03. ročník matematické olympiády

IV. Řešení úloh ze soutěže

In: Rudolf Zelinka (editor): 03. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1953-1954. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1955. pp. 24–138.

(na př. okresní výbor matematické olympiady v Olomouci) doporučují, aby se v „Matematice ve škole“ a zvláště v „Rozhledech matematicko-přírodovědeckých“ věnovala pozornost problematice olympijských úloh. Zvláště „Rozhledy“ by zde mohly vykonat mnoho užitečného, poněvadž se v dostatečném množství mohou dostat mezi žáky. Po stránce propagační stojí za zmínku připomínka okresního výboru matematické olympiady v Sokolově, aby olympiadě v kategorii D věnoval vhodné relace čs. rozhlas ve svých ranních pětiminutových hlášeních pro školy.

Ve III. ročníku se kategorie D účastnilo skoro 8 000 řešitelů z celé republiky a pravděpodobně s týmž počtem můžeme počítat i do dalších ročníků. Přejeme si jistě všichni, aby odborná úroveň všech těchto žáků stále stoupala, aby se na školách dobře rozvíjela práce zájmových kroužků a individuální spolupráce učitele s řešiteli. V tom jistě hodně pomohou nové učebnice matematiky, které se ve školním roce 1954/55 dostávají do všech tříd osmiletek a jedenáctiletek. Těšíme se, že s úspěšnými řešiteli kategorie D v III. ročníku matematické olympiady, kteří přešli na školy vyššího stupně, se ve IV. ročníku matematické olympiady opět setkáme jako s úspěšnými řešiteli kategorie C.

VI. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

1. Úlohy I. kola kategorie A

1. V posloupnosti čísel

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$$

platí, že pro $n > 1$ je a_n dělitelné číslem $n - 1$; dokažte.

Řešení. Nechť je $n > 1$. Pro $n = 2$ je tvrzení samozřejmé. Pro $n > 2$ je

$$a_n = na_{n-1} + (-1)^n, \quad a_{n-1} = (n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1},$$

takže

$$a_n = (n-1)na_{n-2} + (-1)^{n-1}n + (-1)^n$$

neboli

$$a_n = (n-1)[na_{n-2} + (-1)^{n-1}];$$

tím je věta dokázána.

2. Ak sú a, b kladné čísla, $A \neq 0$ komplexné číslo, platí vzťah

$$|aA + b\overline{A}| \leqq (a+b)|A|\,,$$

kde $\overline{A}$ je komplexné číslo združené s číslom A. Dokážte tento vzťah a zistite, kedy nastane rovnosť. Vyložte geometrický význam daného vztahu.

Riešenie. Uvedený vzťah dokážeme, ak dokážeme vzťah

$$|aA + b\overline{A}|^2 \leqq (a+b)^2 \cdot |A|^2\,. \tag{1}$$

Vzťah (1) je ekvivalentný so vzťahom

$$(aA + b\overline{A})(a\overline{A} + bA) \leqq (a^2 + 2ab + b^2)A\overline{A}\,, \tag{2}$$

lebo pre každé komplexné číslo X platí $|X|^2 = X \cdot \overline{X}$.

Zo vzťahu (2) vyplýva

$$a^2A\overline{A} + abA^2 + ab\overline{A}^2 + b^2A\overline{A} \leqq (a^2 + 2ab + b^2)A\overline{A},$$

alebo

$$ab(A^2 - 2A\overline{A} + \overline{A}^2) \leqq 0\,,$$

a teda

$$ab(A - \overline{A})^2 \leqq 0; \tag{3}$$

tento vzťah je za daných predpokladov správny.

Pretože obrátene z (3) vyplýva (2) a tým (1), je vzťah (1) a tým aj daný vzťah dokázaný.

Rovnosť v danom vzťahu nastane zrejme vtedy a len vtedy, ak nastane rovnosť vo vzťahu (3), t. j. ak je $A = \overline{A}$, čiže ak je A reálne číslo.

Napíšme daný vzťah v tvare

$$|aA + b\bar{A}| \leqq a|A| + b|A| .$$

V rovine komplexných čísel majú body $P \equiv [0]$, $Q \equiv \equiv [aA + b\bar{A}]$, $R \equiv [aA]$ tú vlastnosť, že

$$PQ = |aA + b\bar{A}|, \quad PR = a|A|, \quad QR = b|A| .$$

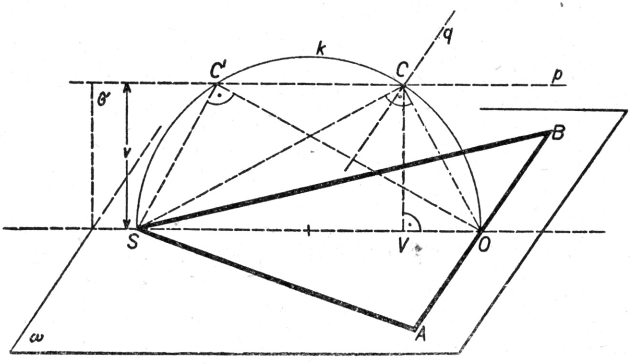
Daný vzťah hovorí teda, že

$$PQ \leqq PR + QR \text{ (trojuholníková nerovnosť).}$$

3. V prostoru je dán rovnoramenný trojúhelník ABS o základně AB. Určete poloměr r plochy kulové o středu S tak, aby vzdálenost dotykových bodů C, D tečných rovin přímkou AB vedených k hledané ploše kulové byla rovna úsečce AB.

a) Zjistěte podmínky řešitelnosti a určete velikost poloměru r.

b) Naznačte grafické řešení a proveďte jeho diskusi.



Obr. 1.

Řešení (obr. 1). I. Předpokládejme, že existuje kulová plocha $\varkappa$, která vyhovuje úloze. Potom přímka AB leží nutně celá vně plochy $\varkappa$. Označme ω rovinu ABS a σ rovinu souměrnosti úsečky AB. Rovina σ protne úsečku AB v jejím středu O a vedle toho prochází bodem S; je tedy $AO = BO$. Dále označme $AB = CD = 2v$, $SO = d$; čísla v, d jsou úlohou dána a jsou obě kladná.

Tečné roviny γ, δ sestrojené po řadě v bodech C, D k ploše $\varkappa$ se protínají v přímce AB. Kulová plocha $\varkappa$ a dvojice rovin γ, δ (jako celek) mají roviny souměrnosti ω, σ. Je tedy $SC = SD = r$, $AC = AD = BC = BD$.

Trojúhelník SOC má při vrcholu C pravý úhel, neboť přímka CO je tečnou plochy $\varkappa$. Označme V patu kolmice vedené bodem C k přímce SO a položme $x_1 = SV$, $x_2 = VO$, $CV = v$. Z trojúhelníka SOC podle Eukleidovy věty o výšce dostaneme

$$v^2 = x_1 x_2 , \tag{1}$$

kde $x_1 + x_2 = d$. Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí

$$r^2 = x_1 d , \tag{2}$$

$$OC^2 = x_2 d \quad \text{neboli} \quad d^2 - r^2 = x_2 d . \tag{3}$$

Ze (2), (3) dostaneme

$$x_1 = \frac{r^2}{d} , \qquad x_2 = \frac{d^2 - r^2}{d}$$

a po dosazení do (1) je

$$\frac{r^2(d^2 - r^2)}{d^2} = v^2 .$$

Odtud dostaneme pro r rovnici

$$r^4 - d^2 r^2 + d^2 v^2 = 0 . \tag{4}$$

Diskriminant této rovnice je nezáporný, neboť r^2 je reálné číslo, t. j. $d^2 - 4v^2 \geqq 0$; protože je $v > 0$, $d > 0$, platí

$$d \geqq 2v . \tag{5}$$

Existuje-li tedy kulová plocha vyhovující úloze, platí (5).

II. Dokážeme teď obráceně, že platí-li (5), existují pro $d = 2v$ jedna a pro $d > 2v$ dvě plochy kulové; jejich poloměry r_1 a r_2 vyhovují vztahům

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{2} d(d \pm \sqrt{d^2 - 4v^2}) \,. \qquad (6)$$

V rovině σ totiž existuje nad úsečkou OS jako průměrem v jedné z polorovin vyťatých přímkou OS polokružnice k o poloměru $\frac{d}{2}$. Vzhledem k (5) má tato polokružnice pro $d = 2v$ jeden a pro $d > 2v$ dva různé společné body s přímkou p, vedenou rovnoběžně s přímkou OS ve vzdálenosti v od OS v této polorovině (viz stereometrický náčrtek). Označme C jeden z těchto bodů. Podle Thaletovy věty je $OC \perp CS$. Poněvadž přímka AB je kolmá k rovině σ, je přímka q vedená bodem C rovnoběžně s přímkou AB také kolmá k přímce CS. Je proto rovina ABC, v níž leží obě přímky OC, q, tečnou rovinou v bodě C ke kulové ploše $\varkappa$ o středu S a poloměru SC. Rovněž bod D, souměrně sdružený k C vzhledem k rovině ω, má vlastnost, že rovina ABD je tečnou rovinou kulové plochy $\varkappa$ v bodě D, při čemž platí $CD = 2v = AB$. Je tedy $\varkappa$ hledaná kulová plocha. Jako v I. části řešení se zjistí, že $SC^2 = r^2$ vyhovuje vztahu (4), t. j. platí (6).

4. Budiž dán čtyrstěn $A_1A_2A_3A_4$. Označme α_1, α_2, α_3, α_4 roviny jeho stěn po řadě protějších k vrcholům A_1, A_2, A_3, A_4. Jsou dány tři různé body J, K, L, ležící vně daného čtyrstěnu.

Dokažte, že pro každou polohu bodů J, K, L existuje alespoň jeden bod X různý od bodů J, K, L, takový, že všechny body úseček XJ, XK, XL leží vně daného čtyrstěnu.

Při diskusi uveďte příklady, jak k dané trojici bodů J, K, L určíte bod X.

(Čtyrstěn $A_1A_2A_3A_4$ se skládá z bodů, které současně patří poloprostorům α_1A_1, α_2A_2, α_3A_3, α_4A_4; ostatní body prostoru leží vně čtyrstěnu.)

Řešení. Označme $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ poloprostory po řadě opačné poloprostorům α_1A_1, α_2A_2, α_3A_3, α_4A_4. Uvažujme tyto případy:

Případ [1]. Nechť všechny tři body J, K, L leží uvnitř téhož z poloprostorů $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$. Potom každý bod X ležící uvnitř tohoto poloprostoru zřejmě vyhovuje úloze; takovým bodem X je na př. střed úsečky JK, když je $X \not\equiv L$.

Případ [2]. Nechť dva z bodů J, K, L leží uvnitř téhož z poloprostorů $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ a třetí z těchto bodů nechť leží uvnitř jiného z těchto poloprostorů. Na př. nechť body K, L leží uvnitř poloprostoru $\boldsymbol{\beta}_2$ a bod J uvnitř poloprostoru $\boldsymbol{\beta}_1$. Hraniční roviny α_1, α_2 poloprostorů $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ se protínají v přímce A_3A_4. Položme bodem J rovinu $\varrho \parallel \alpha_1$ a bodem K rovinu $\sigma \parallel \alpha_2$. Roviny ϱ, σ jsou zřejmě různoběžné; označme $X \not\equiv L$ libovolný bod jejich průsečnice, která zřejmě leží celá uvnitř obou poloprostorů $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$. Proto úsečka XJ leží uvnitř poloprostoru $\boldsymbol{\beta}_1$ a obě úsečky XK, XL uvnitř poloprostoru $\boldsymbol{\beta}_2$. Bod X tedy vyhovuje úloze.

Případ [3]. Nechť každý z bodů J, K, L leží uvnitř jiného z poloprostorů $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$, na př. bod J uvnitř $\boldsymbol{\beta}_1$, bod K uvnitř $\boldsymbol{\beta}_2$ a bod L uvnitř $\boldsymbol{\beta}_3$. Bodem J položme rovinu $\varrho \parallel \alpha_1$, bodem K rovinu $\sigma \parallel \alpha_2$ a bodem L rovinu $\tau \parallel \alpha_3$. Každé dvě z rovin α_1, α_2, α_3 jsou různoběžné a všechny tři mají společný pouze bod A_4; proto i roviny ϱ, σ, τ mají společný bod X, který leží uvnitř každého z poloprostorů $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$. Leží tedy úsečka XJ uvnitř poloprostoru $\boldsymbol{\beta}_1$, úsečka XK uvnitř $\boldsymbol{\beta}_2$ a úsečka XL uvnitř $\boldsymbol{\beta}_3$. Bod X tedy vyhovuje úloze.

Protože v každém z uvedených tří případů jsme určili bod X vyhovující úloze a protože jsou tím všechny případy poloh bodů J, K, L vyčerpány, je úloha rozřešena a konstrukce bodů X naznačena.

Řešil s. Ilja Votava,
11.b jedenáctileté střední školy
v Ostravě I, Matiční 5.

Jiné řešení. Označme $\boldsymbol{\alpha}_n'$ (kde $n = 1, 2, 3, 4$) opačný poloprostor k poloprostoru $\boldsymbol{\alpha}_n A_n$; dané body J, K, L leží po řadě v poloprostorech $\boldsymbol{\alpha}_j'$, $\boldsymbol{\alpha}_k'$, $\boldsymbol{\alpha}_l'$ (kde j, k, l jsou rovné každé některému z čísel 1, 2, 3, 4). Přitom na př. bod J nepadne do stěny (trojúhelníka) čtyrstěnu, která leží v rovině α_j.

a) Když j, k, l jsou vesměs různá čísla, zvolíme bod X uvnitř průniku*) poloprostorů $\boldsymbol{\alpha}_j'$, $\boldsymbol{\alpha}_k'$, $\boldsymbol{\alpha}_l'$; potom na př. všechny body úsečky JX nejvýše až na bod J leží uvnitř poloprostoru $\boldsymbol{\alpha}_j'$, t. j. vně čtyrstěnu $A_1A_2A_3A_4$. Takový bod X dostaneme na př. takto: Označme m to z čísel 1, 2, 3, 4, které není rovno žádnému z čísel j, k, l. Uvnitř stěny čtyrstěnu protější k vrcholu A_m zvolme bod Y; bod Y leží uvnitř průniku poloprostorů $\boldsymbol{\alpha}_jA_j$, $\boldsymbol{\alpha}_kA_k$, $\boldsymbol{\alpha}_lA_l$. Bod X určíme tak, aby bod A_m byl středem úsečky XY.

b) Když j, k, l nejsou vesměs různá čísla, pak některé z poloprostorů $\boldsymbol{\alpha}_j'$, $\boldsymbol{\alpha}_k'$, $\boldsymbol{\alpha}_l'$ splynou; v tom případě přibereme v náhradu za splývající poloprostory jeden nebo dva další z poloprostorů $\boldsymbol{\alpha}_1'$, $\boldsymbol{\alpha}_2'$, $\boldsymbol{\alpha}_3'$, $\boldsymbol{\alpha}_4'$, abychom dostali tři různé poloprostory, v nichž dané body J, K, L leží (každý z bodů J, K, L leží v některém z nich); tím je úloha převedena na případ a).

5. Dokažte, že pro $a > b > 0$ a přirozené číslo n platí vztah

$$\frac{n+1}{n}a > \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} > \frac{n+1}{n}b\,. \qquad (1)$$

Řešení. Pro každé přirozené n je

$$(a^n - b^n):(a-b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + \\ + b^{n-1} = x\,, \qquad (2)$$

$$(a^{n+1} - b^{n+1}):(a-b) = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + \\ + b^n = ax + b^n = bx + a^n\,, \qquad (3)$$

kde ovšem pro $n = 1$ je $x = 1$.

a) Je tedy podle (2), (3)

$$V = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} = \frac{ax+b^n}{x} = a + \frac{b^n}{x} = a + \frac{a}{\dfrac{ax}{b^n}}\,.$$

*) Tento průnik je množina bodů společných těmto poloprostorům.

Avšak podle (2) je

$$\frac{ax}{b^n} = \frac{a^n}{b^n} + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots + \frac{a}{b} > n\,,$$

neboť je $\dfrac{a}{b} > 1$, a tedy každý člen $\dfrac{a^k}{b^k}$ (kde k je přirozené číslo) je větší než jedna. Proto je

$$V < a + \frac{a}{n} = \frac{n+1}{n}\,a\,,$$

což jsme měli dokázat.

b) Obdobně

$$V = b + \frac{a^n}{x} = b + \frac{b}{\dfrac{bx}{a^n}} > b + \frac{b}{n} = \frac{n+1}{n}\,b\,,$$

neboť

$$\frac{bx}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} + \ldots + \frac{b}{a} < n\,,$$

a protože je $\dfrac{b}{a} < 1$, je každý člen $\dfrac{b^k}{a^k}$ (kde k je přirozené číslo) menší než jedna.

Tím je důkaz proveden.

6. Čísla X_1, X_2 sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 + Ax + B = 0\,,$$

kde A, B sú komplexné čísla.

Ak platí vzťah $|X_1| = |X_2| \neq 0$, je $\dfrac{A^2}{B}$ reálne číslo. Dokážte.

Je možné túto vetu obrátiť?

Riešenie. a) Pretože $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$, je $B \neq 0$. Potom je

$$\frac{A^2}{B} = \frac{(X_1 + X_2)^2}{X_1 X_2} = \frac{X_1}{X_2} + \frac{X_2}{X_1} + 2\,. \tag{1}$$

Avšak pretože $|X_1| = |X_2|$, je

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_1 \overline{X_1}}{X_2 \overline{X_1}} = \frac{X_2 \overline{X_2}}{X_2 \overline{X_1}} = \frac{\overline{X_2}}{\overline{X_1}}\,;$$

preto

$$\frac{A^2}{B} = \frac{\overline{X_2}}{\overline{X_1}} + \frac{X_2}{X_1} + 2\,,$$

čo je reálne číslo.

b) Vetu nemôžno obratiť, lebo na pr. pre rovnicu $x^2 - 3x + 2 = 0$ je $\frac{A^2}{B}$ reálne číslo $\frac{9}{2}$, no $|X_1| = 1$, $|X_2| = 2$ a teda $|X_1| \neq |X_2|$.

Poznámka. Platí však veta: Ak je $\frac{A^2}{B}$ reálne číslo, má daná kvadratická rovnica dva nenulové korene, ktoré majú buď rovnaké absolútne hodnoty, buď ich podiel je reálne číslo.

7. Trojuholník ABC je podstavou trojbokého kolmého hranola. Na pobočných hranách sú zvolené radom body A', B', C'. Rovina $A'B'C'$ oddelí časť hranola, ktorej objem sa rovná súčinu z obsahu trojuholníka ABC a aritmetického priemeru čísel AA', BB', CC'.

a) Dokážte vyslovenú vetu pre prípad $A \equiv A'$.

b) Dokážte pre ľubovoľne zvolené body A', B', C'.

Riešenie. a) Ak je $B \equiv B'$, $C \equiv C'$, má oddelená časť objem rovný nule a veta je zrejme správna. Ak je $B \equiv B'$ a $C \not\equiv C'$, je oddelená časť štvorsten s podstavou ABC a príslušnou výškou CC' a tvrdenie je opäť správne. Ak je $B \not\equiv B'$, $C \not\equiv C'$ (pozri obr. 2), je oddelená časť štvorboký ihlan s podstavou $BCC'B'$; výška spustená z bodu A na rovinu BCC'

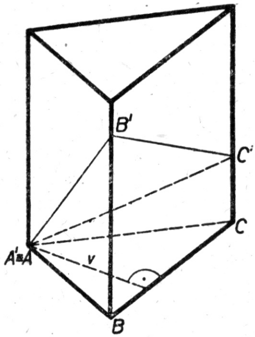
leží v rovine ABC; je to zároveň výška trojuholníka ABC príslušná k strane BC; označíme v jej veľkosť. Objem štvorbokého ihlana je potom

$$\frac{1}{3} \cdot v \cdot \frac{BC}{2} \cdot (BB' + CC'), \tag{1}$$

lebo podstava $BCC'B'$ je lichobežník so základňami BB', CC' a výškou BC. Výraz (1) upravíme na tvar

$$\frac{v \cdot BC}{2} \cdot \frac{BB' + CC'}{3};$$

prvý zlomok sa rovná obsahu trojuholníka ABC, druhý sa rovná aritmetickému priemeru čísel $AA' = 0$, BB', CC' a tým sme tvrdenie dokázali.



