') je oblúk v', ktorý je obrazom oblúka v v súmernosti s osou AB.

b) Dokážeme: Body oblúka m' bez krajných bodov A, B patrí k vyšetrovanej množine ξ.

Musíme teda dokázať, že každý bod X vnútrajška oblúka m' je priesečníkom výšok istého trojuholníka ABC, kde C je bod oblúka v a to na priamke $XV_3 \perp AB$.

Ak zostrojíme bod C, podľa časti a) prislúcha bodu C priesečník výšok trojuholníka ABC, ktorý leží na priamke $XV_3 \perp AB$ a na oblúku m'. Je to teda nevyhnutne bod X. Tým sme dôkaz urobili.

Prípad [2]. Nech je $C \equiv C_1$. Potom priesečníkom výšok trojuholníka ABC je bod A, lebo $\sphericalangle BAC_1 = 90°$. Patria teda oba krajné body A, B oblúka m' k skúmanej množine ξ.

Prípad [3]. a) Nech bod C leží vnútri oblúka AC_1 (ktorý je časťou oblúka v ležiaceho v polrovine ϱ; pozri obr. 17). Tu bod C_1 leží vnútri uhla $\sphericalangle CAB$. Pretože je $\sphericalangle C_1AB = 90°$, je uhol $\sphericalangle CAB$ tupý a trojuholník ABC tupouhlý. V tupouhlom trojuholníku ABC, ako vieme, padne priesečník X výšok dovnútra uhla vrcholového k uhlu $\sphericalangle CAB$. Vypočítame veľkosť uhla $\varepsilon' \equiv \sphericalangle AXB$. Vieme, že je uhol $\sphericalangle BCA = \frac{1}{2}\,\omega$. Pravouhlé trojuholníky BXV_1 ($\sphericalangle V_1 = 90°$), BCV_2 ($\sphericalangle V_2 = 90°$) majú spoločný ostrý uhol pri vrchole B. Ich zbývajúce ostré uhly sú zhodné, t. j. platí

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\,\omega\,.$$

Bod X leží vnútri polroviny ϱ' a platí $\sphericalangle AXB = \frac{1}{2}\,\omega$. Všetky body polroviny ϱ', z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom $\frac{1}{2}\,\omega$ vyplnia vnútrajšok oblúka v' (s krajnými bodmi A, B), o ktorom sme už hovorili vyššie (je obrazom oblúka v v súmernosti s osou AB). Avšak bod X leží vnútri polroviny α (pozri obr. 17), ktorá je opačná k polrovine AC_1B. To preto, že je $CV_3X \parallel AC_1$ (obe priamky stoja kolmo k AB) a bod A leží vnútri úsečky V_3B. Označme v'_A tú časť oblúka v', ktorá leží v polrovine α.

Bod X je teda vnútorným bodom oblúka v'_A; jeho jeden krajný bod je A, druhý označíme A'.

b) Dokážeme ešte: Vnútrajšok oblúka v'_A patrí k množine ξ.

Nech X je bod vnútrajška oblúka v'_A. Uvažujme o trojuholníku ABX (obr. 17); v ňom je uhol $\sphericalangle A$ tupý (bod A' leží vnútri tohoto uhla a $\sphericalangle BAA' = 90°$). Zo súmernosti podľa osi AB a z odstavca a) tohto prípadu [3] vyplýva, že priesečník C výšok trojuholníka ABX padne dovnútra oblúka $\widehat{C_1A}$ (časti to oblúka v z polroviny ϱ), lebo oblúky $\widehat{C_1A}$, v'_A si tu vymieňajú úlohu. Ak teraz skúmame priesečník výšok trojuholníka ABC, dospejeme ľahko k výsledku, že je to daný bod X. Tým sme dôkaz urobili.

Patrí teda vnútro oblúka v'_A a vnútro oblúka v'_B (ktorý je s predošlým súmerne združený podľa osi p) k množine ξ.

Prípad [4]. Nech je C vnútorným bodom malého oblúka m kružnice k (obr. 16). Aby sme skrátili vyšetrovanie a využili predošlé výsledky, označme tento bod X', takže hľadáme priesečník výšok trojuholníka ABX' (pozri obr. 16); písmenom C označíme celkom iný bod.

Zostrojme obraz X bodu X' v súmernosti s osou AB, takže je $XX' \perp AB$; oblúky m, m' sú súmerne združené v tej istej súmernosti. Ďalej zostrojme spoločný bod C priamky XX' a oblúka v (bod $C \not\equiv C_1$ leží zrejme na oblúku $\widehat{C_1C'}$). Ak zostrojíme podľa odst. a) prípadu [1] priesečník výšok trojuholníka ABC, dospejeme k bodu X a obrátene, priesečníkom výšok trojuholníka ABX je bod C. Ak sledujeme obrazy ABX', ABC_0 trojuholníkov ABX, ABC v súmernosti s osou AB, dokážeme tým toto:

Ak prebieha bod X' vnútro oblúka m, vyplní príslušný priesečník výšok C_0 trojuholníka ABX' vnútrajšok oblúka $\widehat{A'B'}$, tj. tú časť oblúka v', ktorá leží vnútri pása rovnobežiek AC_1, BB_1. Vnútro malého oblúka $\widehat{A'B'}$ patrí teda k množine ξ (pozri obr. 16).

Záver. Množina ξ je teda množinou všetkých bodov kružnice k' (obraz kružnice k v súmernosti podľa osi AB) s výnimkou bodov A', B'. (K týmto bodom sme nedospeli. Ostatne, keby bod A' mal byť priesečníkom výšok trojuholníka so stranou AB, bola by priamka AA' jeho výškou, príslušnou k strane AB. Potom by tretím vrcholom mohol byť jedine bod C_1, ale trojuholník ABC_1 má priesečník výšok v bode A a nie v bode A'.)

Poznámka. Zo zhodnosti kružníc $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv \equiv (S', r)$ vyplýva, že ich možno stotožniť posunutím veľkosti AC_1. Z toho však vyplýva, že vo všetkých uvažovaných trojuholníkoch ABC je $AX = C_1C$ a tiež $AX \parallel \parallel C_1C$.

Iné riešenie (prípad, keď AB nie je priemer kružnice k). Pri označení uvedenom v texte úlohy a v predošlom riešení dokážeme túto vetu: Ak je X priesečník výšok trojuholníka ABC, ktorý vyhovuje podmienkam vysloveným v texte úlohy, potom je $CX = C_1A$, kde C_1 je tretí vrchol pravouhlého trojuholníka BC_1A, vpísaného kružnici $k \equiv (S, r)$; pritom je $CX \parallel C_1A$ aj čo do zmyslu.

Dôkaz urobíme v troch častiach. Označenie vidieť z obrázkov 18—20.

Prípad [1] (pozri obr. 18). Nech C leží vnútri oblúka $\widehat{C_1B_1}$ (v polrovine $ABS \equiv \varrho$). Ľahko dokážeme, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Podľa známej veta padne priesečník X výšok trojuholníka ABC dovnútra tohto trojuholníka. Platí

$$CX \perp AB\,, \quad C_1A \perp AB$$

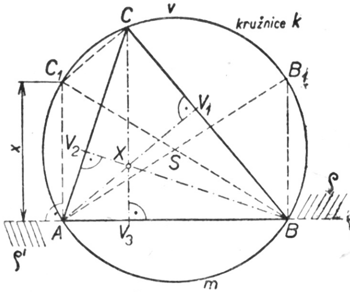
a teda

$$CX \parallel C_1A\,, \tag{1}$$

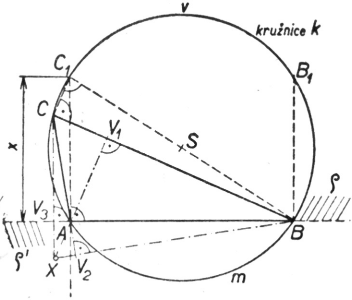
pričom sú obe priamky rôzne.

Trojuholník BC_1C má uhol $\sphericalangle C = 90°$ (podľa Thaletovej vety, lebo BC_1 je priemerom kružnice k). Teda je

$$C_1C \perp BC\,.$$



Obr. 18



Obr. 19

Ďalej je

$$AX \perp BC \qquad (AX \text{ je výška } AV_1)$$

a teda

$$AX \parallel C_1C\,. \tag{2}$$

Zo vzťahov (1), (2) vyplýva, že $AXCC_1$ je rovnobežník a platí

$$CX = C_1A\,, \quad CX \uparrow\uparrow C_1A\,, \tag{3}$$

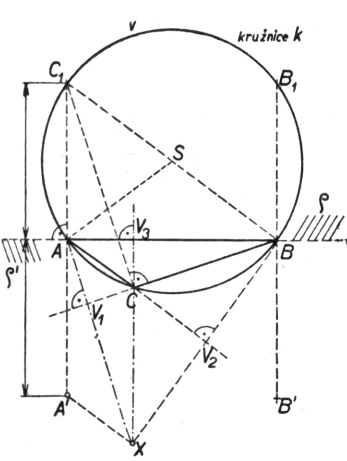
čo sme mali dokázať.

P r í p a d [2] (obr. 19). Nech C leží vnútri oblúka $\widehat{AC_1}$ (v polrovine ϱ). Trojuholník ABC má uhol $\sphericalangle A$ tupý; preto bod X padne dovnútra uhla $\sphericalangle V_2AV_3$, vrcholového k uhlu $\sphericalangle BAC$. Trojuholník BC_1C je vpísaný kružnici k a BC_1 je jej priemer. Podľa Thaletovej vety je

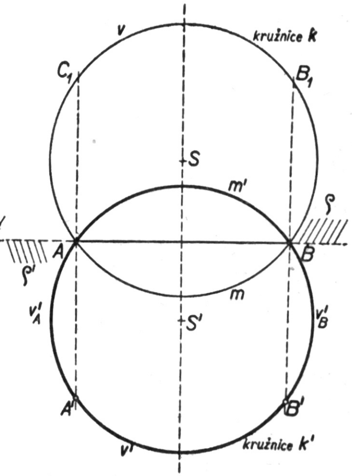
$$C_1C \perp BC;$$

ďalej je

$$AX \perp BC \quad (AX \text{ je výška } AV_1)\,.$$



Obr. 20



Obr. 21

Z oboch vzťahov vyplýva

$$AX \parallel C_1C$$

a veľa toho je

$$CX \parallel C_1A\,.$$

Je teda $AXCC_1$ rovnobežník, ako sa ľahko usúdi a platí vzťah (3).

P r í p a d [3] (obr. 20). Nech C leží vnútri menšieho oblúka m, ktorý leží v polrovine ϱ', opačnej k polrovine ABS. Trojuholník ABC má uhol $\sphericalangle C$ tupý a bod X

padne dovnútra uhla $\sphericalangle V_1CV_2$, vrcholového k uhlu $\sphericalangle BCA$. Trojuholník BC_1C má podľa Thaletovej vety $\sphericalangle C = 90°$, lebo BC_1 je priemer kružnice k. Je teda

$$C_1C \perp BC\,, \quad AV_1X \perp BC$$

a teda

$$C_1C \parallel AX\,.$$

Ďalej je

$$CX \parallel C_1A\,.$$

Z oboch posledných vzťahov ľahko usúdime, že $AXCC_1$ je rovnobežník a zrejme platí (3).

Záver (obr. 21). Priesečník X výšok trojuholníka ABC z textu úlohy dostaneme posunutím bodu C o úsečku veľkosti C_1A a to v zmysle polpriamky C_1A. Body X vyplnia zrejme kružnicu k', zhodnú s kružnicou k a súmerne združenú s k podľa osi AB, pričom z kružnice k', ktorá zrejme prechádza bodmi A, B, musíme vylúčiť body A', B' polroviny ϱ', ktoré vzniknú v zmienenom posunutí ako obrazy bodov A, B (bod C je totiž nevyhnutne rôzny od každého z bodov A, B, inak by sme nedostali trojuholník ABC).

Kružnica k zrejme vznikne z kružnice k' obráteným posunutím. Preto každý bod X' kružnice k', kde $X' \neq A'$, $X' \neq B'$, je priesečníkom výšok istého trojuholníka ABC, kde C je bod kružnice k, a to rôzny od bodov A, B.

Poznámka. Podľa Pythagorovej vety, použitej na trojuholník BCC_1 (kde $\sphericalangle C_1 = 90°$) dostaneme pre veľkosť $x = CX = C_1A$ nášho posunutia $AC_1^2 = BC_1^2 - AB^2$, t. j.

$$x = \sqrt{4r^2 - c^2}\,,$$

kde $c = AB$. Tým sme zároveň odvodili zaujímavú formulu pre vzdialenosť priesečníka X výšok trojuholníka ABC od jeho vrcholu C.

2. Úlohy II. kola kategorie A

1. Určete všechna řešení rovnice

$$\sqrt{7\sin x - 2} = \sqrt{2}\cos x\,.$$

Řešení. Položme

$$\sin x = t\,, \quad \text{kde} -1 \leqq t \leqq 1\,.$$

Levá strana má smysl jedině pro

$$7t - 2 \geqq 0$$

neboli pro

$$1 \geqq t \geqq \frac{2}{7}\,. \tag{1}$$

Rovněž pravá strana je nezáporné číslo, kde $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$. Danou rovnici lze psát ve tvaru

$$\sqrt{7t - 2} = \sqrt{2(1 - t^2)}\,.$$

Obě strany rovnice umocněme na druhou; postupně dostaneme

$$7t - 2 = 2(1 - t^2)\,,$$
$$2t^2 + 7t - 4 = 0\,,$$

zčehož je

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}\,,$$

a tedy

$$t_1 = \frac{1}{2}\,, \quad t_2 = -4\,.$$

Číslo t_2 nepřichází vzhledem k (1) v úvahu. Neznámou x určují tedy rovnice

$$\sin x = \frac{1}{2}\,, \quad \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,,$$

což dává množinu čísel

$$x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \text{ kde } k \text{ je číslo celé.} \tag{2}$$

Zkoušku stačí provést pro číslo $x = \frac{1}{6}\pi$. Označme pořadě L, P výsledek dosazení do stran dané rovnice. Je

$$L = \sqrt{\frac{7}{2} - 2} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad P = \sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Je tedy $L = P$ a všechna čísla (2) jsou řešeními dané rovnice.

Řešil s. Zdislav Kovařík,
10.a tř. jsš, Hodonín.

2. Buďte dány dvě mimoběžky p, q a rovina ϱ, která je různoběžná s každou z přímek p, q.

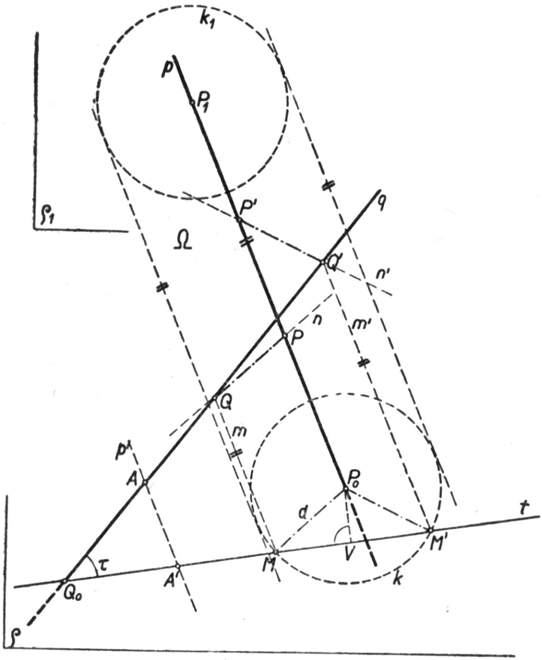
Na přímkách p, q stanovte pořadě body P, Q tak, aby platilo $PQ \parallel \varrho$ a $PQ = d$, kde d je dané kladné číslo.

Popište příslušnou prostorovou konstrukci a načrtněte obrázek. Proveďte důkaz konstrukce a diskusi řešitelnosti úlohy.

Řešení (obr. 22). *Rozbor.* Označme pořadě P_0, Q_0 průsečíky přímek p, q s rovinou ϱ. Hledaná úsečka PQ má krajní body P, Q, které pořadě leží na přímkách p, q, přičemž platí $PQ \parallel \varrho$, $PQ = d$. Na přímce p zvolme bod P_1 a hledejme druhý krajní bod Q_1 úsečky P_1Q_1, o níž platí $P_1Q_1 = d$, $P_1Q_1 \parallel \varrho$. Bod Q_1 zřejmě leží v rovině $\varrho_1 \parallel \varrho$ vedené bodem P_1, a to na kružnici $k_1 \equiv (P_1, d)$, ležící v rovině ϱ_1. Probíhá-li bod P_1 přímku p, dostaneme ke každé jeho poloze právě jednu kružnici k_1. Všechny tyto kružnice zřejmě leží na válcové ploše Ω, jejíž řídicí kružnice je $k \equiv (P_0, d)$, která leží v dané rovině ϱ; povrchové přímky této plochy jsou rovnoběžné s přímkou p.

Krajní bod Q hledané úsečky PQ je tedy společným bodem přímky q s plochou Ω; odtud plyne konstrukce.

Konstrukce (viz obr. 22). Sestrojme pořadě průsečíky P_0, Q_0 přímek p, q s rovinou ϱ; v této rovině sestrojme



Obr. 22

kružnici $k \equiv (P_0, d)$, která je řídicí kružnicí pomocné válcové plochy Ω, jejíž osou je přímka p. Vyšetříme společné body přímky q s plochou Ω; to provedeme podle známé konstrukce užitím roviny τ rovnoběžné s přímkou p takto: Bodem $A \not\equiv Q_0$ přímky q vedeme přímku $p' \parallel p$ a označíme A' její průsečík s rovinou ϱ (je zřejmě $A' \not\equiv Q_0$); rovina τ je dána různoběžkami q, p', takže přímka $t \equiv Q_0A'$ je průsečnicí rovin ϱ, τ. Označme M jeden ze společných bodů přímky t s kružnicí k a veďme jím přímku $m \parallel p$. Společný bod přímek q, m, které leží v rovině τ, označme Q a veďme jím přímku $n \parallel P_0M$; společný bod přímek p a n (n leží v rovině různých rovnoběžek $p \parallel m$) označme P. Potom úsečka PQ je jedním řešením úlohy.

Důkaz. Jestliže existuje bod M, pak existuje i přímka m a tím i bod Q; přímky m, q leží totiž v rovině τ a jsou různoběžné; jinak by p, q nebyly mimoběžkami. Podle konstrukce je $P_0M = d$. Jestliže je $M \equiv Q_0$, je P_0M hledaná úsečka PQ, tj. je $Q \equiv Q_0 \equiv M$, $P \equiv P_0$. Jestliže je $M \not\equiv Q_0$, potom dvojice rovnoběžek $p \parallel m$ a $P_0M \parallel n$ určují rovnoběžník QMP_0P, takže bod P existuje a platí $PQ = P_0M = d$, $PQ \parallel P_0M$; je tedy $PQ \parallel \varrho$. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Rovina τ existuje jediná, neboť q, p' jsou různoběžky (jinak by q, p nebyly mimoběžné). Přímky p, q a tím i přímky p', q jsou různoběžné s rovinou ϱ, takže existuje jediná průsečnice t rovin τ, ϱ. Řešitelnost úlohy závisí tedy jen na tom, zda přímka t má či nemá s kružnicí k společný bod. O tom rozhodneme podle známé planimetrické věty; dostaneme snadno tento výsledek: Úloha má dvě, jedno nebo žádné řešení podle toho, je-li vzdálenost v bodu P_0 od přímky t menší, rovna nebo větší než d (neboli je-li přímka q sečnou, tečnou nebo nesečnou plochy Ω).

Dodatek. Při řešení lze užít též tohoto postupu (viz obr. 22): Promítneme hledanou úsečku PQ ve směru přímky p do roviny ϱ. Průmětem přímky q je přímka t a průmětem bodů P, Q jsou pořadě body P_0, M, přičemž je $P_0M = d$ a $P_0M \parallel PQ$. Odtud plyne v podstatě totéž řešení, jako jsme uvedli nahoře.

Podle řešení s. Jana Palisy,
11. tř. jsš, Opava.

3. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$), kterému lze vepsat kružnici. Je dána úhlopříčka $AC = e$ a výška v. Určete podmínky řešitelnosti vzhledem k daným číslům e, v.

Řešení (obr. 23). *Rozbor*. Předpokládejme, že jsme sestrojili lichoběžník $ABCD$, který vyhovuje požadavkům úlohy. Při označení uvedeném v obrázku platí

$$AP = AT = BP = BT' = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a\,,$$

$$DQ = DT = CQ = CT' = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} c\,.$$

Je tedy

$$AD = BC = \frac{1}{2}(a + c)\,. \tag{1}$$

V pravoúhlém trojúhelníku ACC_1 je

$$AC = e\,,\ CC_1 = PQ = v\,,\ \sphericalangle AC_1C = 90^\circ \tag{2}$$

(P, Q jsou pořadě středy úseček AB, CD).
Přitom je

$$AC_1 = AP + PC_1 = AP + QC = \\ = \frac{1}{2}(a + c) = BC\,, \tag{3}$$

jak plyne ze vztahu (1).

Dále si všimněme toho, že polopřímka AC leží v úhlu $\sphericalangle DAB$, takže je

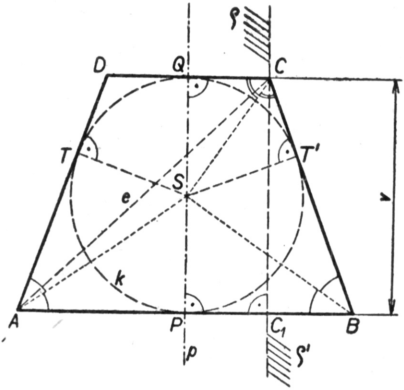
$$\sphericalangle CAB < \sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA\,. \tag{4}$$

Je tedy

$$BC < AC\,. \tag{5}$$

Odtud konstrukce.

Konstrukce (obr. 23). Sestrojme pravoúhlý trojúhelník ACC_1, o němž platí vztahy (2); ve zvolené polorovině ϱ o hranici CC_1 lze sestrojit nejvýše jeden takový troj-



Obr. 23

úhelník. V polorovině ϱ' opačné k polorovině ϱ za předpokladu, že platí (5), sestrojme pravoúhlý trojúhelník BCC_1 o přeponě

$$BC = AC_1\,. \tag{6}$$

Označme p osu úsečky AB a sestrojme obraz BAD trojúhelníka ABC v souměrnosti o ose $p \equiv PQ$. Potom je $ABCD$ hledaný lichoběžník.

Důkaz. Podle konstrukce je $AB \perp p$, $CD \perp p$ a tedy $AB \parallel CD$. Pokud je $B \not\equiv C_1$, je $\sphericalangle CBC_1$ ostrý a obě souměrně sdružené přímky BC, AD jsou různoběžné, přičemž je $BC = AD$; je tedy $ABCD$ lichoběžník rovnoramenný se základnou $AB = a$ a výškou $PQ = v$.

Ještě musíme dokázat, že se mu dá vepsat kružnice: Označme S společný bod os úhlů $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$; ze souměrnosti vzhledem k ose p plyne, že bod S padne na přímku p. Označme T' bod polopřímky BC, o němž platí

$$BT' = BP = AP\,. \tag{7}$$

Jestliže bod P leží uvnitř úsečky AC_1 [přitom platí (6)], je $AP < AC_1$ a vzhledem k (6) a (7) je $BT' < BC$, takže bod T' leží uvnitř úsečky BC. Ze souměrnosti podle přímky BS plyne, že polopřímka BT' je obrazem polopřímky BP, a podle (7) je bod T' obrazem bodu P. Proto je úsečka ST' obrazem úsečky SP neboli

$$ST = SP\,, \tag{8}$$

$$\sphericalangle BT'S = \sphericalangle BPS = 90°\,. \tag{9}$$

Dále je

$$\triangle\ SCQ \cong SCT'\ (\mathrm{Ssu})\,,$$

neboť stranu SC mají společnou, $\sphericalangle T' = \sphericalangle Q = 90°$ [viz (9)], přičemž platí $QC = PC_1 = AC_1 - AP = BC - BT' = CT'$ [viz (6) a (7)]. Je tedy $SQ = ST'$ a vzhledem k (8) odtud plyne

$$SQ = ST' = SP\,,$$

přičemž je $SP \perp AB$, $ST' \perp BC$, $SQ \perp CD$. Proto kružnice $k \equiv (S,\ SP)$ se dotýká přímek AB, BC, CD; dotýká se však i přímky AD, což plyne ze souměrnosti lichoběžníka podle přímky p. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. (1) Trojúhelník ACC_1 lze sestrojit právě tehdy, jestliže platí $AC > CC_1$ neboli

$$e > v\,. \tag{10}$$

(2) Bod C musí padnout dovnitř poloroviny pB; to

podle známé věty nastane právě tehdy, jestliže je

$$AC > BC; \tag{11}$$

ale $BC = AC_1$, kde AC_1 je odvěsna pravoúhlého trojúhelníka ACC_1 s přeponou AC, takže vztah je splněn.

(3) Musí existovat trojúhelník BCC_1, tj. musí být $BC > CC_1$ neboli

$$AC_1 > CC_1\,. \tag{12}$$

Z trojúhelníka ACC_1 však podle Pythagorovy věty plyne

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 - CC_1^2} = \sqrt{e^2 - v^2}\,.$$

Po dosazení do (12) dostaneme

$$\sqrt{e^2 - v^2} > v$$

neboli

$$e > v\sqrt{2}$$

a tedy

$$v < \frac{1}{2}e\sqrt{2}\,. \tag{13}$$

Jestliže platí obráceně tento vztah, pak o úsečce AC_1, sestrojené podle předchozího postupu, platí vztah (11) a lze sestrojit trojúhelník BCC_1, přičemž zřejmě je $BC < AC$. Platí-li (13), pak platí i (10).

Závěr. Úloha má řešení, a to jediné, právě tehdy, platí-li vztah (13).

Podle řešení s. Jaroslava Střeštíka,
11. tř. jsš, Litovel.

4. Určte všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{\frac{x-p}{x-2}} = \frac{x-4}{x-2} \tag{1}$$

s neznámou x. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na dané reálne číslo p.

Riešenie. Ak je číslo x riešením rovnice (1), musí platiť postupne

$$\frac{x-p}{x-2}=\frac{(x-4)^2}{(x-2)^2},$$

$$\begin{aligned}&(x-2)(x-4)^2=(x-2)^2(x-p)\,,\\&(x-2)[(x-4)^2-(x-2)(x-p)]=0\,,\\&(x-2)[x^2-8x+16-(x^2-px-2x+2p)]=0\,,\\&(x-2)[(p-6)x+16-2p]=0\,.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že buď jeden, buď druhý činiteľ sa rovná nule. Sú teda možné dva prípady.

Prípad [1]. Platí $x-2=0$ čiže

$$x=2\,.$$

Toto číslo nie je riešením danej rovnice (1), lebo žiadny zo zlomkov pre $x=2$ v tejto rovnici nemá význam, nakoľko sa menovateľ rovná nule.