Obr. 2.

b) Nech A' je ten z bodov A', B', C', ktorý je najbližší rovine ABC. Veďme ním rovinu rovnobežnú s rovinou ABC; tá pretne priamky BB', CC' po rade v bodoch B'', C''. Ak je $A' \equiv A$, ide o prípad prebraný v odst. a). Ak je $A' \not\equiv A$, zložíme časť oddelenú rovinou $A'B''C''$ z hranola $ABCA'B''C''$ a z časti $A'B''C''B'C'$, pre ktorú platí výsledok odst. a). Pre objem celej oddelenej časti dostaneme — ak označíme p obsah trojuholníka ABC — výraz

3—55-17-03

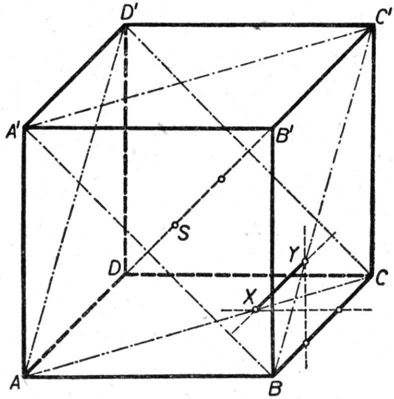
$$p \cdot AA' + p\,\frac{B''B' + C''C'}{3}, \qquad (2)$$

lebo trojuholníky ABC, $A'B''C''$ sú zhodné. Výraz (2) upravíme na tvar

$$\frac{p}{3}\,[AA' + (AA' + B''B') + (AA' + C''C')]\,. \qquad (3)$$

Pretože $AA' = BB'' = CC''$, je $AA' + B''B' = BB'$, $AA' + C''C' = CC'$. Dosadením do (3) dostaneme žiadaný výsledok.

8. Budiž $ABCDA'B'C'D'$ krychle, při čemž platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ a $ABCD$ je její jedna stěna.



Obr. 3.

a) Dokažte, že tělesová úhlopříčka $B'D$ stojí kolmo k rovinám $A'BC'$, ACD' a že je jimi rozdělena na tři rovné úsečky.

b) Vyšetřete polohu a velikost nejkratší příčky mimoběžek AC, BC', jestliže je dána velikost a hrany krychle. (Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání.)

Řešení (obr. 3). a) Nejprve dokážeme, že je $DB' \perp A'BC'$. Přímka DB' leží v rovině $BDD'B'$; zřejmě platí $A'C' \perp B'D'$,

$A'C' \perp DD'$. Proto je $A'C' \perp BDD'$ a tím i $A'C' \perp DB'$. Stejně se dokáže, že je na př. $A'B \perp DB'$. Z obou posledních vztahů vzhledem k tomu, že $A'C'$, $A'B$ jsou různoběžky, plyne

$$DB' \perp A'BC' . \tag{1}$$

O rovinách $A'BC'$, ACD' zřejmě platí $A'BC' \parallel ACD'$; proto je podle (1) též

$$DB' \perp ACD'.$$

Označme po řadě δ, β' roviny vedené body D, B' tak, že

$$\delta \parallel \beta' \parallel A'BC'.$$

Dokážeme, že vzdálenosti obou dvojic rovin

$$ACD',\ A'BC' \text{ a } A'BC',\ \beta' \tag{2}$$

jsou si rovny. Skutečně, první dvojice na přímce AA' vytíná úsečku AA', druhá dvojice na přímce $BB' \parallel AA'$ vytíná úsečku BB'; protože je $AA' = BB'$, soudíme z toho, že vzdálenosti obou dvojic (2) jsou si rovny. Totéž se stejně dokáže o dvojicích

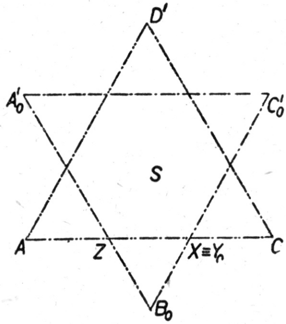
$$\delta,\ ACD' \text{ a } ACD',\ A'BC'.$$

Odtud plyne, že roviny $A'BC'$, ACD' rozdělují úsečku DB' ve tři sobě rovné úsečky.

b) Je známo, že velikost nejkratší příčky dvou mimoběžek a, b je rovna vzdálenosti rovnoběžných rovin α, β takových, že $\alpha \parallel b$ prochází přímkou a a $\beta \parallel a$ přímkou b. Označme X, Y body nejkratší příčky mimoběžek, ve kterých tato příčka protíná po řadě obě mimoběžky a, b. Je známo, že bod Y je jediným bodem přímky b, který má tu vlastnost, že pata Y_0 kolmice tímto bodem k rovině α vedené padne na přímku a; při tom zároveň platí $Y_0 \equiv X$. Toho užijeme k řešení úlohy.

Přímka AC leží v rovině ACD', přímka BC' v rovině $A'BC'$, která je s rovinou ACD' rovnoběžná (viz úlohu a)). Velikost nejkratší příčky obou mimoběžek AC, BC' je tedy rovna vzdálenosti obou rovnoběžných rovin ACD', $A'BC'$, což je podle výsledku úlohy a) třetina velikosti tělesové úhlopříčky

$B'D$ neboli $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Nyní vyšetříme polohu obou bodů X, Y nejkratší příčky obou mimoběžek AC, BC', kde X je bodem přímky AC a Y bodem přímky BC'; patu kolmice vedené bodem Y k rovině $CD'A$ označíme Y_0.



Obr. 4.

Platí $\triangle CD'A \cong \triangle A'BC'$, při čemž oba tyto trojúhelníky jsou rovnostranné a jejich příslušné strany jsou rovnoběžné. Označme A_0', B_0, C_0' paty kolmic vedených body A', B, C' k rovině $CD'A$ (obr. 4). Označíme-li dále S střed trojúhelníka $CD'A$, usoudíme snadno, že je též $\triangle CD'A \cong \triangle A_0'B_0C_0'$; přitom jsou příslušné strany těchto trojúhelníků rovnoběžné a úsečky $A_0'C$, B_0D', $C_0'A$ jsou půleny bodem S. Podle hořejší úvahy je průsečík úseček AC, B_0C_0' hledaným bodem $X \equiv Y_0$. Označíme-li ještě Z průsečík úseček AC, $A_0'B_0$, zjistíme snadno, že platí $AZ = ZX = XC$. Bod X tedy leží v jedné třetině úsečky CA (totiž $AX = 2 \cdot CX$). Obdobně se dokáže, že bod $Y_0 \equiv X$ leží na úsečce B_0C_0' tak, že $C_0'Y_0 = 2 \cdot B_0Y_0$. Odtud plyne, že bod Y leží v jedné třetině úsečky BC' (totiž $C'Y = 2 \cdot BY$).

9. Najděte všechna x, pro která platí

$$\log_{100} x + \log_{1000} x \leqq \log_{10x} x^3 . \tag{1}$$

(Poznámka. Symbol $\log_a m$ značí logaritmus čísla m při základu a logaritmů; pro $a = 10$ píšeme $\log_{10} m = \log m$.)

Řešení. Buďte $a \neq 1$, $b \neq 1$ kladná čísla a $x > 0$ libovolné číslo. Potom je $x = a^{\log_a x} = b^{\log_b x}$. Logaritmováním poslední rovnosti při základu b dostaneme

$$(\log_b a) \cdot \log_a x = \log_b x$$

neboli

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} . \tag{2}$$

Ve vztahu (1) je nutně $x > 0$; pro $x = 1$ zřejmě platí rovnost, takže v dalším předpokládáme, že $x \neq 1$. Podle (2) je:

$$\log_{100} x = \frac{\log_x x}{\log_x 100} = \frac{1}{\log_x 100} = \frac{1}{2 \cdot \log_x 10} , \tag{3}$$

$$\log_{1000} x = \frac{1}{3 \cdot \log_x 10} , \tag{4}$$

$$\log_{10x} x = \frac{\log_x x}{\log_x 10x} = \frac{1}{1 + \log_x 10} , \tag{5}$$

při čemž musí být $10x \neq 1$ neboli

$$x \neq 10^{-1}. \tag{6}$$

Po dosazení ze (3), (4), (5) do (1) máme

$$\frac{1}{2 \cdot \log_x 10} + \frac{1}{3 \cdot \log_x 10} \leqq \frac{3}{1 + \log_x 10} . \tag{7}$$

Podle (2) je

$$\log_x 10 = \frac{\log 10}{\log x} = \frac{1}{\log x}$$

neboli

$$\frac{1}{\log_x 10} = \log x .$$

Po dosazení do (7) máme

$$\frac{1}{2} \cdot \log x + \frac{1}{3} \cdot \log x \leqq \frac{3 \cdot \log x}{1 + \log x} . \tag{8}$$

Rozeznávejme dva případy:

$$[1] \quad 1 + \log x > 0, \qquad [2] \quad 1 + \log x < 0 .$$

Případ [1]. Je $1 + \log x > 0$ neboli

$$\log x > -1 . \tag{9}$$

Po úpravě vztahu (8) máme

$$5 \cdot \log x \cdot (1 + \log x) \leqq 18 \log x ,$$

t. j.

$$\log x \cdot (5 \cdot \log x - 13) \leqq 0 . \tag{10}$$

a) Pro $\log x < 0$ dostaneme odtud

$$\log x \geqq \frac{13}{5} ,$$

což je spor.

b) Pro $\log x > 0$ máme z (10)

$$\log x \leqq \frac{13}{5} ,$$

t. j.

$$0 < \log x \leqq \frac{13}{5} .$$

Odtud plyne, že

$$1 < x \leqq 10^{\frac{13}{5}} . \tag{11}$$

Případ [2]. Je $1 + \log x < 0$, t. j.

$$\log x < -1 . \tag{12}$$

Po úpravě (8) dostaneme

$$\log x \cdot (5 \cdot \log x - 13) \geqq 0 .$$

Podle (12) je

$$\log x < 0 ,$$

takže

$$5 \cdot \log x - 13 \leqq 0\,,$$

t. j.

$$\log x \leqq \frac{13}{5}\,;$$

to je splněno již vzhledem k (12). V případě [2] je tedy

$$0 < x < 10^{-1}. \tag{13}$$

Pro všechna x v (11) a (13) je tedy skutečně $x \neq 10^{-1}$.

Protože postupy prováděné v řešení lze obrátit, vyhovují vztahu (1) právě ta x, pro něž platí:

$$\text{buď } 1 \leqq x \leqq 10^{\frac{13}{5}}\,, \qquad \text{nebo } 0 < x < 10^{-1}.$$

Přitom, jak je patrno z postupu, rovnost ve vztahu (1) nastane právě pro $x = 1$ a pro $x = 10^{\frac{13}{5}}$.

10. Ak platia pre dve komplexné čísla Z_1, Z_2 vzťahy

$$|Z_1| = |Z_2|,\ |Z_1 - 1| = |Z_2 - 1|\,,$$

potom je alebo $Z_2 = Z_1$, alebo $Z_2 = \overline{Z}_1$, kde Z_1, $\overline{Z}_1$ sú združené komplexné čísla.

Dokážte a vysvetlite geometricky.

Riešenie. I. Dôkaz bez rozkladu na zložky. Z daných vzťahov vyplýva

$$Z_2 = \varepsilon Z_1,\quad Z_2 - 1 = \eta(Z_1 - 1)\,, \tag{1}$$

kde ε, η sú vhodné komplexné jednotky. Ak dosadíme z prvej rovnice (1) za Z_2 do druhej, dostaneme

$$\varepsilon Z_1 - 1 = \eta(Z_1 - 1)\,,$$

čiže

$$Z_1(\varepsilon - \eta) = 1 - \eta\,. \tag{2}$$

Rozlíšime dva prípady:

a) $\varepsilon = \eta$. Potom z rovnice (2) vyplýva $\eta = 1$ a z oboch rovníc (1) $Z_2 = Z_1$.

b) $\varepsilon \neq \eta$. Potom z rovnice (2) dostaneme

$$Z_1 = \frac{1 - \eta}{\varepsilon - \eta} . \tag{3}$$

Ďalej je podľa (1)

$$Z_2 = \varepsilon \cdot \frac{1 - \eta}{\varepsilon - \eta} .$$

Vypočítajme $\overline{Z}_1$; pretože $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$, $\overline{\eta} = \frac{1}{\eta}$, je

$$\overline{Z}_1 = \frac{1 - \frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\eta}} = \varepsilon \cdot \frac{\eta - 1}{\eta - \varepsilon} = \varepsilon \cdot \frac{1 - \eta}{\varepsilon - \eta} = Z_2 .$$

II. Dôkaz rozložením na zložky (goniometricky). Je

$$\begin{aligned}
Z_1 &= r(\cos \varphi_1 + \mathrm{i} \sin \varphi_1) , \\
Z_2 &= r(\cos \varphi_2 + \mathrm{i} \sin \varphi_2) , \\
|1 - Z_1|^2 &= (1 - r \cos \varphi_1)^2 + r^2 \sin^2 \varphi_1 = \\
&= 1 - 2r \cos \varphi_1 + r^2 , \\
|1 - Z_2|^2 &= (1 - r \cos \varphi_2)^2 + r^2 \sin^2 \varphi_2 = \\
&= 1 - 2r \cos \varphi_2 + r^2.
\end{aligned}$$

Z danej podmienky teda vyplýva vzťah

$$r(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) = 0 . \tag{1}$$

Alebo je

$$r = 0 , \tag{2}$$

alebo je

$$\cos \varphi_2 = \cos \varphi_1 . \tag{3}$$

Ak platí vzťah (2), potom tvrdenie úlohy je správne; v tom prípade je $Z_1 = Z_2 = 0$.

Ak platí vzťah (3), potom ľahko vypočítame, že je

$$\sin \varphi_2 = \varepsilon \cdot \sin \varphi_1 ,$$

kde ε sa rovná jednému z čísel 1, -1. Je teda

$$r(\cos \varphi_2 + \mathrm{i} \cdot \sin \varphi_2) = r(\cos \varphi_1 + \mathrm{i} \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi_1),$$

t. j. alebo

$$Z_2 = Z_1 \text{ (keď } \varepsilon = 1),$$

alebo

$$Z_2 = \overline{Z}_1$$

$$\text{(keď je } \varepsilon = -1),$$

čo sme mali dokázať.

III. Geometrický význam. (Nech $[Z]$ značí obraz komplexného čísla Z.) Ak body $[Z_1]$, $[Z_2]$ majú od bodu $[0]$ rovnaké vzdialenosti a od bodu $[1] \not\equiv [0]$ tiež rovnaké vzdialenosti, je buď $[Z_1] \equiv [Z_2]$, buď sú body $[Z_1]$, $[Z_2]$ súmerne sdružené podľa priamky $[0][1]$.

IV. Jiné řešení. Je-li $Z = x + \mathrm{i}y$, kde x, y jsou reálná čísla, potom je

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |Z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,.$$

Řešme soustavu rovnic

$$|Z_1| = |Z_2|, \quad |Z_1 - 1| = |Z_2 - 1|\,.$$

Umocněme obě strany každé z obou rovnic na druhou; dostaneme rovnice

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 + 1\,,$$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\,.$$

Odtud snadno obdržíme jednak

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2\,,$$

jednak

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = -y_2\,;$$

je tedy buď

$$Z_2 = Z_1\,, \tag{1}$$

nebo

$$Z_2 = \overline{Z}_1\,. \tag{2}$$

Obráceně, když platí (1) nebo (2), snadno zjistíme, že platí vztahy

$$|Z_1| = |Z_2|, |Z_1 - 1| = |Z_2 - 1| . \qquad (3)$$

Označme $[A]$, $[B]$ obrazy komplexních čísel A, B. Vztah $|A - B| = |C - D|$, jak známo, značí, že vzdálenost bodů $[A]$, $[B]$ je rovna vzdálenosti bodů $[C]$, $[D]$. Podle předpokladu jsou vzdálenosti bodů $[Z_1]$, $[Z_2]$ od bodu O (počátku souřadnic) sobě rovny, rovněž vzdálenosti bodů $[Z_1]$, $[Z_2]$ od bodu $[1,0]$ jsou si rovny. Potom o číslech Z_1, Z_2 platí buď (1) nebo (2), čili jsou to buď body totožné nebo souměrně sdružené podle osy x souřadnic.

Upraveno podle řešení
s. Jiřího Voleníka, 11.b
jedenáctiletky v Rokycanech.

11. Buďte dány rozměry a, b, c kvádru. Dokažte, že velikost nejkratší příčky dvou mimoběžných stěnových úhlopříček kvádru je dána výrazem

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Řešení. Označme $ABCDA'B'C'D'$ daný kvádr, kde $ABCD$ je jedna podstava a $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ jsou pobočné hrany. Označme $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$. Hledejme nejkratší vzdálenost úhlopříček $A'B$, $B'C$, které leží ve dvou sousedních stěnách kvádru. Dokážeme, že uvedené tvrzení platí pro stěnové úhlopříčky, které leží v sousedních stěnách kvádru.

Rovina $A'BD$ je rovnoběžná s přímkou $B'C$, při čemž obsahuje přímku $A'B$; velikost v příčky je tedy rovna vzdálenosti bodu B' od roviny $A'BD$. Stačí tedy v jehlanu o podstavě $A'BD$ a vrcholu B' najít jeho výšku v; budiž Δ obsah této podstavy. Objem tohoto jehlanu lze také určit z podstavy

$A'BB'$ a výšky $AD = b$. Porovnáním obou možností dostaneme

$$\tfrac{1}{3} \cdot \Delta \cdot v = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\, ac \cdot b\,,$$

t. j.

$$v = \frac{abc}{2\Delta}\,. \tag{1}$$

Podle Heronova vzorce lze pro obsah δ trojúhelníka o stranách velikostí x, y, z psát:

$$16\delta^2 = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z) \cdot (x + y - z) =$$
$$= -x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2.$$

Označme strany trojúhelníka $A'BD$ takto:

$$u_1 = A'D, \quad u_2 = A'B, \quad u_3 = BD.$$

Přitom je

$$u_1{}^2 = b^2 + c^2,\; u_2{}^2 = c^2 + a^2,\; u_3{}^2 = a^2 + b^2.$$

Tedy

$$16\Delta^2 = -(b^2 + c^2)^2 - (c^2 + a^2)^2 - (a^2 + b^2)^2 +$$
$$+ 2(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) + 2(c^2 + a^2)(a^2 + b^2) +$$
$$+ 2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)\,.$$

Po úpravě máme

$$16\Delta^2 = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,.$$

Tím

$$2\Delta = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}\,.$$

Dosazením do (1) máme

$$v = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\,,$$

neboli

$$v = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}}\,.$$

Výsledek nezávisí na výběru dvojice mimoběžných stěnových úhlopříček ležících ve dvou sousedních stěnách daného kvádru. Nejkratší příčky mimoběžných stěnových úhlopříček, ležících v protějších stěnách kvádru, mají po řadě velikosti a, b, c. Přitom je v vždy menší než kterékoli z čísel a, b, c; na př. je

$$\frac{v}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}} < 1, \text{ t. j. } v < a.$$

12. Je daný trojuholník ABC. Aký geometrický útvar vyplnia vrcholy všetkých takých štvorstenov $ABCX$, u ktorých sú:

a) hrany AX, BX navzájom kolmé,

b) hrany AX, BX a hrany BX, CX navzájom kolmé,

c) každé dve z hrán AX, BX, CX navzájom kolmé? V tomto prípade vyšetrite podmienku riešiteľnosti.

Riešenie. Úloha a). Priamkou AB položme rovinu ϱ a určme v nej všetky body X, pre ktoré je $\sphericalangle AXB = \mathrm{R}$. Podľa Thaletovej vety vyplnia body X kružnicu k, ktorá má úsečku AB za priemer a ktorá leží v rovine ϱ; oba body A, B musíme z kružnice k vylúčiť.

Ak sa otáča rovina ϱ okolo priamky AB, vyplnia body X, pre ktoré je $\sphericalangle AXB = \mathrm{R}$, guľovú plochu $\varkappa_1$, ktorá má úsečku AB za priemer. Body A, B musíme z plochy $\varkappa_1$ vylúčiť.

Vzhľadom na danú úlohu a) musíme z plochy $\varkappa_1$ vylúčiť všetky body kružnice k_1', v ktorej plocha $\varkappa_1$ pretína rovinu ABC, pretože bod X ako štvrtý vrchol štvorstena $ABCX$ v rovine ABC neleží.

Teda: Body X, ktoré vyhovujú úlohe, zrejme vyplnia dve polsféry (polovice guľovej plochy $\varkappa_1$), ktoré sú súmerne združené podľa roviny ABC a ktoré sú časťami plochy $\varkappa_1$; pritom body kružnice k_1' plochy $\varkappa_1$, ktoré sú spoločnou časťou roviny ABC a plochy $\varkappa_1$, musíme vylúčiť.

Tento výsledok a označenia použijeme pri riešení úloh b), c).

Úloha b). Označme B_1 pätu kolmice vedenej bodom B k priamke AC; iste je $B_1 \not\equiv B$. Ak je $B_1 \equiv A$, je $\sphericalangle BAC = \text{R}$; ak je $B_1 \equiv C$, je $\sphericalangle BCA = \text{R}$. Konečne ak je $A \not\equiv B_1 \not\equiv C$, je $\sphericalangle BB_1A = \sphericalangle BB_1C = \text{R}$. V každom z týchto troch uvažovaných prípadov prechádzajú guľové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, po rade opísané nad úsečkami AB, BC ako priemermi, bodom B_1 a bodom B. Ľahko sa dokáže, že obe plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ majú spoločné body, ktoré ležia na kružnici n, opísanej nad úsečkou BB_1 ako priemerom: rovina ν tejto kružnice stojí kolmo k rovine ABC. Body X, ktoré vyhovujú úlohe b), vyplnia túto kružnicu n, z ktorej podľa riešenia úlohy a) musíme vylúčiť oba body B, B_1.

Úloha c). Podla úlohy b) musí hľadaný bod X ležať na všetkých troch kružniciach m, n, p, ktorých roviny μ, ν, π stoja kolmo k rovine ABC (každá k jednej strane trojuholníka ABC) a ktorých priemery sú úsečky AA_1, BB_1, CC_1. Ale priamky AA_1, BB_1, CC_1 majú spoločný bod V (priesečník výšok trojuholníka ABC), a preto roviny μ, ν, π majú spoločnú priamku $v \perp ABC$, ktorá prechádza bodom V. Ak teda hľadaný bod X existuje (t. j. taký, že každé dve hrany švorstena $ABCX$ pri vrchole X tvoria pravý uhol), musí ležať na všetkých troch kružniciach a tým aj na priamke v, pravda mimo roviny ABC. Ľahko sa usúdi, že bod V, ak má mať úloha rešenie, musí ležať vnutri úsečiek AA_1, BB_1, CC_1, t. j. priesečník V výšok trojuholníka ABC musí padnúť dovnútra trojuholníka ABC. Je známe, že sa to stane vtedy a len vtedy, ak je ABC ostrouhlý trojuholník; v tomto prípade existujú dva body X, X' požadovanej vlastnosti a rovina ABC je rovinou súmernosti úsečky XX'. Prípad trojuholníka pravouhlého a tupouhlého, ako vyplýva z predchádzajúcej úvahy, nemá riešenie.

13. Určte geometrický útvar v rovine, ktorý vyplnia obrazy komplexných čísel Z daných vzťahom

$$Z = \frac{AS + B}{1 + S}, \tag{1}$$

kde A, B sú dané komplexné čísla a $S \neq -1$ prebieha všetky komplexné jednotky.

Řešení. Daný vztah upravme takto:

$$Z + ZS = AS + B$$

neboli

$$-S(A - Z) = B - Z. \tag{2}$$

Jestliže bod Z vyhovuje rovnici (1), pak jsou dvě možnosti.

Případ [1]. Nechť je $A - Z = 0$; pak je podle (2) též $B - Z = 0$. A tedy $Z = A$, $Z = B$, neboli $A = B$.

Jestliže je obráceně $A = B$, pak je podle (1) vskutku $Z = A$ řešením úlohy a to zřejmě jediným.

Případ [2]. Nechť je

$$A - Z \neq 0; \tag{3}$$

protože je $S \neq 0$, proto je podle (2) též $B - Z \neq 0$. Vzhledem k případu [1] je $A \neq B$ (jinak by totiž bylo $A = Z$, což odporuje předpokladu (3)). Ze vztahu (2) plyne

$$|-S \cdot (A - Z)| = |B - Z|,$$

a protože je $|-S| = 1$, platí

$$|A - Z| = |B - Z|.$$

O úsečkách ZA, ZB tedy platí $ZA = ZB$, t. j. bod Z leží na ose p úsečky AB.

Jestliže Z je obráceně libovolný bod osy p úsečky AB, je geometricky zřejmé, že lze úsečku ZA převést rotací kolem bodu Z o úhel $\widehat{AZB} \neq 2k\pi$ (kde k je celé číslo) v úsečku ZB. Úhlu $\widehat{AZB}$ přísluší určitá komplexní jednotka $-S$. Protože je $\widehat{AZB} \neq 2k\pi$, je

$$-S \neq 1. \tag{4}$$

Platí tedy (2) a ze vztahu (2) pak vzhledem ke vztahu (4) plyne vztah (1).

Závěr. Jestliže tedy je $A = B$, pak příslušný geometrický útvar je bod A. Jestliže je $A \neq B$, potom příslušný geometrický útvar je osa úsečky AB.

Řešil s. Josef Dvorčuk,
11.a jedenáctiletky,
Nový Jičín.

14. Budiž dána posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n \neq 0$ pro každé přirozené n. Jestliže tato posloupnost $\{a_n\}$ má limitu různou od nuly, pak posloupnost $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ má také limitu, při čemž $\lim \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. Dokažte.

Řešení. Je dána konvergentní posloupnost $\{a_n\}$. Vynecháme-li první člen této posloupnosti, dostaneme posloupnost $\{a_{n+1}\}$, která je také konvergentní posloupností a má stejnou limitu jako posloupnost $\{a_n\}$ (podle definice konvergentní posloupnosti). Podle věty, že limita podílu je rovna podílu limit, a za předpokladu, že $\lim a_n \neq 0$, tudíž i že $\lim a_{n+1} \neq 0$, je

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim a_n}{\lim a_{n+1}} = 1.$$

Řešil s. Bedřich Wenig,
3.a vyšší průmyslové strojnické
školy, Opava.

15. Nájdite všetky prirodzené čísla, rovné jedenásťnásobku svojho ciferného súčtu v desiatkovej sústave.

Riešenie. Hľadané číslo je nanajvýš trojciferné. Číslo n-ciferné je väčšie alebo sa rovná číslu 10^{n-1} a jeho ciferný súčet sa rovná najviac $9n$. Jedenásťnásobok čísla $9n$ je $99n$.

Avšak pre $n \geqq 4$ platí

$$10^{n-1} > 99n\,. \tag{1}$$

Dôkaz urobíme matematickou indukciou. Pre $n = 4$ je naozaj $10^3 > 99 \cdot 4$. Nech vzťah (1) platí pre určité prirodzené číslo n; dokážeme, že potom platí:

$$10^n > 99(n + 1)\,.$$

Vzhľadom na (1) je

$$10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 10.99n = 99n + 9.99n > 99n + 99 =$$

$$= 99(n + 1)\,,$$

pretože je $n \geqq 4$ a preto je $9.99n > 99$. Tým je vzťah (1) dokázaný.

Nech $x > 0$, y, z sú také nezáporné celé čísla menšie než 10, je

$$100x + 10y + z$$

číslo požadované textom úlohy. O ňom má platiť

$$100x + 10y + z = 11 \cdot (x + y + z)$$

čiže

$$89x = 10z + y\,. \tag{2}$$

Na pravej strane vo vzťahu (2) je nanajvýš dvojciferné číslo; preto aj vľavo musí byť nanajvýš dvojciferné číslo; preto nutne je $x = 1$. Odtiaľ hneď vyplýva $z = 8$, $y = 9$ a hľadané číslo môže byť jedine 198. Číslo 198 naozaj vyhovuje úlohe.

J i n é ř e š e n í. Předpokládejme, že takové přirozené číslo existuje a označme si jeho cifry po řadě $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. Má platit

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 =$$

$$= 11(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0)$$

čili

$$(10^n - 11)a_n + \ldots + 989a_3 + 89a_2 - a_1 - 10a_0 = 0.$$

Hledaná čísla mohou být jedině trojciferná. Neboť pro dvojciferné číslo by muselo platit $-a_1 - 10a_0 = 0$, což není možné. Čtyrciferná a víceciferná čísla také nepřipadají v úvahu; záporné členy jsou totiž jen dva poslední a minimální hodnota jejich součtu je -99.

Docházíme tedy k rovnici $89a_2 - a_1 - 10a_0 = 0$, kterou rozřešíme. Musí být $a_2 = 1$, neboť při $a_2 \geqq 2$ by bylo

$$89a_2 - a_1 - 10a_0 \geqq 178 - a_1 - 10a_0 \geqq 178 - 99 > 0.$$

Máme tedy

$$a_1 + 10a_0 = 89,$$

odtud

$$a_0 = 8,\ a_1 = 9.$$

Docházíme k jedinému výsledku: Číslo 198 vyhovuje úloze (jak se přesvědčíme výpočtem).

Řešil s. Jiří Fiedler,
11. roč. jedenáctiletky
v Plzni, nám. Odborářů.

16. Budiž dána rovina ϱ třemi body A, B, C a mimo ni přímka $p \parallel \varrho$. Uvažujme čtyrstěny $ABCX$, kde bod X probíhá přímku p. Označme V vrchol rotačního kužele s podstavou v rovině ϱ, na jehož plášti leží všechny čtyři body A, B, C, X.

Proveďte diskusi, kdy takový kužel existuje, a vyšetřte útvar, který vyplní všechny body V. (Poznámka. Jestliže V je vrchol rotačního kužele a k jeho podstavná kružnice, potom plášť tohoto kužele se skládá ze všech bodů úseček VK, kde bod K probíhá všechny body podstavné kružnice k.)

Řešení. Protože body A, B, C leží v dané rovině ϱ, pak existuje-li rotační kužel požadované vlastnosti, má kružnici $k \equiv (O, r)$ opsanou trojúhelníku ABC za podstavnou hranu; vrchol V kužele leží uvnitř toho poloprostoru $\boldsymbol{\rho}_0$ vyťatého rovinou ϱ, ve kterém leží přímka p. Odtud plyne, že každý bod

V padne dovnitř jisté polopřímky $OQ \perp \varrho$, kde Q je vnitřní bod poloprostoru $\boldsymbol{\rho}_0$.

Označme X libovolný bod přímky p a X' patu kolmice vedené bodem X k rovině ϱ; všechny body X', když X probíhá přímku p, vyplní v rovině ϱ přímku $p' \parallel p$, která je průsečnicí roviny ϱ s rovinou $\pi \perp \varrho$, položenou přímkou p. Označme $d > 0$ vzdálenost rovnoběžek p, p'.

I. Nechť k danému bodu X přímky p existuje rotační kužel o vrcholu V a podstavné hraně $k \equiv (O, r)$, při čemž bod X leží na plášti tohoto kužele. Potom je buď $X \equiv V$ a přímka p' prochází bodem O, anebo je $X \not\equiv V$. V druhém případě bod X leží uvnitř úsečky VY, kde Y je průsečík polopřímky OX' s kružnicí k; je tedy X' vnitřní bod úsečky OY, takže platí $0 < OX' < r$ neboli X' leží uvnitř kružnice k. Odtud plyne, že jen ty body X přímky p mohou vést k řešení, pro něž je vzdálenost bodu O od paty X', příslušné k bodu X, menší než r. Mějme nyní bod X přímky p, pro nějž je vzdálenost x' bodů O, X' menší než r, t. j. pro nějž platí

$$0 \leqq x' < r\,. \tag{1}$$

Uvažujme dvě možnosti:

[1] Je $x' = 0$, takže přímka p' prochází bodem O. Tu je příslušný bod X vrcholem V_0 rotačního kužele o podstavné hraně k.

[2] Je $x' > 0$, takže přímka p' protíná kružnici k ve dvou různých bodech. K danému bodu X sestrojíme jediný kužel o vrcholu V; bod V obdržíme takto: Sestrojíme průsečík Y polopřímky OX' s kružnicí k; přitom jistě existuje $\triangle\, YXX'$, kde $\sphericalangle\, YX'X = \mathrm{R}$. Ve stejnolehlosti o středu Y a dvojici X', O příslušných bodů, přísluší trojúhelníku YXX' trojúhelník YVO, kde V je hledaný vrchol kužele příslušného zvolenému bodu X.

Z podobnosti trojúhelníků YXX', YVO plyne vztah

$$\frac{OV}{XX'} = \frac{OY}{YX'}, \quad \text{neboli} \quad \frac{OV}{d} = \frac{r}{r - x'}\,.$$

Odtud dostaneme

$$OV = \frac{dr}{r - x'}, \tag{2}$$

což platí i pro případ [1], kde $x' = 0$ a $OV_0 = d$.

Úsečka OV má pro daná čísla r, d minimální velikost, když je číslo x' (nezáporné) minimální; označme tuto minimální hodnotu x_0'. Číslo x_0' je zřejmě vzdálenost bodu O od přímky p'; příslušný bod X' označme X_0', což je pata kolmice vedené bodem O k přímce p'. Bod X_0' přísluší bodu X_0 přímky p, pro nějž je $X_0X_0' \perp p'$. Tu jsou dvě možnosti:

a) Přímka p' prochází bodem O, takže je $x_0' = 0$, $X_0' \equiv O$; podle odstavce [1] je $X_0 \equiv V_0$. Každý bod $X' \not\equiv X_0'$ (t. j. $x' > x_0'$) přímky p, pro nějž platí vztah (1), vede k vrcholu V kužele, pro nějž podle (2) je $OV > OV_0$, neboť je $x' > x_0'$. Leží tedy hledané vrcholy kuželů na polopřímce V_0Q, opačné k polopřímce V_0O, při čemž je $V_0O \perp \varrho$.

b) Přímka p' neprochází bodem O, takže je $O \not\equiv X_0'$ a vzhledem ke vztahu (1) platí $0 < x_0' < r$; tu je $OX_0' \perp p$, $X_0X_0' \perp p$ a tedy $OX_0 \perp p$. Označme V_0 vrchol kužele příslušného k číslu x_0'. Každý bod $X' \not\equiv X_0'$ (t. j. $x' > x_0'$), pro nějž platí vztah (1), vede k vrcholu V kužele, pro nějž podle (2) je $OV > OV_0$. Leží tedy hledané vrcholy kuželů na polopřímce V_0Q opačné k polopřímce V_0O.

II. Obráceně, každý bod V polopřímky V_0Q je vrcholem alespoň jednoho rotačního kužele o podstavné hraně k, který má tu vlastnost, že na jeho plášti leží jistý bod X přímky p. O bodu V_0 je toto tvrzení zřejmě správné. Mějme nyní bod $V \not\equiv V_0$, ležící uvnitř polopřímky V_0Q tak, že je $OV > OV_0 > 0$. Pro případ, že přímka p' prochází bodem O, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy o vzdálenosti x_0' bodu O od přímky p' platí

$$0 < x_0' < r.$$

Existuje číslo x' tak, že

$$0 < \frac{dr}{OV} = r - x', \text{ t. j. } x' < r;$$

je

$$r - x' = \frac{dr}{OV} < \frac{dr}{OV_0} = r - x_0',$$

takže je

$$x_0' < x' < r.$$

Proto existují na přímce p' právě dva body X_1', X_2' tak, že $OX_1' = OX_2' = x'$, které leží uvnitř kružnice k. K nim příslušejí body X_1, X_2 na přímce p tak, že X_1', X_2' jsou po řadě paty kolmic vedených body X_1, X_2 k rovině ϱ. Z první části naší úvahy a z rovnice (1) plyne, že k bodům X_1, X_2 existuje jediný rotační kužel požadovaných vlastností a že jeho vrcholem je právě uvažovaný bod V.

Snadno lze učinit tento závěr:

Označme ω rotační válcovou plochu, jejíž řídicí kružnicí je kružnice k, takže přímka OQ je osou plochy. Jestliže daná přímka p nemá s plochou ω společné dva různé body, potom k žádnému bodu X přímky p neexistuje kužel požadovaný úlohou. Má-li přímka p s plochou ω společné dva různé body P_1, P_2, pak k bodu X přímky p existuje kužel, požadovaný úlohou tehdy, a jen tehdy, je-li X vnitřním bodem úsečky P_1P_2. Příslušné vrcholy V kuželů vyplní polopřímku, která je částí přímky OQ kolmé k rovině ϱ.

2. Úlohy II. kola, kategorie A

1. Určete součet

$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2,$$

kde n je dané přirozené číslo.

Řešení. I. Pro přirozené sudé číslo n platí

$$s_n = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) +$$

$$+ \ldots + [(n-1)^2 - n^2] = -(1+2) - (3+4) -$$
$$-(5+6) - \ldots - (n-1+n) =$$
$$= -[1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n] =$$
$$= -\frac{1}{2}n(n+1).$$

II. Pro přirozené liché číslo n z předchozího výsledku dostaneme

$$s_n = [1^2 - 2^2 + \ldots - (n-1)^2] + n^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) + n^2 = n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) =$$
$$= \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{1}{2}n(n+1)\,.$$

2. Buďte dána čísla $a > b > 0$; potom platí

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}\,;$$

dokažte.

Řešení. Podle předpokladu je $a > b > 0$, a tudíž platí

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0\,.$$

Proto je

$$0 < \sqrt{a} + \sqrt{b} < 2\sqrt{a}\,,$$

a tím

$$0 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 < 4a\,.$$

Podle známé poučky tedy platí

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} > \frac{1}{4a}\,. \tag{1}$$

Upravujme postupně výraz

$$x = \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\,.$$

Je

$$x = \frac{1}{2}\cdot(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(a - b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}.$$

Vzhledem ke vztahu (1) platí

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(a - b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{(a - b)^2}{4a}$$

neboli

$$x > \frac{(a - b)^2}{8a}.$$

Tím je dokázána levá část vztahu, jehož platnost podle textu úlohy máme dokázat.

Stejně se dokáže i pravá část tohoto vztahu. Přitom užijeme vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > 2\sqrt{b} > 0 \text{ neboli } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > 4b > 0\,.$$

Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení. Podle textu úlohy je $a > b > 0$, a tím též

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0, \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0\,. \tag{2}$$

Proto je $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$ a tím i $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$. Proto platí též

$$\frac{8a}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} > 0\,. \tag{3}$$

O vztahu, jehož platnost podle textu úlohy máme dokázat, předpokládejme, že není platný. Nechť platí tedy jeden ze vztahů:

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \geqq \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\,, \tag{4}$$

$$\frac{(a-b)^2}{8b} \leqq \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\,. \tag{5}$$

Dokážeme, že vztah (4) nemůže platit.

Po snadné úpravě dostaneme první část v tomto tvaru

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{8a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geqq \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

Znásobíme obě strany této nerovnosti výrazem z levé strany vztahu (3);
dostaneme

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geqq 4a$$

neboli

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geqq (2\sqrt{a})^2\,.$$

Vzhledem ke vztahům (2) jsou čísla uvnitř závorek tohoto vztahu kladná, a proto z něho plyne

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq 2\sqrt{a}$$

neboli

$$\sqrt{b} \geqq \sqrt{a}\,;$$

to však je spor s první částí vztahu (2). Proto vztah (4) neplatí. Stejně dokážeme, že neplatí ani vztah (5).

Tím je důkaz proveden.

3. Rozhodněte, pro která x má smysl rovnice

$$\log_x 10 + \log_x 100 + \log_x 1000 = \frac{\log x^3}{1 + \log x}\,,$$

a najděte všechna její řešení ($\log_A B$ značí logaritmus čísla B při základu A logaritmů; pro $A = 10$ píšeme $\log B$).

Ř e š e n í. I. P o m o c n á p o u č k a. Buďte A, B kladná čísla různá od čísla 1.
Potom platí

$$\log_A B = \frac{1}{\log_B A}. \tag{1}$$

D ů k a z. Platí $A^{\log_A B} = B$. Logaritmováním obou stran této rovnosti při základu B logaritmů dostaneme

$$\log_A B \cdot \log_B A = 1\,,$$

čímž je vztah (1) dokázán.

II. Předpokládejme, že existuje číslo x, které vyhovuje dané rovnici. Aby členy na obou stranách dané rovnice měly smysl, musí o čísle x platit

$$x > 0,\ x \neq 1 \text{ (základ logaritmů)},\ 1 + \log x \neq 0$$

$$\text{neboli } x \neq \frac{1}{10}. \tag{2}$$

Pak platí

$$\log_x 100 = \log_x 10^2 = 2 \log_x 10,$$
$$\log_x 1000 = \log_x 10^3 = 3 \log_x 10\,.$$

Potom lze dané rovnici dát tvar

$$2 \log_x 10 = \frac{\log x}{1 + \log x}. \tag{3}$$

Podle (1) je

$$\log_x 10 = \frac{1}{\log x}, \tag{4}$$

což má vzhledem ke (2) smysl. Rovněž podle (2) je $1 + \log x \neq 0$ neboli $x \neq \frac{1}{10}$. Nyní vzhledem ke (4) lze rovnici (3) uvést na tvar

$$\frac{2}{\log x} = \frac{\log x}{1 + \log x} \tag{5}$$

neboli

$$\log^2 x - 2\log x - 2 = 0\,. \tag{6}$$

Položme $\log x = y$, takže y je reálné číslo různé od čísla 0 a $\frac{1}{10}$. Pak lze (6) psát

$$y^2 - 2y - 2 = 0\,.$$

Odtud dostaneme

$$y = 1 \pm \sqrt{3}\,,$$

což je vskutku číslo vyhovující našim požadavkům. Je tedy

$$\log x = 1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Jestliže tedy číslo x vyhovuje dané rovnici, může to být některé z čísel

$$x = 10^{1+\sqrt{3}}\,, \qquad x = 10^{1-\sqrt{3}}\,; \tag{7}$$

obě tato čísla splňují požadavky (2). Protože pro čísla, která vyhovují vztahům (2) lze náš celý postup obrátit, představují čísla (7) všechna řešení dané rovnice.