Prípad [2]. Platí

$$(p-6)x+16-2p=0$$

čiže

$$(p-6)x=2p-16\,. \tag{2}$$

Rozlišujme dve možnosti:

a) Nech $p-6=0$ čiže $p=6$. Potom rovnica (1) znie

$$\sqrt{\frac{x-6}{x-2}}=\frac{x-4}{x-2}\,. \tag{3}$$

Ak je x riešením tejto rovnice, musí platiť

$$4\,(x-2)=0\,, \tag{4}$$

ako sa ľahko presvedčíme, rovnako ako vo výpočte, ktorý sme urobili vyššie. Zo vzťahu vyplýva $x=2$. Avšak číslo $x=2$ nie je riešením rovnice (1), ako sme už zistili v prípade [1].

b) Nech je $p - 6 \neq 0$. Potom z rovnice (2) vyplýva

$$x = \frac{2p - 16}{p - 6} \tag{5}$$

čiže

$$x = \frac{2(p - 6) - 4}{p - 6} = 2 - \frac{4}{p - 6}.$$

Z toho vyplýva, že je $x \neq 2$, lebo zlomok $\frac{4}{p - 6}$ má pre $p \neq 6$ vždy význam a je rôzny od nuly. Preto oba zlomky v rovnici (1) majú význam.

Skúška. Dosaďme zo vzťahu (5) do oboch strán rovnice (1). Označme L, P ľavú a pravú stranu rovnice po dosadení. Platí

$$P = \frac{x - 4}{x - 2} = \frac{\dfrac{2p - 16}{p - 6} - 4}{\dfrac{2p - 16}{p - 6} - 2} = \frac{2p - 16 - 4(p - 6)}{2p - 16 - 2(p - 6)} =$$

$$= \frac{-2p + 8}{-4} = \frac{p - 4}{2}. \tag{6}$$

Toto číslo musí byť nezáporné, rovnako ako číslo na ľavej strane rovnice (1), lebo odmocnina, pokiaľ má význam, je nezáporné číslo. Musí teda platiť $p - 4 \geqq 0$ čiže

$$6 \neq p \geqq 4. \tag{7}$$

Namiesto L počítajme L^2. Platí

$$L^2 = \frac{x - p}{x - 2} = \frac{\dfrac{2p - 16}{p - 6} - p}{\dfrac{2p - 16}{p - 6} - 2} = \frac{2p - 16 - p^2 + 6p}{2p - 16 - 2p + 12} =$$

$$= \frac{-p^2 + 8p - 16}{-4} = \frac{p^2 - 8p + 16}{4} = \left(\frac{p - 4}{2}\right)^2.$$

Pretože podľa (7) je $p - 4 \geqq 0$, je $\frac{p-4}{2} \geqq 0$ a zo vzťahu

$$L^2 = \left(\frac{p-4}{2}\right)^2$$

vyplýva

$$L = \frac{p-4}{2}. \tag{8}$$

Porovnaním (6) a (8) dostávame

$$L = P,$$

takže číslo x, dané vzťahom (5), je za predpokladu (7) riešením rovnice (1).

Záver. Daná rovnica nemá riešenie, ak je $p = 6$ alebo $p < 4$. Pre $p \geqq 4$, $p \neq 6$ má jediné riešenie, dané vzťahom (5).

Tým je riešenie úlohy ukončené.

3. Úlohy III. kola kategorie A

1. Určete všechna reálná řešení rovnice

$$x + \sqrt{2p - x^2} = 8 \tag{1}$$

o neznámé x, přičemž p je dané reálné číslo. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslu p.

Řešení. Nechť číslo x je řešením rovnice (1) a tedy i rovnice

$$\sqrt{2p - x^2} = 8 - x. \tag{2}$$

Umocníme-li obě strany rovnice (2) na druhou, obdržíme rovnici

$$2p - x^2 = 64 - 16x + x^2,$$

ze které postupně dostaneme

$$2x^2 - 16x + 64 - 2p = 0\,,$$

$$x^2 - 8x + 32 - p = 0\,,$$

$$x_1 = 4 + \sqrt{p - 16}\,,\; x_2 = 4 - \sqrt{p - 16}\,. \qquad (3)$$

Odtud plyne, že nutně platí $p - 16 \geqq 0$ neboli

$$p \geqq 16\,; \qquad (4)$$

jinak by nebyla čísla x_1, x_2 reálná. V případě $p = 16$ dospějeme k jedinému kořenu

$$x_1 = 4\,,$$

v případě $p > 16$ je

$$x_1 \neq x_2\,.$$

Nyní provedeme zkoušku, zda za předpokladu platnosti vztahu (4) jsou čísla x_1, x_2 ze vztahů (3) skutečně kořeny dané rovnice (1). Označme pořadě L, P dosazení do levé a pravé strany rovnice (1). Rozeznávejme dva případy:

Případ [1]. Dosaďme do (1) kořen $x_1 = 4 + \sqrt{p - 16}$; dostaneme postupně:

$$\begin{aligned} L &= 4 + \sqrt{p - 16} + \sqrt{2p - (4 + \sqrt{p - 16})^2} = \\ &= 4 + \sqrt{p - 16} + \sqrt{p - 8\sqrt{p - 16}} = \\ &= 4 + \sqrt{p - 16} + \sqrt{(4 - \sqrt{p - 16})^2} = \\ &= 4 + \sqrt{p - 16} + |4 - \sqrt{p - 16}|\,. \end{aligned}$$

Aby řešení bylo správné, musí platit $L = P$, tj.

$$4 + \sqrt{p - 16} + |4 - \sqrt{p - 16}| = 8 \qquad (*)$$

neboli

$$|4 - \sqrt{p - 16}| = 4 - \sqrt{p - 16}\,. \qquad (**)$$

Protože vlevo je nezáporné číslo, musí platit

$$4 - \sqrt{p - 16} \geqq 0\,,$$

tj. musí platit

$$\sqrt{p-16} \leqq 4; \tag{5}$$

protože je $p - 16 \geqq 0$ [viz vztah (4)], má levá strana smysl a umocněním obou stran nerovnosti (5) na druhou, dostaneme postupně

$$p - 16 \leqq 16\,,$$

$$p \leqq 32\,. \tag{6}$$

Ze vztahů (4), (6) plyne, že číslo p leží v intervalu

$$16 \leqq p \leqq 32\,. \tag{7}$$

Snadno usoudíme, že pro p z intervalu (7) skutečně platí vztahy (**), (*) a že číslo x_1 je tedy kořenem rovnice (1).

Případ [2]. Dosaďme do (1) kořen $x_2 = 4 - \sqrt{p-16}$; dostaneme postupně

$$L = 4 - \sqrt{p-16} + \sqrt{2p - (4 - \sqrt{p-16})^2} =$$
$$= 4 - \sqrt{p-16} + \sqrt{p + 8\sqrt{p-16}} =$$
$$= 4 - \sqrt{p-16} + \sqrt{(4 + \sqrt{p-16})^2} =$$
$$= 4 - \sqrt{p-16} + |4 + \sqrt{p-16}|\,.$$

Dále musí platit $L = P$, tj.

$$4 - \sqrt{p-16} + |4 + \sqrt{p-16}| = 8$$

neboli

$$|4 + \sqrt{p-16}| = 4 + \sqrt{p-16}\,.$$

Protože vlevo je nezáporné číslo, musí i vpravo být číslo nezáporné; to však je splněno, neboť vpravo je součet čísla 4 a nezáporného čísla $\sqrt{p-16}$ (pro $p \geqq 16$).

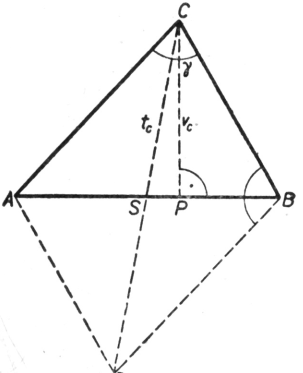
Je tedy číslo x_2 kořenem rovnice (1) pro všechna $p \geqq 16$.

Závěr je patrný z tabulky:

Parametr p	Reálné kořeny rovnice (1)	Poznámka
$p < 16$	rovnice nemá řešení	
$16 \leqq p \leqq 32$	$x_1 = 4 + \sqrt{p - 16}$ $x_2 = 4 - \sqrt{p - 16}$	Pro $p = 16$ je $x_1 = x_2$; pro $p \neq 16$ je $x_1 \neq x_2$
$p > 32$	$x_2 = 4 - \sqrt{p - 16}$	

Podle řešení s. Břetislava Fialy, 11.b tř. jsš. Česká Třebová.

2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost výšky v_c, velikost těžnice t_c a velikost úhlu γ.



Obr. 24

Řešení (obr. 24). *Rozbor.* Předpokládejme, že jsme úlohu rozřešili a že existuje trojúhelník ABC, který vyhovuje úloze. Doplňme jej na rovnoběžník $ACBD$, kde D je jeho čtvrtý vrchol, ležící na prodloužení úsečky CS za bod S (což je střed strany AB) ve vzdálenosti t_c. Platí

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \gamma\,,$$
$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = $$
$$= 180° - \gamma\,.$$

Přitom přímka AB má od bodu C vzdálenost v_c, a proto je tečnou kružnice $k \equiv (C, v_c)$. Na základě tohoto rozboru provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 25). Sestrojíme úsečku CD velikosti $2t_c$, jejíž střed označíme S. Pak sestrojíme množinu všech bodů X, pro které platí, že

$$\sphericalangle CXD = 180° - \gamma\,.$$

Jsou to dva kruhové oblouky m_1, m_2 s krajními body C, D, které do této množiny nepatří. Pak sestrojíme kružnici $k \equiv (C, v_c)$ a k ní vedeme z bodu S tečny t_1, t_2; body dotyku těchto tečen s kružnicí k označíme P_1, P_2. Společné body přímky t_1 s uvažovanou množinou nazveme A_1, B_1, společné body přímky t_2 s uvažovanou množinou nazveme A_2, B_2 (body A_1, B_1 leží na m_1, body A_2, B_2 na m_2). Pak trojúhelníky A_1B_1C, A_2B_2C jsou hledané trojúhelníky.

Důkaz konstrukce je zřejmý z rozboru. Nalezené trojúhelníky (pokud existují) mají skutečně žádané vlastnosti: Protože oba oblouky m_1, m_2 jsou souměrně sdružené podle přímky CD i podle bodu S, jsou A_1CB_1D, B_2CA_2D shodné rovnoběžníky a platí

$$A_1S = B_1S\,,\; A_2S = B_2S\,, \tag{*}$$

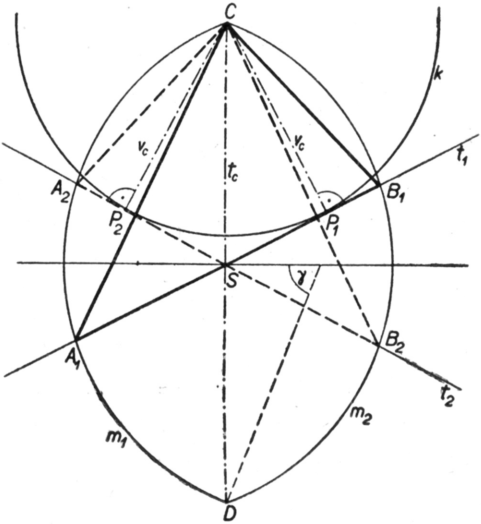
takže úsečka CS je těžnicí trojúhelníků A_1B_1C, A_2B_2C. Dále je $\sphericalangle A_1CB_1 = \sphericalangle A_2CB_2 = \gamma$ a konečně platí, že oba trojúhelníky jsou shodné, neboť jsou souměrně sdruženy podle přímky CD. Protože přímky A_1B_1, A_2B_2 jsou tečnami kružnice, je jejich vzdálenost od bodu C rovna v_c, takže sestrojené trojúhelníky mají výšky příslušné k vrcholu C velikosti v_c. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Řešitelnost úlohy především vyžaduje, aby úhel γ byl dutý. Počet řešení závisí na počtu různých tečen, které lze vést z bodu S ke kružnici k.

(1) Jestliže bod S leží vně kružnice k, pak je nutně $t_c > v_c$. Jestliže obráceně je $t_c > v_c$, lze sestrojit ke kružnici k dvě různé tečny t_1, t_2. (2) Jestliže je $t_c = v_c$,

lze sestrojit jedinou tečnu t_1. (3) Jestliže je $t_c < v_c$, nemá úloha řešení.

V případech (1), (2) musíme ještě dokázat, že např. tečna t_1 má s oblouky m_1, m_2 pořadě společné body A_1, B_1 (přitom je zřejmě $C \neq A_1$, $C \neq B_1$). Přímka t_1 však prochází bodem S, který je středem tětivy CD obou



Obr. 25

oblouků m_1, m_2; podle známé věty každá polopřímka, jejímž počátkem je bod, který leží uvnitř kružnice, obsahuje právě jeden bod této kružnice. Tím je existence bodů A_1, B_1 zajištěna.

Závěr. Jestliže je γ dutý úhel a jestliže je: (1) $t_c > v_c$, má úloha dvě řešení; oba trojúhelníky jsou souměrně sdružené a různé; (2) $t_c = v_c$, je jediné řešení; příslušný trojúhelník je zřejmě rovnoramenný; (3) $t_c < v_c$, nemá úloha řešení.

Podle řešení s. Václava Dvořáka,
11. tř. jsš, Brno - Tábor.

3. Určete všechna reálná čísla x, která splňují nerovnost

$$\sqrt{2 + \frac{5}{2}\cos x} \leqq \sin x\,. \tag{1}$$

Řešení. Aby řešení x dané nerovnosti bylo reálné, musí platit vztahy

$$2 + \frac{5}{2}\cos x \geqq 0\,, \tag{2}$$

$$\sin x \geqq 0\,. \tag{3}$$

Ze vztahu (2) plyne

$$\cos x \geqq -\frac{4}{5}\,. \tag{2'}$$

Za předpokladu, že platí (2) a (3), můžeme obě strany dané nerovnosti (1) umocnit na druhou; dostaneme postupně

$$2 + \frac{5}{2}\cos x \leqq \sin^2 x\,,$$

$$2 + \frac{5}{2}\cos x \leqq 1 - \cos^2 x\,,$$

$$\cos^2 x + \frac{5}{2}\cos x + 1 \leqq 0\,,$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \leqq 0\,,$$

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x + 2) \leqq 0\,. \tag{4}$$

Při odvození posledního vztahu jsme užili rozkladu kvadratického trojčlenu; rovnice

$$2y^2 + 5y + 2 = 0 \tag{*}$$

má totiž kořeny

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4},$$

tj. $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = -2$; rozklad trojčlenu na levé straně rovnice (*) proto zní

$$2\left(y + \frac{1}{2}\right)(y + 2).$$

Z nerovnosti (4) plyne, že o čísle x nutně platí:

(1) buď zároveň $\cos x + \frac{1}{2} \geqq 0$, $\cos x + 2 \leqq 0$; z poslední nerovnosti však plyne $\cos x \leqq -2$, což nelze splnit žádným reálným číslem x;

(2) nebo zároveň $\cos x + \frac{1}{2} \leqq 0$, $\cos x + 2 \geqq 0$ neboli

$$-2 \leqq \cos x \leqq -\frac{1}{2}.$$

Připojíme-li k těmto požadavkům vztahy (2′), (3), pak $\left(\text{protože platí } -2 < -\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}\right)$, dostaneme vztahy

$$-\frac{4}{5} \leqq \cos x \leqq -\frac{1}{2}, \quad \sin x \geqq 0. \tag{5}$$

Označme φ úhel, o němž platí

$$\cos\varphi = -\frac{4}{5}, \ \sin\varphi \geqq 0$$

(nechť např. je $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$, takže $\varphi \doteq 143°10'$). Potom řešením vztahů (5) je úhel x, o němž nutně platí

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leqq x \leqq \varphi + 2k\pi, \tag{6}$$

kde k je libovolné číslo celé.

Číslo x dané vztahy (6) vyhovuje zřejmě vztahům (2), (3), takže obě strany nerovnosti (1) mají smysl. Obrácením postupu se přesvědčíme o tom, že toto číslo x nerovnosti (1) skutečně vyhovuje.

Podle řešení s. Igora Ďuriše, 11. tř. jsš, Banská Štiavnica a s. Josefa Nedomy, 11.b tř. 4. jsš, Praha 4.

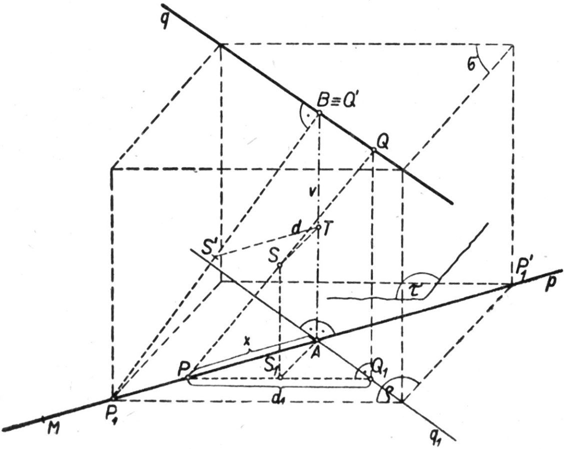
4. Nech sú dané kladné čísla d, v, o ktorých platí $d > v$. Ďalej nech sú dané dve kolmé mimobežky p, q, ktorých najkratšia priečka má veľkosť v. Uvažujme o všetkých úsečkách veľkosti d, takých, že jeden z oboch krajných bodov leží na priamke p a druhý na priamke q.

a) Čo vyplnia krajné body týchto úsečiek na priamke p?

b) Čo vyplnia stredy týchto úsečiek?

Riešenie (obr. 26). Označme $\varrho \parallel q$ rovinu, ktorá prechádza priamkou p a $\sigma \parallel p$ rovinu, ktorá prechádza priamkou q; je teda $\varrho \parallel \sigma$. Ďalej nech sú A, B (v tomto poradí) body priamok p, q, také, že AB je najkratšia priečka mimobežiek p, q. Platí teda $AB \perp \varrho$. Ďalej označme P, Q body, ležiace po rade na priamkach p, q, a to také, že PQ je úsečka, ktorá splňuje požiadavky úlohy, t. j. platí $PQ = d$.

Časť a). Bod A delí priamku p na dve opačné polpriamky. Môžeme sa zrejme obmedziť na skúmanie jednej z nich. Označme ju AM. Nech bod $P \neq A$ prebieha polpriamku AM; pýtajme sa, ku ktorým bodom pritom prislúcha taký bod Q, že úsečka PQ má vlastnosti vyžadované úlohou. V trojuholníku PBA je $\sphericalangle A = 90°$



Obr. 26

a podľa Pythagorovej vety platí $BA^2 + AP^2 = BP^2$. Ak označíme $AB = v$, $AP = x$, $BP = a$ (kde v, x, a sú kladné čísla), možno predošlý vzťah písať

$$a = \sqrt{v^2 + x^2}\,. \tag{1}$$

Pretože platí $p \perp q$, $AB \perp q$, platí $BPA \perp q$ a teda $BP \perp q$. Kružnica (P, d), opísaná v rovine qP, podľa známej vety z planimetrie má s priamkou q spoločné buď dva body, buď jeden bod, buď žiadny bod, podľa toho, či (v tomto poradí) platí vzťah

$$a < d\,, \quad a = d\,, \quad a > d\,.$$

Dosaďme sem zo vzťahu (1); dostaneme po úprave po rade vzťahy

$$x^2 \leqq d^2 - v^2 . \tag{2}$$

Môžme povedať: „Hľadanú množinu na priamke p tvoria tie jej body, o ktorých platí $x^2 \leqq d^2 - v^2$“ (pritom táto podmienka platí zrejme aj pre pôvodne vylúčený bod A). Tieto body vyplňujú úsečku P_1P_1' (kde $AP_1 = AP_1' = \sqrt{d^2 - v^2}$, pričom P_1 leží na polpriamke AM) so stredom A. Z vnútorných bodov tejto úsečky možno viesť dve požadované úsečky; bodmi P_1, P_1' len po jedinej takej úsečke, pričom druhým jej krajným bodom je bod $B \equiv Q'$. Úsečka P_1P_1' vždy existuje, lebo zo vzťahu $d > v$, daného v texte úlohy, vyplýva, že číslo x, dané vzťahom (2), je kladné. Tým je úloha rozriešená.

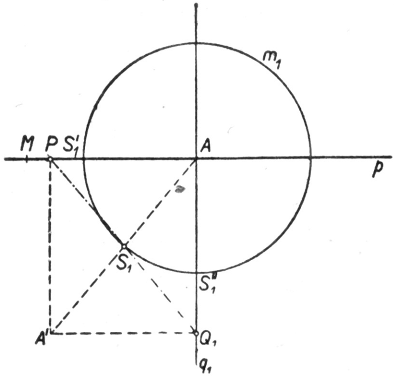
Časť b) (pozri obr. 26). Označme S stred úsečky PQ, ktorá vyhovuje úlohe. Ďalej nech je T stred úsečky AB.

Je známa táto stereometrická veta **W**: „Nech $\varrho \parallel \sigma$ sú dve rôzne roviny a $AB \perp \varrho$ úsečka, ktorej krajné body po rade ležia v rovinách ϱ, σ. Ďalej označme P, Q body, ktoré ležia po rade v týchto rovinách. Potom množinou stredov úsečiek PQ je rovina $\tau \parallel \varrho$, ktorá prechádza stredom T úsečky AB, pričom je $\tau \perp AB$.“

Leží teda stred úsečky PQ, uvažovanej v našej úlohe, vždy v rovine τ, ktorá je kolmá k úsečke AB a prechádza jej stredom T.

Označme q_1 pravouhlý priemet priamky q do roviny ϱ; priamka $q_1 \perp p$ prechádza bodom A. O strede S' úsečky P_1Q' (kde bod P_1 leží na polpriamke AM a platí $AP_1 = \sqrt{d^2 - v^2}$, $Q' \equiv B$) platí: bod S' leží podľa vety **W** v rovine τ, pričom $TS' = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - v^2}$, lebo TS' je stredná priečka v trojuholníku P_1BA, v ktorom je $AP_1 = \sqrt{d^2 - v^2}$.

Nech je v ďalšom $P \not\equiv P_1$ bod úsečky AP_1. Dokážeme, že stred S úsečky PQ, ktorá vyhovuje úlohe, leží v rovině τ na kružnici $m \equiv \left(T, \frac{1}{2} d_1\right)$, kde $d_1 = \sqrt{d^2 - v^2}$.



Obr. 27

Dôkaz (pozri tiež obr. 27). Označme Q_1 pravouhlý priemet bodu Q do roviny ϱ. Ten leží na priamke q_1. Z pravouhlého trojuholníka PQQ_1 s preponou $PQ = d$, jednou odvesnou $QQ_1 = AB = v$, vyplýva

$$PQ_1 = \sqrt{PQ^2 - QQ_1^2} = \sqrt{d^2 - v^2} = d_1.$$

Ďalej označme S_1 pravouhlý priemet stredu S úsečky PQ. Pretože je $SS_1 \perp \varrho$, je $SS_1 \parallel QQ_1$, takže SS_1 je stredná priečka v trojuholníku PQQ_1 a S_1 je stredom úsečky PQ_1, t. j. $PS_1 = \frac{1}{2} d_1$. Sú dve možnosti: Buď je $P \equiv A$, takže S_1 leží v priamke q_1 a je $AS_1 = \frac{1}{2} d_1$; buď je $P \not\equiv A$ a existuje pravouhlý trojuholník PQ_1A_1' s preponou PQ_1, takže S_1 je jej stredom a teda aj stredom kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Platí teda $S_1A = S_1P = S_1Q_1 = \frac{1}{2}d_1$. Avšak bod S leží nevyhnutne v rovine τ (pozri vetu W), takže AS_1ST je obdĺžnik a preto je $TS = AS_1 = \frac{1}{2}d_1$. Bod S leží teda v rovine τ na kružnici $m \equiv \left(T, \frac{1}{2}d_1\right)$. Tým je dôkaz hotový.

Nech teraz obrátene S je bod práve zostrojenej kružnice m, ktorá leží v rovine τ. Musíme dokázať, že je stredom úsečky $PQ = d$, kde body P, Q ležia (v tomto poradí) na priamkach p, q. Pokiaľ bod S leží v jednej z rovín pB, qA, je z predošlého zrejmé, že taká úsečka existuje. V ďalšom sa obmedzíme na prípad, že bod S leží vnútri jedneho zo štyroch pravouhlých klinov, v ktoré delia priestor navzájom kolmé roviny pB, qA. Označme $m_1 \equiv \left(A, \frac{1}{2}d_1\right)$, S_1 pravouhlé priemety kružnice m a bodu S do roviny ϱ. Bod S_1 leží na kružnici m_1 a to vnútri jedneho z pravých uhlov, v ktoré delia priamky p, q_1 rovinu ϱ. Zostrojme v tejto rovine obdĺžnik (pozri obr. 27) $APA'Q_1$ so stredom S_1. Taký obdĺžnik existuje práve jeden. O jeho uhlopriečkach platí $PQ_1 = AA' = 2 . AS_1 = 2 . \left(\frac{1}{2}d_1\right) = d_1$. V bode Q_1 zostrojme kolmicu k rovine ϱ a označme Q jej priesečník s priamkou q. V pravouhlom trojuholníku PQQ_1 je $PQ_1 = d_1$, $QQ_1 = AB = v$ a z Pythagorovej vety vyplýva $PQ = \sqrt{PQ_1^2 + QQ_1^2} = \sqrt{d_1^2 + v^2} = \sqrt{d^2 - v^2 + v^2} = d$. Úsečka PQ, takto zostrojená, vyhovuje úlohe. Jej stred S_0 leží v rovine τ a jeho pravouhlý priemet do roviny ϱ je nevyhnutne stred úsečky PQ_1, tj. bod S_1, z ktorého sme pri tejto úvahe vyšli. Je teda $S_0 \equiv S$. Podarilo sa nám teda zostrojiť úsečku PQ daným bodom S kružnice m. Tým je dôkaz hotový.

Možno teda povedať: „Množinou stredov všetkých úsečiek PQ, ktoré vyhovujú úlohe, je kružnica $m \equiv \equiv \left(T, \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - v^2}\right)$, ktorá leží v rovine τ." Tým je riešenie časti b) hotové.

Dodatok. Iní riešitelia, ktorí postupovali obdobne, sa opreli o známu vetu **U** z planimetrie: „V rovine ϱ nech sú dané kolmice p, q_1 s priesečníkom A. Ďalej nech je dané číslo $d_1 > 0$. Množinou stredov všetkých úsečiek $PQ_1 = d_1$, keď body P, Q_1 ležia (v tomto poradí) na priamkach p, q_1, je kružnica $m_1 \equiv \left(A, \frac{1}{2} d_1\right)$." Výslednú kružnicu m dostali použitím vety **W** ako rez rotačnej valcovej plochy s riadiacou kružnicou m_1 s rovinou τ. Práve vyslovená veta z planimetrie im pomohla pri oboch smeroch dôkazu o bode S kružnice m (t. j. ak je S stred úsečky PQ, leží na kružnici m; obrátene, ak je S bod kružnice m, prechádza ním úsečka PQ, ktorá vyhovuje požiadavkám úlohy).

Podľa riešenia s. Kamila Wichterle, 11. tr. jsš, Praha-Dejvice a s. Marie Srovnalovej, 11.b tr. jsš, Ostrava I, Matičná ul.