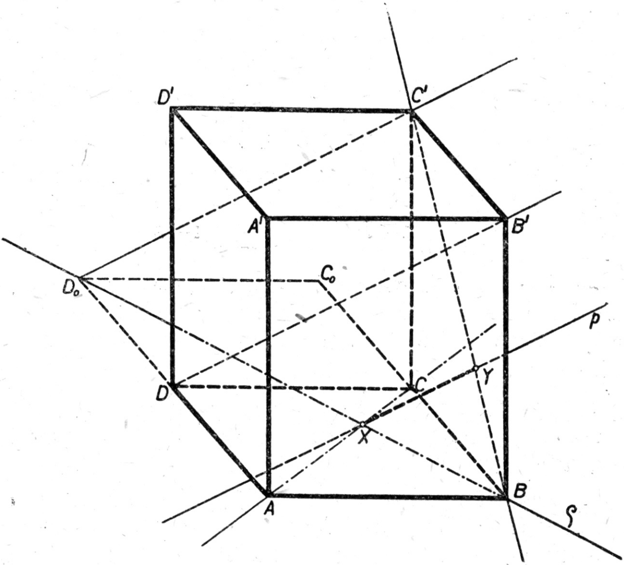
4. Je dán základní kvádr $ABCDA'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je podstava a $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ jsou pobočné hrany kvádru).

Vyšetřete příčku p mimoběžek AC, BC' (stěnových úhlopříček) v sousedních stěnách kvádru) takovou, že $p \parallel B'D$ (tělesová úhlopříčka kvádru). Průsečík přímek AC, p označte X; průsečík přímek BC', p označte Y. Dokažte, že bod X je uvnitř úsečky AC, bod Y uvnitř úsečky BC', při čemž platí:

$$AX = 2 \cdot CX; \quad C'Y = 2 \cdot BY; \quad B'D = 3 \cdot XY\,.$$

(Pokyn: Užijte náčrtu ve volném rovnoběžném zobrazení — nadhled zleva.)

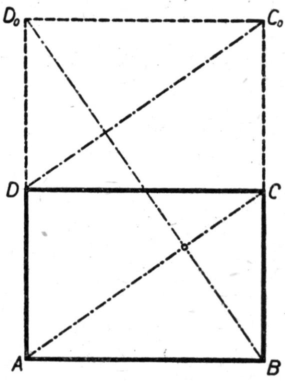
Řešení (obr. 5). Předpokládejme, že úloha má řešení, t. j. že existuje přímka p, která protíná přímky AC, BC' po řadě v bodech $X \neq Y$, při čemž platí $p \parallel B'D$. Potom různoběžky BC', p určují rovinu $\varrho \parallel B'D$. Rovina ϱ prochází body B, X, které jsou jistě různé. Je tedy přímka BX průsečnicí rovin ϱ, ABC. Jestliže tedy má úloha řešení, je bod X společným bodem roviny ϱ a přímky AC. Dokážeme, že za dané situace (t. j. vzhledem k danému kvádru) takový bod X je jediný a že pak existuje bod Y na přímce BC' takový, že platí $XY \parallel B'D$.



Obr. 5.

Proveďme tuto konstrukci: Bodem C' sestrojme rovnoběžku k přímce $B'D$ a označme D_0 její průsečík s rovinou ABC; takový bod D_0 existuje. Čtyrúhelník $B'C'D_0D$ je podle konstrukce rovnoběžník; proto je $DD_0 = B'C' = AD$, $DD_0 \parallel B'C'$, takže bod D_0 nutně leží na prodloužení úsečky AD za bod D a bod D je středem úsečky AD_0. Rovina $BC'D_0$

je již dříve zmíněnou rovinou $\varrho \parallel B'D$, neboť obsahuje přímku BC' a přímku $C'D_0 \parallel B'D$; protože je jistě $B \neq D_0$. je přímka BD_0 průsečnicí rovin ϱ, ABC. Přitom úsečka BD_0 leží v obdélníku ABC_0D_0, takže body A, C_0 jsou přímkou BD_0 odděleny; proto jsou též přímkou BD_0 odděleny body A, C (přitom je C zřejmě středem úsečky BC_0). Existuje proto uvnitř úsečky AC bod X, který je i bodem přímky BD_0. Tento bod X leží podle předchozího nutně uvnitř úsečky BD_0. Sestrojme v rovině ϱ bodem X přímku $p \parallel C'D_0$ (neboli $p \parallel B'D$) a označme Y její průsečík s přímkou BC'; bod Y existuje a leží uvnitř úsečky BC', jak plyne ze stejnolehlosti přímek $C'D_0$, p vzhledem k bodu B jako středu stejnolehlosti. Je-li $k > 0$ koeficient stejnolehlosti, platí zřejmě



Obr. 6.

$$BD_0 = k \cdot BX,\ D_0C' = k \cdot XY,\ BC' = k \cdot BY. \qquad (1)$$

Koeficient k snadno určíme. Zřejmě je $AC \parallel DC_0$ (viz obr. 6) a platí $\triangle BXC \sim \triangle D_0XA$, neboť je $\sphericalangle BXC = \sphericalangle D_0XA$ (úhly vrcholové) a $\sphericalangle CBX = \sphericalangle AD_0X$ (polopřímky BC, D_0A jsou nesouhlasně rovnoběžné). Koeficient podobnosti je

$$\frac{CB}{AD_0} = \frac{1}{2}.$$

Je tedy také $AX = 2 \cdot CX$, $XD_0 = 2 \cdot BX$. Odtud pro koeficient stejnolehlosti k dostáváme $k = 3$. Ze vztahů (1) snadno odvodíme, že $C'Y = 2 \cdot BY$ a $D_0C' = 3 \cdot XY$ neboli $B'D = 3 \cdot XY$, což jsme měli dokázat. Z postupu důkazů (existence bodu X uvnitř úseček AC, BD_0 a bodu Y uvnitř úsečky BC') plyne, že úloha má vždy jediné řešení.

3. Úlohy III. kola kategorie A

1. Nech a je reálne číslo. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$ax^2 + 2(a-1)x + a - 5 = 0\,.$$

Urobte diskusiu vzhľadom na číslo a.

Řešení. I. Nechť je $a = 0$. Pak je daná rovnice

$$-2x - 5 = 0$$

lineární a má kořen

$$x = -\frac{5}{2}\,.$$

II. Nechť je $a \neq 0$. Pak je daná rovnice kvadratická a její diskriminant je

$$D = 12a + 4\,.$$

Rozeznávejme tyto případy:

Případ [1]. Nechť je $D > 0$ neboli $12a + 4 > 0$. Pro číslo a pak platí

$$a > -\frac{1}{3}\,.$$

V tomto případě má daná rovnice dva reálné různé kořeny x_1, x_2, kde

$$x_1 = \frac{1}{a}(1 - a + \sqrt{3a+1}),\ x_2 = \frac{1}{a}(1 - a - \sqrt{3a+1})\,.$$

Případ [2]. Nechť je $D = 0$, takže je $a = -\frac{1}{3}$. Daná rovnice má dvojnásobný kořen

$$x = \frac{1-a}{a} = -4\,.$$

Případ [3]. Nechť je $D < 0$ neboli $a < -\frac{1}{3}$. Daná rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení.

Protože ze vztahu $a \geqq -\frac{1}{3}$, $a \neq 0$, plyne $D \geqq 0$, pak se zřetelem k odst. I (případ $a = 0$) lze říci: Daná rovnice má řešení reálné pro $a \geqq -\frac{1}{3}$.

Řešil s. Martin Černý,
11.b 2. jedenáctiletky v Praze 2.

2. Nechť a, b jsou komplexní čísla. Jestliže obrazy kořenů rovnice $Z^2 + aZ + b = 0$ v rovině komplexních čísel tvoří spolu s obrazem čísla 0 pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při počátku, potom platí $a^2 = 2b \neq 0$.

Dokažte a zjistěte, zda lze větu obrátit.

Riešenie. I. Korene rovnice sú

$$Z_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,, \tag{1}$$

$$Z_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,. \tag{2}$$

Pretože trojuholník OZ_1Z_2 je pravouhlý rovnoramenný (kde $\sphericalangle Z_1OZ_2 = 90°$), musí platiť

$$Z_1 = \mathrm{i}Z_2 \quad \text{alebo} \quad Z_1 = -\mathrm{i}Z_2\,.$$

Prípad [1]. Pre $Z_1 = \mathrm{i}Z_2$ je

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\mathrm{i}\frac{a}{2} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\;;$$

stade vyplýva postupne

$$\frac{a}{2}(1 - \mathrm{i}) = \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)\cdot(1 + \mathrm{i}),$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,,$$

$$\frac{a}{2} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Umocnením posledného vzťahu na druhú dostaneme

$$\frac{a^2}{4} = -\frac{a^2}{4} + b\,,$$

t. j.

$$a^2 = 2b\,.$$

Prípad [2]. Pre $Z_1 = -\mathrm{i}Z_2$ dostaneme rovnakým spôsobom vzťah

$$a^2 = 2b\,.$$

Zo vzťahov (1), (2) vyplýva, že aspoň jedno z čísel a, b je rôzne od nuly, inač by sa korene Z_1, Z_2 rovnice $Z^2 + aZ + b = 0$ rovnali nule a útvar OZ_1Z_2 by nebol trojuholník. Platí teda $a^2 = 2b \neq 0$, čo sme mali dokázať.

II. Obrátená veta znie: Ak je $a^2 = 2b \neq 0$, tvoria oba obrazy koreňov rovnice $Z^2 + aZ + b = 0$ a počiatok súradníc trojuholník s pravým úhlom pri počiatku súradníc.

Dôkaz. Dosaďme do (1), (2) za $b = \frac{a^2}{2}$. Dostaneme

$$Z_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{-\frac{a^2}{4}}\,, \qquad Z_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{-\frac{a^2}{4}}$$

čiže

$$Z_1 = -\frac{a}{2}(1 + \mathrm{i}), \qquad Z_2 = -\frac{a}{2}(1 - \mathrm{i})\,.$$

Platí $\mathrm{i}Z_2 = -\frac{a}{2}(1 + \mathrm{i}) = Z_1$, teda

$$Z_1 = \mathrm{i}Z_2\,;$$

pretože je $a \neq 0$, je aj $Z_1 \neq 0$, $Z_2 \neq 0$ a vzhľadom na vzťah $Z_1 = \mathrm{i}Z_2$ má trojuholník OZ_1Z_2 pri vrchole O pravý uhol.

Riešili s. Július Betko, 4.b, vyšší priemyslová škola energet. a elektrotechn. v Bratislave, a tiež s. Juraj Virsík, 11.b, XI. jedenásťročnica v Bratislave.

3. Bez upotrebenia logaritmických tabuliek dokážte správnosť vzťahu

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

(Pri tom $\log_A B$ značí logaritmus čísla B pri základe logaritmov A.)

Řešení. Platí zřejmě $\pi < 3{,}15$ a dále

$$\pi < 3{,}2\,, \tag{1}$$

takže po řadě dostaneme

$$\pi^2 < \left(3 + \frac{15}{100}\right)^2 = 9 + \frac{90}{10^2} + \frac{225}{10^4} < 9 + \frac{90}{10^2} + \frac{10^3}{10^4} = 10$$

neboli

$$\pi^2 < 10\,. \tag{2}$$

Protože je $\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi$, proto vzhledem ke vztahům (1), (2) platí $\pi^3 < 10 \cdot 3{,}2$ neboli

$$\pi^3 < 32\,. \tag{3}$$

Protože logaritmus při základu větším než 1 je funkce rostoucí, vyplývá ze vztahu (3)

$$\log_2 \pi^3 < \log_2 32\,. \tag{4}$$

Protože $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$, dostáváme ze vztahu (4)

$$3 \cdot \log_2 \pi < 5\,. \tag{5}$$

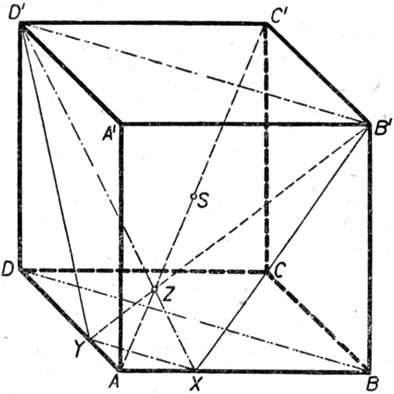
Položme $\log_2 \pi = x$, $\log_4 \pi = y$, t. j. $\pi = 2^x = 4^y$ neboli $2^x = 2^{2y}$. Odtud snadno usoudíme, že musí platit $x = 2y$. Podle vztahu (5) je $3x < 5$ neboli $2x + 2y < 5$, a tedy $x + y < \frac{5}{2}$, což je vztah, jehož platnost jsme měli dokázat.

Řešil s. Oldřich Buchta, 11. roč.
3. jedenáctiletky v Brně-Táboře.

4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$). Nechť bod X leží uvnitř úsečky AB, průsečík hrany AD s rovinou $B'D'X$ označme Y (obr. 7).

a) Jaký útvar vyplní průsečík úhlopříček čtyrúhelníka $B'D'YX$, probíhá-li bod X vnitřek hrany AB?

b) Určete mezi těmito čtyrúhelníky $B'D'YX$ takový, že jeho úhlopříčky se navzájem dělí v poměru $1:2$.

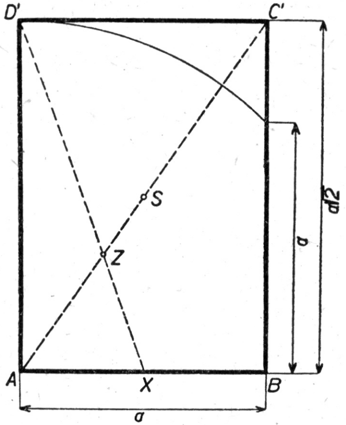


Obr. 7.

Řešení. a) Všechny čtyrúhelníky $B'D'YX$ jsou rovnoramenné lichoběžníky, neboť je $B'D' \parallel XY$ (průsečnice roviny $B'D'X$ s oběma rovnoběžnými rovinami $A'B'C'D'$, $ABCD$), $B'D' \neq XY$ (je $XY < BD = B'D'$) a $B'X = D'Y$ (neboť je $\triangle BB'X \cong \triangle DD'Y$(sus) a $XY \parallel BD$). Rovina ACC' je rovinou souměrnosti každého lichoběžníka $B'D'YX$ (je $B'D' \perp ACC'$, $XY \parallel B'D'$, t. j. $XY \perp ACC'$, při čemž jsou úsečky $B'D'$, XY půleny rovinou ACC'). Průsečík Z úhlopříček $B'Y$, $D'X$ leží tedy v rovině ACC' a současně náleží vnitřku úsečky $D'X$, t. j. náleží vnitřku trojúhelníka $D'AB$. Společné body roviny ACC' a vnitřku trojúhelníka $D'AB$ vyplní vnitřek úsečky AS, kde S je střed krychle.

Obráceně, každý bod Z vnitřku úsečky AS je průsečíkem úhlopříček některého lichoběžníka $B'D'YX$, neboť přímka $D'Z$ protne úsečku AB v jejím vnitřním bodě X.

b) Je-li $D'Z = 2 \cdot XZ$ (obr. 8), pak z podobnosti trojúhelníků AXZ, $C'D'Z$ plyne, že $C'Z = 2 \cdot AZ$. Průsečík Z úhlopříček hledaného čtyrúhelníka tedy dělí tělesovou úhlopříčku AC' v poměru $1:2$, t. j. $C'Z = 2 \cdot AZ$.



Obr. 8.

Není dále možné, aby platilo $XZ = 2 \cdot D'Z$, neboť platí $AX < C'D' = AB$, a tedy vzhledem k podobnosti trojúhelníků AXZ, $C'D'Z$ také $XZ < D'Z$.

Postup lze zřejmě obrátit.

4. Úlohy I. kola, kategorie B

1. Nech a, b, c sú nezáporné racionálne čísla, pričom je $b \neq 0$. Ak o týchto číslach platí vzťah

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c},$$

potom číslo $\frac{a}{b}$ je druhou mocninou racionálneho čísla. Dokážte.

Riešenie. Z daného vzťahu umocnením na druhú dostaneme
$a + b + 2\sqrt{ab} = c$ alebo $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(c - a - b)$.
Odtiaľ znova umocnením na druhú máme

$$ab = [\tfrac{1}{2}(c - a - b)]^2.$$

Ak delíme obe strany tejto rovnosti číslom $b^2 \neq 0$, dostaneme

$$\frac{a}{b} = \left[\frac{1}{2b}(c - a - b)\right]^2.$$

V hranatej zátvorke máme skutočne racionálne číslo a zlomok $\frac{a}{b}$ sa rovná jeho druhej mocnine, čo sme mali dokázať.

2. Budiž a přirozené číslo napsané v desítkové soustavě a budiž b číslo, které vznikne z čísla a, když obrátíme pořádek jeho cifer. Označme

$$s = a + b, \qquad r = |a - b|.$$

Dokažte: Jestliže počet cifer čísla a je sudý, je číslo s dělitelné jedenácti, jestliže počet cifer čísla a je lichý, je číslo r dělitelné jedenácti.

Řešení. Nechť číslo a napsané v desítkové soustavě má $(n + 1)$ cifer, kde $n \geqq 0$ je číslo celé. Potom můžeme psát

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0,$$

kde každé z čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n \neq 0$ je rovno některému z čísel $0, 1, \ldots, 9$. Pro číslo b pak platí

$$b = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1} 10 + a_n.$$

Položme

$$Q_\varepsilon = a_n(10^n + \varepsilon \cdot 10^0) + a_{n-1}(10^{n-1} + \varepsilon \cdot 10) + \ldots$$
$$\ldots + a_k(10^k + \varepsilon \cdot 10^{n-k}) + \ldots + a_1(10 + \varepsilon \cdot 10^{n-1}) +$$
$$+ a_0(10^0 + \varepsilon \cdot 10^n), \tag{1}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$, a celé číslo k splňuje nerovnost $0 \leqq k \leqq n$.

a) Je-li počet cifer čísla a sudý, je číslo n liché. Číslo $s = a + b$ je rovno číslu Q_1. Všimněme si členu

$$a_k(10^k + 10^{n-k}) \tag{2}$$

ve výrazu Q_1 (viz vztah (1) pro $\varepsilon = 1$). Jsou dvě možnosti:
[1] Číslo k je sudé, takže číslo $n - k$ je liché.
[2] Číslo k je liché, takže číslo $n - k$ je sudé.
Vytkněme z dvojčlenu $10^k + 10^{n-k}$ to z čísel 10^k, 10^{n-k}, které má menšího mocnitele; potom v závorce dostaneme dvojčlen tvaru

$$10^t + 1\,, \tag{3}$$

kde $t > 0$ je rozdílem čísel k, $n - k$ nebo rozdílem čísel $n - k$, k, t. j., t jest vždycky číslo liché. Je však známo z odvození dělitelnosti číslem 11, že číslo (3) pro přirozené liché číslo t je vždy dělitelné číslem 11. Proto je jedenácti dělitelné i číslo (2) a tím i číslo $s = Q_1$, které je součtem čísel tvaru (2). Tím je jedna část úlohy dokázána.

b) Je-li počet cifer čísla a lichý, je číslo n sudé. Uvažujme číslo $r = |a - b|$, které dostaneme z (1) pro $\varepsilon = -1$, t. j. $r = |Q_{-1}|$. Všimněme si členu

$$a_k(10^k - 10^{n-k}) \tag{4}$$

ve výrazu r (viz vztah (1) pro $\varepsilon = -1$). Jsou dvě možnosti:

[1] Číslo k je sudé, takže i číslo $n - k$ je sudé.

[2] Číslo k je liché, takže i číslo $n - k$ je liché.

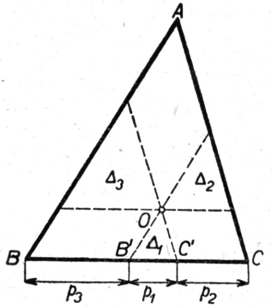
Vytkněme z dvojčlenu $10^k - 10^{n-k}$ to z čísel 10^k, 10^{n-k}, které má menšího mocnitele, potom po vytknutí dostaneme dvojčlen tvaru

$$\pm\,(10^t - 1)\,,$$

kde $t \geqq 0$ je podle [1], [2] vždy číslo sudé. Je však známo, že číslo $10^t - 1$ pro sudé nezáporné číslo t je vždy dělitelné jedenácti. Proto je číslem 11 dělitelné i číslo (4) a tudíž i číslo $|Q_{-1}| = r$, které je součtem čísel tvaru (4). Tím je druhá část úlohy dokázána.

3. Uvnitř trojúhelníka ABC o obsahu $\varDelta$ je dán bod O. Veďme bodem O rovnoběžky ke každé ze stran daného trojúhelníka. Tím se trojúhelník rozdělí ve tři rovnoběžníky a ve tři trojúhelníky; obsahy těchto trojúhelníků označme Δ_1, Δ_2, Δ_3, a to tak, že jedna strana prvního trojúhelníka leží na přímce BC, jedna strana druhého trojúhelníka leží na přímce CA a jedna strana třetího leží na přímce AB. Dokažte, že platí vztah

$$\sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2} + \sqrt{\Delta_3} = \sqrt{\Delta}\,.$$



Obr. 9.

Řešení (obr. 9). Nechť rovnoběžka vedená bodem O k přímce AB protne stranu BC v bodě B', takže $OB' \parallel AB$; dále nechť rovnoběžka vedená bodem O k přímce AC protne stranu BC v bodě C', takže $OC' \parallel AC$. Snadno se dokáže, že pořádek bodů na straně BC je $BB'C'C$. Označme $B'C' = p_1$, $C'C = p_2$, $BB' = p_3$, takže $p_1 + p_2 + p_3 = BC = a$. Trojúhelníky, jejichž obsahy jsme označili Δ_1, Δ_2, Δ_3, jsou všechny podobné s trojúhelníkem ABC, neboť se s ním shodují ve všech úhlech. Ty jejich strany, které jsou rovnoběžné s přímkou BC, mají po řadě velikosti p_1, p_2, p_3. Proto platí

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p_1^2}{a^2}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p_2^2}{a^2}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{p_3^2}{a^2}\,.$$

Odtud

$$\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}} + \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}} + \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}} = \frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{a} + \frac{p_3}{a} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{a} = 1\,.$$

Ze vztahu

$$\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}} + \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}} + \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}} = 1$$

pak dostaneme hledané tvrzení

$$\sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2} + \sqrt{\Delta_3} = \sqrt{\Delta}\,.$$

4. Nech sú dané rôzne kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, kde $r_1 \geqq r_2$. Označme X_1 ľubovoľný bod kružnice k_1 a X_2 ľubovoľný bod kružnice k_2. Nech Y je stred úsečky X_1X_2 (ak je $X_1 \equiv X_2$, je $Y \equiv X_1 \equiv X_2$).

Čo vyplnia všetky body Y, keď body X_1, X_2 menia svoju polohu?

Riešenie. Kvôli jednoduchosti vyjadrovania sa dohovoríme, že budeme nazývať stredom úsečky X_1X_2 bod Y, ktorý v prípade $X_1 \not\equiv X_2$ je stredom úsečky v obvyklom slova zmysle a v prípade $X_1 \equiv X_2$ položíme $Y \equiv X_1$.

Budeme používať túto známu pomocnú poučku:

Nech je daná kružnica $k \equiv (S, r)$ a (v jej rovine) ľubovoľný bod P. Pre ľubovoľný bod X kružnice k označíme Z stred úsečky XP. Ak bod X mení ľubovoľne svoju polohu na kružnici k, potom všetky body Z vyplnia kružnicu $k_0 \equiv \left(T, \dfrac{r}{2}\right)$, pričom T je stred úsečky PS.

Hľadajme teraz množinu všetkých stredov úsečiek X_1X_2, keď X_1 je ľubovoľný pevný bod na kružnici k_1 a keď X_2 mení svoju polohu na kružnici k_2. Z pomocnej poučky vyplýva pre $P \equiv X_1$ a $k \equiv k_2$, že hľadaná množina bodov Y je kružnica $k_1' \equiv (S_0, \frac{1}{2}r_2)$, kde S_0 je stred úsečky X_1S_2. Teraz vyšetríme, akú množinu vyplnia stredy S_0, keď bod X_1 mení svoju polohu na kružnici k_1. Ak si uvedomíme, že S_0 je stredom úsečky X_1S_2, môžeme znova použiť pomocnú poučku pre $P \equiv S_2$ a $k \equiv k_1$ a zistíme, že množina stredov S_0 je kružnica $\bar{k}$ s polomerom $\frac{1}{2}r_1$ a stredom T_0, ktorý je stredom úsečky S_1S_2. Vcelku sme teda ukázali, že každý stred Y niektorej úsečky X_1X_2, ktorej jeden krajný bod X_1 leží na k_1 a druhý krajný bod X_2 na k_2, je bodom nejakej kružnice s polomerom $\frac{1}{2}r_2$, ktorej stred leží niekde na kružnici s polomerom $\frac{1}{2}r_1$ a stredom T_0. Inými slovami: Žiadny taký bod nemôže padnúť inde než do medzikružia so stredom T_0 a polomermi $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ a $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$ (používame kvôli stručnosti slovo medzikružie aj keď pre $r_1 = r_2$ dostaneme celý kruh).

Teraz naopak potrebujeme dokázať, že ku každému bodu M z medzikružia sa dá nájsť aspoň jedna dvojica bodov X_1, X_2 (kde X_1 leží na k_1, X_2 na k_2) tak, že M je stredom úsečky X_1X_2. Nech teda M je ľubovoľný bod z nášho medzikružia. Kružnica opísaná okolo bodu M ako stredu polomerom $\frac{1}{2}r_2$ má s kružnicou, ktorú sme označili $\bar{k}$, aspoň jeden bod S_0 spoločný. Z pomocnej poučky pre $P \equiv S_2$, $k \equiv k_1$ vyplýva, že existuje bod X_1 na k_1 tak, že S_0 je stredom úsečky S_2X_1. Bod M leží na kružnici s polomerom $\frac{1}{2}r_2$ a stredom S_0. Z pomocnej poučky pre $P \equiv X_1$, $k \equiv k_2$ vyplýva, že existuje taký bod X_2 na k_2, že M je stred úsečky X_1X_2. Pretože M bol ľubovolný, dokázali sme: každý bod M nášho medzikružia je stredom nejakej úsečky s krajnými bodmi na k_1 a k_2. Teda vcelku: body Y práve vyplnia popísané medzikružie.

5. Dokažte, že pro přirozené číslo $n > 1$ není číslo $2^n - 1$ druhou mocninou celého čísla.

Řešení. Důkaz provedeme nepřímo. Nechť přirozené číslo a splňuje vztah

$$2^n - 1 = a^2. \tag{1}$$

Protože číslo $2^n - 1$ je liché, musí i číslo a být liché, takže má tvar $a = 2k + 1$, kde k je celé číslo. Vztah (1) pak nabude tvaru

$$2^n = 4k^2 + 4k + 2$$

a po dělení číslem 2 máme

$$2^{n-1} - 2k^2 - 2k = 1\,.$$

To však je spor, neboť pro $n > 1$ jsou všecka tři čísla na levé straně poslední rovnosti vesměs sudá, ale na pravé straně je číslo liché. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

6. Celistvá část m-té odmocniny kladného čísla a je rovna celistvé části m-té odmocniny celistvé části čísla a. Dokažte. (Při úvahách užijte pro označení celistvé části čísla a na př. symbolu $[a]$. Máte dokázat, že platí $[\sqrt[m]{a}] = [\sqrt[m]{[a]}]$.)

Řešení. Označme

$$[\sqrt[m]{a}] = b ,$$

kde b je celé nezáporné číslo; proto platí

$$b \leqq \sqrt[m]{a} < b + 1 .$$

Po umocnění těchto nerovností na m-tou dostaneme

$$b^m \leqq a < (b + 1)^m.$$

Číslo b^m je celé nezáporné číslo; to znamená, že pro celistvou část $[a]$ čísla a opět platí

$$b^m \leqq [a] < (b + 1)^m.$$

Protože jde vesměs o čísla nezáporná, platí o m-tých odmocninách těchto tří čísel obdobné nerovnosti, t. j.

$$b \leqq \sqrt[m]{[a]} < b + 1 .$$

Protože b, $b + 1$ jsou dvě celá nezáporná po sobě následující čísla, je nutně

$$[\sqrt[m]{[a]}] = b ,$$

což jsme měli dokázat.

7. Z úsečiek o veľkostiach a, b, c možno zostrojiť trojuholník vtedy a len vtedy, ak platí vzťah

$$\left| \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} \right| < 1 .$$

Dokážte.

Riešenie. I. Z úsečiek o veľkostiach a, b, c sa dá zostrojiť trojuholník vtedy a len vtedy, keď platí

$$|b - c| < a < b + c\,. \tag{1}$$

Ak platí vzťah (1), je

$$a^2 < (b + c)^2, \tag{1a}$$

t. j.

$$a^2 - b^2 - c^2 < 2bc\,,$$

čiže

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} < 1\,. \tag{2a}$$

Ak platí vzťah (1), je aj

$$(b - c)^2 < a^2\,, \tag{1b}$$

t. j.

$$-\,2bc < a^2 - b^2 - c^2\,,$$

čiže

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} > -\,1\,. \tag{2b}$$

Spojením nerovností (2a), (2b) dostávame vzťah

$$\left|\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right| < 1\,. \tag{2}$$

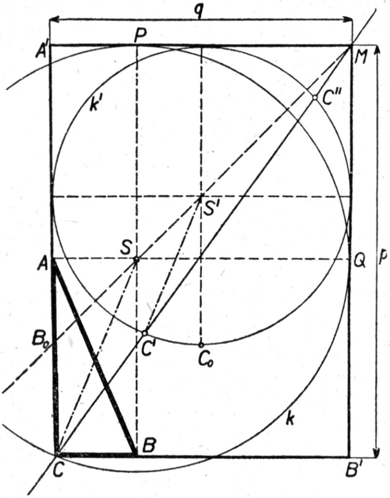
II. Obrátene, ak platí (2), platí (2a) a (2b). Zo vzťahu (2a) dostaneme obrátením uvedeného postupu vzťah (1a), zo vzťahu (2b) podobne vzťah (1b). Odmocnením a spojením nerovností (1a), (1b) výjde vzťah (1).

8. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC o přeponě AB, jestliže jsou dána čísla p, q, o nichž platí $p \geqq q > 0$ a jestliže víme, že

$$b + c = p, \qquad c + a = q\,,$$

kde a, b, c jsou strany hledaného trojúhelníka ABC. Proveďte diskusi.

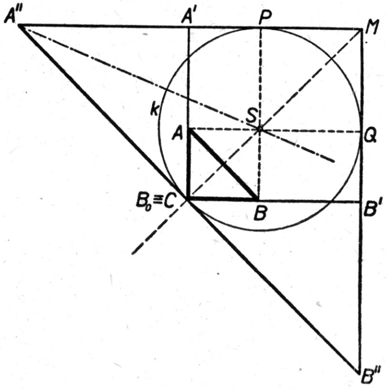
Řešení. I. Předpokládejme, že jsme úlohu rozřešili, takže ABC je hledaný trojúhelník, jehož velikosti stran označíme $a \leqq b < c$ (neboť je $q \leqq p$). Na prodloužení úsečky CA za bod A sestrojíme bod A' tak, aby $AA' = c$, takže $CA' = p$ (obr. 10), na prodloužení úsečky CB za bod B sestrojíme bod B' tak, aby $BB' = c$, takže $CB' = q$. Nyní sestrojíme obdélníky $A'CB'M$ a $ACBS$. Přímka BS protne úsečku



Obr. 10.

$A'M$ v bodě P, přímka AS protne úsečku $B'M$ v bodě Q, takže $SP = SQ = SC = c$. Kružnice $k \equiv (S, c)$ se tedy dotýká přímek $A'M$, $B'M$ po řadě v bodech P, Q a vedle toho prochází bodem C. Odtud plyne řešení úlohy.

II. Sestrojíme obdélník $A'CB'M$ tak, aby $CA' = p$, $CB' = q$ a *uvnitř tohoto obdélníka* sestrojíme bod S tak, aby kružnice k o středu S se dotýkala přímek MA', MB' a procházela bodem C. Tuto kružnici sestrojíme podle známé konstrukce užitím stejnolehlosti se středem M stejnolehlosti (viz na př. Matematika pro I. tř. bývalých gymnasií, str. 198, cvič. 193) takto: Sestrojíme pomocnou kružnici $k' \equiv (S', \frac{1}{2}q)$, která se dotýká ramen pravého úhlu $\sphericalangle A'MB'$. Bod S' leží na ose MB_0 tohoto úhlu, kde B_0 je bod polopřímky $A'C$. Rozeznávejme dva případy:



Obr. 11.

Případ [1]. Je $p = q$, takže $B_0 \equiv C$ (obr. 11). Hledaná kružnice k se dotýká stran trojúhelníka $A''B''M$, kde A'', B'' jsou po řadě průsečíky polopřímek MA', MB' s kolmicí vedenou bodem C k přímce CM. Pro řešení má význam jen kružnice trojúhelníku $A''B''M$ vepsaná, protože její střed padne dovnitř úsečky CM a tím i dovnitř daného obdélníka $A'CB'M$. Druhá kružnice dotýkající se přímek MA', MB', $A''B''$ má střed na prodloužení úsečky MC za bod C, takže S'' leží vně obdélníka $A'CB'M$. Další konstrukce se provede podle odst. I.

Jestliže tedy je $p = q$, má úloha jediné řešení.

Případ [2]. Je-li $p > q$, leží bod B_0 uvnitř úsečky CA'. Na kružnici k' určíme body C', C'', které leží na polopřímce

MC; označení volme tak, abychom dostali pořádek $MC''C'C$. Ke kružnici k' sestrojíme kružnici k příslušnou ve stejnolehlosti o středu M, a to tak, aby bodu C' ve stejnolehlosti příslušel bod C (případ, kdy bodu C'' přísluší ve stejnolehlosti o středu M bod C, nemá pro naši úlohu význam, neboť střed příslušné kružnice k by padl na prodloužení úsečky MB_0 za bod B_0 a tedy vně obdélníka $A'CB'M$). Stačí na polopřímce MB_0 sestrojit bod S tak, aby platilo $SC \parallel S'C'$. Bod S padne dovnitř úsečky B_0M jen tehdy, když úhel $\sphericalangle B_0S'C' < \frac{1}{2}\mathrm{R}$, t. j. když $B_0C < q$ (viz na obr. 10 průsečík polopřímky MC_0 s polopřímkou $A'C$, kde $S'C_0 \uparrow\uparrow A'C$, $S'C_0 = \frac{1}{2}q$); odtud plyne, že musí platit $A'C < 2q$ neboli

$$p < 2q\,.$$

Z konstrukce snadno plyne, že platí-li tato podmínka, pak existuje jediný bod S požadovaných vlastností a tím i $\triangle ABC$.

Závěr. Za daných podmínek má úloha jediné řešení pro $p < 2q$. V případě $p \geqq 2q$ nemá úloha řešení.

9. Sú dané tri reálne čísla a, b, c, o ktorých platí

$$abc > 0,\ ab + bc + ca > 0,\ a + b + c > 0\,. \tag{1}$$

Dokážte, že všetky čísla a, b, c sú kladné.

Riešenie. Vzhľadom na vzťah $abc > 0$ sú čísla a, b, c od nuly rôzne a sú alebo všetky kladné, alebo dve záporné a tretie kladné. Pripusťme druhú možnosť a dokážme spor. Zrejme stačí diskutovať len prípad

$$a > 0,\quad b < 0,\quad c < 0\,.$$

Zo vzťahu $a + b + c > 0$ vyplýva

$$a > -(b + c)\,. \tag{2}$$

Z druhého vzťahu (1) máme

$$a(b + c) + bc > 0$$

alebo

$$bc > -(b + c)a\,. \tag{3}$$

Pretože je

$$-(b+c) > 0\,,$$

vyplýva z (2)

$$-(b+c)a > -(b+c)\cdot[-(b+c)]\,,$$

t. j.

$$-(b+c)a > b^2 + c^2 + 2bc > bc\,, \qquad (4)$$

čo je spor so vzťahom (3).

10. Dokažte, že výraz

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1\,,$$

kde n je přirozené číslo, je dělitelný devíti.

Řešení. I. Pomocné poučky.

[1] Pro přirozené liché n platí

$$a^n + b^n = (a+b)L\,, \qquad (1)$$

kde pro $n = 1$ je $L = 1$ a pro $n > 1$ je

$$L = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots - \\ - ab^{n-2} + b^{n-1}. \qquad (1')$$

[2] Pro přirozené sudé n platí

$$a^n - b^n = (a+b)\cdot S\,, \qquad (2)$$

kde

$$S = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + \\ + ab^{n-2} - b^{n-1}. \qquad (2')$$

II. Platí

$$X = 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1 = 2\cdot 2^{4n} - 2\cdot 2^{2n} + 2^{2n} - 1 = \\ = 2\cdot 2^{2n}(2^{2n} - 1) + (2^{2n} - 1) = \\ = (2^{2n+1} + 1)(2^{2n} - 1)\,. \qquad (3)$$

Podle poučky [1] je

$$2^{2n+1} + 1 = (2+1)L' = 3\cdot L'\,, \qquad (4)$$

kde L' je téhož tvaru jak udává vztah (1'), takže L' je celé číslo. Podle poučky [2] je

$$2^{2n} - 1 = (2 + 1)S' = 3 \cdot S' , \tag{5}$$

kde S' je téhož tvaru jak udává vztah (2'), takže S' je celé číslo. Podle (3) vzhledem ke (4), (5) lze tedy psát

$$X = 3L' \cdot 3S' = 9L'S' ,$$

kde $L'S'$ je celé číslo. Je tedy X dělitelné devíti, což jsme měli dokázat.

11. Dokažte správnost tohoto postupně prováděného dělení úsečky A_0A_1 na jednu polovinu, jednu třetinu, ..., jednu n-tinu:

Označme A_k bod úsečky A_0A_1, pro nějž platí $A_0A_k = \frac{1}{k} \cdot A_0A_1$, kde $k > 1$ je přirozené číslo. Jestliže pro přirozené číslo $n > 1$ známe polohu bodu A_{n-1} na úsečce A_0A_1, sestrojíme bod A_n takto: Veďme body A_0, A_1, A_{n-1} po řadě přímky $a_0 \parallel a_1 \parallel a_{n-1}$, různé od přímky A_0A_1, a označme P_0, P_1, P_{n-1} průsečíky těchto přímek s přímkou $p \parallel A_0A_1$, různou od přímky A_0A_1. Budiž X_n průsečík přímek P_0A_1, $P_{n-1}A_0$. Přímka $a_n \parallel a_0$, vedená bodem X_n, protíná přímku A_0A_1 v hledaném bodě A_n.

Řešení. Správnost postupu dokážeme užitím matematické indukce. Pro $n = 2$ je konstrukce zřejmě správná.

Předpokládejme, že je $n > 2$ a že konstrukce pro bod A_{n-1} je správná. Platí (obr. 12)

$$[1] \quad \triangle A_0A_1P_0 \sim \triangle A_nA_1X_n ,$$

$$[2] \quad \triangle P_0P_{n-1}X_n \sim \triangle A_1A_0X_n ,$$

neboť se příslušné trojúhelníky shodují v úhlech.

Z [1] plyne

$$A_0A_1 = \lambda \cdot P_0A_1 ,$$

$$A_nA_1 = \lambda \cdot X_nA_1 , \tag{1}$$

kde $\lambda > 0$. Odečtením obou vztahů dostaneme

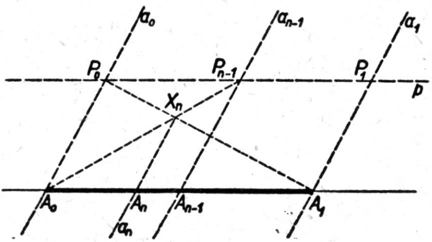
$$A_0A_1 - A_nA_1 = \lambda(P_0A_1 - X_nA_1)$$

neboli

$$A_0A_n = \lambda \cdot P_0X_n\,. \tag{2}$$

Dělením vztahů (2), (1) máme

$$\frac{A_0A_n}{A_nA_1} = \frac{P_0X_n}{X_nA_1}\,. \tag{3}$$



Obr. 12.