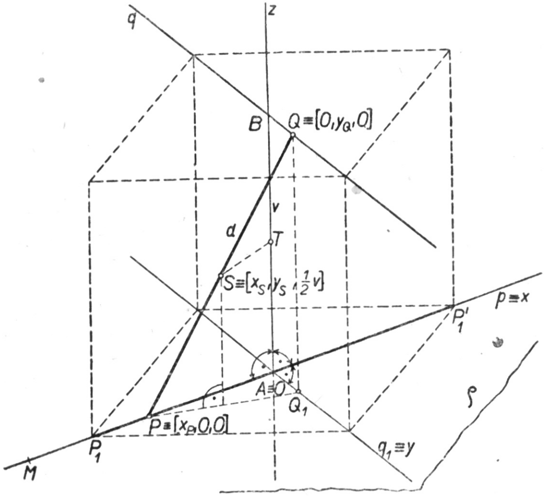
Jiné řešení (obr. 28). Zaveďme soustavu pravoúhlých souřadnic x, y, z v prostoru takto: osa $x \equiv p$, osa $z \equiv AB$ (kde A, B jsou pořadě body přímek p, q, přičemž AB je osa mimoběžek p, q), osa $y \equiv q_1$, kde $q_1 \parallel q$ prochází bodem A; počátkem této soustavy je bod $O \equiv A$. Rovinu přímek $x \equiv p$, $y \equiv q_1$ označme ϱ.

a) **I.** Bod P na přímce p má souřadnice $[x_p, 0, 0]$, bod Q na přímce q má souřadnice $[0, y_Q, v]$. Hledáme body P, Q takové, že o nich platí

$$PQ = d$$

neboli

$$\sqrt{x_p^2 + y_Q^2 + v^2} = d\,. \tag{1'}$$



Obr. 28

[Poznámka. Pro vzdálenost $d = MN$ bodů $M \equiv [x_1, y_1, z_1]$, $N \equiv [x_2, y_2, z_2]$ v prostorové analytické geometrii platí $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, jak se snadno dokáže, např. s použitím vzorce pro velikost tělesové úhlopříčky kvádru daných rozměrů.] Ze vztahu (1′) dostaneme

$$x_P^2 + y_Q^2 = d^2 - v^2\,. \tag{1}$$

Odtud plyne, že musí být $|x_P| \leqq \sqrt{d^2 - v^2}$; jinak by číslo y_Q nebylo reálné. Z toho plyne, že bod P leží na přímce $p \equiv x$, a to na úsečce P_1P_1', jejímž středem je bod $O \equiv A$; přitom platí $AP_1 = AP_1' = \sqrt{d^2 - v^2}$. Protože je $d > v$, tato úsečka vždy existuje.

II. Obráceně, buď $P \equiv [x_P, 0, 0]$ bodem úsečky P_1P_1'; tu o čísle x_P nutně platí

$$|x_P| \leqq \sqrt{d^2 - v^2}\,. \tag{2}$$

Po dosazení do (1) za x_P tedy obdržíme

$$y_Q^2 = d^2 - v^2 - x_P^2\,; \tag{3}$$

vzhledem ke (2) je tedy $y_Q^2 \geqq 0$, takže číslo y_Q vždy existuje a tím i bod $Q \equiv [0, y_Q, v]$. Vzdálenost PQ obou bodů $P \equiv [x_P, 0, 0]$, $Q \equiv [0, y_Q, v]$, kde x_P je libovolné číslo, o němž platí (2), a y_Q je číslo dané vztahem (3), je rovno

$$\sqrt{x_P^2 + y_Q^2 + v^2}\,.$$

Dosadíme-li sem za y_Q^2 ze vztahu (3), zjistíme, že tato vzdálenost je skutečně d.

Výsledek. Všechny body P, které vyhovují úloze, vyplní na přímce p úsečku P_1P_1' velikosti $2\sqrt{d^2 - v^2}$, která má bod A za střed.

b) I. Buď $PQ = d$ úsečka, která vyhovuje úloze; při předchozím označení střed S této úsečky má souřadnice

$$x_S = \frac{1}{2}\,x_P\,, \quad y_S = \frac{1}{2}y_Q\,, \quad z_S = \frac{1}{2}\,v\,. \tag{4}$$

[Poznámka. Úsečka MN o krajních bodech $M \equiv$ $\equiv [x_1, y_1, z_1]$, $N \equiv [x_2, y_2, z_2]$ má střed S o souřadnicích

$$x_S = \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2),\ y_S = \frac{1}{2}\,(y_1 + y_2),\ z_S = \frac{1}{2}\,(z_1 + z_2).]$$

Dosaďme ze (4) za x_S, y_S do (1′); dostaneme

$$\sqrt{(2x_S)^2 + (2y_S)^2 + v^2} = d$$

neboli

$$x_S^2 + y_S^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - v^2}\right)^2, \tag{5}$$

přičemž je zároveň

$$z_S = \frac{1}{2}v\,. \tag{6}$$

Označme T střed úsečky AB; je $T \equiv \left[0,\ 0,\ \frac{1}{2}v\right]$. Dále označme $\tau \parallel \varrho$ rovinu jdoucí bodem T. Ze vztahů (5), (6) plyne, že bod S leží na kružnici $k \equiv \left(T, \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - v^2}\right)$, která leží v rovině τ.

II. Obráceně, daný bod $S \equiv \left[x_S,\ y_S,\ \frac{1}{2}v\right]$, kde $|x_S| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - v^2}$ je libovolné číslo a y_S splňuje (5), je zřejmě bodem kružnice k. Pro jeho souřadnici y_S platí

$$y_S^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - v^2}\right)^2 - x_S^2\,, \tag{7}$$

takže je y_S vždy číslo reálné. Uvažujme body $P \equiv [2x_S, 0, 0]$, $Q \equiv [0, 2y_S, v]$; o jejich vzdálenosti δ platí

$$\delta = \sqrt{4x_S^2 + 4y_S^2 + v^2}\,.$$

Dosaďme sem za y_S^2 ze vztahu (7); dostaneme $\delta = d$. Protože body P, Q leží pořadě na přímkách p, q, vyhovuje úsečka PQ požadavkům úlohy. Podařilo se nám ke zvolenému bodu S sestrojit úsečku PQ o daném středu S.

Výsledek. Středy všech úseček, které splňují požadavky úlohy, vyplňují kružnici $k \equiv \left(T, \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - v^2}\right)$, kde T je střed úsečky AB; tato kružnice k leží v rovině τ, která je kolmá k úsečce AB a prochází jejím středem T.

Podle řešení s. Zdislava Kovaříka, 10.a tř. jsš, Hodonín.

4. Úlohy I. kola kategorie B

1. Určete všechna reálná čísla p tak, aby rovnice

$$\frac{px}{x + p} + \frac{x + 1}{x - p} = -1$$

měla jeden kořen $x = 2$. Vypočtěte pak všechny kořeny této rovnice.

Řešení. Jestliže existuje číslo p, které vyhovuje úloze, pak platí

$$\frac{2p}{2 + p} + \frac{3}{2 - p} = -1.$$

Odtud plyne

$$4p - 2p^2 + 6 + 3p = p^2 - 4$$

čili

$$3p^2 - 7p - 10 = 0.$$

Poslední rovnice má kořeny

$$p_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{6} = \frac{7 \pm 13}{6} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3} \\[2ex] -\dfrac{6}{6} = -1. \end{array} \right.$$

Provedeme nyní *zkoušku* pro každé z čísel p_1, p_2 odděleně; přitom vypočteme pro tato čísla p všechny kořeny dané rovnice.

Případ [1]. Pro $p = \frac{10}{3}$ má daná rovnice tvar

$$\frac{\frac{10}{3}x}{x + \frac{10}{3}} + \frac{x + 1}{x - \frac{10}{3}} = -1$$

čili

$$\frac{10x}{3x + 10} + \frac{3x + 3}{3x - 10} = -1.$$

Budeme ji řešit; dostaneme postupně

$$10x(3x - 10) + (3x + 3)(3x + 10) = 100 - 9x^2,$$
$$30x^2 - 100x + 9x^2 + 9x + 30x + 30 = 100 - 9x^2,$$
$$48x^2 - 61x - 70 = 0.$$

Diskriminant této rovnice je

$D = 61^2 + 4 . 48 . 70 = 3721 + 13\,440 = 17\,161 = 131^2$;

dále je

$$x_{1,2} = \frac{61 \pm 131}{2 . 48} \begin{cases} \dfrac{192}{2 . 48} = \dfrac{96}{48} = \dfrac{12}{6} = 2 \\[2ex] -\dfrac{70}{2 . 48} = -\dfrac{35}{48}. \end{cases}$$

Případ [2]. Pro $p = -1$ má daná rovnice tvar

$$\frac{-x}{x - 1} + \frac{x + 1}{x + 1} = -1. \qquad (*)$$

Má-li rovnice (*) řešení, můžeme ji přepsat na tvar

$$-\frac{x}{x - 1} + 1 = -1$$

čili
$$-\frac{x}{x-1}=-2.$$
Odtud
$$\frac{x}{x-1}=2,$$
$$x=2x-2,$$
$$x=2.$$
Zkouškou se snadno přesvědčíme o správnosti vypočtených kořenů.

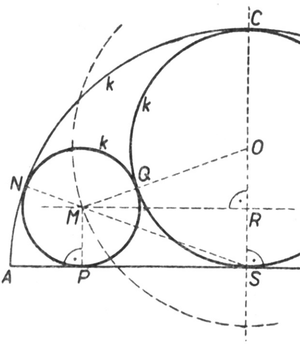
Závěr. Daná rovnice má kořen $x=2$ pro každé z čísel $p=\frac{10}{3}$, $p=-1$ a pro žádné jiné.

2. Nad úsečkou $AB=2a$ jako průměrem sestrojme polokružnici k_1 o středu S. Označme $SC\perp AB$ poloměr kružnice k_1 a nad úsečkou SC jako průměrem sestrojme kružnici k_2 se středem O.

Sestrojte kružnici k, která se dotýká polokružnice k_1, kružnice k_2 a přímky AB. Vypočtěte její poloměr pomocí daného čísla a.

Řešení (obr. 29). Bod C je bodem dotyku kružnice $k_2\equiv\left(O,\frac{1}{2}a\right)$ a polokružnice k_1 o poloměru a. Kružnice k_2 leží zřejmě v polokruhu (k_1), který je omezen polokružnicí k_1 a jejím průměrem AB. Kružnice k nemůže proto ležet uvnitř kružnice k_2 a splňovat požadavky textu úlohy (pak by bylo $k\equiv k_2$). Dotýkají se tedy kružnice k, k_2 vně.

Dokážeme nyní, že kružnice k (pokud ovšem existuje) nutně leží v polokruhu (k_1). Kdyby tomu tak nebylo, musila by se kružnice k dotýkat kružnice k_2 v bodě C anebo v bodě S (jen v těchto bodech by se totiž kružnice k mohla dotýkat kružnice k_2). Avšak žádná z kružnic, které se dotýkají kružnice k_2 v bodě C nebo v bodě S a leží vně kruhu (k_2), nesplňuje všechny požadavky textu úlohy. Tím je důkaz proveden.



Obr. 29

Hledaná kružnice k leží tedy v polokruhu (k_1) a vně kružnice k_2. Tato oblast roviny se rozpadá ve dvě části. Tyto části přecházejí jedna v druhou osovou souměrností vzhledem k ose SOC souměrnosti; to plyne z toho, že polokružnice k_1, přímka AB a kružnice k_2 mají přímku SOC za osu souměrnosti. V dalším se omezíme na jednu z těchto částí uvažované oblasti.

Předpokládejme, že kružnice $k \equiv (M, x)$ existuje. Označme pořadě N, P, Q dotykové body kružnice k s čarami k_1, AB, k_2; tyto body musí být vesměs navzájem různé. Protože kružnice k, k_2 mají vnější dotyk, odděluje bod Q body M, O. Dále je $MP \perp AB$, $OS \perp \perp AB$. Protože je nutně $P \not\equiv S$, vzniká čtyřúhelník $PSOM$, v němž je

$$\sphericalangle P = \sphericalangle S = 90°,$$

$$MO = \frac{1}{2}a + x, \; MP = x, \; PS = y, \; OS = \frac{1}{2}a. \quad (1)$$

Veďme přímku $MR \parallel PS$, kde R je vnitřním bodem úsečky SO (bod R nemůže zřejmě padnout na úsečku OC, jak se snadno usoudí, uvažujeme-li kružnice vepsané do polokruhu (k_1) a porovnáme-li velikosti jejich poloměrů s číslem $\frac{1}{2}a$). Pak v trojúhelníku MOR je $\sphericalangle R = 90°$ a podle Pythagorovy věty dostaneme $MO^2 = MR^2 + OR^2$, kde $OR = OS - RS = OS - MP = \frac{1}{2}a - x$, $MR = PS = y$; po dosazení z (1) a za OR dostaneme

$$\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}a - x\right)^2$$

neboli postupně

$$\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 = y^2,$$

$$\left(\frac{1}{2}a + x - \frac{1}{2}a + x\right)\left(\frac{1}{2}a + x + \frac{1}{2}a - x\right) = y^2,$$

$$2ax = y^2\,. \tag{2}$$

Z vnitřního dotyku kružnice k, k_1 plyne, že bod M odděluje body N, S, a o trojúhelníku MSP platí: $\sphericalangle P = 90°$, $MS = NS - NM = a - x$, $MP = x$, $PS = y$; podle Pythagorovy věty dostaneme $MS^2 = MP^2 + PS^2$ neboli

$$(a - x)^2 = x^2 + y^2$$

a po zjednodušení

$$a^2 - 2ax = y^2\,. \tag{3}$$

Porovnáním výsledků (2), (3) dostaneme

$$a^2 - 2ax = 2ax$$

neboli postupně (nutně je $a \neq 0$)

$$a^2 = 4ax,$$

$$x = \frac{1}{4}a.$$

Je tedy bod R středem úsečky OS.

Na základě tohoto výsledku provedeme snadno *konstrukci*, kterou pro stručnost a snadnost nepopisujeme a nedokazujeme.

Diskuse. Ve zvolené části oblasti, kterou jsme popsali v rozboru, jsme určili jednu kružnici k požadovaných vlastností. Podle toho, co bylo řečeno v rozboru, existuje ještě další taková kružnice k', která je obrazem kružnice k v souměrnosti o ose SOC. Úloha má tedy právě dvě řešení.

3. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{|x| - 1}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

Riešenie. Najprv stanovíme, čo musí platiť o reálnom čísle x, ktoré je riešením nerovnosti (1).

Zlomok na ľavej strane danej nerovnosti (1) má zmysel pre všetky reálne čísla x, pre ktoré je $x^2 - 1 \neq 0$; pre také čísla x, pre ktoré je $x^2 - 1 = 0$, t. j.

$$(x - 1)(x + 1) = 0,$$

nemá tento zlomok význam. V ďalšom teda predpokládáme, že je

$$x \neq 1 \quad \text{alebo} \quad x \neq -1. \tag{2}$$

Ďalej si všimnime, že zlomok na ľavej strane nerovnosti (1) sa rovná zlomku, ktorý dostaneme, keď do ľavej strany tejto nerovnosti dosadíme namiesto čísla x číslo $-x$ [je totiž $|x| = |-x|$, $x^2 = (-x)^2$]. Z toho vyplýva, že sa pri našej úvahe môžeme obmedziť na čísla $x \geqq 0$. Pre také číslo platí $|x| = x$ a nerovnosť (1) môžeme písať v tvare

$$\frac{x-1}{x^2-1} \geqq \frac{1}{2}$$

alebo postupne

$$\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \geqq \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Obe strany poslednej nerovnosti znásobíme číslom $2(x+1)$, ktoré je zrejme kladné; dostaneme

$$2 \geqq x + 1$$

t. j.

$$1 \geqq x.$$

Z oboch predpokladov $x \geqq 0$, $x \neq 1$ a z posledného výsledku vyplýva, že z nezáporných čísel môžu vyhovovať danej nerovnosti (1) len čísla intervalu

$$0 \leqq x < 1.$$

Teraz dokážeme, že všetky tieto čísla sú riešením nerovnosti (1).

Pre čísla x z tohto intervalu má zlomok na ľavej strane (1) skutočne zmysel. Pritom platí postupne

$$\frac{|x|-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Číslo $x + 1$ je však menšie než 2 a preto je číslo $\frac{1}{x+1}$ väčšie než $\frac{1}{2}$, takže nerovnosť (1) je splnená (zrejme bez prípadu rovnosti). Tým je dôkaz hotový.

Povedali sme už, že ak je číslo x riešením nerovnosti (1), je riešením aj číslo $-x$; preto sú aj čísla x intervalu

$$-1 < x \leqq 0$$

riešením nerovnosti (1).

Záver. Každé číslo x intervalu

$$-1 < x < 1$$

je riešením nerovnosti (1) a žiadne iné číslo nie je riešením tej nerovnosti. Tým je úloha rozriešená.

4. Nech je daný obdĺžnik $ABCD$, pre ktorý platí $AB = 4r$, $BC = 2r$, kde r je dané kladné číslo. Označme X taký bod obdĺžnika $ABCD$, t. j. bod jeho obvodu alebo vnútra, ktorým prechádzajú dve rôzne kružnice s polomerom r, ktorých všetky body patria danému obdĺžniku. Čo vyplnia všetky body X majúce práve opísanú vlastnosť?

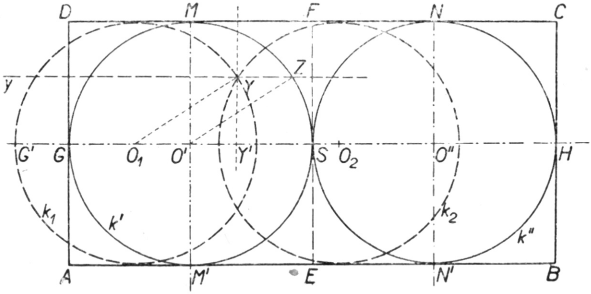
Riešenie. I. Zavedieme označenia podľa obrázku 30, kde GH, EF sú stredné priečky daného obdĺžnika a $k' \equiv (O', r)$, $k'' \equiv (O'', r)$ sú kružnice vpísané štvorcom $AEFD$, $EBCF$. Celý útvar má priamky GH, EF za osi súmernosti a bod S, stred daného obdĺžnika, za stred súmernosti. Preto pri skúmaní všetkých bodov X, o ktorých hovorí text úlohy, stačí, keď sa namiesto obdĺžnika $ABCD$ obmedzíme na body obdĺžnika $GSFD$; o ňom dokážeme, že z jeho bodov prislúchajú množine (X) všetkých bodov X tieto body alebo množiny bodov:

(1) Bod S; (2) vnútro menšieho oblúka $\widehat{SM}$ kružnice k'; (3) vnútro úsečky SF; (4) vnútorné body štvorca $O'SFM$, pokiaľ ležia zvonku kružnice k'.

II. Všimnime si tieto fakty: Dvojice zhodných kružníc (t. j. ležiacich v tej istej rovine a navzájom rôznych), ktoré majú spoločný bod (t. j. aspoň jeden), možno rozdeliť do dvoch tried:

(a) Kružnice dvojice sa zvonku dotýkajú a majú spoločný jediný bod, totiž stred ich strednej.

(b) Kružnice dvojice majú spoločné body $Y \neq Y_0$, pričom na osi úsečky YY_0 ležia stredy O_1, O_2 oboch kružníc a to tak, že priamka YY_0 je osou strednej O_1O_2.



Obr. 30

III. Vráťme sa k danej úlohe. Stredy všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú oboch priamok $AB \parallel DC$, ležia na priamke GH. Do triedy (a) dvojíc kružníc, ktoré sa dotýkajú oboch priamok AB, DC, patrí (pozri obr. 30) dvojica k', k'' a žiadna iná dvojica, ako vidieť z toho, keď túto dvojicu posunieme o akúkoľvek dĺžku (nenulovú), či v zmysle polpriamky SG, alebo SH. Z úsečky GS patrí do množiny (X) jedine bod S. Tiež je zrejmé, že žiadny bod úsečky DF nepatrí do (X). Každým z nich prechádza jediná kružnica s polomerom r a dotýkajúca sa priamok AB, DC. Ďalšie body X dostaneme teda len pomocou triedy (b) dvojíc našich kružníc s polomerom r a dotýkajúcich sa priamok AB, DC.

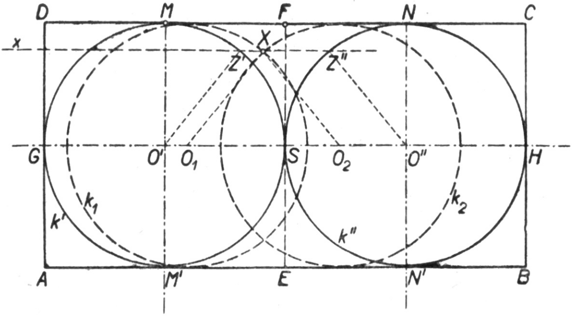
Uvažujme teraz o množine (Y) bodov, ktorá sa skladá z týchto bodov: vnútrajška úsečky GD, vnútrajška štvorca $GO'MD$, vnútrajška úsečky $O'M$, vnútrajška štvrťkruhu so stredom O' a polomerom r, a to toho štvrťkruhu, ktorý leží v štvorci $O'SFM$. Ľubovoľný bod tejto množiny (Y) označíme Y. Pretože vzdialenosť bodu Y od priamky GS je kladná a menšia než r, prechádza ním dvojica kružníc $k_1 \equiv (O_1, r)$, $k_2 \equiv (O_2, r)$ triedy (b), ktoré sa dotýkajú priamok AB, DC. Označenie zvoľme tak, aby polpriamky O_1O_2, GS mali ten istý zmysel.

Bodom Y veďme priamku $y \parallel GS$ a jej (jediný) spoločný bod s vnútrajškom menšieho oblúka $\widehat{SM}$ kružnice k' označme Z; polpriamka YZ má ten istý zmysel ako polpriamka GS. Kružnicu k_1, príslušnú k bodu Y, dostaneme posunutím kružnice k' o úsečku ZY v práve napísanom zmysle (jej stred O_1 padne totiž zrejme „naľavo" od päty kolmice Y', vedenej bodom Y k priamke GS). Týmto posunutím prejde bod G v bod G', ktorý zrejme leží zvonku obdĺžnika $ABCD$. Žiadny bod množiny (Y) nepatrí do hľadanej množiny (X).

IV. Zostáva dokázať, že každý bod množín (2), (3), (4) patrí k hľadanej množine (X). Označme X ľubovoľný bod tejto množiny (obr. 31) a veďme ním priamku $x \parallel GS$. Jej jediný spoločný bod s menším oblúkom $\widehat{SN}$ kružnice k' označme Z' a jej jediný spoločný bod s menším oblúkom $\widehat{SN}$ kružnice k'' označme Z''. Buď je $X \equiv Z'$, buď leží bod X vnútri úsečky $Z'Z''$, ako sa ľahko usúdi.

Kružnicu $k_1 \equiv (O_1, r)$, idúcu bodom X a dotýkajúcu sa priamok AB, CD, dostaneme posunutím kružnice k' o dĺžku $Z'X > 0$ v tomto zmysle. Pretože je $Z'X < r$, leží obraz S' bodu S v tomto posunutí vnútri úsečky SO'' a kružnica k_1 leží teda v obdĺžniku $ABCD$. Ak je $Z' \equiv X$, je k_1 práve kružnica k'.

Kružnicu $k_2 \equiv (O_2, r)$, idúcu bodom X a dotýkajúcu sa priamok AB, DC, dostaneme posunutím kružnice k'' o dĺžku $Z''X$ v tomto zmysle. Pritom je $Z''X < MN$, čiže $Z''X < 2r$. Preto obraz S'' bodu S v tomto posunutí leží vnútri úsečky GS a kružnica k_2 leží teda v obdĺžniku $ABCD$. Tým je dôkaz hotový.



Obr. 31

Odpoveď. Všetky body X tvoria množinu (X), ktorá sa skladá z tých vnútorných bodov obdĺžnika $ABCD$, ktoré majú tieto vlastnosti:

(1) žiaden neleží na obvode obdĺžnika $ABCD$;
(2) žiaden neleží v niektorom z obdĺžnikov $AM'MD$, $N'BCN$;
(3) žiaden neleží vnútri niektorého z kruhov ohraničených kružnicou k' alebo k''.

5. Buďte a, b daná reálná čísla. Řešte rovnici

$$\frac{x}{x-a^2} - \frac{x}{x-b^2} = \frac{(a^2-b^2)(1-x^2)}{(x-a^2)(x-b^2)} \qquad (1)$$

o neznámé x a proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům a, b.

Řešení. Jestliže číslo x je řešením rovnice (1), potom musí o tomto čísle především platit $x - a^2 \neq 0$, $x - b^2 \neq 0$, jinak by alespoň jeden ze zlomků v rovnici (1) neměl význam. V dalším předpokládáme, že o čísle x platí

$$x \neq a^2, \quad x \neq b^2. \tag{2}$$

Obě strany rovnice (1) znásobme číslem

$$(x - a^2) . (x - b^2);$$

dostaneme postupně

$$x[x - b^2 - (x - a^2)] = (a^2 - b^2)(1 - x^2),$$

$$(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - b^2)x - (a^2 - b^2) = 0. \tag{3}$$

Rozeznávejme dvě možnosti:

Případ [1]. Nechť je $a^2 - b^2 = 0$ neboli

$$(a - b) . (a + b) = 0,$$

což znamená, že je $a = b$ anebo $a = -b$. Potom je rovnice (3) splněna pro každé číslo x. Řešením rovnice (1) je každé číslo $x \neq a^2$, tj. číslo, o němž platí vztahy (2). Skutečně rovnice (1) má pro $a^2 - b^2 = 0$ tvar

$$\frac{x}{x - a^2} - \frac{x}{x - a^2} = 0$$

a ta je splněna pro každé $x \neq a^2$.

Případ [2]. Nechť je $a^2 - b^2 \neq 0$. Potom znásobme obě strany rovnice (3) číslem $\dfrac{1}{a^2 - b^2} \neq 0$; obdržíme

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Diskriminant D této rovnice je

$$D = 1 - 4 . (-1) = 5$$

a její kořeny jsou

$$x_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) > 0, \; x_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) < 0. \quad (4)$$

Čísla $x = x_1$, $x = x_2$ jsou zřejmě kořeny rovnice (3), od níž dospějeme k rovnici (1) znásobením obou stran rovnice (3) číslem $\frac{1}{(x - a^2)(x - b^2)}$, pokud má tento zlomek smysl.

Toto číslo existuje, jestliže platí vztahy (2). Musí tedy platit

$$x \neq a^2, \; x \neq b^2 .$$

Pro kořen $x = x_2$ jsou tyto vztahy vždy splněny, neboť čísla a^2, b^2 jsou nezáporná, kdežto $x_2 < 0$.

Naproti tomu pro kořen $x = x_1 > 0$ může nastat případ

$$a^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \text{ nebo } b^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \; ;$$

to nastane, jestliže je

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})} \text{ nebo } b = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})} . \quad (5)$$

Závěr. [1] Je-li $a = b$ anebo $a = -b$, je řešením rovnice (1) každé číslo x, o němž platí $x \neq a^2$.

[2] Je-li $a \neq b$, $a \neq -b$, potom je číslo

$$x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$$

řešením rovnice.

Jestliže je každé z čísel a, b různé od čísla

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})},$$

potom má rovnice (1) ještě řešení

$$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}),$$

kdežto jinak nikoli.