Podle [2] pro pravou stranu vztahu (3) dostaneme

$$\frac{P_0X_n}{X_nA_1} = \frac{P_0P_{n-1}}{A_0A_1}$$

neboli

$$\frac{P_0X_n}{X_nA_1} = \frac{A_0A_{n-1}}{A_0A_1}\,, \tag{4}$$

neboť je $P_0P_{n-1} = A_0A_{n-1}$. Spojením (3), (4) dostaneme

$$\frac{A_0A_n}{A_nA_1} = \frac{A_0A_{n-1}}{A_0A_1}\,.$$

Položme zde

$$A_0A_1 = a,\ A_nA_1 = a - A_0A_n,\ A_0A_{n-1} = \frac{a}{n-1}$$

(podle předpokladu, že konstrukce platí pro bod A_{n-1});

obdržíme

$$\frac{A_0A_n}{a - A_0A_n} = \frac{a}{a(n-1)} \,.$$

Odtud plyne

$$A_0A_n = \frac{a}{n} \,,$$

což jsme měli dokázat.

12. Obdélník, jehož rozměry jsou přirozená čísla a, b, je rozdělen na ab shodných čtverců. Stočme tento obdélník do pláště rotačního válce tak, aby strana obdélníka, která má velikost a, se stala obvodem podstavy tohoto válce. Vrcholy zmíněných shodných čtverců vytvoří na plášti válce t. zv. mřížové body. Každé dva různé mřížové body spojíme přímkou, kterou nazveme příčka.

a) Kolik je těch příček, které procházejí vnitřkem vytvořeného válce?

b) Dostaneme více takových příček, když stočíme větší nebo když stočíme menší stranu obdélníka v podstavnou kružnici rotačního válce?

Řešení. a) Na plášti válce vznikne celkem $a(b+1)$ mřížových bodů. Z každého mřížového bodu vychází kromě příslušné strany válce (kterou podle textu úlohy nepočítejme) celkem

$$a(b+1) - (b+1) = (a-1)(b+1)$$

příček. Úhrnem tedy dostaneme

$$\tfrac{1}{2}a(b+1)(a-1)(b+1) = \tfrac{1}{2}a(a-1)(b+1)^2$$

příček. Z nich je však třeba vyloučit ty příčky, které leží v obou podstavách: těch je v každé podstavě $\frac{1}{2}a(a-1)$, v obou podstavách $a(a-1)$. Celkový počet příček je tedy

$$N = \tfrac{1}{2}a(a-1)(b+1)^2 - a(a-1)\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$N = \tfrac{1}{2}a(a - 1)(b^2 + 2b - 1)\,. \qquad (1)$$

b) Předpokládejme, že $a \geqq b$. Stočíme-li obdélník podél strany velikosti a, je počet příček dán formulí (1). Stočíme-li týž obdélník podél strany velikosti b, je počet příček

$$N' = \tfrac{1}{2}b(b - 1)(a^2 + 2a - 1)\,. \qquad (2)$$

Ze vztahů (1), (2) dostáváme po úpravě

$$N - N' = \tfrac{1}{2}(a - b)(3ab - a - b + 1)\,. \qquad (3)$$

Poněvadž vzhledem k významu čísel a, b platí $a \geqq 2$, $b \geqq 2$, je

$$3ab - a - b + 1 \geqq 6a - a - b + 1 > a - b + 1 > 0;$$

mimo to je $a - b \geqq 0$. Proto je

$$N - N' \geqq 0\,;$$

rovnost nastane tehdy a jen tehdy, je-li $a - b = 0$, čili $a = b$. Obdélník o různých rozměrech $a > b$ je tedy třeba stočit podél větší strany, chceme-li dostat více příček.

13. Keď n je prirodzené číslo, určte súčet

$$s_n = 1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - 4\cdot 5 + \ldots + \\ + (-1)^{n+1}\cdot n(n + 1)\,.$$

Riešenie. Rozoznávajme dva prípady: [1] prirodzené číslo n je párne; [2] prirodzené číslo n je nepárne.

Prípad [1]. Nech je n párne. Platí

$$s_n = 2(1 - 3) + 4(3 - 5) + \ldots + n[(n - 1) - (n + 1)] =$$

$$= -2(2 + 4 + \ldots + n) = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}(n + 2) =$$

$$= -\frac{1}{2}n(n + 2). \qquad (1)$$

Prípad [2]. Nech je $n \geqq 3$ nepárne, takže je $n - 1 > 0$ párne. Píšme

$$s_n = s_{n-1} + n(n + 1)\,.$$

Súčet s_{n-1} určíme podľa (1), kde namiesto n položíme $(n - 1)$; je teda

$$s_n = -\frac{1}{2}(n-1)(n+1) + n(n+1) =$$

$$= (n+1)\left[n - \frac{1}{2}(n-1)\right] = \frac{1}{2}(n+1)^2.$$

Tento vzťah platí aj pre $n = 1$.

14. Buďte dána reálná čísla a, b_1, b_2, b_3, b_4. Řešte soustavu rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{aligned} x_1 + a(x_2 + x_3 + x_4) &= b_1\,, \\ x_2 + a(x_3 + x_4 + x_1) &= b_2\,, \\ x_3 + a(x_4 + x_1 + x_2) &= b_3\,, \\ x_4 + a(x_1 + x_2 + x_3) &= b_4\,. \end{aligned}$$

Stanovte podmínky řešitelnosti soustavy vzhledem k daným číslům a, b_1, b_2, b_3, b_4.

Řešení. Položme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = t$, kde t je pomocná neznámá. Danou soustavu nahraďme ekvivalentní soustavou:

$$(1-a)x_1 = b_1 - at\,, \tag{1}$$
$$(1-a)x_2 = b_2 - at\,, \tag{2}$$
$$(1-a)x_3 = b_3 - at\,, \tag{3}$$
$$(1-a)x_4 = b_4 - at\,, \tag{4}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = t\,. \tag{5}$$

Sečteme rovnice (1) až (4) a dosaďme z (5); dostaneme

$$(1-a)t = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - 4at$$

neboli

$$(1+3a)t = b_1 + b_2 + b_3 + b_4\,. \tag{6}$$

I. Pro $1 + 3a \neq 0$ máme

$$t = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{1+3a}\,.$$

6—55-17-03

a) Je-li ještě $1 - a \neq 0$, pak z rovnic (1) až (4) dostaneme jednoznačně určená čísla x_1, x_2, x_3, x_4.

b) Je-li $1 - a = 0$, t. j. $a = 1$, pak daná soustava má tvar $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_i$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Řešení tedy existuje tehdy a jen tehdy, je-li $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$. Je-li tato podmínka splněna, vyhovuje soustavě každá čtveřice čísel x_1, x_2, x_3, x_4, pro kterou platí $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_1$.

II. Budiž $1 + 3a = 0$, t. j. $a = -\dfrac{1}{3}$.

a) Pro $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \neq 0$ je podle (6) soustava sporná.

b) Pro $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$ se pomocná soustava zredukuje na rovnice (1) až (4). Z rovnic (1) až (4) máme

$$x_1 = \tfrac{3}{4}\, b_1 + \tfrac{1}{4}\, t,\ x_2 = \tfrac{3}{4}\, b_2 + \tfrac{1}{4}\, t,$$
$$x_3 = \tfrac{3}{4}\, b_3 + \tfrac{1}{4}\, t,\ x_4 = \tfrac{3}{4}\, b_4 + \tfrac{1}{4}\, t,$$

kde t je libovolné číslo; v tomto případě má daná soustava nekonečně mnoho řešení.

15. Buďte dány tři přímky a, b, c, z nichž každé dvě jsou navzájem mimoběžné. Kolik je na přímce c bodů, jimiž nelze vést žádnou přímku protínající obě přímky a, b? Proveďte diskusi.

Řešení. Budiž C bod přímky c, který má hledanou vlastnost; to znamená, že žádná z přímek CA, kde A je libovolný bod přímky a, nemá s přímkou b společný bod. Všechny přímky CA leží v rovině Ca, určené bodem C a přímkou a; to znamená, že tato rovina je rovnoběžná s přímkou b (a neobsahuje ji). Pak tato rovina je rovnoběžná k oběma přímkám a, b. Existuje-li tedy bod C hledané vlastnosti, potom buď leží v rovině $\alpha \parallel b$ proložené přímkou a nebo leží v rovině $\beta \parallel a$ a proložené přímkou b. Především je $\alpha \parallel \beta$, při čemž to jsou různé roviny (jinak by přímky a, b ležely v jedné rovině, což je proti předpokladu), a proto nemají žádný společný bod.

Odtud plyne řešení. Protne-li rovina α přímku c v bodě C_1, potom bodem C_1 neprochází příčka k mimoběžkám a, b, c. Pak již rovina β protne přímku c v bodě $C_2 \neq C_1$ a jím rovněž neprochází žádná příčka mimoběžek a, b, c. Řešení jsou tedy dvě různá, a to za předpokladu, že přímka c je různoběžná s rovinou α, neboli když přímka c není rovnoběžná s α. Úloha nemá řešení, když je $c \parallel \alpha$.

Závěr. Jestliže jsou přímky a, b, c rovnoběžné s touž rovinou, potom lze každým bodem přímky c sestrojit přímku, která protíná přímky a, b. Jestliže přímky a, b, c nejsou rovnoběžné s touž rovinou, potom na přímce c existují právě dva různé body C_1, C_2, jimiž nelze sestrojit přímku, která protíná přímky a, b. Body C_1, C_2 jsou průsečíky přímky c s rovinami α, β položenými po řadě přímkami a, b tak, že je $\alpha \parallel b$, $\beta \parallel a$.

16. Označme M stred strany CD daného obdĺžnika $ABCD$. Čo musí platiť o rozmeroch tohto obdĺžnika, keď platí $BD \perp AM$?

Riešenie. Označme E priesečník priamok AM, BC. Z vlastnosti strednej priečky trojuholníka ABE vyplýva, že MC je jeho stredná priečka, lebo $MC \parallel AB$ a $MC = \frac{1}{2}AB$. Preto je aj

$$AM = EM\,. \tag{1}$$

Označme $AM = p$, $AQ = x$, kde Q značí priesečník priamok AM, BD. Z danej vlastnosti vyplýva, že trojuholníky AMD, AEB majú spoločnú pätu výšky Q. Podľa Eukleidovej vety a podľa (1) je

$$x = \frac{b^2}{p}\,, \qquad x = \frac{a^2}{2p}\,, \tag{2}$$

kde $a = AB$, $b = AD$. Z rovníc (2) dostávame

$$\frac{b^2}{p} = \frac{a^2}{2p}\,,$$

čiže

$$a^2 = 2b^2\,, \qquad a = b\sqrt{2}\,.$$

Väčšia strana obdĺžnika je uhlopriečka štvorca, zostrojeného nad menšou stranou.

Táto podmienka je nielen nutná ale aj postačujúca, ako to vyplýva z obrátenia postupu.

5. Úlohy II. kola, kategorie B

1. Druhá mocnina celého čísla má jeden z tvarů $5n - 1$, $5n$, $5n + 1$, kde n je určité přirozené číslo nebo nula. Dokažte. Lze větu obrátit?

Ř e š e n í. Každé přirozené číslo můžeme napsat právě v jednom ze tvarů

$$5k + 1, \quad 5k + 2, \quad 5k + 3, \quad 5k + 4, \quad 5k,$$

kde k je přirozené číslo nebo nula. Probereme tedy jednotlivé případy:

[1] Platí $(5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2 + 2k) + 1$, a stačí tedy položit $n = 5k^2 + 2k$.

[2] Platí $(5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(5k^2 + 4k + 1) - 1$ a položíme tedy $n = 5k^2 + 4k + 1$.

[3] Platí $(5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(5k^2 + 6k + 2) - 1$ a položíme $n = 5k^2 + 6k + 2$.

[4] Platí $(5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$, a položíme $n = 5k^2 + 8k + 3$.

[5] Konečně $(5k)^2 = 5 \cdot 5k^2$, a klademe-li $n = 5k^2$, dostáváme tvar $5n$.

Věta se nedá obrátit, neboť na př. číslo 10 je tvaru $5n$, ale není čtvercem žádného přirozeného čísla.

2. Jsou-li u_1, u_2, v_1, v_2 libovolná reálná čísla, potom vždy platí vztah

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leqq (u_1{}^2 + u_2{}^2)(v_1{}^2 + v_2{}^2)\,, \tag{1}$$

dokažte.

Určete všechny hodnoty čísel u_1, u_2, v_1, v_2, pro něž v tomto vztahu platí rovnost.

Ř e š e n í. Předpokládejme, že pro určitou čtveřici čísel u_1, u_2, v_1, v_2 je daná nerovnost správná. Po vynásobení na obou stranách nerovnosti a po snadné úpravě dostaneme

$$2u_1u_2v_1v_2 \leqq u_1{}^2v_2{}^2 + u_2{}^2v_1{}^2$$

neboli

$$0 \leqq (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \,. \tag{2}$$

Avšak vztah (2) skutečně platí pro každou čtveřici reálných čísel u_1, u_2, v_1, v_2; odtud po umocnění dostaneme

$$0 \leqq u_1{}^2v_2{}^2 + u_2{}^2v_1{}^2 - 2u_1u_2v_1v_2 \,.$$

Přičtením čísla $2u_1u_2v_1v_2 + u_1{}^2v_1{}^2 + u_2{}^2v_2{}^2$ k oběma stranám nerovnosti obdržíme po snadné úpravě danou nerovnost. Tím jsme dokázali, že daná nerovnost platí pro všechny čtveřice reálných čísel u_1, u_2, v_1, v_2.

Vzhledem ke vztahu (2) nastane ve vztahu (1) rovnost, když je $u_1v_2 = u_2v_1$. Obráceně, nastane-li ve vztahu (1) rovnost, nastane rovnost i ve vztahu (2), t. j. $u_1v_2 = u_2v_1$.

3. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany BC zvolte dva různé body J, J'. Na úsečce AB určete body K, K' tak, aby platilo $JK \parallel AC$, $J'K' \parallel AC$; na úsečce AC určete body L, L' tak, aby platilo $JL \parallel AB$, $J'L' \parallel AB$.

Dokažte, že platí vztah

$$\frac{KK'}{LL'} = \frac{AB}{AC} \,.$$

Řešení. Označení bodů J, J' volme tak, aby body přímky BC byly v pořádku $BJJ'C$. Označme S průsečík přímek JL, $J'K'$. Je

$$\triangle\, SJJ' \sim \triangle\, ABC \,,$$

neboť $\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, SJJ'$, $\sphericalangle\, BCA = \sphericalangle\, JJ'S$ (úhly s rameny souhlasně rovnoběžnými). Proto platí

$$\frac{SJ}{SJ'} = \frac{AB}{AC} \,.$$

Ale $SJ = KK'$ (neboť $SJKK'$ je rovnoběžník) a $SJ' = LL'$ (neboť $SJ'L'L$ je rovnoběžník). Proto je

$$\frac{KK'}{LL'} = \frac{AB}{AC} \,,$$

což jsme měli dokázat.

4. Budiž dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř tohoto trojúhelníka bod P. Dokažte, že každá ze tří úseček

$$PA, PB, PC$$

je menší než součet obou zbývajících.

Řešení. Dokážeme, že platí

$$PA < PB + PC \tag{1}$$

(zbylé dvě nerovnosti se odvodí zcela analogicky).

V trojúhelníku PAC je

$$\sphericalangle PAC < 60°, \qquad \sphericalangle PCA < 60°; \tag{2}$$

proto je $\sphericalangle APC = 180° - \sphericalangle PAC - \sphericalangle PCA > 180° - 60° - 60° = 60°$, neboli

$$\sphericalangle APC > 60°\,. \tag{3}$$

Je tedy podle (2) a (3)

$$\sphericalangle PCA < \sphericalangle APC\,;$$

proto pro strany protější těmto úhlům v trojúhelníku CPA platí

$$PA < AC\,. \tag{4}$$

Avšak o stranách trojúhelníka PBC platí

$$BC < PB + PC\,. \tag{5}$$

Trojúhelník ABC je rovnostranný, proto je $AC = BC$; proto podle (5) platí vztah

$$AC < PB + PC\,. \tag{6}$$

Z nerovností (4) a (6) ihned plyne vztah (1). Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení. Podle předpokladu je

$$AB = BC = AC\,. \tag{1}$$

Všechny body trojúhelníka ABC s výjimkou bodů A, B leží zřejmě uvnitř kružnice $k \equiv (C, CA)$; proto o bodu P platí $CP < AC$, neboli

$$CP < AB\,. \tag{2}$$

Z trojúhelníka ABP (podle trojúhelníkové nerovnosti) plyne

$$AB < AP + PB\,. \tag{3}$$

Sečtením nerovností (2), (3) dostáváme

$$AB + CP < AB + AP + PB\,,$$

neboli

$$CP < AP + PB\,,$$

což jsme měli dokázat. Stejným způsobem lze dokázat i oba zbývající vztahy.

Řešil s. Jiří Bystrický,
10. roč. jedenáctiletky
ve Stříbře.

6. Úlohy I. kola kategorie C

1. Je dáno n zlomků (kde $n > 1$)

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots\ \frac{a_n}{b_n}\,,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou přirozená čísla.

Dokažte: a) Jestliže tyto zlomky jsou sobě rovny, potom i zlomek

$$z = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

je roven kterémukoli z nich.

b) Jestliže alespoň dva z daných zlomků jsou navzájem různé, potom je zlomek z větší než nejmenší z daných zlomků, ale je menší než největší z nich.

Řešení. Nechť indexy jsou zvoleny tak, že platí

$$q = \frac{a_1}{b_1} \leqq \frac{a_2}{b_2} \leqq \ldots \leqq \frac{a_n}{b_n} = q' , \tag{1}$$

takže je $q \neq 0$, $q' \neq 0$, $q \leqq q'$.

a) Jestliže ve vztazích (1) platí vesměs rovnosti, je $q = q'$ a dále je $a_1 = qb_1$, $a_2 = qb_2, \ldots, a_n = qb_n$. Proto o zlomku z platí:

$$z = \frac{q(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} ; \tag{2}$$

protože součet $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ přirozených čísel je od nuly různý, má zlomek (2) význam a platí $z = q$. Tím je první část úlohy dokázána.

b) Za daného předpokladu vzhledem ke vztahům (1) platí

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_n}{b_n} \quad \text{neboli} \quad q < q'.$$

Ze vztahů (1), v nichž platí potom alespoň jednou nerovnost, dostaneme

jednak

$$a_1 < q'b_1,\ a_2 \leqq q'b_2, \ldots, a_n = q'b_n , \tag{3}$$

jednak

$$a_1 = qb_1, \quad a_2 \geqq qb_2, \ldots, a_n > qb_n . \tag{4}$$

Tvrzení [1]. Podle (3) platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < q'(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

neboli po dělení číslem $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} < q' ,$$

takže vskutku $z < q'$.

Tvrzení [2]. Podle (4) platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > q(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) ,$$

odkud ihned dostaneme $q < z$, což jsme měli dokázat.

2. n robotníkov s rovnakým pracovným výkonom malo vykonať určitú prácu za d dní. Po odpracovaní a dní (kde $a < d$) sa robotníci zaviazali, že zvýšia svoj výkon o p %. Koľko robotníkov potom stačí na to, aby práca bola vykonaná v plánovanej dobe za d dní? Zmenšený počet robotníkov vyjadrite algebraickým vzorcom.

Riešenie. Pôvodný výkon 1 robotníka za 1 deň, vyjadrený zlomkom úkolu, bol $\frac{1}{nd}$. Za a dní odpracovali všetci robotníci časť úkolu vyjadrenú zlomkom

$$\frac{an}{nd} = \frac{a}{d}\,. \tag{1}$$

Po zvýšení výkonu bol denný výkon 1 robotníka

$$\frac{1}{nd}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Zvyšujúcich $d-a$ dní pracovalo x robotníkov, ktorí odpracovali časť úkolu vyjadrenú zlomkom

$$\frac{x(d-a)}{nd}\left(1 + \frac{p}{100}\right). \tag{2}$$

Súčet zlomkov (1) a (2) dá zrejme číslo 1 (celý úkol), t. j.

$$\frac{a}{d} + \frac{x(d-a)}{nd}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1\,.$$

Odtiaľ vyplýva

$$\frac{x(d-a)}{nd} \cdot \frac{100+p}{100} = \frac{d-a}{d}\,;$$

po delení číslom $\frac{d-a}{d} \neq 0$ výjde

$$x = \frac{100n}{100+p}\,.$$

Výraz nezávisí ani od plánovanej doby (d) ani od doby, kedy bol výkon zvýšený (a), ale len od počtu robotníkov a od percenta zvýšeného výkonu.

3. Určte všetky trojice prirodzených čísel, z ktorých každé dve čísla sú nesúdeliteľné a ktoré majú tú vlastnosť, že súčet ktorýchkoľvek dvoch z nich je deliteľný tretím číslom.

Riešenie. Označme prvky trojice písmenami a, b, c. Sú tri možnosti:
[1] $a = b = c$, [2] $a = b \neq c$, [3] všetky čísla a, b, c sú navzájom rôzne.

Prípad [1]. V tomto prípade musí byť $a = b = c = 1$; inak by čísla boli súdeliteľné. Odtiaľ máme riešenie $a = b = c = 1$.