6. Trojúhelníkové pravítko z umělé hmoty má tvar pravoúhlého trojúhelníka ABC, jehož vnitřek je z části vyříznut a má rovněž tvar pravoúhlého trojúhelníka $A'B'C'$. Přitom šířky pásů omezených dvojicemi rovnoběžek $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$ jsou si rovny; označme je m. Jsou dány obě odvěsny $a = BC$, $b = CA$ trojúhelníka ABC.

Dokažte, že trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou stejnolehlé, a určete střed S stejnolehlosti. Koeficient k této stejnolehlosti vyjádřete pomocí čísel a, b, m a rozhodněte, v jakých mezích při daných číslech a, b musí ležet číslo m.

Potom stanovte číslo m tak, aby pravítko po vyříznutí otvoru $A'B'C'$ mělo váhu o 25 procent menší, než kdyby bylo plné, tj. bez otvoru.

Řešení (viz obr. 32; vylučujeme možnost, že by polopřímky AB, $A'B'$ byly nesouhlasně rovnoběžné). Označme $v' \equiv (S, \varrho')$ kružnici vepsanou hledanému trojúhelníku $A'B'C'$ a dále pořadě X', Y', Z' její dotykové body se stranami $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Je tedy

$$SX' \perp B'C', \ SY' \perp C'A', \ SZ' \perp A'B';$$

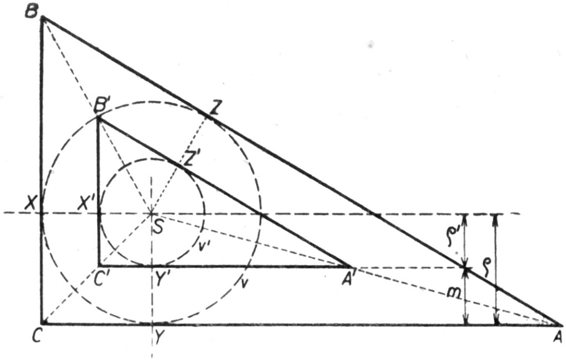
protože příslušné strany trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ jsou souhlasně rovnoběžné, platí též

$$SX' \perp BC, \ SY' \perp CA, \ SZ' \perp AB. \qquad (1)$$

Označme X, Y, Z paty právě zapsaných kolmic jako v obrázku; potom podle textu úlohy je $XX' = YY' = ZZ' = m$, a protože je $SX' = SY' = SZ' = \varrho'$, platí též

$$SX = SY = SZ = \varrho' + m. \qquad (2)$$

Kružnice $v \equiv (S, \varrho = \varrho' + m)$ je vzhledem ke vztahům (1), (2) kružnicí vepsanou trojúhelníku ABC. Uvažujme stejnolehlost (S) o středu S a konstantě $\frac{\varrho}{\varrho'}$



Obr. 32

stejnolehlosti; v této stejnolehlosti přechází kružnice v' i se svými tečnami $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ a příslušnými dotykovými body X', Y', Z' v kružnici v s jejími příslušnými tečnami BC, CA, AB i s jejich příslušnými dotykovými body X, Y, Z. Proto jsou oba trojúhelníky $A'B'C'$, ABC stejnolehlé ve stejnolehlosti (S) a obráceně trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti (S') obrácené k (S); její střed je S a konstanta k stejnolehlosti je $\frac{\varrho'}{\varrho}$ neboli $\frac{\varrho - m}{\varrho}$. Je tedy

$$k = \frac{\varrho - m}{\varrho}. \tag{3}$$

Protože musí být $k > 0$, plyne z toho požadavek na dané kladné číslo m,

$$m < \varrho. \tag{3'}$$

Konstantou k a středem S je stejnolehlost (S') zcela určena.

Označme $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$, $AB = c$; potom ze stejnolehlosti (S') a z Pythagorovy věty plyne

$$a' = ka, \quad b' = kb, \quad c' = kc, \quad \text{kde} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{4}$$

Pro obsahy P, P' uvažovaných trojúhelníků platí

$$P = \frac{1}{2}\,ab, \quad P' = \frac{1}{2}\,a'b' = k^2P \tag{5}$$

a tedy
$$\frac{P'}{P} = k^2\,. \tag{6}$$

Obsah trojúhelníka ABC lze vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků SAB, SBC, SCA, tj. $\frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho + \frac{1}{2}\,c\varrho$ neboli $\frac{1}{2}\,\varrho(a + b + c)$; porovnáním s prvním vztahem (5) dostaneme

$$\varrho = \frac{ab}{a + b + c}\,.$$

Protože $k = \frac{\varrho - m}{\varrho}$ neboli $k = 1 - \frac{m}{\varrho}$, lze konstantu k vyjádřit takto:

$$k = 1 - \frac{m(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\,)}{ab}\,,$$

kde však musí být

$$m < \frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}\,;$$

jinak by úloha neměla řešení. Tím je dáno omezení čísla $m > 0$.

Má-li se váha pravítka snížit vyříznutím otvoru o 25 %, musí platit

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{4}$$

a vzhledem k (6)

$$k^2 = \frac{1}{4}$$

neboli

$$k = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Ze vztahu (3) plyne $m = \varrho - k\varrho$ neboli $m = \varrho(1 - k)$ a tedy

$$m = \frac{1}{2}\varrho .$$

Poznámka. Pomocí výsledku (7) bychom snadno provedli konstrukci trojúhelníka $A'B'C'$.

7. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{x+p}{y+p} = a, \qquad \frac{x-p}{y-p} = b, \tag{1}$$

kde x, y jsou neznámé a p je dané reálné číslo.

Řešení. Nechť dvojice čísel (x, y) je řešením dané soustavy (1), takže zlomky v rovnicích (1) mají význam. Znásobme obě strany rovnic (1) čísly $y + p$, $y - p$. Dostaneme postupně soustavy:

$$\begin{aligned} x + p &= ay + ap, & x - p &= by - bp, \\ x - ay &= ap - p, & x - by &= p - bp. \end{aligned} \tag{2}$$

Po odečtení příslušných stran rovnic soustavy (2) dostaneme

$$y(b - a) = p(a + b - 2). \tag{3}$$

Rozeznávejme dvě možnosti:

Případ [1]. Nechť je $b - a = 0$ neboli

$$a = b\,. \tag{4}$$

Potom daná soustava (1) zní

$$\frac{x+p}{y+p} = a, \qquad \frac{x-p}{y-p} = a. \tag{5}$$

Musí tedy platit

$$\frac{x+p}{y+p} = \frac{x-p}{y-p}$$

neboli

$$(x+p)(y-p) = (x-p)(y+p)$$

a tedy

$$-px = -py\,. \tag{6}$$

Jsou dvě možnosti [a], [b]:

[a] Je $p = 0$; pak soustava (5) zní

$$\frac{x}{y} = a, \qquad \frac{x}{y} = a$$

neboli redukuje se na rovnici

$$\frac{x}{y} = a\,.$$

Číslo y zřejmě musí být různé od nuly, tj.

$$y \neq 0\,.$$

Číslo x je pak dáno vztahem $x = ay$, kde $y \neq 0$ je libovolné.

[b] Je $p \neq 0$. Potom ze vztahu (6) plyne, že nutně je $y = x$. Po dosazení do prvé rovnice (5) dostaneme $\dfrac{x+p}{x+p} = a$ neboli nutně $a = 1$.

Jestliže je $a = b = 1, p \neq 0$, má soustava (1) tvar

$$\frac{x+p}{y+p} = 1, \qquad \frac{x-p}{y-p} = 1$$

a je skutečně splněna pro každou dvojici $(x, y = x)$ čísel, pokud je $x \pm p \neq 0$ neboli pokud je

$$x \neq \pm p;$$

pro $a = b = 1$, $y = x \neq \pm p \neq 0$ jsou totiž oba předchozí zlomky zřejmě rovny jedné.

Případ [2]. Nechť je $b - a \neq 0$, tj. $a \neq b$. Potom ze vztahu (3) dostaneme

$$y = \frac{p}{b-a}(a + b - 2). \tag{7}$$

Po dosazení do druhé rovnice soustavy (2) dostaneme postupně

$$x = p - bp + \frac{bp(a + b - 2)}{b - a} =$$

$$= \frac{1}{b-a}(bp - b^2p - ap + abp + abp + b^2p - 2bp) =$$

$$= \frac{p}{b-a}(2ab - a - b),$$

tj.

$$x = \frac{p}{b-a}(2ab - a - b). \tag{8}$$

Jestliže dvojice (x, y) čísel je řešením soustavy (1) a platí $b - a \neq 0$, potom je to jedině dvojice čísel daných vztahy (8), (7). Dosaďme tato čísla do levých stran rovnic (1); dostaneme postupně (příslušné zlomky hned rozšíříme číslem $b - a \neq 0$):

I. Dosazení do levé strany první rovnice (1) je:

$$L_1 = \frac{(x+p)(b-a)}{(y+p)(b-a)} =$$

$$= [p(2ab - a - b) + p(b - a)] :$$

$$: [p(a + b - 2) + p(b - a)] = \frac{2ap(b-1)}{2p(b-1)} .$$

Odtud je patrno, že musí současně platit $p \neq 0$, $b - 1 \neq \neq 0$ neboli

$$p \neq 0, \tag{9}$$

$$b \neq 1. \tag{10}$$

Za těchto předpokladů je zřejmě $L_1 = a$ a dvojice (x, y) vyhovuje první rovnici (1).

II. Dosazení do levé strany druhé rovnice soustavy (1) je

$$L_2 = \frac{2bp(a-1)}{2p(a-1)} .$$

Nutně musí být $p \neq 0$, $a - 1 \neq 0$ neboli

$$p \neq 0,$$

$$a \neq 1.$$

Za těchto předpokladů je $L_2 = b$ a dvojice (x, y) vyhovuje druhé rovnici (1).

Závěr. [1]. Jestliže je $a = b$, $p = 0$, je řešením dané soustavy dvojice

$$(x = ay, y),$$

kde $y \neq 0$ je libovolně zvolené číslo.

[2]. Jestliže je $a = b = 1$, $p \neq 0$, je řešením dané soustavy dvojice

$$(x, y = x) ,$$

kde $x \neq \pm p$ je libovolné číslo.

[3]. Jestliže je $a \neq b$, $p \neq 0$, přičemž každé z čísel a, b je různé od čísla 1, je řešením dané soustavy dvojice (x, y) daná vztahy (8), (7).

Jinak nemá soustava řešení.

Poznámka. Soustava tedy nemá řešení, jestliže současně platí:

1. $a = b \neq 1, p \neq 0$;
2. $a \neq b, p = 0$;
3. $p \neq 0, a = 1, b \neq 1$;
4. $p \neq 0, a \neq 1, b = 1$.

8. V rovině buďte dány dvě shodné kružnice $k_1 \equiv \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$, které se navzájem dotýkají; označme t jednu ze společných vnějších tečen těchto kružnic.

V polorovině tS_1 sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala obou daných kružnic k_1, k_2 a přímky t.

Řešení proveďte dvěma odlišnými způsoby.

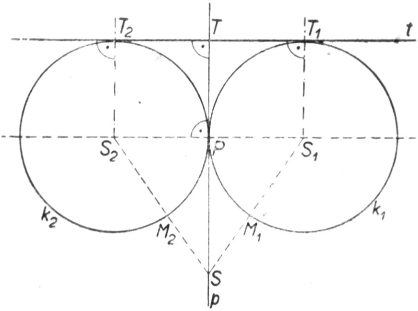
Řešení. Nejprve vyšetříme, jakou polohu musí mít hledaná kružnice $k \equiv (S, x)$ vzhledem k daným kružnicím $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$ a k dané přímce t, která je vnější tečnou kružnic k_1, k_2. Na základě toho provedeme potom dvě řešení úlohy. První bude mít početní ráz, druhé se opírá o stejnolehlost útvarů v rovině.

Označme p osu úsečky S_1S_2, P dotykový bod kružnic k_1, k_2 (viz ostatně obr. 33). Předpokládejme, že jsme našli kružnici k, která vyhovuje požadavkům úlohy. Tato kružnice nutně leží v polorovině ϱ, vyťaté přímkou t, a to zároveň s oběma kružnicemi k_1, k_2. Kružnice k_1, k se musí dotýkat vně. Kdyby se dotýkaly uvnitř, musila by kružnice k ležet uvnitř kružnice k_1 a dotýkala by se pak kružnice k_2 v bodě P; tu by vzhledem k tomu, že se má dotýkat přímky t, splynula s k_1. Rovněž i k, k_2 jsou různé kružnice. Proto kružnice k neprochází bodem P. O úsečkách SS_1, SS_2 vzhledem k vnějšímu dotyku platí

$$SS_1 = r + x, \qquad SS_2 = r + x$$

neboli

$$SS_1 = SS_2;$$



Obr. 33

přitom je x velikost poloměru (vzdálenost bodu S od přímky t).

Leží tedy bod S na ose souměrnosti p celého útvaru složeného z kružnic k_1, k_2 a přímky $t \perp p$ (označme $T \equiv p \,.\, t$).

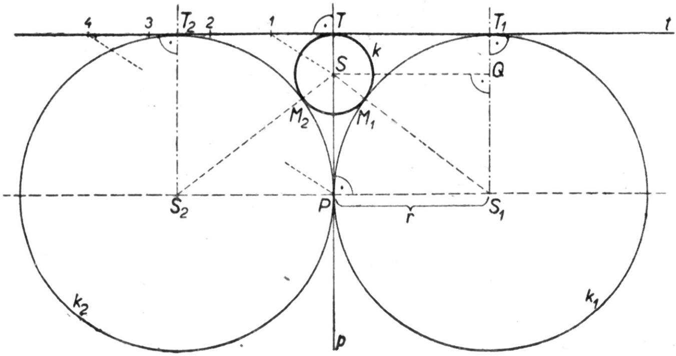
Bod S neleží na prodloužení úsečky TP za bod P (viz obr. 33). Kdyby tam totiž ležel, pak by platilo $SS_1 = x + r < SP + PS_1 = SP + PT = x$ (přepona SS_1 trojúhelníka SS_1P je menší než součet odvěsen) neboli $x + r < x$, což je vzhledem k tomu, že $x > 0$, spor.

Jestliže tedy kružnice k existuje, pak bod S leží uvnitř úsečky PT (viz obr. 34).

Nyní již přejdeme k jednotlivým postupům řešení.

Řešení I. Sestrojme obdélník STT_1Q. Potom o pravoúhlém trojúhelníku SS_1Q s přeponou SS_1 platí (obr. 34 a 35)

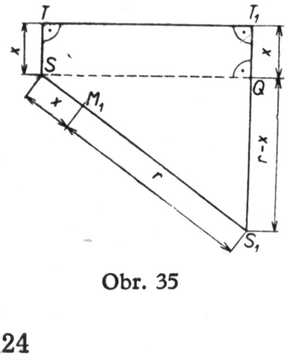
$$SS_1 = x + r, \; SQ = r, \; QS_1 = r - x;$$



Obr. 34

podle Pythagorovy věty dostaneme $SS_1^2 = SQ^2 + QS_1^2$ neboli

$$(x + r)^2 = r^2 + (r - x)^2.$$



Obr. 35

Odtud obdržíme

$$4rx = r^2,$$

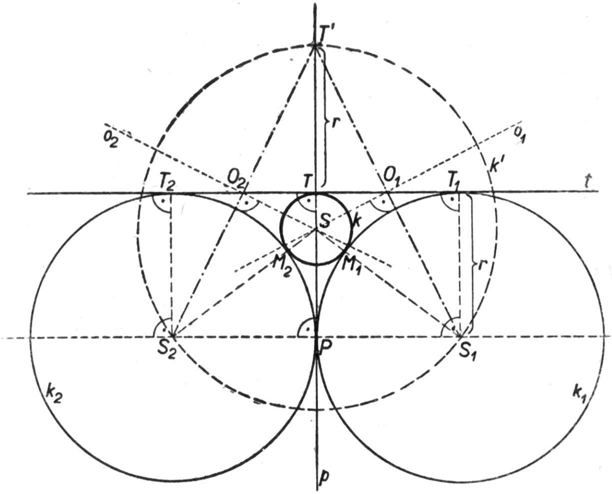
a protože musí být $r > 0$, máme konečně

$$x = \frac{1}{4} r .$$

Jestliže tedy má úloha řešení, leží bod S uvnitř úsečky PT a platí $TS = \frac{1}{2} r$. Odtud snadno plyne konstrukce, její důkaz i diskuse, z níž plyne, že úloha má jediné řešení; to nebudeme provádět.

Řešení II (obr. 36). *Rozbor.* Víme, že bod S musí padnout dovnitř úsečky PT. Přitom je

$$SM_1 = SM_2 = ST = x\,.$$



Obr. 36

Sestrojme na polopřímce ST úsečku $ST' = ST + r$, tj. $TT' = r$. Pak je

$$SS_1 = SS_2 = ST' = x + r$$

neboli

$$\frac{SS_1}{SM_1} = \frac{SS_2}{SM_2} = \frac{ST'}{ST} = \frac{x+r}{r} = \lambda\,,$$

což je konstanta. Jsou tedy trojúhelníky M_1M_2T, S_1S_2T, stejnolehlé vzhledem ke středu S stejnolehlosti při konstantě $\lambda > 0$. Odtud *konstrukce:*

Na polopřímce PT sestrojíme úsečku $PT' = 2r$. Sestrojme střed S kružnice k' trojúhelníku S_1S_2T' opsané (bod S leží na ose p úsečky S_1S_2 a na kolmici $o_1 \perp S_1T'$ vedené společným bodem O_1 přímek t, S_1T', přičemž je $O_1S_1 = O_1T'$, jak se snadno dokáže). Bod S podle konstrukce leží jistě uvnitř polopřímky TP. Ale zřejmě je $\Delta\, O_1TS \sim \Delta\, T'PS_1$ (uu); protože je $PS_1 = r$, $TO_1 = \frac{1}{2}r$, $PT' = 2r$, je

$$TS = PS_1 \,.\, \frac{O_1T}{T'P} = r \,.\, \frac{\frac{1}{2} \,.\, r}{2r} = \frac{1}{4}r.$$

(To je v souhlase s předchozím výsledkem.)

Snadno bychom dokázali, že stejnolehlost o středu S a konstantě $\frac{1}{4}$ převádí trojúhelník S_1S_2T' v trojúhelník M_1M_2T (viz obr. 36) a kružnici $k' \equiv (S, SS_1)$ v hledanou kružnici $k \equiv \left(S, \frac{1}{4}r\right)$; to plyne obráceným postupem naznačeným v rozboru.

9. Daná je kruhová výseč s obsahom P, kde P je dané kladné číslo. Označme x polomer tejto výseče a φ veľkosť (v oblúkovej miere) jej stredového uhla. Určte čísla x, φ tak, aby obvod výseče bol čo najmenší. Urobte skúšku svojho výpočtu.

Riešenie. Výseč s polomerom $x > 0$ a stredovým uhlom φ, kde

$$0 < \varphi < 2\pi\,, \tag{1}$$

má obsah P a obvod p, pričom je

$$P = \frac{1}{2} x^2 \varphi, \tag{2}$$

$$p = 2x + x\varphi . \tag{3}$$

V našom prípade je P dané kladné číslo.

Po dosadení za φ do (3) zo vzťahu (2) dostaneme

$$p = 2x + \frac{2P}{x} .$$

Pravú stranu tohto vzťahu postupne vhodne upravíme:

$$p = \left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{2P}{x}}\right)^2 + 2 \,.\, \sqrt{2x} \,.\, \sqrt{\frac{2P}{x}} ,$$

$$p = \left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{2P}{x}}\right)^2 + 4\sqrt{P}. \tag{4}$$

Na pravej strane tohto vzťahu máme dve čísla. Druhé z nich je $4\sqrt{P}$ a teda konštanta. Prvé z nich závisí od čísla x a je zrejme nezáporné (lebo druhá mocnina reálneho čísla je vždy nezáporná). Číslo p bude teda iste najmenšie, keď prvé číslo

$$\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{2P}{x}}$$

sa bude rovnať nule. Ihneď dokážeme, že také číslo x skutočne existuje, a to jediné.

Riešme rovnicu

$$\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{2P}{x}} = 0 , \tag{5}$$

kde $P > 0$ je dané číslo a x neznáma; pritom je x nevyhnutne kladné číslo (inak by prvá alebo druhá odmocnina na ľavej strane predošlej rovnice nemala význam). Rovnicu upravíme na tvar

$$\sqrt{2x} = \sqrt{\frac{2P}{x}}$$

a obe strany rovnice umocnime na druhú. Dostaneme postupne

$$2x = \frac{2P}{x},$$

$$x^2 = P,$$

$$x = \pm\sqrt{P}.$$

Pretože musí byť $x > 0$, môže byť koreňom rovnice (5) jedine číslo

$$x = \sqrt{P}.$$

Toto číslo skutočne vyhovuje rovnici (5), lebo je

$$\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{2P}{x}} = \sqrt{2\sqrt{P}} - \sqrt{\frac{2P}{\sqrt{P}}} = \sqrt[4]{4P} - \sqrt[4]{\frac{4P^2}{P}} =$$

$$= \sqrt[4]{4P} - \sqrt[4]{4P} = 0.$$

Pre $x = \sqrt{P}$ je podľa (4)

$$p = 4\sqrt{P},$$

čo je minimálna hodnota p.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení dospějeme ke vztahu (3); z něho znásobením obou stran číslem x po snadné úpravě dostaneme

$$2x^2 - px + 2P = 0. \qquad (6')$$

Za předpokladu, že p, P jsou známá čísla, lze odtud vypočítat číslo x; obdržíme

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 16P}}{4}. \tag{6}$$

Pro naše úvahy má smysl jen x kladné; přitom čísla x_1, x_2 jsou reálná právě tehdy, je-li $p^2 - 16P \geqq 0$ (jinak nemá odmocnina ve výrazu (6) smysl) neboli jestliže je

$$p \geqq 4\sqrt{P}, \tag{7}$$

kde $P > 0$ podle textu úlohy. Protože P je dané číslo, plyne ze vztahu (7), že číslo p je nejmenší, jestliže platí

$$p = 4\sqrt{P} \tag{7'}$$

a jestliže zároveň k číslům P, $p = 4\sqrt{P}$ přísluší kladné číslo x. Dosaďme do (6′) za p číslo $4\sqrt{P}$ a vypočtěme příslušné kořeny; protože je $p^2 - 16P = 0$, dostaneme ze (6) výsledek $x = \frac{p}{4}$ neboli vzhledem k (7′)

$$x = \sqrt{P}.$$

Po dosazení tohoto výsledku do (2) obdržíme

$$\varphi = 2.$$

Dvojice hledaných čísel x, φ by tedy mohla jedině být $x_0 = \sqrt{P}$, $\varphi_0 = 2$. Nyní se přesvědčíme, zda tato dvojice splňuje požadavky úlohy.

K této dvojici $x = x_0$, $\varphi = \varphi_0$ podle (3) přísluší $p = p_0$, kde

$$p_0 = 4\sqrt{P}. \tag{8}$$

Dokážeme, že pro kladné číslo $x \neq \sqrt{P}$ je příslušný obvod $p > p_0$: Položme $x = k\sqrt{P}$, kde $k \neq 1$ je kladné číslo; pro p podle (3) dostaneme

$$p = 2\left(k\sqrt{P} + \frac{P}{k\sqrt{P}}\right) \text{ neboli } p = 2\sqrt{P}\left(k + \frac{1}{k}\right)$$

a tedy

$$p = 2\sqrt{P}\,\frac{k^2 + 1}{k}.$$

Porovnejme tento výsledek s číslem p_0 ze vztahu (8); abychom dokázali platnost vztahu $p > p_0$, stačí dokázat, že je $\frac{k^2 + 1}{k} > 2$. Platí rovnost

$$\frac{k^2 + 1}{k} - 2 = \frac{(k - 1)^2}{k},$$

kde zlomek napravo pro kladné $k \neq 1$ je kladný. Proto pro kladné číslo $x \neq \sqrt{P}$ je vždy $p > p_0$, takže pro čísla $x_0 = \sqrt{P}$, $\varphi_0 = 2$ dostaneme skutečně nejmenší obvod, což jsme měli dokázat. Tím je řešení provedeno.

Podle řešení s. Jana Vlčka, 10. tř. jsš, Vimperk.

5. Úlohy II. kola kategorie B

1. Určete reálné číslo p tak, aby rovnice

$$x^2 - p(x - 1) - 9 = 0$$

o neznámé x měla rozdíl kořenů (ve vhodném pořádku) roven šesti. Řešte pak tuto rovnici.

Řešení. Předpokládejme, že takové číslo p existuje. Pak (1) má diskriminant

$$D = p^2 - 4(p - 9) = p^2 - 4p + 36$$

a kořeny

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Absolutní hodnota rozdílu kořenů rovnice (1) je tedy

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{D}\,.$$

Podle úlohy platí

$$\sqrt{p^2 - 4p + 36} = 6\,.$$

Umocněním dostáváme pro číslo p rovnici

$$p^2 - 4p = 0,$$

která o hledaném čísle musí nutně platit.
Její kořeny jsou

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 4\,.$$

Pro p jsou tedy myslitelné dvě hodnoty:

Případ [1]. Je $p_1 = 0$. Rovnice (1) zní

$$x^2 - 9 = 0;$$

její kořeny jsou

$$x_{1,2} = \pm 3;$$

jejich rozdíl je skutečně 6.

Případ [2]. Je $p_2 = 4$. Rovnice (1) zní

$$x^2 - 4x - 5 = 0;$$

její kořeny jsou

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = -1;$$

jejich rozdíl je skutečně 6.

Obě čísla $p_1 = 0$, $p_2 = 4$ tedy vyhovují požadavkům úlohy.

Závěr. Daná rovnice (1) má rozdíl kořenů roven číslu 6, jestliže je číslo p rovno jednomu z čísel 0 nebo 4 a pro žádné jiné číslo.

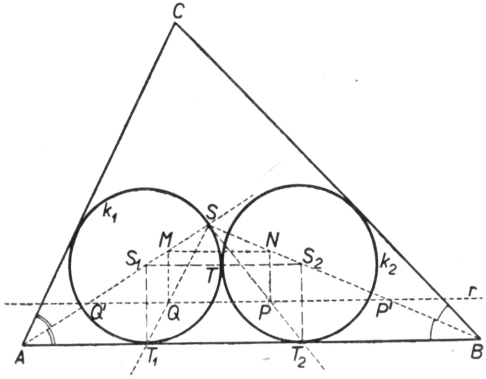
2. Nech je daný trojuholník ABC. Vnútri tohto trojuholníka zostrojte dve zhodné kružnice $k_1 \equiv (S_1, r)$, $k_2 \equiv (S_2, r)$, ktoré sa navzájom dotýkajú, pričom kružnica k_1 sa dotýka priamok CA, AB a kružnica k_2 sa dotýka priamok CB, AB.