Prípad [2]. Tu musí byť $a = b = 1$, inak by tieto čísla boli súdeliteľné. Číslo c podľa úlohy musí byť deliteľom čísla $a + b = 2$, a pretože $c \neq 1$, je nutne $c = 2$. Odtiaľ máme riešenie $a = b = 1$, $c = 2$.

Prípad [3]. Môžeme predpokladať, že

$$a < b < c\,. \qquad (1)$$

Súčet $a + b + c = (a + b) + c$. Ale podľa predpokladu je c deliteľom čísla $a + b$, a preto c je deliteľom súčtu $a + b + c$; to isté platí o číslach a, b.

Pretože a, b, c sú nesúdeliteľné čísla, vyplýva z predošlej úvahy, že platí

$$a + b + c = kabc\,, \qquad (2)$$

kde k je prirodzené číslo. Pretože platí (1), je $a + b + c < 3c$; preto vzhľadom ku vzťahu (2) platí $3c > kabc$. Pretože je $c > 0$, platí aj

$$3 > kab\,. \qquad (3)$$

Pre $k = 1$ máme $3 > ab$, t. j. $a = 1$, $b = 2$; pretože c je deliteľom čísla $a + b = 3$, je nevyhnutne $c = 3$. Odtiaľ riešenie: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Pre $k > 1$ vzhľadom k vzťahu $a < b$ (pozri (1)) a $a \geqq 1$ je $b > 1$; preto platí

$$kab \geqq kb\,,$$

kde $k \geqq 2$, $b \geqq 2$. Preto je $kb \geqq 4$, a teda

$$kab \geqq 4\,,$$

čo je spor so vzťahom (3). Prípad $k > 1$ nemôže teda nastať.

4. Budiž dán vypuklý čtyrúhelník $ABCD$. Označme po řadě S_1, S_2 středy jeho stran AB, CD.

a) Jestliže přímka S_1S_2 prochází průsečíkem přímek AD, BC, potom je $ABCD$ lichoběžník, dokažte.

b) Jestliže průsečík U úhlopříček AC, BD čtyrúhelníka $ABCD$ je bodem úsečky S_1S_2, potom je $ABCD$ lichoběžník nebo rovnoběžník; dokažte.

Řešení. a) Předpokládejte naopak, že přímky AB, CD jsou různoběžné; označme Q průsečík přímek AD, BC. Veďme bodem S_2 rovnoběžku s přímkou AB a označme po řadě C', D' její průsečíky s úsečkami QB, QA. Podle známé poučky z planimetrie je $S_2C' = S_2D'$. Podle předpokladu je $S_2C = S_2D$, takže ve čtyrúhelníku $CC'DD'$ se úhlopříčky CD, $C'D'$ navzájem půlí, a proto je to rovnoběžník. To je však ve sporu s předpokladem, že QA, QB jsou různoběžky. Proto byl předpoklad, že AB, CD jsou různoběžky, nesprávný; je tedy $AB \parallel CD$, takže $ABCD$ je lichoběžník, což jsme měli dokázat.

b) Předpokládejme naopak, že přímky AB, CD jsou různoběžné. Přitom je: [1] buď $AD \parallel BC$, nebo [2] přímky AD, BC mají společný bod Q.

V případě [1] je $ABCD$ lichoběžník a S_1S_2 je jeho střední příčka; protože bod U leží na příčce S_1S_2, je $UA = UC$ a $UB = UD$; to však je spor, neboť pak by $ABCD$ byl rovnoběžník. To však odporuje předpokladu, že přímky AB, CD jsou různoběžné.

V případě [2] veďme bodem S_2 rovnoběžku s přímkou AB a označme po řadě C', D' její průsečíky s polopřímkami UC, UD. Podle známé poučky z planimetrie je $S_2C' = S_2D'$, neboť je $C'D' \parallel AB$ a $S_1A = S_1B$. Protože podle textu úlohy je $S_2C = S_2D$, je $CC'DD'$ rovnoběžník, takže je $CC' \parallel DD'$. To je spor s předpokladem, že tyto přímky mají společný bod U. Proto je i předpoklad, že přímky AB, CD jsou různoběžné, nesprávný. Tím je dokázáno tvrzení úlohy b).

5. Určete všechna přirozená čísla x, y, pro která je $x^2 - y^2$ třetí mocninou prvočísla.

Řešení. Budiž $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = p^3$, kde p je prvočíslo. Čísla $x - y$, $x + y$ jsou přirozená a jsou to dělitelé čísla p^3. T. j. nastane nutně jeden z případů:

[1] $x - y = 1, \quad x + y = p^3$,
[2] $x - y = p, \quad x + y = p^2$,
[3] $x - y = p^2, \quad x + y = p$,
[4] $x - y = p^3, \quad x + y = 1$.

Poslední dva případy jsou však nemožné, neboť je vždy $x - y < x + y$.

V prvním případě dostáváme $x = y + 1$, $2y + 1 = p^3$, t. j. $y = \frac{1}{2}(p^3 - 1)$, $x = \frac{1}{2}(p^3 + 1)$; p ovšem musí být liché prvočíslo. Příklad: $p = 3$; $x = 14$, $y = 13$.

V druhém případě dostáváme $x = y + p$, $2y + p = p^2$, t. j. $y = \frac{1}{2}p(p - 1)$, $x = \frac{1}{2}p(p + 1)$; p může být libovolné prvočíslo. Příklad: $p = 2$; $x = 3$, $y = 1$ nebo $p = 3$; $x = 6$, $y = 3$.

6. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, při čemž je $c > 1$. Dokažte, že platí

$$a + b \leqq abc\,. \tag{1}$$

Kdy nastává rovnost?

Řešení. Předpokládejme, že daný vztah (1) je správný.

Znásobíme-li jej číslem $\frac{1}{ab} > 0$, dostaneme vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq c\,. \tag{2}$$

Dokážeme-li správnost vztahu (2), je úloha řešena, neboť znásobíme-li jej číslem $ab > 0$, dostaneme vztah (1). Dokažme nyní správnost vztahu (2).

Protože je

$$0 < \frac{1}{a} \leqq 1\,, \qquad 0 < \frac{1}{b} \leqq 1\,,$$

je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqq 2\,. \tag{3}$$

Podle předpokladu je $c > 1$ neboli $2 \leqq c$, odtud a ze vztahu (3) dostáváme vztah (2). Tím je platnost vztahu (1) dokázána.

Nyní dokážeme: Rovnost ve vztahu (1) nastane v jediném případě, jestliže totiž je $a = b = 1$, $c = 2$.

Důkaz. V uvedeném případě nastává vskutku rovnost.

Nechť je dále jedno z čísel a, b větší než 1; pro určitost nechť na př. je $a > 1$, $b \geqq 1$. Potom je

$$0 < \frac{1}{a} < 1, \quad 0 < \frac{1}{b} \leqq 1\,;$$

odtud plyne,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 2\,. \tag{4}$$

Podle předpokladu však je

$$2 \leqq c\,; \tag{5}$$

ze (4), (5) plyne

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < c\,.$$

Odtud je zřejmé, že jediný případ rovnosti nastane skutečně pro $a = b = 1$, $c = 2$, což jsme měli dokázat.

7. Je dána úsečka AA_1 a uvnitř této úsečky bod V. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby bod A_1 byl patou kolmice spuštěné z bodu A na stranu BC a aby bod V byl průsečíkem výšek trojúhelníka ABC.

Rozeznávejte dva případy, kdy strana AB je nebo není základnou trojúhelníka ABC. Proveďte diskusi řešitelnosti.

Řešení. Budiž dán trojúhelník ABC; sestrojme přímky $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp CA$, $CC_1 \perp AB$, kde A_1, B_1, C_1 jsou po řadě průsečíky dvojic těchto kolmic. Je známo, že přímky AA_1, BB_1, CC_1 procházejí jedním bodem V (zvaným průsečík výšek trojúhelníka ABC). Jestliže je $\sphericalangle CAB = \mathrm{R}$, je $V \equiv A$ a bod V je jedním krajním bodem úseček AA_1, BB_1, CC_1. Jestliže je jeden z úhlů trojúhelníka ABC tupý, potom bod V leží vždy vně úseček AA_1, BB_1, CC_1. Odtud plyne, že trojúhelník ABC, který máme podle požadavků sestrojit, je nutně ostroúhlý a bod V tudíž leží uvnitř tohoto trojúhelníka.

Předpokládejme, že jsme hledaný ostroúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC sestrojili; pak bod V leží uvnitř tohoto trojúhelníka. Uvažujme dva případy: Úsečka BC je v rovnoramenném trojúhelníku ABC

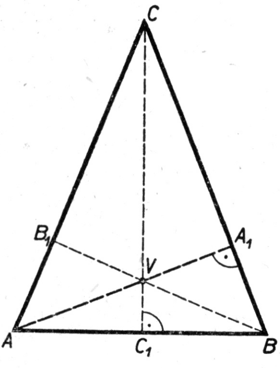
[1] ramenem a na př. úsečka AB jeho základnou; je tedy $CA = CB$ (obr. 13);

[2] základnou, takže je $AB = AC$ (obr. 14).

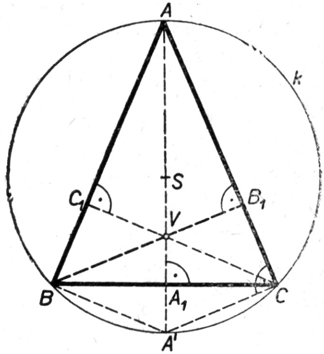
Případ [1]. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB je CC_1 osa souměrnosti, takže $AV = VB$. Přitom trojúhelník VBA_1 má při vrcholu A_1 pravý úhel, takže $VA > VA_1$. Jestliže tato podmínka není splněna, nemá úloha řešení. V následující konstrukci ukážeme, že je-li $VA > VA_1$, má úloha (až na řešení souměrné podle AA_1) jediné řešení.

V jedné z obou opačných polorovin vyťatých přímkou AA_1 sestrojíme pravoúhlý trojúhelník VBA_1 tak, aby bylo $VB = VA$. Označme C_1 střed úsečky AB, takže přímka VC_1 (je ovšem $V \not\equiv C_1$) je osa souměrnosti úsečky AB. Úhel $\sphericalangle ABA_1$ je ostrý úhel v pravoúhlém trojúhelníku ABA_1, úhel $\sphericalangle VC_1B$ je pravý; jejich součet je tedy menší než 2R, proto obě polopřímky C_1V, BA_1, ležící v téže polorovině vyťaté přímkou BC_1, se protnou v bodě, který označíme C. Bod C neleží na přímce AB; přitom je $AC = BC$, neboť C je na ose souměrnosti úsečky AB, a dále je $AA_1 \perp BC$. Je tedy ABC rovnoramenný trojúhelník s průsečíkem V výšek.

Závěr. Je-li daný bod A vrcholem základny rovnoramenného trojúhelníka ABC, potom má úloha právě jediné řešení tehdy, jestliže platí $VA_1 < VA$; není-li tato nerovnost splněna, nemá úloha řešení.



Obr. 13.



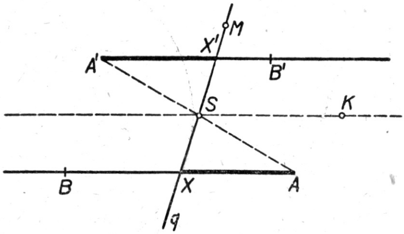
Obr. 14.

Případ [2]. Opišme hledanému trojúhelníku ABC kružnici k a označme A' druhý krajní bod jejího průměru jdoucího bodem A. Bod B_1 leží uvnitř úsečky AC, při čemž je $VB_1 \perp$ $\perp AC$; dále v trojúhelníku $AA'C$ podle Thaletovy věty je úhel $\sphericalangle ACA' = R$, t. j. $A'C \perp AC$. Proto je $BB_1 \| A'C$; stejně se dokáže, že $CC_1 \| A'B$. Proto je $A'BVC$ rovnoběžník a proto je bod A_1 jeho středem; odtud plyne, že $A_1V = A_1A'$. Podle toho provedeme konstrukci hledaného trojúhelníka ABC.

Na prodloužení úsečky AA_1 za bod A_1 určeme bod A' tak, aby platilo $A_1A' = A_1V$. Nad úsečkou AA' jako průměrem sestrojme kružnici k a označme B, C její průsečíky s kolmicí vedenou k přímce AA_1 bodem A_1. Trojúhelník ABC zřejmě vyhovuje úloze.

Závěr. Jestliže je bod A vrchol protější k základně hledaného rovnoramenného trojúhelníka ABC, má úloha vždy jediné řešení.

8. Je daný lichobežník $ABA'B'$ so základňami AB, $A'B'$ a ďalej bod M, ktorý neleží na žiadnej z priamok AB, $A'B'$. Bodom M veďte priamku q tak, aby preťala polpriamky AB, $A'B'$ radom v bodoch X, X' tak, že platí $AX = A'X'$. Preveďte diskusiu s ohľadom na bod M.



Obr. 15.

Riešenie (obr. 15). Označme S stred úsečky AA'; nech X, X' sú body vyhovujúce danej podmienke. Alebo je $X \equiv A$ a $X' \equiv A'$; to je možné jedine vtedy, ak leží bod M na priamke AA'. Alebo je $X \not\equiv A$, $X' \not\equiv A'$, potom je $AXA'X'$ rovnobežník, AA' jedna jeho uhlopriečka, q druhá jeho uhlopriečka.

Z tohto rozboru vyplýva konštrukcia:

a) Ak je $M \equiv S$, je priamka q ľubovoľná priamka vedená bodom S, ktorá pretína polpriamky AB, $A'B'$.

b) Ak je $M \not\equiv S$, je $q \equiv MS$. Úloha je neriešiteľná, ak priamka q nepretne polpriamku AB, a teda aj $A'B'$. Zvoľme bod $K \not\equiv S$ v polrovine $AA'B'$ tak, aby bolo $KS \parallel AB$. Potom úloha je neriešiteľná vtedy a len vtedy, ak leží bod $M \not\equiv S$

vnútri uhla $\sphericalangle KSA$ alebo vnútri uhla vrcholového alebo na priamke KS. Inak má jediné riešenie.

9. Letadlo koná službu mezi místy A, B tak, že létá z místa A do místa B a hned se vrací zpět. Vane-li vítr od A k B určitou rychlostí, vykoná letadlo obě cesty za 4 hod. 6 minut. Vane-li vítr opačným směrem, ale rychlostí trojnásobnou než v prvém případě, vykoná letadlo obě cesty za 5 hodin.

Za jakou dobu vykoná letadlo obě cesty při bezvětří?

Řešení. Označme $AB = s$, x rychlost letadla za minutu za bezvětří a v rychlost větru za minutu v prvém případě. Potom pro první případ platí

$$\frac{s}{x+v} + \frac{s}{x-v} = 246\,.$$

Pro druhý případ máme

$$\frac{s}{x-3v} + \frac{s}{x+3v} = 300\,.$$

Existuje-li řešení, musí být $x \neq v$, $x \neq 3v$: potom dostaneme

$$2sx = 246(x^2 - v^2)\,,$$
$$2sx = 300(x^2 - 9v^2)\,.$$

Abychom mohli odpovědět na otázku, musíme vypočítat $y = \frac{2s}{x}$, což je doba, za kterou letadlo vykoná obě cesty při bezvětří. Protože je $x \neq 0$, dělením obou rovnic číslem x^2 dostáváme

$$y = 246\left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right),$$

$$y = 300\left(1 - \frac{9v^2}{x^2}\right).$$

Odtud vypočítáme $\frac{v^2}{x^2}$ a pak y; pro stručnost položme $z = \frac{v^2}{x^2}$.

Odtud postupně dostaneme

$$41(1 - z) = 50(1 - 9z),$$
$$409z = 9,$$
$$z = \frac{9}{409}.$$

Je tedy

$$y = 246 \cdot \frac{400}{409},$$

což je doba v minutách. Doba y' v hodinách tedy je

$$y' = \frac{41 \cdot 40}{409} > \frac{41 \cdot 40}{410} = 4.$$

Za bezvětří vykoná letadlo obě cesty za 4 hodiny.

10. Určte všetky dvojice x, y nezáporných celých čísel, medzi ktorými platí vzťah:

$$\text{a) } xy = x + y, \tag{1}$$
$$\text{b) } xy < x + y, \tag{2}$$
$$\text{c) } xy > x + y. \tag{3}$$

Riešenie. Vzťahy sú súmerné v číslach x, y; stačí preto urobiť diskusiu vzhľadom na číslo x ako prvé.

a) Čísla x, y musia byť obe párne.

[1] Ak je $x = 0$, je aj $y = 0$; máme teda riešenie $x = y = 0$.

[2] Nech je $x \neq 0$, potom musí byť aj $y \neq 0$. Delením oboch strán rovnice (1) číslom xy dostaneme

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \tag{4}$$

kde je $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, lebo $x = 1$ vzhľadom na $y \neq 0$ vedie k sporu.

Pre $x = 2$ je aj $y = 2$; máme teda riešenie $x = y = 2$.

Pre $x > 2$ stačí vzhľadom na predchádzajúci výsledok uvažovať len $y > 2$. Zo vzťahu (4) potom vyplýva

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 ,$$

takže vzťah (1) nemá riešenie $x > 2$.

Riešenia vzťahu (1) sú teda $x = y = 0$, $x = y = 2$.

b) Urobíme diskusiu rôznych možností.

[1] Ak je $x = 0$, je $y > 0$ a ľubovoľné.

[2] Ak je $x > 0$, $y > 0$, možno namiesto (2) písať

$$1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} .$$

α) Pre $x = 1$ je $y > 0$ ľubovoľné, teda aj $x = 1$, $y = 1$.

β) Nech je teda ďalej $x > 1$, $y > 1$.
Potom je

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{2} , \qquad \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{2} ,$$

a teda

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqq 1 .$$

Vzťah (2) nemá teda riešenie $x > 1$, $y > 1$.

c) Tu je $x > 0$, $y > 0$ a teda namiesto (3) píšeme

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 1 , \tag{5}$$

takže zrejme musí byť $x > 1$, $y > 1$.

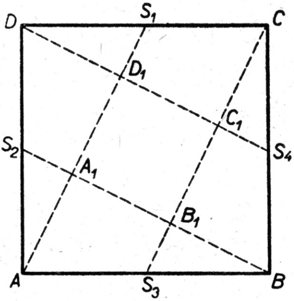
[1] Pre $x = 2$ je $y > 2$ a ľubovoľné.

[2] Pre $x > 2$ vzhľadom na predchádzajúci výsledok môžme predpokladať, že aj $y > 2$. Potom je vzťah (5) splnený pre všetky dvojice $x > 2$, $y > 2$.

Záver. Vzťah (1) platí práve pre $x = y = 0$, $x = y = 2$.

Vzťah (2) platí pre $x = 0$ a $y > 0$ ľubovoľné alebo pre $y = 0$ a $x > 0$ ľubovoľné; ďalej pre ten prípad, že sa jedno z čísel x, y rovná jednej, kdežto druhé je ľubovoľné celé kladné číslo.

Vzťah (3) platí, ak sa jedno z čísel x, y rovná dvom a druhé je celé, väčšie než dve; ďalej ak sú obe celé čísla x, y väčšie než dve.



Obr. 16.

11. Je daný štvorec $ABCD$, ktorého strana má veľkosť p. Označme radom S_3, S_4, S_1, S_2 stredy úsečiek AB, BC, CD, DA.

a) Dokážte, že priamky AS_1, BS_2, CS_3, DS_4 určujú štvorec $A_1B_1C_1D_1$.

b) Vyjadrite obsah štvorca $A_1B_1C_1D_1$ pomocou čísla p.

Riešenie. a) Je $AS_1 \| CS_3$, pretože je $AS_3 \| CS_1$, $AS_3 = CS_1$, takže AS_3CS_1 je rovnobežník (obr. 16). Ďalej je $\sphericalangle S_2A_1A = R$. To dokážeme takto:

$$\sphericalangle DAS_1 + \sphericalangle AS_1D = R \tag{1}$$

(ostré uhly v pravouhlom trojuholníku AS_1D),

$$\sphericalangle AS_1D = \sphericalangle AS_2B\,, \tag{2}$$

lebo je $\triangle AS_1D \cong \triangle BS_2A$ (poučka sus).