Riešenie (obr. 37). *Rozbor*. Nech k_1, k_2 sú hľadané kružnice a T je ich spoločný dotykový bod. Bod T je stredom úsečky $S_1S_2 = 2r$. Označme T_1, T_2 (v tomto poradí) dotykové body kružníc k_1, k_2 s priamkou AB. Platí $S_1T_1 = S_2T_2 = r$. Pritom bod S_1 leží nevyhnutne na osi AS uhla $\sphericalangle CAB$, bod S_2 na osi BS uhla $\sphericalangle ABC$, kde S je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Bod S_1 leží zrejme vnútri úsečky AS a bod S_2 vnútri úsečky BS (iste je $S_1 \not\equiv S \not\equiv S_2$; na predĺžení úsečiek AS, BS za bod S nemôžu body S_1, S_2 ležať, inak by zrejme kružnice k_1, k_2, dotýkajúce sa (v tomto poradí) ramien uhlov $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, nemali vonkajší dotyk). Štvoruholník $S_1T_1T_2S_2$ je obdĺžnik s rozmermi $r = S_1T_1$, $2r = S_1S_2$, t. j. rozmery sú v pomere 1 : 2. Úloha sa dá teda previesť na úlohu: Do trojuholníka SAB vpíšte obdĺžnik $S_1T_1T_2S_2$ tak, aby body S_1, S_2 padli (v tomto poradí) dovnútra úsečiek SA, SB a body T_1, T_2 dovnútra úsečky AB. Túto úlohu vieme riešiť napr. použitím rovnoľahlosti so stredom S (pozri obr. 37), ktorá prevádza pomocný obdĺžnik $MNPQ$ (v ktorom je $MN = 2 \,.\, MQ$, pričom je MN vhodne zvolená úsečka) do obdĺžnika $S_1T_1T_2S_2$. Z toho vyplýva konštrukcia:

Konštrukcia. Vnútri úsečky AS, kde S je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, zvoľme bod M a označme N bod ležiaci vnútri úsečky BS a to taký, že je $MN \parallel AB$. Taký bod N existuje k bodu M práve jeden. V polrovine opačnej k polrovine MNS zostrojme obdĺžnik $MNPQ$, kde $MQ = \frac{1}{2} MN$. Označme T_1, T_2 (v tomto poradí) body, ktoré prislúchajú bodom Q, P v rovnoľahlosti so stredom S, ktorá priraďuje priamke QP priamku AB

(taká rovnoľahlosť existuje zrejme jediná). V tejto rovnoľahlosti prislúchajú bodom M, N (v tomto poradí) body S_1, S_2, ktoré sú stredmi hľadaných kružníc k_1, k_2.

Dôkaz konštrukcie vyplýva z rozboru a urobenej konštrukcie.



Obr. 37

Diskusia. Z predošlého vyplýva, že úloha má vždy práve jedno riešenie. To preto, že obdĺžnik $MNPQ$ leží v uhle $\sphericalangle ASB$, lebo oba uhly $\sphericalangle SAB$, $\sphericalangle SBA$ sú ostré (sú to po rade polovice dutých uhlov $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$) a preto päty Q, P kolmíc vedených (v tomto poradí) bodmi M, N k priamke $r \equiv P'Q' \parallel AB$, kde Q', P' sú (v tomto poradí) vnútorné body polpriamok SA, SB, nevyhnutne padnú dovnútra uhla $\sphericalangle ASB$. Teda aj body T_1, T_2 padnú dovnútra úsečky AB a teda body S_1, S_2 padnú (v tomto poradí) dovnútra úsečiek SA, SB.

Pritom riešenie zrejme nezávisí od voľby pomocného obdĺžnika $MNPQ$.

Tým je riešenie úlohy hotové.

3. Buď p dané reálné číslo. Určete všechna reálná řešení x rovnice

$$\frac{1}{x+p}+\frac{1}{x-p}=1\,. \tag{1}$$

Proveďte diskusi a zkoušku dosazením.

Řešení. Nechť je x řešením rovnice (1); potom postupně platí

$$\frac{x+p+x-p}{(x+p)(x-p)}=1\,,$$

$$\frac{2x}{x^2-p^2}=1\,,$$

$$2x=x^2-p^2\,,$$

$$0=x^2-2x-p^2\,.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$x_1=1+\sqrt{p^2+1},\qquad x_2=1-\sqrt{p^2+1}\,. \tag{2}$$

Pro každé číslo p je p^2+1 číslem kladným, větším než $|p|$; proto je $x_1 \neq x_2$. Jestliže rovnice (1) má řešení, potom tímto řešením je některé z čísel (2). Proveďme zkoušku dosazením.

Případ [1]. Dosaďme do rovnice (1) za x číslo x_1; snadno zjistíme, že příslušné zlomky mají smysl. Označme L dosazení do levé strany rovnice (1). Platí postupně

$$L=\frac{1}{1+\sqrt{p^2+1}+p}+\frac{1}{1+\sqrt{p^2+1}-p}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{p^2+1}-p+1+\sqrt{p^2+1}+p}{(1+\sqrt{p^2+1})^2-p^2}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{p^2+1}}{1+2\sqrt{p^2+1}+p^2+1-p^2}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{p^2+1}}{2+2\sqrt{p^2+1}}=1\,.$$

Je tedy $L = 1$, což je v souhlase s pravou stranou dané rovnice (1). Číslo x_1 ze vztahů (2) je tedy řešením dané rovnice (1) pro každé číslo p.

Případ [2]. Dosaďme do (1) za x číslo x_2 ze vztahů (2). Jmenovatelé jsou $x_2 + p = 1 - \sqrt{p^2 + 1} + p$, $x_2 - p = 1 - \sqrt{1 + p^2} - p$; snadno zjistíme, že jsou rovny nule právě pro $p = 0$. Dále nechť je $p \neq 0$; označme L dosazení do levé strany (1). Platí postupně

$$L = \frac{1}{1 - \sqrt{p^2 + 1} + p} + \frac{1}{1 - \sqrt{p^2 + 1} - p} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{p^2 + 1} - p + 1 - \sqrt{p^2 + 1} + p}{(1 - \sqrt{p^2 + 1})^2 - p^2} =$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{p^2 + 1}}{1 - 2\sqrt{p^2 + 1} + p^2 + 1 - p^2} =$$

$$= \frac{2(1 - \sqrt{p^2 + 1})}{2(1 - \sqrt{p^2 + 1})} = 1\,. \tag{3}$$

Číslo x_2 ze vztahů (2) je tedy řešením dané rovnice (1) pro všechna čísla $p \neq 0$.

Závěr. Daná rovnice (1) má pro $p \neq 0$ dvě různá řešení daná vztahy (2). Pro $p = 0$ má jediné řešení $x_1 = 2$.

4. Nech je daný lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$).

Zostrojte priamku p, ktorá delí daný lichobežník na dve časti, z ktorých každá má ten istý obsah, a to tak, že priamka p prechádza bodom A.

Urobte dôkaz konštrukcie a diskusiu riešiteľnosti.

Riešenie (pozri obr. 38). *Rozbor.* Označme $AB = a$, $CD = c$, v výšku lichobežníka. Podľa textu úlohy je $a > c > 0$, $v > 0$. Obsah lichobežníka $ABCD$ je

$$P = \frac{1}{2}(a + c)v;$$

obsah trojuholníka ABC je $T = \frac{1}{2}av$. Tu je $P - T = \frac{1}{2}cv$, a pretože je $c < a$, je $P - T < T$, čiže $T > \frac{1}{2}P$. Z toho vyplýva, že od trojuholníka ABC musíme oddeliť trojuholník AXC, ktorý je časťou trojuholníka ABC tak, aby sa obsah trojuholníka ABC zmenšil na $\frac{1}{2}P$. Z toho vyplýva, že bod X nevyhnutne padne dovnútra úsečky BC, čiže, že priamka $p \equiv AX$ nutne prechádza vnútrajškom uhla $\sphericalangle CAB$. Označme x veľkosť výšky trojuholníka ABX, ktorá prislúcha k strane AB. Potom podľa textu úlohy o čísle x má platiť

$$\frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}P,$$

čiže

$$x = \frac{1}{2}(a + c) \cdot \frac{v}{a},$$

t. j.

$$\frac{a}{v} = \frac{\frac{1}{2}(a + c)}{x}. \tag{1}$$

Označme O bod polpriamky BA, o ktorom platí

$$BO = \frac{1}{2}(a + c).$$

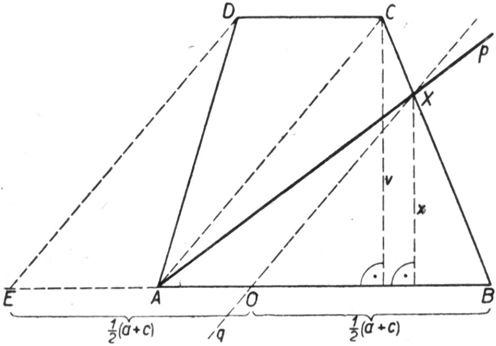
Zo vzťahu (1) vyplýva, že platí

$$\triangle ABC \sim \triangle OBX,$$

takže tieto trojuholníky sú rovnoľahlé podľa bodu B a je

$$AC \parallel OX.$$

Z toho vyplýva konštrukcia.



Obr. 38

Konštrukcia (obr. 38). Zostrojme rovnobežník $ACDE$. Platí $BE = a + c$. Označme O stred úsečky BE. Bodom O veďme priamku $q \parallel AC$ a označme X spoločný bod úsečky BC a priamky q. Potom je ABX hľadaný trojuholník a $p \equiv AX$ hľadaná priamka.

Dôkaz konštrukcie. Pretože je $a > c$, padne bod O dovnútra úsečky $AB = a$. Preto priamka $q \parallel AC$ má nevyhnutne s úsečkou BC spoločný vnútorný bod X a podľa konštrukcie, ktorú sme urobili, je výška x trojuholníka ABX, prislúchajúca k strane AB, daná vzťahom (1). Obsah trojuholníka ABX je

$$\frac{1}{2}AB \cdot x,$$

čiže

$$\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}(a+c) \cdot \frac{v}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(a+c) \cdot v = \frac{1}{2}P,$$

čo bola požiadavka úlohy.

Z dôkazu konštrukcie vyplýva, že úloha má vždy jediné riešenie.

Tým je riešenie úlohy hotové.

6. Úlohy I. kola kategorie C

1. Ve dvou nádobách (označme je A a B) máme dva lihové roztoky; v nádobě A jsou 2 litry lihu 60procentního, v nádobě B pak 3 litry lihu 80procentního. Z nádoby B do A přelejme 1 litr tekutiny, důkladně promíchejme a pak přelejme 1 litr tekutiny z nádoby A do B.

Vypočtěte, kolikaprocentní je líh v nádobách A a B po obou přelitích.

Řešení. Řešme nejprve tuto úlohu: Smísíme a litrů p-procentního lihu s b litry q-procentního lihu. Kolikaprocentní líh tak dostaneme?

V jednom litru p-procentního lihu je $\frac{p}{100}$ litru lihu;

v jednom litru q-procentního lihu je $\frac{q}{100}$ litru lihu.

V a litrech p-procentního lihu je $\frac{ap}{100}$ litru lihu;

v b litrech q-procentního lihu je $\frac{bq}{100}$ litru lihu.

V $(a+b)$ litrech směsi získané v našem případě je $\frac{1}{100}(ap+bq)$ litru lihu; procento x lihu ve směsi je tedy

$$x = 100 \,.\, \frac{\frac{1}{100}(ap+bq)}{a+b} = \frac{ap+bq}{a+b}\,.$$

Po prvním přelití dostaneme v nádobě A 3 litry směsi; příslušné procento x_1 je $[a=2,\ p=60;\ b=1,\ q=80]$

$$x_1 = \frac{2\,.\,60 + 1\,.\,80}{2+1} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3} \doteq 66{,}7.$$

Po druhém přelití dostaneme v nádobě B 3 litry směsi; příslušné procento x_2 je $[a=1,\ p=x_1;\ b=2,\ q=80]$

$$x_2 = \frac{1\,.\,\frac{200}{3} + 2\,.\,80}{1+2} = \frac{200 + 2\,.\,3\,.\,80}{3\,.\,3} =$$

$$= \frac{200+480}{9} = \frac{680}{9} = 75\frac{5}{9} \doteq 75{,}6\,.$$

Po provedených přelitích jsou v nádobě A 2 litry lihu $66\frac{2}{3}$procentního a v nádobě B 3 litry lihu $75\frac{5}{9}$procentního.

Podle řešení s. Ireny Voříškové,
žákyně 9.b tř. jsš, Strakonice.

Jiné řešení. Po prvním přelití bude v nádobě B líh 80procentní, kdežto v A bude tekutina, která obsahuje čistý líh o objemu (v litrech)

$$\frac{60}{100}\,.\,2 + \frac{80}{100}\,.\,1 = \frac{200}{100} = 2;$$

je tedy v nádobě A čistého lihu (tj. 100procentního) 2 litry a vody 1 litr; jde tedy o líh $66\frac{2}{3}$procentní.

Po druhém přelití bude v A líh $66\frac{2}{3}$ procentní, kdežto v nádobě B bude tekutina, která obsahuje čistý líh o objemu (v litrech)

$$\frac{80}{100} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{48 + 20}{30} = \frac{68}{30} = 2\frac{4}{15} ;$$

je tedy v nádobě B čistého lihu $2\frac{4}{15}$ litru a vody $\frac{11}{15}$ litru.

Zbývá vyjádřit tento poměr čistého lihu k celkovému objemu v procentech. Tu platí

$$\frac{2\frac{4}{15}}{3} = \frac{\frac{34}{15}}{3} = \frac{34}{45},$$

a proto příslušný počet procent je

$$100 \cdot \frac{34}{45} = 20 \cdot \frac{34}{9} = \frac{680}{9} = 75\frac{5}{9} .$$

V nádobě A jsou nakonec 2 litry $66\frac{2}{3}$procentního a v nádobě B 3 litry lihu $75\frac{5}{9}$ procentního.

Proveďme ještě *zkoušku.* Původně v nádobě A byly 2 litry lihu 60procentního a v nádobě B 3 litry lihu 80procentního; v obou nádobách bylo tedy

$$2 \cdot \frac{60}{100} + 3 \cdot \frac{80}{100} = \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$$

litrů čistého lihu.

Nakonec v nádobě A byly 2 litry lihu $\left(\frac{2}{3} \cdot 100\right)$ procentního a v nádobě B 3 litry lihu $\left(\frac{34}{45} \cdot 100\right)$procentního; v obou nádobách bylo tedy

$$2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{34}{45} = \frac{4}{3} + \frac{34}{15} = \frac{20}{15} + \frac{34}{15} = \frac{54}{15} = \frac{18}{5}$$

litrů čistého lihu.

Oba výsledky tedy souhlasí, čímž je správnost výpočtů potvrzena.

2. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, ak sú dané veľkosti ťažníc t_a, t_c. Urobte diskusiu riešiteľnosti.

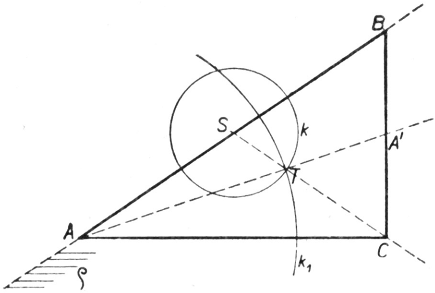
Riešenie. *Rozbor.* Označme S stred prepony AB, A' stred odvesny BC a konečne T ťažisko hľadaného pravouhlého trojuholníka ABC. Je známe, že bod S je stredom kružnice trojuholníku ABC opísanej a preto platí

$$t_c = SC = SA = SB = \frac{1}{2} AB \, .$$

Ďalej je známe, že ťažisko trojuholníka delí jeho ťažnicu v pomere 1 : 2 a to tak, že väčšia časť takto rozdelenej ťažnice je pri vrchole trojuholníka. Preto o trojuholníku AST platí

$$SA = t_c, \quad ST = \frac{1}{3} t_c, \quad AT = \frac{2}{3} t_a \, . \tag{1}$$

Konštrukcia (obr. 39). Zostrojme ľubovoľne v rovine úsečku $SA = t_c$ a označme ϱ jednu z oboch opačných polrovín vyťatých priamkou SA. Do zvolenej polroviny umiestime hľadaný trojuholník ABC a teda aj pomocný trojuholník AST. Zostrojme teda kružnice $k \equiv \left(S, \frac{1}{3}t_c\right)$, $k_1 \equiv \left(A, \frac{2}{3}t_a\right)$. Spoločný bod oboch kružníc k, k_1, pokiaľ leží v polrovine ϱ, označme T. Na predĺžení



Obr. 39

úsečky SA za bod S zostrojme úsečku $SB = SA$ a na polpriamke ST zostrojme úsečku $SC = SA$. Potom je ABC hľadaný trojuholník.

Dôkaz. Musíme dokázať, že ABC je pravoúhlý trojuholník s preponou AB a ďalej, že jeho ťažnice prislúchajúce k vrcholom A, C (v tomto poradí) majú dané veľkosti t_a, t_c.

Pretože podľa konštrukcie je bod S stredom strany AB a pretože platí $SA = SB = SC$, je S stredom kružnice trojuholníku opísanej a podľa Thaletovej vety je uhol $\sphericalangle C = 90°$.

Úsečka SC je zrejme ťažnica a má podľa konštrukcie veľkosť t_c. Bod T je teda podľa konštrukcie ťažiskom trojuholníka ABC (lebo $SC = 3 \,.\, ST$). Preto v polpriamke AT leží ťažnica príslušná k vrcholu A. Pretože podľa konštrukcie je $AT = \frac{2}{3}t_a$, je veľkosť ťažnice príslušnej k vrcholu A skutočne t_a.

Tým je dôkaz hotový.

Diskusia. Riešiteľnosť úlohy závisí od toho, či možno zostrojiť pomocný trojuholník AST. To je však možné práve vtedy, ak úsečky (1) splňujú trojuholníkovú nerovnosť, t. j. ak platí $|SA - ST| < AT < SA + ST$, čiže

$$\frac{2}{3}t_c < \frac{2}{3}t_a < \frac{4}{3}t_c$$

a po ľahkej úprave

$$t_c < t_a < 2t_c\,.$$

Potom má úloha jediné riešenie; inak nemá riešenie.

Tým je riešenie úlohy ukončené.

Podľa riešenia s. Olgy Preislerové,
9.d tr. jsš, Trenčín.

3. Je dán zlomek

$$Z = \frac{x^2 + 2ax + a^2 - 16}{ax - 4x + a^2 - 16}\,. \qquad (1)$$

Vyšetřte, za kterých předpokladů ztrácí zlomek význam. Potom zlomek zkraťte.

a) Předpokládejme, že a je dané číslo; vypočtěte, pro která x je daný zlomek roven nule. Potom proveďte zkoušku dosazením.

b) Předpokládejme, že dané číslo a je větší než číslo 4; určete všechna x, pro která je zlomek Z větší než číslo 1. Podobně předpokládejme, že dané číslo a je menší než číslo 4; určete všechna x, pro něž zlomek Z je větší než číslo 1.

Řešení. Čitatele i jmenovatele daného zlomku Z

rozložme v činitele; postupně dostaneme

$$Z = \frac{x^2 + 2ax + a^2 - 16}{ax - 4x + a^2 - 16} = \frac{(x + a)^2 - 4^2}{x(a - 4) + (a^2 - 4^2)} =$$

$$= \frac{(x + a)^2 - 4^2}{x(a - 4) + (a + 4)(a - 4)} = \frac{(x + a - 4)(x + a + 4)}{(a - 4)(x + a + 4)}.$$

Zlomek ztrácí smysl, jestliže je

$$(a - 4)(x + a + 4) = 0 .$$

Platí věta: Jestliže součin dvou čísel je roven nule, je alespoň jedno z těchto čísel rovno nule. Buď tedy je

$$a - 4 = 0$$

neboli

$$a = 4; \tag{3}$$

nebo je $\qquad x + a + 4 = 0$ neboli

$$x = -(a + 4) . \tag{3'}$$

Jestliže tedy platí jeden ze vztahů (3), (3′) anebo oba, zlomek (1) ztrácí smysl. V dalším tyto případy vylučujeme. Pak ale lze zlomek (2) zkrátit a dostaneme

$$Z = \frac{x + a - 4}{a - 4} . \tag{4}$$

a) Je známo, že zlomek je roven nule, jestliže je jeho čitatel roven nule. Aby tedy bylo $Z = 0$, stačí, aby ve vztahu (4) platilo $x + a - 4 = 0$ neboli, aby bylo

$$x = 4 - a . \tag{5}$$

Snadno zjistíme dosazením za x do posledního zlomku (2), že postupně platí

$$Z = \frac{(4 - a + a - 4)(4 - a + a + 4)}{(a - 4)(4 - a + a + 4)} =$$

$$= \frac{0 . 8}{(a - 4) . 8} = \frac{0}{(a - 4) . 8} = 0$$

(za předpokladu, že $a \neq 4$).

b) Zlomek Z ze vztahu (4) lze upravit takto

$$Z = \frac{x}{a-4} + \frac{a-4}{a-4}$$

neboli

$$Z = 1 + \frac{x}{a-4}\,.$$

Nechť je $a > 4$; potom je $a - 4$ kladné číslo. Aby bylo $Z > 1$, musí být $x > 0$, tj. x musí být kladné číslo.

Nechť je $a < 4$; potom je $a - 4$ číslo záporné. Aby bylo $Z > 1$, musí být opět zlomek $\frac{x}{a-4}$ kladný a protože jeho jmenovatel je záporný, musí být též čitatel záporný, tj. musí být x záporné číslo.

Závěr. Jestliže je $a > 4$, potom je zlomek $Z > 1$ právě pro všechna kladná čísla x; jestliže je $a < 4$, potom je $Z > 1$ právě pro všechna záporná čísla x.

4. Daný je trojuholník ABC, ktorého strany označíme $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Na predĺžení úsečky BC za bod C zostrojme bod C' tak, aby $CC' = a$. Na predĺžení úsečky CA za bod A zostrojme bod A' tak, aby $AA' = 2b$. Konečne na predĺžení úsečky AB za bod B zostrojme bod B' tak, aby $BB' = 3c$.

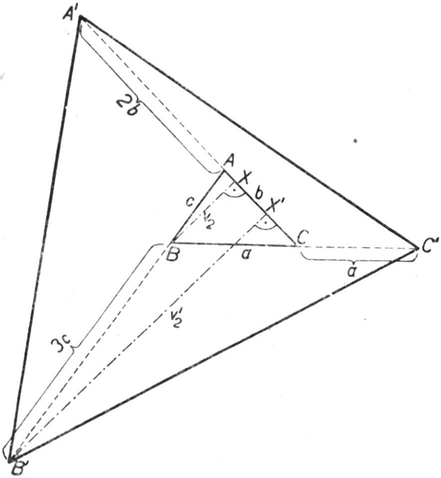
Tým dostaneme trojuholník $A'B'C'$. Vypočítajte, koľkokrát je obsah trojuholníka $A'B'C'$ väčší než obsah trojuholníka ABC.

Riešenie (pozri obr. 40). V danom trojuholníku ABC označme v_1, v_2, v_3 (v tomto poradí) príslušné výšky k stranám a, b, c; obsah trojuholníka ABC označme P.

Výsledný trojuholník $A'B'C'$ rozložíme na štyri trojuholníky

$$ABC, \quad AA'B', \quad BB'C', \quad CC'A',$$

ktoré nemajú okrem bodov na obvode žiadnych spoločných bodov a pritom úplne pokrývajú trojuholník $A'B'C'$, ktorého obsah P' je súčtom obsahov P, P_1, P_2, P_3 týchto trojuholníkov.



Obr. 40

Platí:

1. Trojuholník $AA'B'$ má stranu $AA' = 2b$ a k nej príslušná výška má veľkosť $4v_2$, čo dokážeme takto:

a) Ak je $\sphericalangle BAC = 90°$, vyplýva to priamo z konštrukcie bodu B'.

b) Nech je $\sphericalangle BAC \neq 90°$. Označme X, X' päty kolmíc vedených bodmi B, B' (v tomto poradí) k priamke CA. Trojuholníky ABX, $AB'X'$ majú pri vrcholoch X, X' pravé uhly a pri vrchole A majú spoločný uhol. Platí teda

$$\triangle ABX \sim \triangle AB'X' \text{ (uu)}$$

a preto je

$$\frac{B'X'}{BX} = \frac{AB'}{AB},$$

teda

$$B'X' = BX \,.\, \frac{4c}{c}$$

a teda výška

$$B'X' = 4v_2\,,$$

čo sme mali dokázať.

Obsah P_1 trojuholníka $AA'B'$ je teda

$$P_1 = \frac{1}{2} AA' \,.\, B'X' = \frac{1}{2} 2b \,.\, 4v_2 = 8 \,.\, \frac{1}{2} bv_2 = 8P\,. \quad (1)$$

2. Podobne trojuholník $BB'C'$ má stranu $BB' = 3c$ a príslušnú výšku veľkosti $2v_3$, takže jeho obsah je

$$P_2 = \frac{1}{2} \,.\, 3c \,.\, 2v_3 = 6 \,.\, \frac{1}{2} cv_3 = 6P\,. \quad (2)$$

3. Podobne trojuholník $CC'A'$ má stranu $CC' = a$ a príslušnú výšku veľkosti $3v_1$, takže jeho obsah je

$$P_3 = \frac{1}{2} a \,.\, 3v_1 = 3 \,.\, \frac{1}{2} av_1 = 3P\,. \quad (3)$$

Z výsledkov (1) až (3) dostaneme

$$P' = P + P_1 + P_2 + P_3 = P(1 + 8 + 6 + 3),$$

čiže

$$P' = 18P\,.$$

Odpoveď. Obsah trojuholníka $A'B'C'$ je osemnásťkrát väčší než obsah trojuholníka ABC.

5. Podél přímé železniční trati vede silnice, po níž jel cyklista rychlostí 18 kilometrů za hodinu. Cyklistu dostihl po trati jedoucí vlak a předjel jej. Cyklista odhadl, že od okamžiku, kdy jej míjela lokomotiva, do okamžiku, kdy kolem něho projel konec vlaku, uplynulo asi $5\frac{1}{2}$ vteřiny. Potom však musel vlak na trati zastavit; cyklista jej dostihl a podél celého stojícího vlaku přejel za 19 vteřin.

Vypočtěte přibližnou rychlost jedoucího vlaku.

Řešení. Označme x km/hod rychlost jedoucího vlaku.

[1] Délku s vlaku vypočítáme takto: Cyklista předjel stojící vlak za 19 vteřin od okamžiku, kdy jej dostihl, přičemž jel rychlostí 18 km/hod neboli rychlostí $\dfrac{18\,000}{60\,.\,60}$ m/sec; proto je

$$s = \frac{18\,000}{60\,.\,60}\,.\,19 \text{ metrů}.$$

Proveďme výpočet; platí

$$\frac{18\,000}{60\,.\,60}\,.\,19 = \frac{30}{6}\,.\,19 = 5\,.\,19 = 95\,.$$

Délka vlaku je $s = 95$ m.

[2] Nyní vypočítáme rychlost x (km/hod) jedoucího vlaku. K tomu užijeme známého vzorce

$$s = ct\,, \tag{1}$$

který platí pro rovnoměrný pohyb; tu s je dráha v metrech, c rychlost v metrech za vteřinu a t doba ve vteřinách.

Když vlak předjížděl cyklistu, jevila se situace cyklistovi takto: Cyklista sám stojí (tj. je v klidu) a předjíždí jej vlak rychlostí $x - 18$ km/hod; předjíždění trvalo $5\dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{2}$ vteřiny. Vlak urazil za dobu $t = \dfrac{11}{2}$ vteřiny dráhu $s = 95$ m, a to rychlostí $c = \dfrac{1000(x - 18)}{60\,.\,60}$ metrů za vteřinu. Po dosazení do (1) dostaneme postupně

$$95 = \frac{1000(x - 18)}{60 \cdot 60} \cdot \frac{11}{2},$$

$$95 = \frac{10(x - 18)}{36} \cdot \frac{11}{2},$$

$$95 = \frac{5(x - 18)}{36} \cdot 11,$$

$$19 = \frac{x - 18}{36} \cdot 11\,;$$

po znásobení obou stran číslem $\frac{36}{11}$ dostaneme postupně

$$\frac{36 \cdot 19}{11} = x - 18,$$

$$\frac{684}{11} + 18 = x,$$

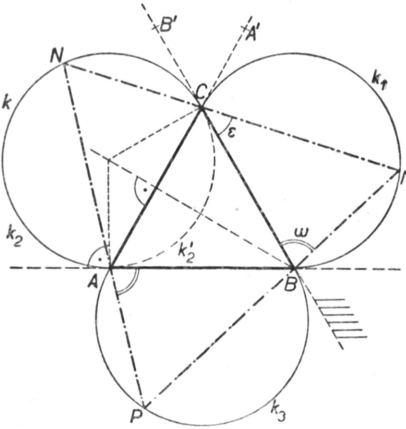
$$62\frac{2}{11} + 18 = x,$$

$$x = 80\frac{2}{11}.$$

Rychlík jel rychlostí asi 80 km za hodinu.

6. Buď dán rovnostranný trojúhelník ABC. V polorovině opačné k polorovině BCA sestrojme nad úsečkou BC oblouk k_1, z jehož bodů je úsečka BC vidět pod úhlem 60°. V polorovině opačné k polorovině CAB sestrojme nad úsečkou CA oblouk k_2, z jehož bodů je úsečka CA vidět pod úhlem 60°. Konečně v polorovině opačné k polorovině ABC sestrojme oblouk k_3, z jehož bodů je úsečka AB vidět pod úhlem 60°.

Na oblouku k_1 zvolme bod M (různý od bodů B, C) a sestrojme polopřímky MC, MB; označme $N \neq C$ společný bod polopřímky MC a oblouku k_2 a dále označme $P \neq B$ společný bod polopřímky MB a oblouku k_1. Potom body A, N, P leží v téže přímce; dokažte.



Obr. 41

Řešení (obr. 41). Nejprve dokážeme, že existuje bod N uvnitř oblouku k_2: Označme CA', CB' pořadě polopřímky opačné k polopřímkám CA, CB. Vnitřek oblouku k_1 podle známé konstrukce (a s ním i bod M) leží právě uvnitř úhlu $\sphericalangle BCA'$. Vnitřek oblouku k_2 leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ACB'$. Označme k_2' oblouk, který oblouk k_2 doplňuje na kružnici k; potom oblouk k_2' leží (podle známé konstrukce) až na body C, A uvnitř úhlu $\sphericalangle BCA$, přičemž přímka CB je tečnou kružnice k v bodě C. Odtud plyne, že přímka $CM \neq CB$ není tečnou kružnice k (tj. je její sečnou) a druhý průsečík N přímky CM

a kružnice k musí ležet v úhlu $\sphericalangle ACB'$ neboli uvnitř oblouku k_2. Tím je důkaz tvrzení proveden. Stejně se dokáže existence bodu P uvnitř oblouku k_3.

Nyní dokážeme, že společný bod přímek MCN, AP je právě bod N.

Důkaz. V trojúhelníku MCB označme $\sphericalangle C = \varepsilon$, $\sphericalangle B = \omega$, takže je $\varepsilon + \omega = 180° - 60°$ neboli

$$\varepsilon + \omega = 120° . \tag{1}$$

Potom v trojúhelníku ANC je

$$\begin{aligned} \sphericalangle N = 60°,\ \sphericalangle NAC = \sphericalangle MCA - \sphericalangle N = \\ = \varepsilon + 60° - 60° = \varepsilon ; \end{aligned} \tag{2}$$

podobně v trojúhelníku ABP je

$$\begin{aligned} \sphericalangle P = 60°,\ \sphericalangle PAB = \sphericalangle MBA - \sphericalangle P = \\ = \omega + 60° - 60° = \omega . \end{aligned} \tag{3}$$

Uvažujme nyní součet x úhlů $\sphericalangle NAC$, $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle BAP$, z nichž každé dva po sobě následující jsou styčné; protože je $\sphericalangle CAB = 60°$, dostaneme vzhledem k (2), (3), (1)

$$x = \varepsilon + 60° + \omega = 120° + 60° = 180° .$$

Odtud plyne, že AN, AP jsou dvě opačné polopřímky, a proto body A, N, P leží v téže přímce. Tím je řešení úlohy provedeno.

7. Řešte rovnici

$$\frac{1}{x - p + 2} - \frac{1}{x - p + 3} = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3}, \tag{1}$$

kde x je neznámá a p je dané reálné číslo.

Proveďte zkoušku dosazením do dané rovnice a na základě toho určete všechna čísla p, pro něž daná rovnice nemá řešení.

Řešení. Nechť reálné číslo x je řešením rovnice (1).

Sečtěme zlomky na levé i pravé straně rovnice; dostaneme vztah

$$\frac{1}{(x-p+2)(x-p+3)} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} \qquad (1')$$

a po znásobení obou stran této rovnice číslem

$$(x-p+2)(x-p+3)(x+2)(x+3)$$

obdržíme vztah

$$(x+2)^2 + x + 2 = (x-p+2)^2 + x - p + 2\,.$$

Odtud postupně dále

$$x^2 + 4x + 4 + x + 2 =$$
$$= x^2 + p^2 + 4 - 2px + 4x - 4p + x - p + 2\,,$$
$$0 = -2px - 5p + p^2$$

neboli

$$p(2x + 5 - p) = 0\,. \qquad (2)$$

Rozeznávejme dvě možnosti:

Případ [1]. Nechť je $p = 0$. Pak daná rovnice zní

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\,.$$

Tato rovnice je zřejmě splněna pro každé reálné číslo x, pro něž mají zlomky v ní obsažené význam, tj. pokud je $x + 2 \neq 0$, $x + 3 \neq 0$ neboli $x \neq -2$, $x \neq -3$. Tedy pro $p = 0$ vyhovuje dané rovnici každé reálné číslo x různé od čísel -2, -3.

Případ [2]. Nechť je $p \neq 0$. Potom ze vztahu (2) postupně plyne

$$2x + 5 - p = 0,$$

$$x = \frac{1}{2}(p - 5)\,. \qquad (3)$$

Dosaďme tento výsledek do levé strany rovnice (1); ve jmenovatelích levé strany dostaneme výrazy

$$x - p + 2 = \frac{1}{2}(p - 5) - p + 2 = -\frac{1}{2}(p + 1),$$

$$x - p + 3 = \frac{1}{2}(p - 5) - p + 3 = -\frac{1}{2}(p - 1),$$

které musí být různé od nuly (jinak by některý ze zlomků ztrácel význam). Musí tedy platit $p \pm 1 \neq 0$ neboli

$$p \neq \pm 1 .$$

Levá strana v rovnici (1) po dosazení ze (3) je

$$L = -\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p-1}$$

neboli

$$L = \frac{-2(p-1) + 2(p+1)}{(p-1)(p+1)} = \frac{4}{(p-1)(p+1)},$$

kde $p \neq \pm 1$.

Dosazení výsledku (3) do pravé strany (1) je

$$P = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x+2)(x+3)};$$

protože vzhledem ke (3) je

$$(x + 2)(x + 3) = \left[\frac{1}{2}(p - 5) + 2\right]\left[\frac{1}{2}(p - 5) + 3\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(p - 1)(p + 1),$$

je

$$P = \frac{4}{(p-1)(p+1)}.$$

V případě, že je číslo p různé od kteréhokoli z čísel $-1, 0, 1,$ je řešení rovnice (1) dáno číslem x ze vztahu (3), neboť platí $L = P$.

Poznámka. Všimněme si blíže případů $p = 1$, $p = -1$.

Případ [a]. Nechť je $p = 1$. Pak ze vztahu (3) plyne $x = -2$.

Číslo $x = -2$ nevyhovuje dané rovnici (1), neboť první zlomek na její pravé straně ztrácí význam. Pro $p = 1$ nemá rovnice (1) řešení.

Případ [b]. Nechť je $p = -1$. Podle (3) je $x = -3$ a potom ztrácí druhý zlomek na pravé straně rovnice (1) význam. Rovnice (1) nemá pro $p = -1$ řešení.

Závěr. [1] Jestliže je $p = 0$, potom je každé reálné číslo x různé od čísel $-2, -3$ řešením dané rovnice.

[2] Jestliže je p různé od čísel $-1, 0, 1$, potom má rovnice (1) jediné řešení $x = \frac{1}{2}(p - 5)$.

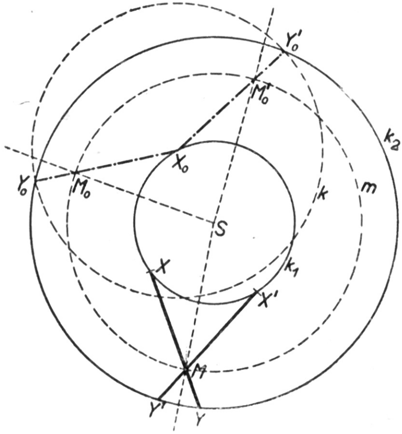
8. V rovině buďte dány dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S, r_1)$, $k_2 \equiv (S, r_2)$, kde $r_2 > r_1$; uvnitř mezikruží těmito kružnicemi určeného je dán bod M. Dále buď dáno kladné číslo d.

Sestrojte na kružnici k_1 bod X a na kružnici k_2 bod Y tak, aby úsečka XY měla délku d a aby bod M ležel na této úsečce.

(Při řešení lze užít otáčení.)

Řešení (obr. 42). *Rozbor.* Nechť existuje úsečka $XY = d$, která vyhovuje požadavkům úlohy; pak M je vnitřním bodem této úsečky XY. Otočme kolem bodu S úsečku XY i s bodem M do nové polohy X_0Y_0 (označme M_0 otočenou polohu bodu M), takže body X_0, Y_0 leží pořadě na kružnicích k_1, k_2; bod M_0 spolu s bodem M

leží na kružnici $m \equiv (S, SM)$. Dále je $X_0Y_0 = XY = d$; leží tedy bod Y_0 na kružnici $k \equiv (X_0, d)$ a je proto společným bodem kružnic k_2, k. Na základě toho provedeme konstrukci.



Obr. 42

Konstrukce (obr. 42). Na kružnici k_1 zvolme bod X_0 a sestrojme kružnice $k \equiv (X_0, d)$, $m \equiv (S, SM)$. Označme Y_0 společný bod kružnic k, k_2 (pokud existuje; existuje-li jich víc, zvolme jeden z nich); dále označme M_0 společný bod kružnice m a úsečky X_0Y_0 (o jeho existenci pojednáme v důkazu). Rozeznávejme dva případy:

Případ [1]. Jestliže je $M_0 \equiv M$, označme $X_0 \equiv X$, $Y_0 \equiv Y$; potom úsečka XY vyhovuje požadavkům úlohy.

Případ [2]. Jestliže je $M_0 \not\equiv M$, pak existuje jediné otáčení o středu S, které převádí bod M_0 v bod M (nezáleží nám tu na orientaci otáčení). Označme X, Y obrazy bodů X_0, Y_0 v tomto otáčení. Protože M_0 leží uvnitř úsečky X_0Y_0, leží bod M uvnitř úsečky $XY = d$, která zřejmě vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz konstrukce, pokud jde o otáčení, nebudeme provádět; správnost konstrukce plyne z vlastností otáčení. Zbývá však otázka, zda existuje na kružnici m bod M_0, který padne dovnitř úsečky X_0Y_0. Takový bod existuje podle známé vlastnosti kružnice m a úsečky X_0Y_0. Bod X_0 leží na kružnici k_1 a tedy uvnitř kružnice m, kdežto bod Y_0 leží na kružnici k_2 a tedy vně kružnice m; uvnitř takové úsečky X_0Y_0 podle známé věty z geometrie leží právě jeden bod M_0, který je bodem kružnice m.

Diskuse. Řešitelnost úlohy (a tím existence právě popsané konstrukce) závisí na existenci společného bodu Y_0 kružnic k, k_2. Dokážeme, že kružnice k, k_2 mají:

a) jediný společný bod právě tehdy, je-li $r_2 - r_1 = d$ nebo je-li $r_2 + r_1 = d$;

b) dva různé společné body právě tehdy, je-li $r_2 - r_1 < d$ nebo je-li $r_2 + r_1 > d$.

Za jiných okolností nemají kružnice k, k_2 společné body a úloha nemá řešení; důkaz: Středná kružnic k, k_2 o poloměrech d, r_2 je $SX_0 = r_1$. Kružnice k, k_2 mají společné body právě tehdy, jestliže platí

$$|d - r_2| \leqq SX_0 \leqq d + r_2$$

neboli

$$|d - r_2| \leqq r_1 \leqq d + r_2 .$$

Jestliže přitom v předchozím vztahu nastane jedna rovnost, značí to dotyk kružnic k, k_2; nastanou-li nerovnosti, mají kružnice k, k_2 dva různé body společné. Protože však je $r_1 < r_2$, je vždy splněn vztah $r_1 < d + r_2$. Zbývá prozkoumat platnost vztahu

$$|d - r_2| \leqq r_1 . \tag{1}$$

Uvažujme možnosti:

Případ [1]. Nechť je $d \geqq r_2$; potom předchozí vztah (1) lze psát $d - r_2 \leqq r_1$ neboli $r_2 + r_1 \geqq d$; z posledního vztahu plyne také vztah (1). Přitom případ rovnosti $r_2 + r_1 = d$ značí vnitřní dotyk kružnic k, k_2 a tedy jediný jejich společný bod [viz druhý případ možnosti a)], a úloha má jediné řešení; vztah $r_2 + r_1 > d$ značí, že kružnice k, k_2 mají dva různé společné body a úloha má dvě řešení.

Případ [2]. Nechť je $d < r_2$; potom z (1) plyne $r_2 - r_1 \leqq d$; z tohoto vztahu plyne též vztah (1). Jestliže je $r_2 - r_1 = d$, mají kružnice k, k_2 vnitřní dotyk a úloha má jediné řešení. Jestliže je $r_2 - r_1 < d$, mají kružnice k, k_2 dva různé společné body a úloha má dvě řešení. Tím jsou dokázány oba první případy v bodech a), b).

Úloha nemá řešení jen v případech, že je buď $d > r_1 + r_2$ anebo $d < r_2 - r_1$; jinak má řešení.

Tím je řešení úlohy provedeno.

9. Riešte sústavu rovníc

$$2x + py = 3p + 1 , \tag{1}$$

$$y = \frac{5 - px}{2} , \tag{2}$$

kde x, y sú neznáme a p je dané reálne číslo.

Riešenie. Nech dvojica (x, y) reálnych čísel je riešením danej sústavy. Dosaďme číslo y dané vzťahom (2) do rovnice (1). Dostaneme

$$2x + \frac{p}{2}(5 - px) = 3p + 1$$

a z toho postupne

$$\begin{aligned} 4x + 5p - p^2x &= 6p + 2\,, \\ x(4 - p^2) &= p + 2\,, \\ x(p + 2)(2 - p) &= p + 2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Rozoznávejme tieto možnosti:

Prípad [1]. Nech je $(p + 2)(p - 2) = 0$. To môže nastať buď pre $p + 2 = 0$, t. j. $p = -2$, buď pre $p - 2 = 0$, t. j. $p = 2$.

a) Nech je $p = -2$. Potom daná sústava znie

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= -6 + 1\,, \\ y &= \frac{5 + 2x}{2} \end{aligned}$$

alebo po úprave

$$\begin{aligned} 2(x - y) &= -5\,, \\ 2(x - y) &= -5\,. \end{aligned}$$

Sústava sa teda redukuje na rovnicu

$$x - y = -\frac{5}{2}\,,$$

t. j.

$$y = x + \frac{5}{2}\,. \tag{4}$$

Riešením sústavy v tomto prípade je zrejme každá dvojica (x, y) reálnych čísel, kde x je ľubovoľné číslo a y je dané vzťahom (4).

b) Nech $p = 2$. Potom daná sústava znie

$$2x + 2y = 7\,,$$
$$y = \frac{5 - 2x}{2}$$

alebo po úprave

$$2(x + y) = 7\,,$$
$$2(x + y) = 5\,.$$

Táto sústava je zrejme sporná, lebo raz sa má $x + y$ rovnať číslu $\frac{7}{2}$, druhý raz číslu $\frac{5}{2}$. Sústava nemá teda riešenie.

Prípad [2]. Nech $(p + 2)(p - 2) \neq 0$, t. j. nech p je rôzne od čísel -2, 2. Znásobme obe strany vzťahu (3) číslom $\frac{1}{(p + 2)(p - 2)}$. Dostaneme

$$x = \frac{1}{2 - p}\,. \tag{5}$$

Dosaďme tento výsledok do rovnice (2). Dostaneme postupne

$$y = \frac{1}{2}\left[5 - \frac{p}{2 - p}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 - 5p - p}{2 - p} =$$
$$= \frac{1}{2(2 - p)} \cdot (10 - 6p) = \frac{5 - 3p}{2 - p}\,,$$

t. j.

$$y = \frac{3p - 5}{p - 2}\,. \tag{6}$$

Dosaďme do ľavej strany rovnice (1) výsledky (5), (6). Dostaneme

$$L = \frac{2}{2 - p} + \frac{p(3p - 5)}{p - 2} = \frac{-2 + 3p^2 - 5p}{p - 2}\,.$$

Teda je

$$(p-2)L = 3p^2 - 5p - 2\,.$$

Ak označíme P pravú stranu rovnice (1), je

$$(p-2)P = (p-2)(3p+1) = 3p^2 - 5p - 2\,.$$

Je teda $L = P$.

Dosaďme do pravej strany rovnice (2) výsledok (5). Podľa predošlého dostaneme

$$P' = y\,.$$

Dvojica (x, y) daná vzťahmi (5), (6) je teda riešením danej sústavy rovníc (1), (2).

Záver. Daná sústava:

[1] pre $p = 2$ nemá riešenie.

[2] pre $p = -2$ má riešenie (x, y), kde x je ľubovoľné reálne číslo a y je dané vzťahom

$$y = x + \frac{5}{2}\,.$$

[3] pre p rôzne od čísel -2, 2 má jediné riešenie (x, y), kde $x = \dfrac{1}{2-p}$, $y = \dfrac{3p-5}{p-2}$.

7. Úlohy II. kola kategorie C

1. Dva motocyklisté jeli týmž směrem po silnici vedoucí podél železniční trati. První jel rychlostí 30 km za hodinu, druhý rychlostí 45 km za hodinu. Oba jeli proti směru pohybu nákladního vlaku. První projel podél celého nákladního vlaku za 16,5 vteřiny, druhý za 14 vteřin.

Z těchto údajů vypočtěte rychlost vlaku i jeho délku. (Předpokládáme, že vlak i proti němu jedoucí motocyklisté jeli stálými rychlostmi.)

Řešení. Označme x rychlost vlaku (v kilometrech za hodinu) a y jeho délku (v km). V další úvaze užijeme známého vzorce pro rovnoměrný pohyb $s = ct$ (s je dráha, c rychlost, t doba).

První motocyklista míjí vlak rychlostí $(x + 30)$ km/hod, druhý motocyklista tak činí rychlostí $(x + 45)$ km/hod. Každý z motocyklistů urazí takto dráhu y, o níž platí vztahy

$$y = (x + 30) \cdot \frac{16{,}5}{60 \cdot 60},$$

$$y = (x + 45) \cdot \frac{14}{60 \cdot 60}. \qquad (1)$$

Porovnáním pravých stran těchto rovnic dostaneme

$$\frac{(x + 30) \cdot 16{,}5}{60 \cdot 60} = \frac{(x + 45) \cdot 14}{60 \cdot 60}.$$

Odtud postupně obdržíme

$$\begin{aligned}(x + 30) \cdot 16{,}5 &= (x + 45) \cdot 14,\\ 2{,}5x &= 630 - 495,\\ 2{,}5x &= 135,\\ x &= \frac{135 \cdot 2}{5},\\ x &= 54. \end{aligned} \qquad (2)$$

Nákladní vlak jede rychlostí 54 km za hodinu.
Dosaďme ze vztahu (2) do (1); dostaneme

$$y = 99 \cdot \frac{14}{60 \cdot 60} = \frac{11 \cdot 14}{20 \cdot 20} = \frac{11 \cdot 7}{200} = \frac{77 \cdot 5}{1000} = \frac{385}{1000}.$$

Délka vlaku je 385 m.

Zkouška. Prvnímu motocyklistovi se zdá, že míjí vlak rychlostí 84 km/hod; dráhu 385 m urazí ve vteřinách za dobu

$$\left(\frac{385}{1000} : 84\right) . 60 . 60 = \frac{385 . 60 . 60}{1000 . 84} =$$

$$= \frac{385 . 2 . 6}{10 . 28} = \frac{77 . 3}{2 . 7} = \frac{33}{2} = 16{,}5 .$$

To odpovídá textu úlohy. Stejně se provede i zkouška z údajů o druhém motocyklistovi.

Tím je úloha řešena.

2. Je dán lichoběžník $ABCD$, přičemž je $AB \parallel CD$, $AB > CD$.

Sestrojte přímku $p \parallel AB$, která má s úsečkami AD, AC, BD, BC pořadě společné body X, Y, Z, U v právě napsaném pořadí, přičemž platí

$$XY = YZ = ZU .$$

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

Řešení (viz obr. 43). *Rozbor.* Nechť přímka $p \parallel AB$ existuje a na ní příslušné body X, Y, Z, U, jak žádá text úlohy. Potom je bod Y středem úsečky XZ. Označme O společný bod polopřímky DY a úsečky AB. Potom trojúhelníky DAO, DXY jsou podobné (podle věty uu) a rovněž trojúhelníky DOB, DYZ. Z těchto podobností pořadě plyne

$$\frac{AO}{XY} = \frac{DO}{DY}, \quad \frac{OB}{YZ} = \frac{DO}{DY} . \tag{1}$$

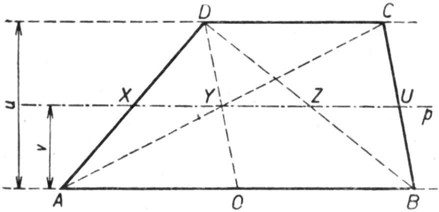
Porovnáním obou levých stran dostaneme

$$\frac{AO}{XY} = \frac{OB}{YZ} ; \tag{2}$$

protože však je $XY = YZ$, plyne odtud

$$AO = OB \tag{3}$$

neboli bod O je středem úsečky AB. Podle toho provedeme konstrukci přímky p.



Obr. 43

Konstrukce. Sestrojme střed O úsečky AB a označme Y společný bod úseček AC, DO. Bodem Y veďme přímku $p \parallel AB$ a označme pořadě X, Z, U společné body úseček AD, BD, BC. Potom je p hledanou přímkou.

Důkaz. O bodu O podle konstrukce platí (3). Trojúhelníky DAO, DXY a dále trojúhelníky DOB, DYZ jsou podobné, neboť se shodují ve všech úhlech; platí tedy vztahy (1), z nichž plyne (2). Protože zlomky ve vztahu (2) mají stejné čitatele [viz (3)], mají i stejné jmenovatele, tj. platí $XY = YZ$.

Z podobností trojúhelníků AXY, ADC plyne

$$\frac{XY}{DC} = \frac{v}{u}, \tag{3}$$

kde v, u jsou výšky těchto trojúhelníků příslušné vrcholu A.

Z podobností trojúhelníků BZU, BDC plyne obdobně

$$\frac{ZU}{DC} = \frac{v}{u}. \tag{4}$$

Ze vztahů (3), (4) plyne

$$ZU = XY\,,$$

takže vzhledem ke (2) plyne

$$XY = YZ = ZU\,,$$

což jsme měli dokázat.

Diskuse. Protože body D, O leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AC, bod Y existuje. Z konstrukce plyne, že takový bod je jediný.

Tím je řešení úlohy provedeno.

3. Řešte rovnici

$$\sqrt{\frac{2-x}{5-x}} = \frac{2+x}{2-x}\,.$$

Zkoušku proveďte dosazením do obou stran dané rovnice.

Řešení. Jestliže číslo x je řešením rovnice (1), potom, umocníme-li obě strany rovnice (1), dostaneme rovnici

$$\frac{2-x}{5-x} = \frac{(2+x)^2}{(2-x)^2}\,,$$

neboli postupně

$$\begin{gathered}(2-x)^3 = (5-x)(2+x)^2,\\ 8 - 12x + 6x^2 - x^3 = (5-x)(4+4x+x^2)\,,\\ -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 =\\ = 20 - 4x + 20x - 4x^2 + 5x^2 - x^3\,,\\ 5x^2 - 28x - 12 = 0\,. \qquad (2)\end{gathered}$$

Diskriminant této rovnice je

$$\begin{gathered}D = 28^2 + 4\,.\,12\,.\,5 = 4^2\,.\,7^2 + 4^2\,.\,3\,.\,5 =\\ = 4^2(49+15) = 4^2\,.\,8^2;\end{gathered}$$

řešení rovnice (2) jsou:

$$x_1 = \frac{28 + 32}{10} = 6; \quad x_2 = \frac{28 - 32}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Provedeme zkoušku dosazením do obou stran rovnice (1).

Případ [1]. Dosaďme $x = 6$ do pravé strany rovnice (1). Dostaneme

$$\frac{2 + 6}{2 - 6} = \frac{8}{-4} = -2.$$

Odtud plyne, že číslo $x = 6$ není řešením rovnice (1), neboť levá strana rovnice (1) je odmocnina a tedy nezáporné číslo, kdežto dosazení do levé strany je číslo záporné.

Případ [2]. Dosaďme $x = -\frac{2}{5}$ do obou stran rovnice (1); dosazení označme L, P. Je

$$L = \sqrt{\frac{2 + \frac{2}{5}}{5 + \frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{12}{5}}{\frac{27}{5}}} = \sqrt{\frac{12}{27}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3},$$

$$P = \frac{2 - \frac{2}{5}}{2 + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

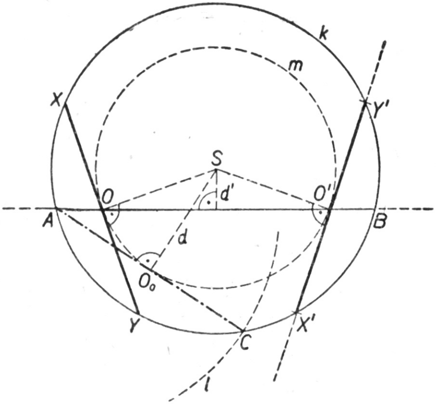
Platí tedy $L = P$ a číslo $x = -\frac{2}{5}$ je řešením rovnice (1).

Závěr. Daná rovnice (1) má jediné řešení $x = -\frac{2}{5}$.

4. Nech je daná kružnica $k \equiv (S, r)$ a jej tetiva AB; ďalej nech je dané kladné číslo $t < AB$.

Zostrojte tetivu $XY = t$ kružnice k, takú, aby ju priamka AB rozpoľovala.

Zistite, koľko má úloha riešení a odôvodnite svoj výsledok.



Obr. 44

Riešenie. Použijeme pomocnú vetu **V**: „Ak je O stred tetivy $XY < 2r$, kde r je veľkosť polomeru kružnice so stredom S, potom je $O \not\equiv S$ a platí $SO \perp XY$."

Ďalej použijeme ešte vetu **P** (obr. 44): „Množinou stredov O všetkých tetív kružnice $k \equiv (S, r)$, ktoré majú veľkosť $t < 2r$, je kružnica m, sústredná s kružnicou k." (Dôkaz vyplýva napr. z Pythagorovej vety; z obr. 44 napr. vyplýva $SO^2 = SC^2 - OC^2 = r^2 - \frac{1}{2} t^2$, takže $SO_0 =$ konšt.)

Rozbor danej úlohy (obr. 44). Označme XY hľadanú tetivu a O jej stred. Zostrojme podľa vety **P** kružnicu

$m \equiv (S, \varrho)$, kde ϱ je vzdialenosť bodu S od jednej z tetív veľkosti t kružnice k. Stred O musí ležať jednak na priamke AB a ďalej na kružnici m. Z toho vyplýva konštrukcia.

Konštrukcia (obr. 44). Opíšme okolo bodu A kružnicu l s polomerom t a označme C jeden zo spoločných bodov kružníc k, l. Stred O_0 tetivy AC leží na pomocnej kružnici $m \equiv (S, SO_0)$. Označme O, O' oba rôzne spoločné body kružnice m a priamky AB. Ďalej zostrojme v bodoch O, O' dotyčnice ku kružnici m a označme po rade XY, $X'Y'$ tetivy, ktoré na týchto dotyčniciach vytína kružnica k. Potom $XY = X'Y' = t$ sú práve všetky tetivy, ktoré vyhovujú požiadavkám úlohy.

Dôkaz konštrukcie vyplýva z predošlého a z oboch pomocných viet.

Diskusia. Dokážeme, že úloha má vždy práve dve riešenia.

Známa je veta: „Nech $XY < AB$ sú dve tetivy tej istej kružnice a d, d' (v tomto poradí) nech sú vzdialenosti bodu S od priamok XY, AB. Potom platí $d > d'$.“

V našom prípade je $t = XY < AB$ (podľa textu úlohy a konštrukcie) a preto o číslach $d = SO_0$, d' platí $d > d'$. Preto je priamka AB sečnicou kružnice m a existujú dva rôzne body O, O', spoločné priamke AB a kružnici m. Preto existujú aj dve rôzne tetivy XY, $X'Y'$, ktoré sú riešením úlohy.

Tým je riešenie ukončené.

8. Úlohy I. kola kategorie D

1. Na chmelové brigádě soutěžily dvě třídy v česání chmelu. Jedna třída, ve které bylo 39 žáků, pracovala 9 dní a natrhala 2282 věrtele. Druhá třída, která měla jen 31 žáků, pracovala 8 dní a natrhala 1959 věrtelů; přitom jeden ze žáků této třídy onemocněl, takže čtyři dny nepracoval. Která třída zvítězila (se zřetelem k průměrnému dennímu pracovnímu výkonu)?

Řešení. Vypočteme průměrný počet věrtelů, které připadají na jednoho žáka a den v každé třídě.

a) V první třídě je denní průměr na jednoho žáka

$$\frac{2282}{39 . 9} = \begin{array}{r} 2282 : 351 \\ 1760 \\ 5 \end{array} \underline{|6,5}$$

b) V druhé třídě je denní průměr na jednoho žáka

$$\frac{1959}{31 . 4 + 30 . 4} = \begin{array}{r} 1959 : 244 \\ 70 \end{array} \underline{|8,0}$$

Zvítězila druhá třída.

Podobná řešení vypracovali Zlata Honzičková, 8. tř. 2. osš, Olomouc — Na hradě, a Petr Wolf, 8.c tř. osš, Uherský Brod.

Jiné řešení. Označme a průměrný výkon jednoho žáka první třídy za jeden den a b průměrný denní výkon žáka druhé třídy; a, b jsou tedy počty věrtelů načesaných za jeden den. Platí

$$a = \frac{2282}{39 . 9} = \frac{2282}{351}\,; \quad b = \frac{1959}{31 . 8 - 4 . 1} = \frac{1959}{244}\,.$$

Společným násobkem čísel 351, 244 je číslo 351 . 244 = = 85 644; první zlomek rozšíříme číslem 244, druhý číslem 351. Dostaneme tak čísla

$$a = \frac{2282 \cdot 244}{315 \cdot 244} = \frac{556\,808}{85\,644},$$

$$b = \frac{1959 \cdot 351}{244 \cdot 351} = \frac{687\,609}{85\,644}.$$

Z toho je vidět, že je $a < b$, takže průměrný denní výkon žáka druhé třídy je větší. Zvítězila tedy druhá třída.

Podle řešení Michala Kretschmera, žáka 8.c tř. 87. osš, Praha 13- - Spořilov

2. Pole tvaru obdĺžnika má rozmery $AB = 810$ m, $AD = 180$ m. Toto pole treba rozdeliť na štyri obdĺžniky s obsahmi P_1, P_2, P_3, P_4 ako na obrázku 45. Pritom má byť $P_1 = 2{,}03$ ha, $P_4 = 3{,}19$ ha.

Vypočítajte:

a) Obsahy P_2, P_3.

b) Obvody všetkých obdĺžnikov.

Riešenie. Aby sme úlohu rozriešili, musíme určiť veľkosti úsečiek AM, AK. Pomocou nich ľahko vypočítame rozmery všetkých obdĺžnikov P_1, P_2, P_3, P_4 (tieto písmeny značia zároveň obsahy týchto obdĺžnikov). Obsah obdĺžnika $AMND$ je $P_1 + P_4$, jeden jeho rozmer je $AD = 180$ m; druhý rozmer AM vypočítame tak, že obsah obdĺžnika delíme rozmerom AD. Veľkosti úsečiek uvádzame v metroch a obsahy v plošných metroch. Je teda $P_1 = 20\,300$ m^2, $P_4 = 31\,900$ m^2.

Výpočet.

$$
\begin{array}{r}
P_1 + P_4 = 20\,300 \\
31\,900 \\
\hline
52\,200
\end{array}
$$

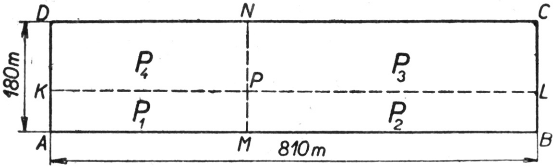
$$52\,200 : 180 = 5220 : 18 = 290.$$
$$162$$

Je teda

$$AM = 290 \qquad (1)$$

a

$$MB = AB - AM = 810 - 290 = 520\,. \qquad (2)$$



Obr. 45

Teraz vypočítame veľkosť úsečky AK, t. j. jeden rozmer obdĺžnika P_1. Jeho obsah je $P_1 = 20\,300$, druhý rozmer je $AM = 290$.

Výpočet.

$$20\,300 : 290 = 2030 : 29 = 70$$
$$00$$

Je teda

$$AK = 70\,, \qquad (3)$$

takže

$$KD = AD - AK = 180 - 70 = 110\,. \qquad (4)$$

Výsledky (1) až (4) sú rozmery našich obdĺžnikov P_1 až P_4.

a) Je

$$P_2 = MB \,.\, AK\,, \qquad P_3 = MB \,.\, KD\,.$$

Výpočet.

$P_2 = 520 \,.\, 70 = 36\,400,$

$$\begin{array}{r} P_3 = 520.110 \\ \hline 520 \\ 5\,200 \\ \hline P_3 = 57\,200 \end{array}$$

Urobíme hrubú skúšku, či sme dobre počítali. Sčítame obsahy P_1, P_2, P_3, P_4. Tento súčet sa musí rovnať obsahu P obdĺžnika $ABCD$.

Výpočet.

$$\begin{array}{l|r} P_1 & 20\,300 \\ P_2 & 36\,400 \\ P_3 & 57\,200 \\ P_4 & 31\,900 \\ \hline & 145\,800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} P = AB \,.\, AD = 810.180 \\ \hline 6480 \\ 810 \\ \hline 145\,800 \end{array}$$

Výsledky sú teda správne.

Odpoveď. Je $P_2 = 3{,}64$ ha, $P_3 = 5{,}72$ ha.

b) Označme p_1, p_2, p_3, p_4 (v tomto poradí) obvody obdĺžnikov P_1, P_2, P_3, P_4. Platí

$$p_1 = 2(AM + AK), \qquad p_2 = 2(MB + AK),$$
$$p_3 = 2(MB + KD), \qquad p_4 = 2(AM + KD).$$

Výpočet.

$$\begin{array}{l|r} AM & 290 \\ AK & 70 \\ \hline & 360 \\ \hline p_1 & 720 \end{array} \qquad \begin{array}{l|r} MB & 520 \\ AK & 70 \\ \hline & 590 \\ \hline p_2 & 1180 \end{array} \qquad \begin{array}{l|r} MB & 520 \\ KD & 110 \\ \hline & 630 \\ \hline p_3 & 1260 \end{array} \qquad \begin{array}{l|r} AM & 290 \\ KD & 110 \\ \hline & 400 \\ \hline p_4 & 800 \end{array}$$

Urobíme hrubú skúšku našich výsledkov. Ľahko usúdime, že súčet $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2p$, kde p je obvod obdĺžnika $ABCD$. Avšak $p = 2(AB + AD) = 2(810 + 180) = 2 \,.\, 990 = 1980$. A ďalej je $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 720 + 1180 + 1260 + 800 = 3960$. Ďalej je $2p = 1980 \,.\, 2 = 3960$, čo súhlasí s predošlým výsledkom.

Výpočty sme teda urobili správne.

Odpoveď. Obvody sú $p_1 = 720$ m, $p_2 = 1180$ m, $p_3 = 1260$ m, $p_4 = 800$ m.

Pěkná řešení této úlohy podali Jan Tejzr, 8.a tř. osš, Bojkovice (okres Uherský Brod), a Ludmila Boháčová, 8. b tř. osš, Olomouc (třída Spojenců).

3. Je dán zlomek

$$z = \frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^3 + 2a^2 - a - 2}\,. \tag{1}$$

a) Rozhodněte, pro která čísla a ztrácí tento zlomek význam. Potom daný zlomek zkraťte.

b) Rozhodněte, pro která čísla a se daný zlomek rovná nule.

c) Odůvodněte, že pro čísla a větší než 2 je daný zlomek kladný.

Řešení. a) Upravme daný zlomek z tak, že jeho čitatele i jmenovatele rozložíme v činitele; dostaneme postupně

$$z = \frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^3 + 2a^2 - a - 2} = \frac{a^2(a-2) - (a-2)}{a^2(a+2) - (a+2)} =$$

$$= \frac{(a-2)\,(a^2-1)}{(a+2)\,(a^2-1)}\,,$$

takže
$$z = \frac{(a-2)(a-1)(a+1)}{(a+2)(a-1)(a+1)}. \tag{2}$$

Zlomek ztrácí tedy význam, jestliže některý ze tří činitelů ve jmenovateli posledního zlomku je roven nule. Jsou tu tři možnosti:

[1] Je $a + 2 = 0$ neboli $a = -2$.
[2] Je $a + 1 = 0$ neboli $a = -1$.
[3] Je $a - 1 = 0$ neboli $a = 1$.

V každém z těchto tří případů je jmenovatel zlomku (1) skutečně roven nule, jak se snadno přesvědčíme dosazením, a zlomek ztrácí význam.

Pokud je číslo a různé od čísel 1 a -1 (a ovšem i od čísla -2), je součin $(a-1)(a+1) \neq 0$ a můžeme čitatele i jmenovatele zlomku (2) dělit tímto číslem; po zkrácení dostaneme
$$z = \frac{a-2}{a+2}. \tag{3}$$
Pro všechna čísla a různá od čísel 1, -1, -2 má zlomek (1) význam a platí
$$\frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^3 + 2a^2 - a - 2} = \frac{a-2}{a+2}.$$

b) Zlomek je roven nule, jestliže je jeho čitatel roven nule. V našem případě použijeme upraveného zlomku z ze vztahu (3). Musí tedy být číslo $a - 2$ rovno nule, tj. $a - 2 = 0$; odtud dostaneme $a = 2$.

Pro číslo $a = 2$ je skutečně čitatel daného zlomku (1) roven nule, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Odpověď. Daný zlomek (1) je roven nule pro $a = 2$.

c) Nechť je $a > 2$. Máme dokázat, že v tomto případě je zlomek z kladné číslo. To dokážeme pomocí zlomku ve tvaru (3).

Tu je $a - 2$ číslo kladné. Rovněž číslo $a + 2$ je kladné. Je tedy čitatel i jmenovatel zlomku (3) číslo kladné a tím i zlomek z.

Tím je úloha rozřešena.

Takto zevrubné řešení této úlohy podal Michal Kretschmer, 8.c tř. 87. jsš, Praha—Spořilov.

4. Koľko metrov drôtu s prierezom 1 mm^2 sa vyrobí z jednej tuny medi, ak 1 dm^3 medi váži 8,93 kg.

(Objem valca vypočítame tak, že obsah podstavy znásobíme výškou valca.)

Riešenie. Všetky výpočty budeme robiť tak, že dĺžkové údaje budú v decimetroch, obsahy v dm^2 a objemy v dm^3.

Riešenie urobíme tak, že určíme objem 1 tuny medi a potom sa budeme pýtať na veľkosť výšky valca, ktorého podstava má obsah $1\ mm^2 = \frac{1}{10\,000}\ dm^2$.

Pretože váhu telesa vypočítame tak, že znásobíme špecifickú váhu objemom, objem 1 tuny = 1000 kg medi rovná sa číslu 1000 : 8,93.

Výpočet.

$$
\begin{array}{l}
1000 : 8{,}93 = 100\,000 : 893 \quad | \underline{111{,}9} \doteq 112 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1070 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; 1770 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 8770 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\;\; 733
\end{array}
$$

Objem 1 tuny medi je teda asi 112 dm^3.

Z objemu a obsahu podstavy valca vypočítame jeho výšku tak, že veľkosť objemu delíme veľkosťou podstavy.

Výpočet.

$$112 : \frac{1}{10\,000} = 112 \,.\, 10\,000 = 1\,120\,000 \,.$$

Ale 1 120 000 dm = 112 km.

Namiesto skúšky správnosti urobíme odhad výsledku. Pýtajme sa, koľko asi váži medený drôt dĺžky 112 km, ak je jeho prierez 1 mm^2 a ak váži 1 dm^3 medi asi 8,93 kg.

Objem V rotačného valca, ktorý nám predstavuje drôt, je (v dm^3)

$$V = \frac{1}{10000} \,.\, 1\,120\,000 = 112 \,.$$

Pretože 1 dm^3 medi váži 8,93 kg, 112 dm^3 medi váži 8,93 kg . 112.

Výpočet.

$$\begin{array}{r} 8{,}93 \,.\, 1\,12 \\ \hline 17\,86 \\ 89\,3 \\ 893 \\ \hline 1000{,}16 \end{array} \doteq 1000$$

Ale 1000 kg je 1 tuna; teda je náš výpočet približne správny.

Odpoveď. Z jednej tuny medi sa vyrobí asi 112 km drôtu s priemerom 1 mm^2.

Podobne úlohu riešili Jiří Hudský, 8.b tr. jsš, Uherský Brod, a Věra Broncová, 8.a tr. jsš, Olomouc - Hejčín.

5. Plechová podložka má tvar čtverce o straně 8 dm. Při každém vrcholu tohoto čtverce máme odříznout stejnou část tvaru pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka tak, aby se hmota podložky zmenšila

a) o 18 %;

b) o 72 %.

Vypočtěte velikost odvěsen odříznutých trojúhelníků. Dále rozhodněte, zda je možné obojí odříznutí provést.

Řešení. Čtvercová podložka má čtvercovou stěnu o straně 8 dm; tato stěna má obsah 64 dm^2. Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, který odřízneme, má odvěsnu velikosti x dm a jeho obsah je $\frac{1}{2}x^2$. Čtyři tyto trojúhelníky mají obsah $4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$. V našem případě musí být $x \leqq 4$; jinak by se odříznutí nedalo provést.

Protože tloušťka podložky i měrná hmota jejího materiálu je všude stejná, stačí, když místo hmoty uvažujeme jen o obsahu čtvercové stěny podložky.

a) 18 % ze 64 dm^2 je $64 \cdot 0{,}18$; toto číslo má být rovno $2x^2$, tj. má platit

$$2x^2 = 64 \cdot 0{,}18$$

neboli

$$x^2 = 64 \cdot 0{,}09 .$$

Je tedy

$$x = 8 \cdot 0{,}3 ,$$

tj.

$$x = 2{,}4 .$$

Protože je $2{,}4 < 4$, lze odříznutí provést (obr. 46). Zkouškou bychom se přesvědčili o správnosti výpočtu.

Odpověď. Abychom hmotu podložky zmenšili o 18 %, je nutno v každém rohu podložky odříznout pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnou 2,4 dm.

b) 72 % ze 64 dm² je 64 . 0,72. Má platit

$$2x^2 = 64 \,.\, 0{,}72$$

neboli

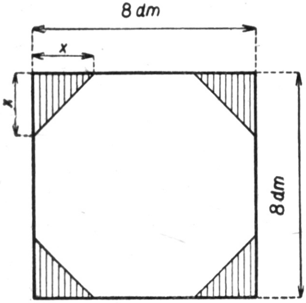
$$x^2 = 64 \,.\, 0{,}36 \,.$$

Je tedy

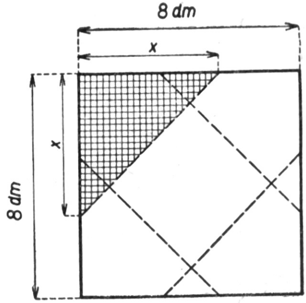
$$x = 8 \,.\, 0{,}6 \,,$$

tj.

$$x = 4{,}8 \,.$$



Obr. 46



Obr. 48

Protože je $4{,}8 > 4$, nelze odříznutí provést (obr. 47).

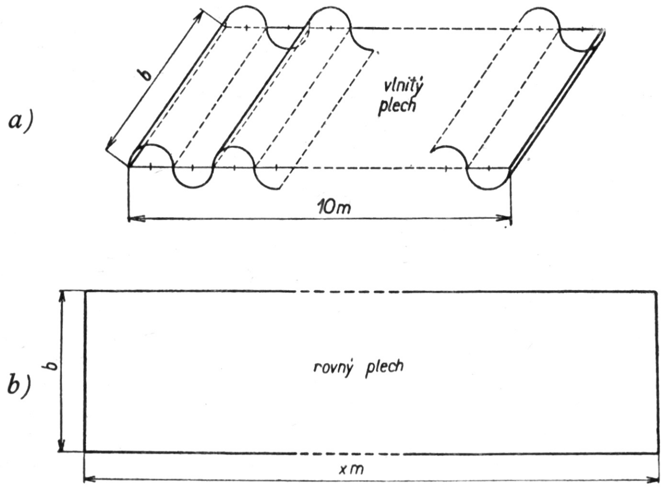
Odpověď. Požadavky úlohy nelze tedy v případě b) splnit a úloha je neřešitelná.

Podle řešení Jaroslava Vilímka, žáka 8.a tř. 85. osš, Praha 13, a Michala Kretschmera, žáka 8. tř. 87. osš, Praha—Spořilov.

6. Vlnitý plech (viz obrázek 48ab) má za průřez vlnovku, která se skládá ze shodných polokružnic o poloměru r. Kolik běžných metrů rovného plechu téže šířky, jako má vlnitý plech (v obrázku je šířka označena písmem b), je třeba k vyrobení 10 běžných metrů vlnitého plechu, jestliže je

a) $r = 5$ cm; b) $r = 2$ cm .

Porovnejte výsledky obou výpočtů v případech a) a b).



Obr. 48

Řešení (obr. 48ab). Je 10 m = 100 cm . 10 = 1000 cm; další délky počítáme v centimetrech.

a) Průměr polokružnice, která je tu polovinou vlnovky (půlvlna) je 10. Bude tolik půlvln, kolik je 1000 : 10 = = 100; je tedy 50 vln, z nichž každá má na svém obvodu délku jako je obvod kružnice o poloměru $r = 5$ neboli

$2\pi \,.\, 5$. Délka obvodů těchto 50 vln je

$$2\pi \,.\, 5 \,.\, 50 = 500\pi \doteq 500 \,.\, \frac{22}{7} =$$

$$= \frac{11\,000}{7} \doteq 1571 \text{ (cm)},$$

což je asi $15\frac{3}{4}$ m.

b) Průměr polokružnice, která tvoří půlvlnu je 4. Půlvln bude $1000 : 4 = 250$ neboli 125 celých vln. Jedna vlna má na obvodu délku jako obvod kružnice o poloměru 2, tj. $2\pi \,.\, 2$. Délka obvodů 125 vln je

$$2\pi \,.\, 2 \,.\, 125 = 500\pi\,,$$

což je totéž číslo jako v případě a).

Výsledek. K vyrobení 10 běžných metrů vlnitého plechu je třeba asi $15\frac{3}{4}$ m rovného plechu.

Poznámka. Z obou výsledků jsme vedeni k domněnce, že asi nezáleží na tom, jak velké jsou poloměry polokružnice, z nichž se vlny skládají. Správnost této domněnky si ověříme výpočtem. Nechť poloměr polokružnice půlvlny je r a nechť na 10 běžných metrů vlnitého plechu připadne n vln, kde n je přirozené číslo.

Délka jedné vlny je $2\pi r$, délka n vln je $2\pi rn$. Tu platí $4r \,.\, n = 10$, takže je

$$n = \frac{10}{4r}\,. \qquad (1)$$

Délka obvodu n vln je $p = 2\pi r \,.\, n$; dosadíme-li sem za n ze vztahu (1), dostaneme

$$p = 2\pi r \,.\, \frac{10}{4r}$$

neboli

$$p = 5\pi \doteq 15\frac{3}{4} \text{ (metru)}.$$

Toto číslo skutečně nezávisí na poloměru r; tím jsme správnost domněnky dokázali.

Podle řešení Ivana Novotného, žáka 8.a tř. jsš, Kadaň, a Jana Novotného, žáka 8.a tř. 5. osš, Olomouc - Nové Hodolany.

7. Zostrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (v ktorom AB, CD sú základne), ak je dané rameno $BC = 52$ mm, súčet $s = 128$ mm jeho základní a uhol $\sphericalangle ADC = 112\frac{1}{2}^\circ$.

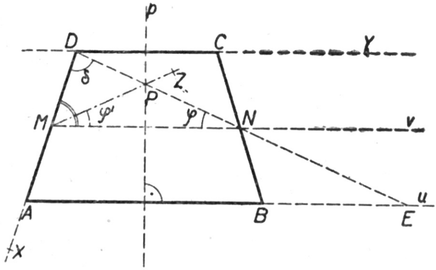
Po urobení konštrukcie dokážte, že úsečky AD, BC nemajú žiadny spoločný bod.

Riešenie (obr. 49). *Rozbor.* Predpokladajme, že sme zostrojili lichobežník $ABCD$, ktorý má vlastnosti, požadované v úlohe. V ňom je $AD = BC$. Označme MN jeho strednú priečku ako v obr. 49. Na polpriamke AB zostrojme úsečku $AE = AB + CD = s$, t. j. $BE = CD$. Potom trojuholník AED má úsečku MN tiež za strednú priečku. Ďalej si pripomeňme, že rovnoramenný lichobežník má os p súmernosti. Priamka p je osou úsečiek AB, CD a MN. Podľa práve pripomenutých vlastností lichobežníka urobíme konštrukciu.

Konštrukcia. Zostrojme uhol $\sphericalangle XDY = 112\frac{1}{2}^\circ$. Na polpriamke DX zostrojme úsečku $DA = 52$ mm. Potom zostrojme stred M tejto úsečky a bodmi A, M

veďme po rade priamky $u \parallel DY$, $v \parallel DY$. Na priamke u v polrovine ADY zostrojme úsečku $AE = 128$ mm. Priamka v pretne priamku DE v bode N.

Zostrojme ďalej os p úsečky MN a v súmernosti podľa priamky p zostrojme body B, C súmerne združené s bodmi (v tomto poradí) A, D. Potom je $ABCD$ hľadaný lichobežník.



Obr. 49

Dôkaz. Je známe, že stredná priečka lichobežníka so základňami $a = AB$, $c = CD$ má veľkosť $\frac{1}{2}(a + c)$.

Podľa konštrukcie je $ABCD$ rovnoramenný lichobežník, ako vyplýva zo súmernosti podľa osi p. V ňom je podľa konštrukcie $AD = BC = 52$ mm, uhol $\sphericalangle ADC = 112\frac{1}{2}^\circ$. V súmernosti s osou p obrazom stredu M úsečky AD je bod N, lebo p je os úsečky MN. Preto musí obraz N bodu M byť stredom úsečky BC, ktorá je obrazom úsečky AD v tejto súmernosti. Je teda MN strednou priečkou lichobežníka $ABCD$ a platí $MN = \frac{1}{2}(a + c)$. Avšak podľa konštrukcie je MN strednou priečkou trojuholníka AED a preto je $AE = 2.MN$, čiže $AE = a + c$. Avšak podľa konštrukcie bodu E je $AE = s$ a preto je $a + c = s$, t. j. súčet základní zostrojeného lichobežníka sa rovná číslu s, ako vyžaduje text úlohy.

Správnosť predchádzajúceho dôkazu závisí od toho, či skutočne oba rôzne body A, D ležia vnútri tej istej polroviny vyťatej priamkou p. Dokážeme, že v našom prípade to skutočne tak je.

Označme po rade α, δ, φ uhly trojuholníka MDN. Platí $\alpha = 180° - \sphericalangle MDY = 180° - 112\frac{1}{2}° = 67\frac{1}{2}°$ (uhly α, $\sphericalangle MDY$ sú uhly príľahlé pri rovnobežkách MN, DY); je teda

$$\alpha = 67\frac{1}{2}° . \qquad (1)$$

Ďalej je podľa konštrukcie $MD = 26$, $MN = 64$, teda $MD < MN$ a preto o uhloch φ, δ trojuholníka MDN platí $\varphi < \delta$; pritom je $\varphi + \delta = 180° - \alpha = 112\frac{1}{2}°$ (súčet uhlov α, φ, δ je 180°). Z toho vyplýva, že uhol φ je nevyhnutne menší než polovica zo $112\frac{1}{2}°$, čiže je

$$\varphi < 56\frac{1}{4}° . \qquad (2)$$

Porovnaním výsledkov (1), (2) dostávame $\varphi < \alpha$; preto o stranách protiľahlých k týmto uhlom v trojuholníku MDN platí

$$MD < ND .$$

Zostrojme uhol $\sphericalangle NMZ = \varphi$ (v obrázku je označený φ') v polrovine MND. Pretože je $\varphi < \alpha$, je aj $\varphi' < \alpha$ a polpriamka MZ leží v uhle $\sphericalangle DMN$; preto má s úsečkou ND spoločný bod P, ktorý padne dovnútra tejto úsečky. Avšak bod P je bodom osi súmernosti p rovnoramenného trojuholníka PMN. Preto aj priamka p oddeľuje body N, D, takže bod D padne nevyhnutne do polroviny pM. Z toho ľahko usúdime, že celá polpriamka DM a s ňou aj bod A leží vnútri polroviny pM (je totiž $\sphericalangle YDM > 90°$). Tým je dôkaz ukončený a tým aj riešenie úlohy.

Podrobné riešenia podali Jitka Kolářová, 8.b tr. jsš, Šternberk, a Jana Pospíšilová, 8.b tr. jsš Komenium, Olomouc.

8. Zvolte rovnoběžník $ABCD$ a označte S jeho střed. Veďte přímku $p \parallel AB$ tak, aby s úsečkami AD, AS, BS, BC měla pořadě společné body M, K, L, N a aby platilo $MK = KL = LN$.
Odůvodněte správnost provedené konstrukce.

Řešení (obr. 50). *Rozbor.* Mysleme si, že jsme našli přímku $p \parallel AB$, která splňuje požadavky vyslovené v textu úlohy, takže platí

$$MK = KL = LN = x\,. \qquad (1)$$

Sestrojme rovnoběžníky AK_2KM, K_2KLK_4, K_4LNB, kde K_2, K_4 jsou body úsečky AB; tyto rovnoběžníky dostaneme tak, že vedeme body K, L přímky rovnoběžné s přímkou AD. Platí pak

$$AK_2 = MK,\ K_2K_4 = KL,\ K_4B = LN,$$

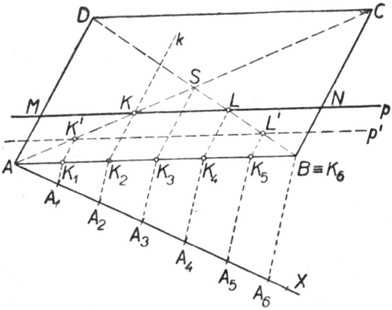
takže platí

$$AK_2 = K_2K_4 = K_4B = x\,.$$

Body K_2, K_4 dělí tedy úsečku AB na tři shodné úsečky. Podle toho provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 50). Sestrojíme polopřímku AX, která neleží v přímce AB a na ní zvolíme bod $A_1 \neq A$; pak sestrojíme úsečky $AA_2 = 2 \,.\, AA_1$, $AA_3 = 3 \,.\, AA_1$, $AA_4 = 4 \,.\, AA_1$, $AA_5 = 5 \,.\, AA_1$, $AA_6 = 6 \,.\, AA_1$. Dále veďme body $A_1, A_2, \ldots, A_5$ rovnoběžky k přímce A_6B; jejich průsečíky s přímkou AB označme pořadě K_1, $K_2, \ldots, K_5$. Podle známé konstrukce platí

$$AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = \ldots = K_5B = y.$$



Obr. 50

Bodem K_2 veďme přímku $k \parallel SK_3$ a označme K společný bod přímek AS, k; bodem K veďme přímku $p \parallel AB$ a označme M, L, N její společné body s přímkami AD, BS, BC. Potom je p hledaná přímka.

Důkaz (viz obr. 50). Mysleme si, že máme úsečku AS rozdělit na tři stejné díly; tu podle známé konstrukce vedeme body K_1, K_2 rovnoběžky s přímkou SK_3 a obdržíme body K', K, takže je $AK' = K'K = KS$.

Stejným způsobem sestrojíme body L', L, které dělí úsečku BS na tři stejné díly, takže platí $BL' = L'L = LS$. Tuto druhou konstrukci bychom však mohli provést též tak, že bychom body K', K sestrojili rovnoběžky s přímkou AB, čímž bychom také dospěli k bodům L', L. Odtud plyne, že je nutně $KL \parallel AB$, takže K_2K_4LK je rovnoběžník a tedy

$$KL = K_2K_4 = 2y\,. \tag{3}$$

Také AK_2KM, K_4BNL jsou rovnoběžníky, přičemž je $AK_2 = 2y = K_4B$; proto je též $MK = 2y$, $LN = 2y$ a vzhledem ke (3) je

$$MK = LN = KL\,.$$

Konstrukce je tedy správná. Tím je řešení úlohy provedeno.

Zevrubné řešení podal Antonín Lukš, 8.d tř. jsš Komenium, Olomouc, a Dušan Kovařík, 8.c tř. osš, Luhačovice.

9. Je dán výraz

$$V = x + \frac{1}{1 - px} - \frac{2x}{1 + px}\,.$$

Do tohoto výrazu dosaďte za p číslo $\dfrac{x+1}{x(x-1)}$. Dále rozhodněte, pro která čísla x ztrácí daný výraz V smysl, a pak ho zjednodušte.

Potom určete číslo x tak, aby se daný výraz V rovnal číslu $\dfrac{1}{2}$; proveďte zkoušku svého výpočtu.

Řešení. Nejprve vypočteme oba jmenovatele zlomků výrazu V po dosazení za p. Platí

$$1 - px = 1 - \frac{x(x+1)}{x(x-1)}\,, \tag{1}$$

$$1 + px = 1 + \frac{x(x+1)}{x(x-1)}\,. \tag{2}$$

Zlomky na pravých stranách rovností (1), (2) ztrácejí význam v případě, že je $x(x-1)=0$ neboli je-li $x=0$ nebo $x-1=0$, tj. pro $x=0$ anebo pro $x=1$.

V dalším předpokládáme, že je $x \neq 0$, $x \neq 1$. Potom zlomky v (1), (2) můžeme zkrátit číslem x; dostaneme

$$1 - px = 1 - \frac{x+1}{x-1},$$

$$1 + px = 1 + \frac{x+1}{x-1}$$

neboli postupně

$$1 - px = \frac{x-1-(x+1)}{x-1} = \frac{-2}{x-1}, \qquad (1')$$

$$1 + px = \frac{x-1+(x+1)}{x-1} = \frac{2x}{x-1}. \qquad (2')$$

Nyní vypočteme oba zlomky v daném výrazu V; platí postupně

$$\frac{1}{1-px} = 1 : \frac{-2}{x-1} = 1 \,.\, \frac{x-1}{-2} = -\frac{x-1}{2}, \qquad (1'')$$

$$\frac{2x}{1+px} = 2x : \frac{2x}{x-1} = 2x \,.\, \frac{x-1}{2x} = \frac{2x(x-1)}{2x} =$$

$$= x - 1, \qquad (2'')$$

neboť lze krátit číslem $2x \neq 0$.

Výsledky (1″), (2″) pak dosadíme do daného výrazu V; obdržíme postupně

$$V = x - \frac{x-1}{2} - (x-1) = \frac{2x-(x-1)-2(x-1)}{2} =$$

$$= \frac{2x - x + 1 - 2x + 2}{2} = \frac{3-x}{2}$$

neboli

$$V = \frac{3 - x}{2}. \tag{3}$$

Tím jsme daný výraz V zjednodušili; výsledek (3) platí pro všechna čísla x různá od čísel 0, 1.

Nyní máme najít takové číslo x, aby nám po dosazení do výrazu V vyšlo $V = \frac{1}{2}$, tj. aby podle výsledku (3) platilo

$$\frac{3 - x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Jsou-li si tyto zlomky rovny, musí být

$$3 - x = 1$$

neboli

$$x = 2.$$

Zkouška. Má-li úloha řešení, pak je to možné jedině pro $x = 2$. V tomto případě je

$$p = \frac{2 + 1}{2 \,.\, (2 - 1)} = \frac{3}{2}.$$

Do daného výrazu V nyní dosaďme $x = 2$, $p = \frac{3}{2}$; dostaneme postupně

$$V = 2 + \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \,.\, 2} - \frac{2 \,.\, 2}{1 + \frac{3}{2} \,.\, 2} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 - 3} - \frac{4}{1 + 3} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

tj. platí $V = \frac{1}{2}$, jak požadovala daná úloha.

Odpověď. Výraz V je roven číslu $\frac{1}{2}$ jedině, když je $x = 2$.

Takto zevrubná řešení podali žáci: Jitka Kolářová, 8.b tř. jsš, Šternberk, a Michal Mareček, 8.a tř. jsš, Olomouc - Na hradě 5.

9. Úlohy II. kola kategorie D

1. Jsou dány dva výrazy

$$U = \frac{\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+3}}{\frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+3}} - \frac{p+3}{p},$$

$$V = \frac{\frac{1}{p^2-9} - \frac{1}{p^2+9}}{\frac{1}{p^2-9} + \frac{1}{p^2+9}} - \frac{p^2+9}{p^2},$$

kde p je dané číslo.

a) Zjednodušte tyto výrazy a přesvědčte se o tom, že platí $U = V$.

b) Rozhodněte, pro která čísla p ztrácejí dané výrazy význam.

Řešení. a) Upravíme výrazy U, V. Platí

$$U = \frac{\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+3}}{\frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+3}} - \frac{p+3}{p} = \frac{\frac{p+3-(p-3)}{(p-3)(p+3)}}{\frac{p+3+p-3}{(p-3)(p+3)}} -$$

$$-\frac{p+3}{p}=\frac{\dfrac{6}{p^2-9}}{\dfrac{2p}{p^2-9}}-\frac{p+3}{p}=\frac{6(p^2-9)}{2p(p^2-9)}-\frac{p+3}{p}=$$

$$=\frac{3}{p}-\frac{p+3}{p}=-\frac{p}{p}=-1\,;$$

$$V=\frac{\dfrac{1}{p^2-9}-\dfrac{1}{p^2+9}}{\dfrac{1}{p^2-9}+\dfrac{1}{p^2+9}}-\frac{p^2+9}{p^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{p^2+9-(p^2-9)}{(p^2-9)(p^2+9)}}{\dfrac{p^2+9+p^2-9}{(p^2-9)(p^2+9)}}-\frac{p^2+9}{p^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{18}{p^4-81}}{\dfrac{2p^2}{p^4-81}}-\frac{p^2+9}{p^2}=$$

$$=\frac{18(p^4-81)}{2p^2(p^4-81)}-\frac{p^2+9}{p^2}=$$

$$=\frac{9}{p^2}-\frac{p^2+9}{p^2}=-\frac{p^2}{p^2}=-1\,.$$

Zjistili jsme, že výrazy U, V jsou rovny -1, a proto je $U=V$.

b) Výraz U nebo V ztrácí význam, když je jmenovatel některého zlomku, který se v něm vyskytuje, roven nule. Pro výraz U jsou to tyto případy:

$p - 3 = 0$ neboli $p = 3$;
$p + 3 = 0$ neboli $p = -3$;
$p = 0$;
$p^2 - 9 = 0$ neboli $(p - 3)(p + 3) = 0$ a tedy buď $p = 3$ nebo $p = -3$.

Pro výraz V jsou to tyto případy:

$p^2 - 9 = 0$ neboli (viz předchozí případ) buď $p = 3$ nebo $p = -3$;
$p^2 = 0$ neboli $p = 0$,
$p^4 - 81 = 0$ neboli $(p - 3)(p + 3)(p^2 + 9) = 0$ a tedy buď $p = 3$ nebo $p = -3$.

Výraz $p^2 + 9$ je součet nezáporného čísla a čísla kladného; proto je vždy kladný.

Závěr. Výrazy U, V ztrácejí tedy význam proto tato čísla:

$$p = -3,\ p = 0,\ p = 3;$$

pro ostatní čísla p mají tyto výrazy význam a platí $U = V = -1$.

Podle řešení Michala Kretschmera, žáka 8. tř. 87. osš, Praha 13 - Spořilov. Podobné řešení podala Věra Broncová, 8.a tř. jsš, Olomouc - Hejčín.

2. Narýsujte dvě soustředné kružnice k_1, k_2 o středu S a o poloměrech $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 1\frac{1}{2}$ cm. Na menší kružnici k_2 zvolte bod T a v něm sestrojte tečnu t této kružnice.

Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají zároveň obou daných kružnic k_1, k_2 i přímky t. Vyšetřte přesně dotykové body a popište postup konstrukce.

Řešení. Užijeme pomocné věty **P**: Společný dotykový bod dvou dotýkajících se kružnic o středech S_1, S_2 leží na přímce S_1S_2, jejich středné.

Rozbor (obr. 51). Velikosti úseček budeme udávat v milimetrech. Přímku ST označme p; stojí kolmo k přímce t a je osou souměrnosti kružnic k_1, k_2 i přímky t. Označme PQ průměr kružnice k_1, který leží v přímce p, přičemž Q leží v polorovině tS.

Z názoru je patrné, že lze sestrojit čtyři kružnice $x_1 \equiv (X_1, \varrho)$, $x_2 \equiv (X_2, \varrho)$, $x_3 \equiv (X_3, \varrho)$, $x_4 \equiv (X_4, \varrho)$, které vyhovují požadavkům úlohy (viz obr. 51). Všechny se musí dotýkat kružnice k_1 uvnitř, neboť se dotýkají kružnice k_2, která leží celá uvnitř k_1. Kružnice x_1, x_2, x_3 se dotýkají kružnice k_2 vně, kdežto kružnice x_4 má s k_2 vnitřní dotyk. Podle toho budeme nejprve hledat kružnice x_1, x_2, x_3.

Případ [1]. Kružnice x_1 o středu X_1 na obr. 51 je příkladem kružnice, která se dotýká k_1 uvnitř, kdežto kružnice k_2 vně. Dotykový bod Y_1 kružnic k_1, x_1 musí ležet na přímce SX_1, dotykový bod Z_1 kružnic k_2, x_1 musí také ležet na přímce SX_1 (viz větu **P**); proto velikost úsečky Y_1Z_1 je

$$2\varrho = Y_1Z_1 = 80 - 15 = 65$$

a udává velikost průměru kružnice x_1.

Vzdálenost

$$r = SX_1 = SZ_1 + Z_1X_1 = 15 + \frac{65}{2} = \frac{95}{2}\,.$$

Leží tedy střed každé kružnice, která se dotýká kružnice k_1 uvnitř a k_2 vně, na kružnici $x \equiv \left(S, SX_1 = \frac{95}{2}\right)$.

Protože se kružnice x_1 dotýká přímky t, má bod X_1 od přímky t vzdálenost ϱ. Každý bod, který má od přímky t vzdálenost ϱ, leží na jedné z přímek $t_1 \parallel t$, $t_2 \parallel t$ (kde t_2 leží v polorovině tS, t_1 v polorovině opačné), z nichž každá má od přímky t vzdálenost ϱ. Odtud *konstrukce:*

Sestrojíme střed X_1 úsečky PT, takže je

$$\varrho = TX_1 = \frac{1}{2}\,TP = \frac{1}{2}(80 - 15) = \frac{65}{2}\,; \qquad (1)$$

dále sestrojíme kružnici $x \equiv (S, r = SX_1)$, kde

$$r = \frac{95}{2}\,.$$

Pak na polopřímce TS sestrojíme úsečku

$$TT' = \varrho = \frac{65}{2}\,; \qquad (2)$$

body X_1, T' veďme pořadě přímky $t_1 \parallel t$, $t_2 \parallel t$ (viz obr. 51).

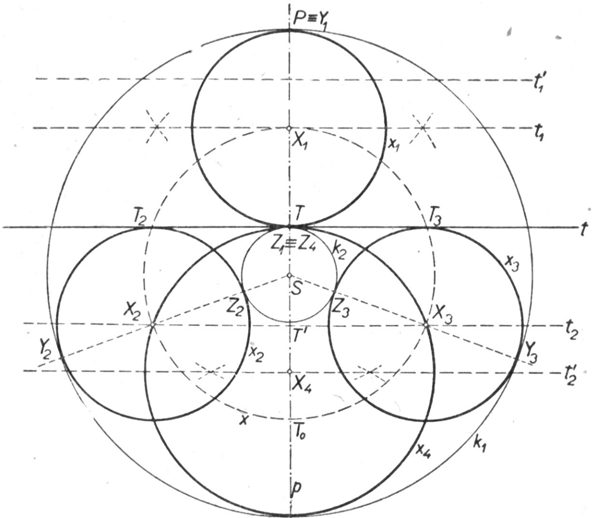
Čáry x, t_1 mají společný jediný bod X_1, což plyne z konstrukce; příslušná kružnice $x_1 \equiv (X_1, \varrho = TX_1)$. Dotykové body kružnice x_1 s k_1, k_2, t jsou pořadě body $Y_1 \equiv P$, $Z_1 \equiv T$, T.

Čáry x, t_2 mají společné dva různé body X_2, X_3, jak dokážeme v diskusi. Příslušné kružnice jsou $x_2 \equiv (X_2, \varrho = TX_1)$, $x_3 \equiv (X_3, \varrho = TX_1)$. Dotykové body kružnice x_2 s k_1, k_2, t pořadě jsou Y_2, Z_2, T_2; první dva leží na přímce SX_2, bod T_2 na kolmici vedené bodem X_2 k přímce t. Dotykové body kružnice x_3 dostaneme obdobně anebo sestrojíme obrazy bodů X_2, Z_2, T_2 v souměrnosti o ose p.

Důkaz konstrukce provádět nebudeme, neboť je celkem obsažen v předchozím.

Diskuse. Dokážeme, že t_2 je sečnou kružnice x: Je

$TS = 15$, $TT' = \frac{65}{2}$, a proto S leží uvnitř úsečky TT'; proto je vzdálenost bodu S od přímky t_2 rovna $ST' = = TT' - ST = \frac{65}{2} - 15 = \frac{35}{2}$. Protože poloměr $r = \frac{95}{2}$ kružnice x je větší než ST', mají čáry x, t_2 dva různé společné body X_2, X_3. Tím je důkaz proveden. Dospějeme tedy k dvěma kružnicím x_2, x_3 vyhovujícím úloze.



Obr. 51

Případ [2]. Kružnice x_4 o středu X_4 na obr. 51 je příkladem kružnice, která má s oběma kružnicemi k_1,

k_2 vnitřní dotyk. Dotykový bod Y_4 kružnic k_1, x_4 leží na přímce SX_4; dotykový bod Z_4 kružnic k_2, x_4 leží rovněž na přímce SX_4 (viz větu **P**); proto je úsečka $Y_4Z_4 = 80 + 15 = 95$ průměrem kružnice x_4. Je tedy
$\varrho' = Y_4X_4 = \dfrac{95}{2}$ a

$$r' = SX_4 = r_1 - Y_4X_4 = 80 - \frac{95}{2} = \frac{65}{2}.$$

Leží tedy střed každé kružnice, která má s kružnicemi k_1, k_2 vnitřní dotyk na kružnici $x' \equiv \left(S, SX_4 = \dfrac{65}{2}\right)$; poloměr takové kružnice je $\varrho' = X_4Y_4 = \dfrac{95}{2}$.

Protože se kružnice x_4 dotýká přímky t, leží bod X_4 na jedné z přímek $t_1' \parallel t$, $t_2' \parallel t$ (t_2' leží v polorovině tS, t_1' v polorovině opačné), z nichž každá má od t vzdálenost ϱ'. Odtud konstrukce.

Konstrukce (obr. 51). Sestrojme střed X_4 úsečky TQ; je

$$\varrho' = X_4Q = \frac{95}{2}.$$

Dále sestrojme kružnici $x' \equiv (S, r')$, kde

$$r' = SX_4 = \frac{65}{2}. \tag{3}$$

Konečně sestrojíme obě přímky $t_1' \parallel t$, $t_2' \parallel t$ (kde t_2' leží v polorovině tS, kdežto t_1' v polorovině opačné), které mají od přímky t vzdálenost $\varrho' = X_4Q$.

Z přímek t_1', t_2' jen přímka t_2' má s kružnicí x' společný bod X_4; je tečnou kružnice x' a dotykový bod X_4 je středem hledané kružnice x_4 o poloměru ϱ'. Kružnice x_4

se dotýká kružnic k_1, k_2 pořadě v bodech $Y_4 \equiv Q$, $T \equiv Z_4$ a přímky t rovněž v bodě T. Tím jsou všechna řešení zjištěna.

Důkaz konstrukce vyplývá z předchozího.

Diskuse. Kružnice x' leží v polorovině t_1S, kdežto přímka t_1' leží celá uvnitř poloroviny opačné; proto nemají žádný společný bod. Přímka $t_2' \perp SX_4$ prochází bodem X_4, kterým podle (3) prochází i kružnice x', a proto se čáry x', t_2' dotýkají; čáry t_2', x' mají tedy společný pouze bod X_4. Je tedy x_4 jediná kružnice, která odpovídá případu [2].

Závěr. Existují čtyři kružnice, které splňují požadavky úlohy.

Po grafické stránce pěkné řešení podala Věra Broncová, 8.a tř. jsš, Olomouc—Hejčín.

3. Dvaja priatelia z tej istej obce sa majú dostaviť do neďalekého mesta. Prvý ide peši a cesta mu obvykle trvá jednu hodinu. Druhý ide na bicykli a cesta mu vždy trvá 20 minút.

Za akú dobu dohoní bicyklista chodcu, ktorý vyšiel pred ním o štvrť hodiny skôr?

Riešenie. Vzdialenosť do mesta označme d (km). Rýchlosť chodcu je teda $\frac{d}{60}$ (km/min), rýchlosť bicyklistu $\frac{d}{20}$ (km/min). Označme x hľadanú dobu (v minutách). Za štvrť hodiny prejde chodec $\frac{d}{4}$ km, za x

minút prejde $\frac{dx}{60}$ (km). Bicyklista za x minút prejde $\frac{dx}{20}$ (km). Platí

$$\frac{dx}{20} = \frac{dx}{60} + \frac{d}{4} .$$

Pretože je $d \neq 0$, vyplýva z toho $\frac{x}{20} = \frac{x}{60} + \frac{1}{4}$ a ďalej

$$3x = x + 15 ,$$

čiže

$$2x = 15 ,$$

$$x = 7\frac{1}{2} .$$

Odpoveď. Bicyklista dohoní chodca za $7\frac{1}{2}$ minút, ak snadno zistíme skúškou.

Podľa riešenia Olgy Kratové, 8.a tr. 2. jsš, Olomouc - St. Hodolany. Graficky túto úlohu riešil Michael Drobný, 8. tr. 2. osš, Hodonín.

Jiné řešení. Můžeme předpokládat, že vzdálenost obou míst je rovna číslu 1.

Rychlost chodce za 1 hodinu je 1 jednotka, rychlost cyklisty je třikrát větší, tedy 3 jednotky. Chodec ujde za $\frac{1}{4}$ hodiny $\frac{1}{4}$ jednotky. Jakmile vyjede cyklista, vypadá vzájemná situace stejně, jakoby chodec stál a cyklista se k němu blížil rychlostí, která je rovna rozdílu rychlosti cyklisty a rychlosti chodce, tj. 2 jednotky za hodinu. Protože chodec ve chvíli, kdy cyklista vyjíždí, je od něho vzdálen $\frac{1}{4}$ jednotky, máme vypočítat, za jakou dobu ujede cyklista $\frac{1}{4}$ jednotky, jestliže jede rychlostí 2 jednotky; tu musíme dráhu dělit rychlostí, tj.

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

tedy za $\frac{1}{8}$ hodiny neboli za $7\frac{1}{2}$ minuty.

Cyklista ujede za $\frac{1}{8}$ hodiny $3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ jednotky, chodec za $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ neboli za $\frac{3}{8}$ hodiny ujde $1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ jednotky, což navzájem souhlasí.

Odpověď. Cyklista dohoní chodce za $7\frac{1}{2}$ minuty.

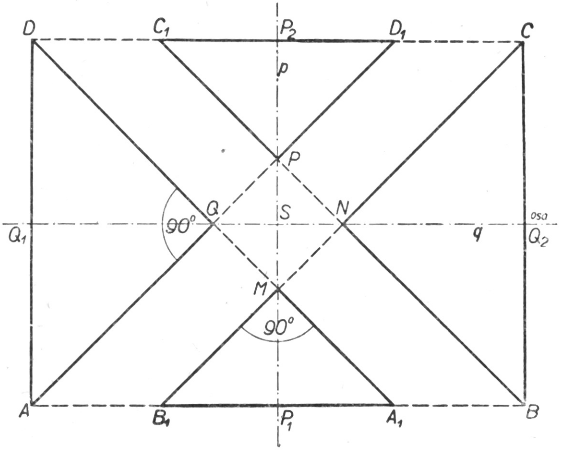
Podle řešení Ivana Šverdy, 8. tř. osš, Nové Město pod Smrkem.

4. Park tvaru obdĺžnika $ABCD$ má rozmery $AB = 240$ m, $AD = 232$ m. Cez park vedú dve rovnako široké navzájom kolmé hlavné cesty, ako je naznačené na obrázku 52.

Vypočítajte obsah oboch ciest dohromady a zistite, koľko percent (s presnosťou na desatiny) z celého parku pripadá na obe cesty dohromady.

Riešenie. (Veľkosť úsečiek budeme udávať v metroch a obsahy v m^2.) Použijeme označenie zavedené v obr. 52. Celý útvar je súmerný podľa osí $p \perp AB$, $q \perp BC$, vedených stredom S obdĺžnika $ABCD$. Preto ležia body M, P na priamke p a body N, Q na priamke q.

Zo súmernosti podľa osi q vyplýva, že platí $NB = NC$ a v pravouhlom trojuholníku BCN ($\sphericalangle N = 90°$) sú uhly $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ zhodné a každý sa rovná 45°. Preto je trojuholník CB_1B, v ktorom je $\sphericalangle B = 90°$, tiež rovnoramenný (lebo $\sphericalangle C = \sphericalangle B_1 = 45°$); preto je $BB_1 = BC = 232$. Je teda $AB_1 = AB - BB_1 = 8$.



Obr. 52

Štvoruholník AB_1CD_1 je teda rovnobežník so stranou $AB_1 = 8$ a výškou $BC = 232$. Jeho obsah je $232 \cdot 8 = 1856$. Obe cesty dohromady majú teda obsah

$$x = 1856.2 - y\,, \tag{1}$$

kde y je obsah štvoruholníka $MNPQ$. Tento štvoruholník má všetky uhly pravé a strany zhodné, lebo zo súmernosti podľa priamky p vyplýva $MQ = MN$, $PN = PQ$ a zo súmernosti podľa priamky q vyplýva $PQ = MQ$, $PN = MN$, čiže $MN = PN = PQ = MQ$. Je teda $MNPQ$ štvorec. Jeho obsah dostaneme tak, že obsah z trojuholníka MQS znásobíme štyrmi, lebo uhlopriečky MP, NQ delia tento čtvorec na štyri zhodné trojuholníky. Ale $QN = AB_1 = 8$, čiže $QS = 4$ a $z = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Obsah štvorca $MNPQ$ je teda

$$y = 8 \cdot 4 = 32. \qquad (2)$$

Po dosadení z (2) do (1) dostávame

$$x = 1856.2 - 32 = 3712 - 32 = 3680.$$

Obsah celého pozemku $ABCD$ je $232 \cdot 240$. Platí

$$\begin{array}{r} 232 \cdot 240 \\ \hline 464 \\ 928 \\ \hline 55680 \end{array}$$

Máme vypočítať, koľko percent je 3680 zo základu 55 680. Toto percento je

$$100 \cdot \frac{3680}{55\,680}.$$

Úpravou dostaneme (krátime postupne číslami 10, 8 a 2)

$$\frac{100 \cdot 368}{5568} = \frac{100 \cdot 46}{696} = \frac{100 \cdot 23}{348} = \frac{2300}{348}.$$

Platí

$$\begin{array}{l} 2300 : 348 \,|\, \underline{6{,}60} \\ \;\;2120 \\ \;\;\;\;\;32 \end{array}$$

Obe cesty majú dohromady obsah 3680 m^2 = 36,8a a zaujímajú asi 6,6% celkovej výmery pozemku $ABCD$.

Podľa riešenia Antonína Lukša, žiaka 8.d tr. osš Komenium, Olomouc. Podobné riešenie podal Michael Mareček, 8. a tr. osš, Olomouc—Na hradě.