Dosadením z (2) do (1) máme $\sphericalangle DAS_1 + \sphericalangle AS_2B = R$; to sú však uhly v trojuholníku AS_2A_1 a preto jeho tretí uhol $\sphericalangle S_2A_1A = R$. Preto je $A_1B_1C_1D_1$ obdĺžnik. Pretože AS_3CS_1, BS_4DS_2 sú zhodné rovnobežníky, vzdialenosť rovnobežiek AS_1, S_3C sa rovná vzdialenosti rovnobežiek BS_2, S_4D; preto je $A_1B_1 = B_1C_1$ a obdĺžnik $A_1B_1C_1D_1$ je štvorec.

b) V trojuholníku ABA_1 je $\sphericalangle AA_1B = R$ a úsečka S_3B_1 je strednou priečkou; je teda $AA_1 = 2 \cdot S_3B_1$ a $BB_1 = B_1A_1$. Pretože je $\triangle AS_2A_1 \cong \triangle BS_3B_1$ (Ssu, usu), je $AA_1 = BB_1$, $S_2A_1 = S_3B_1 = \frac{1}{2} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot BB_1$. Je teda

$$BB_1 = B_1A_1 = 2 \cdot S_2A_1 \text{ alebo}$$
$$BB_1 = B_1A_1 = \tfrac{2}{5} \cdot BS_2\,, \quad S_2A_1 = \tfrac{1}{5} \cdot BS_2\,.$$

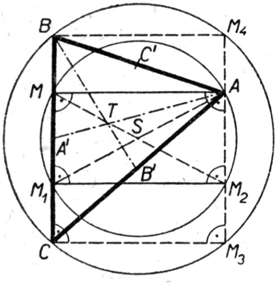
Ale

$$BS_2{}^2 = p^2 + \tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{5}{4}p^2, \quad BS_2 = \frac{p\sqrt{5}}{2}\,.$$

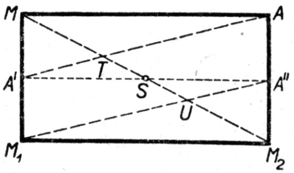
Obsah x štvorca $A_1B_1C_1D_1$ je

$$x = B_1A_1{}^2 = (\tfrac{2}{5} \cdot BS_2)^2 = \left(\frac{p\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{p^2}{5}\,.$$

12. Jsou dány dvě různé soustředné kružnice. Kružnici s menším poloměrem nazveme vnitřní, kružnici s větším poloměrem nazveme vnější. Na vnitřní kružnici zvolíme pevný bod M; jím vedeme jednak libovolnou tětivu MA vnitřní kružnice a jednak tětivu $BC \perp MA$ vnější kružnice. Co vyplní středy jednotlivých stran všech trojúhelníků ABC, když se mění poloha tětivy MA; co vyplní těžiště všech těchto trojúhelníků ABC?



Obr. 17.



Obr. 18.

Řešení. Označme body M_1, M_2 podle obrázku 17. Pro každou polohu přímky BC vznikne $\triangle ABC$; výjimku činí případ, kdy tětiva BC leží v přímce MS, neboť pak neexistuje tětiva MA (je $A \equiv M$). Střed A' úsečky BC je zároveň středem úsečky MM_1; proto množinou všech bodů A' je kružnice, která vznikne z vnitřní kružnice stejnolehlostí $\varkappa$ se středem M a koeficientem $\frac{1}{2}$ stejnolehlosti, a to s vyloučením středu S obou soustředných kružnic.

Střed B' strany AC je středem pravoúhlého rovnoběžníka MCM_3A; proto množinou všech bodů B' je kružnice, která vznikne z vnější kružnice stejnolehlostí $\varkappa$, a to s vyloučením bodu ležícího uvnitř polopřímky MS. Analogicky dostaneme, že množina všech středů C' úsečky AB je táž jako množina všech bodů B'.

Na základě vlastnosti střední příčky trojúhelníka podle obrázku 18 dostaneme, že úhlopříčka MM_2 obdélníka MM_1M_2A dělí úsečky AA', M_1A'' v části, pro které platí: $A'T = \frac{1}{2} \cdot M_1U$, $A'T = A''U$, $A''U = \frac{1}{2} \cdot AT$, t. j. $A'T = \frac{1}{2} \cdot AT$; dále $MT = TU = UM_2$, t. j. $MT = \frac{2}{3} \cdot MS$. Ježto úsečka AA' je těžnice trojúhelníka ABC, je bod T jeho těžištěm; toto těžiště je patrně týž bod pro všecky trojúhelníky ABC, neboť body S, M jsou pevné.

13. Určete všechna reálná čísla a, b, c, pro která je výraz

$$\frac{b+c}{a} - \frac{c+a}{b} - \frac{a-b}{c} \tag{1}$$

roven nule.

Řešení. Čísla a, b, c musí být různá od nuly, takže je $abc \neq$ $\neq 0$. Výraz (1) lze upravit takto

$$\frac{1}{abc}[bc(b+c) - ac(a+c) - ab(a-b)].$$

Aby výraz byl roven nule, je nutné, aby výraz Z v lomené závorce v tomto součinu byl roven nule. Platí

$$\begin{aligned} Z &= bc(b+c) - a^2c - ac^2 - a^2b + ab^2 = \\ &= bc(b+c) - a^2(b+c) + a(b^2 - c^2) = \\ &= (b+c)[bc - a^2 + a(b-c)] = \end{aligned}$$

$$= (b + c)[bc - a^2 + ab - ac] =$$
$$= (b + c)[b(a + c) - a(a + c)] =$$
$$= (b + c)(c + a)(b - a) .$$

Aby bylo $Z = 0$ a zároveň platilo $abc \neq 0$, je nutné a stačí, aby platil jeden ze vztahů:

[1] $b + c = 0$, t. j. $b = -c \neq 0$, $a \neq 0$ libovolné.
[2] $c + a = 0$, t. j. $a = -c \neq 0$, $b \neq 0$ libovolné.
[3] $b - a = 0$, t. j. $a = b \neq 0$, $c \neq 0$ libovolné.

Celý postup lze obrátit, takže výsledky [1], [2], [3] jsou všechna řešení.

14. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$ax^2 = a^2 - a - 2 , \tag{1}$$

kde a je dané reálné číslo. Proveďte diskusi vzhledem k číslu a.

Řešení. [1] Budiž $a = 0$. Rovnice (1) zní

$$0 \cdot x^2 = -2$$

a nemá řešení.

[2] Budiž $a > 0$. Rovnici (1) lze upravit na tvar

$$ax^2 = (a + 1) \cdot (a - 2) . \tag{2}$$

a) Je-li $a > 2$, je pravá strana ve vztahu (2) kladné číslo. Pak máme dvě řešení:

$$x_1 = \sqrt{\frac{a^2 - a - 2}{a}} , \quad x_2 = -\sqrt{\frac{a^2 - a - 2}{a}} . \tag{3}$$

b) Je-li $a = 2$, pak rovnice (2) má tvar

$$2x^2 = 0$$

a dvojnásobný kořen $x = 0$.

c) Je-li $0 < a < 2$, je levá strana ve vztahu (2) pro každé x číslo nezáporné, kdežto pravá strana je číslo záporné; rovnice (1) pak nemá řešení.

[3] Budiž $a < 0$.

a) Je-li $a > -1$,

je

$$\frac{a^2 - a - 2}{a}$$

číslo kladné a máme řešení dané vztahy (3).

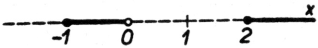
b) Je-li $a = -1$, rovnice (2) má tvar

$$-x^2 = 0,$$

takže rovnice (1) má dvojnásobný kořen $x = 0$.

c) Je-li $a < -1$, je pravá strana vztahu (2) číslo kladné, kdežto levá strana je pro každé x číslo nekladné; rovnice (1) nemá řešení.

Výsledek zobrazíme na ose čísel a (obr. 19). Pro ta čísla a, která mají obraz na silně vytažené čáře, máme dvě různá řešení x_1, $x_2 = -x_1$; ta a, pro něž máme dvojnásobný kořen $x_1 = x_2$, jsou vyznačena tučným kroužkem. Ta čísla a, pro něž rovnice (2) nemá řešení, mají obraz na čárkované části osy čísel. Pro $a = 0$ není řešení.

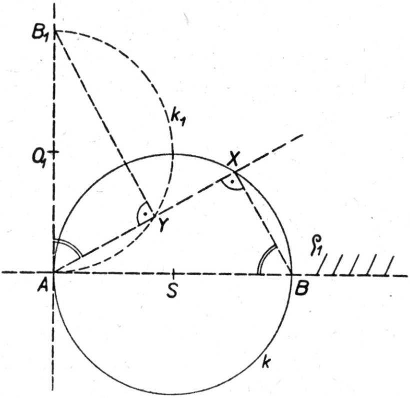


Obr. 19.

15. Budiž dána kružnice k o středu S a poloměru r; zvolme určitý její průměr AB. Označme X libovolný bod kružnice k, který je různý od bodů A, B. Na polopřímce AX určeme bod Y tak, aby platilo $AY = BX$. Co vyplní všechny body Y, když bod X probíhá kružnici k?

Řešení (obr. 20). Označme ϱ_1 jednu z obou opačných polorovin vyťatých přímkou AB; ze souměrnosti kružnice k podle přímky AB snadno nahlédneme, že se při úvaze můžeme omezit na polorovinu ϱ_1. V polorovině ϱ_1 sestrojme úsečku AB_1 tak, aby platilo $AB_1 = 2r$, $AB_1 \perp AB$; označme O_1 její střed. Kolem bodu O_1 opišme polokružnici k_1 o poloměru r tak, aby ležela v polorovině AB_1B.

Uvnitř poloroviny ϱ_1 zvolme na kružnici k libovolný bod X a na polopřímce AX určeme bod Y tak, aby platilo $AY = BX$.



Obr. 20.

Dokážeme, že bod Y leží na polokružnici k_1 mimo přímku AB_1. Poslední tvrzení je zřejmé, takže vzniká trojúhelník AB_1Y. Platí

$$\triangle\, AB_1Y \cong \triangle\, BAX \text{ (sus)},$$

neboť je $AB_1 = AB = 2r$, $AY = BX$, $\sphericalangle\, B_1AY = 90° - \sphericalangle\, XAB = \sphericalangle\, ABX$. Je tedy $\sphericalangle\, AYB_1 = \sphericalangle\, BXA = 90°$ a podle Thaletovy věty leží bod Y na polokružnici k_1.

Obráceně každému bodu Y polokružnice k_1 (kde $Y \neq A$, $Y \neq B_1$) lze určit v polorovině ϱ_1 na polopřímce AY a na kružnici k bod X tak, že platí $BX = AY$.

Je totiž $\sphericalangle\, AYB_1 = 90°$ (podle Thaletovy věty). Polopřímka AY leží až na bod A uvnitř pravého úhlu $\sphericalangle\, BAB_1$, a proto protne kružnici k uvnitř poloroviny ϱ_1 v bodě $X \neq A$. Vzniká $\triangle\, ABX$ a platí

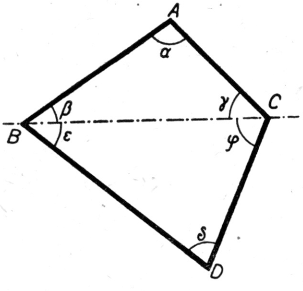
$$\triangle\, AB_1Y \cong \triangle\, BAX \text{ (sus)},$$

neboť je $AB_1 = AB = 2r$, $\sphericalangle YAB_1 = 90° - \sphericalangle XAB = \sphericalangle XBA$ a $\sphericalangle AYB_1 = \sphericalangle BXA = 90°$ (oba trojúhelníky jsou pravoúhlé). Proto je $AY = BX$, což jsme měli dokázat.

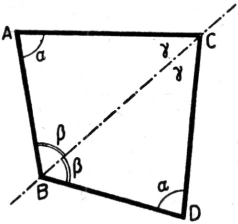
Když bod X probíhá kružnicí k s výjimkou bodů A, B, vyplní příslušné body Y dvě polokružnice k_1, k_2, které jsou navzájem souměrně sdružené podle přímky AB; společné body přímky AB_1 s těmito polokružnicemi přitom vylučujeme. Polokružnice k_1 má poloměr r a její střed O_1 leží na kolmici sestrojené v bodě A k přímce AB tak, že $AO_1 = r$.

16. Nájdite všetky štvoruholníky (vypuklé), ktoré sú uhlopriečkou rozdelené na dva podobné trojuholníky.

Kedy je táto podobnosť zhodnosťou?



Obr. 21.



Obr. 22.

Riešenie. Daný štvoruholník označme $ABDC$ a nech jeho uhlopriečka BC delí tento štvoruholník na dva podobné trojuholníky ABC, BCD. Označme (obr. 21) $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$, $\sphericalangle DBC = \varepsilon$, $\sphericalangle BCD = \varphi$, $\sphericalangle CDB = \delta$. Platí:

Súčet ktorýchkoľvek dvoch z uhlov α, β, γ je menší než 2R.

Každý z uhlov štvoruholníka $ABCD$ je menší než 2R.

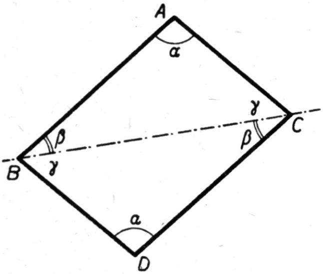
Sú dve možnosti:

[1] Je $\alpha = \delta$, potom je

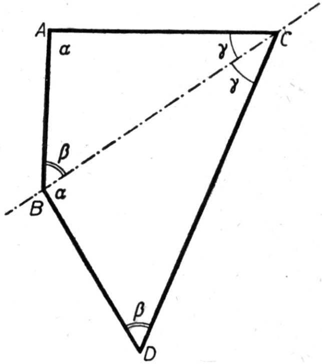
a) buď $\varepsilon = \beta$, a tým $\varphi = \gamma$ (obr. 22),
b) buď $\varepsilon = \gamma$, a tým $\varphi = \beta$ (obr. 23).

[2] Je $\alpha \neq \delta$. Potom môžeme predpokladať, že je $\delta = \beta$ (keby bolo $\delta = \gamma$, vymenili by sme názvy β, γ, a tým aj ε, φ). Potom je

a) buď $\varepsilon = \alpha$, a tým $\varphi = \gamma$ (obr. 24),
b) buď $\varphi = \alpha$, a tým $\varepsilon = \gamma$ (obr. 25).



Obr. 23.



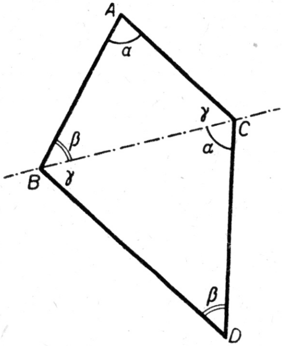
Obr. 24.

Prípad [1] a). Štvoruholník $ABDC$ (obr. 22) má zrejme priamku BC za os súmernosti a štvoruholník je deltoid, uvažovaná podobnosť je zrejme zhodnosťou, lebo je $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ (usu).

Prípad [1] b). Pretože je $\varepsilon = \gamma$, $\varphi = \beta$ (dvojica striedavých uhlov), je $AC \parallel BD$, $AB \parallel CD$. Štvoruholník $ABDC$ (obr. 23) je teda rovnobežník; uvažovaná podobnosť je zrejme zhodnosťou, lebo je $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (usu).

Prípad [2] a). V tomto prípade je polpriamka CB osou uhla $\sphericalangle DCA$ (obr. 24). V tomto prípade nemôže byť podobnosť zhodnosťou, lebo by bolo $\alpha = \delta$.

Prípad [2] b). Pretože je $\varepsilon = \gamma$ (striedavé uhly), je $AC \parallel BD$. Ak je $\alpha \neq \beta$, je štvoruholník $ABDC$ lichobežník (obr. 25), lebo z rovnosti $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBD = \gamma$ vyplýva $AC \parallel BD$ a zo vzťahu $\triangle ABC \sim \triangle CDB$ vyplýva $AC \neq BD$; pre $AC = DB$ totiž z podobnosti dostaneme vzťah $BC = DB$, t. j. $AC = BC$, a tým $\alpha = \beta = \delta$, čo je proti predpokladu, že je $\alpha \neq \delta$.



Obr. 25.

V tomto prípade vzhľadom k predpokladu $\alpha \neq \delta$ môže ísť iba o podobnosť, ktorá nie je zhodnosťou.

7. Úlohy II. kola kategorie C

1. Určete všechna reálná čísla a, b, c, pro která je výraz

$$a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) - c(a + b)^2$$

roven nule.

Řešení. Daný výraz lze upraviti takto:

$$\begin{aligned} &ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b - c(a + b)^2 = \\ &= ab(a + b) + c^2(a + b) - c(a + b)^2 = \\ &= (a + b)[c^2 - ac + ab - bc] = \\ &= (a + b)[- c(a - c) + b(a - c)] = \\ &= (a + b)(b - c)(a - c) . \end{aligned}$$

Je-li daný výraz roven nule, musí být alespoň jeden z činitelů

$$a + b, \quad b - c, \quad a - c$$

roven nule. Odtud máme tato řešení:

(1) buď je $a = c$, b libovolné,
(2) nebo je $b = c$, a libovolné,
(3) nebo je $a = -b$, c libovolné.

Tato řešení zřejmě splňují požadavek úlohy.

Tím jsme určili všechna řešení úlohy.

2. Je dáno číslo s a dále čísla a, b, c, různá od nuly. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{x}{a} = t, \qquad \frac{y}{b} = t, \qquad \frac{z}{c} = t, \qquad x + y + z = s$$

s neznámými x, y, z, t.

Stanovte podmínky řešitelnosti.

Řešení. Předpokládejme, že existuje řešení x, y, z, t dané soustavy. Potom je po dosazení za x, y, z do čtvrté rovnice

$$(a + b + c)t = s\,. \tag{1}$$

Případ [1]. Nechť je $a + b + c \neq 0$. Potom z (1) je

$$t = \frac{s}{a + b + c}$$

a dále

$$x = \frac{as}{a + b + c}, \quad y = \frac{bs}{a + b + c}, \quad z = \frac{cs}{a + b + c}\,.$$

V tomto případě dostáváme jediné řešení.

Případ [2]. Nechť je $a + b + c = 0$.

Je-li dále $s \neq 0$, potom neexistuje t, které by vyhovovalo rovnici (1), a tedy ani řešení soustavy.

Je-li $s = 0$, potom rovnice (1) je splněna pro každé t a řešení soustavy je nekonečně mnoho. Všechna jsou tvaru $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, kde t je libovolné číslo.

3. Buďte dány dva body X, Y a přímka p, která je odděluje. Na přímce p sestrojte bod O tak, aby platilo

$$\sphericalangle XOP = \sphericalangle YOP,$$

kde P je libovolný bod přímky p různý od bodu O.

Stanovte podmínku řešitelnosti úlohy pro různé polohy bodů X, Y.

Řešení. Předpokládejme, že jsme bod O sestrojili. Označme Y' obraz bodu Y v souměrnosti o ose p. Potom je vzhledem k předpokladu

$$\sphericalangle XOP = \sphericalangle Y'OP.$$

Ale body X, Y' leží uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Polopřímky OX, OY' tedy zřejmě splývají. Odtud dostaneme řešení. Rozeznávejme případy:

Případ [1]. Nechť je $Y' \not\equiv X$. Jsou dvě možnosti:

(a) Přímky XY', p mají průsečík O. Potom O je zřejmě jediné řešení úlohy.

(b) Přímky XY', p jsou rovnoběžné a úloha nemá řešení.

Případ [2]. Nechť je $Y' \equiv X$ neboli X, Y jsou souměrně sdružené body. Potom každý bod přímky p lze považovat za bod O. Úloha má nekonečně mnoho řešení.

4. Buď dán rovnoběžník $ABCD$. Označme po řadě M, N středy stran AD, BC a dále P, Q průsečíky úhlopříčky BD s přímkami AN, MC.

Dokažte, že platí:

$$BP = PQ = QD, \qquad PN = MQ = \tfrac{1}{3} \cdot AN.$$

Řešení. Protože je $AM \| NC$, $AM = NC = \frac{1}{2} \cdot AD$, je $ANCM$ rovnoběžník, a tedy $AN \| MC$. Úsečka MQ je střední příčka v trojúhelníku APD, a tedy $DQ = QP$ a

$$AP = 2 \cdot MQ. \tag{1}$$

Stejně z trojúhelníka BQC plyne, že $QP = PB$. Je tedy

$$DQ = QP = PB. \tag{2}$$

Dále je $\triangle BNP \cong DMQ$ (sus), neboť je $MD = BN = \frac{1}{2} \cdot AD$, $DQ = PB$ (podle (2)) a $\sphericalangle PBN = \sphericalangle QDM$ (jsou to úhly střídavé). Je tedy

$$PN = MQ\,.$$

Odtud a ze vztahu (1) obdržíme $AP = 2 \cdot MQ = 2 \cdot PN$ neboli

$$AP = 2 \cdot PN\,.$$

Tím jsme tvrzení úlohy dokázali.

8. Úlohy I. kola kategorie D

1. Gumový míček pustíme volně z ruky z určité výšky na podlahu, od níž se opět odrazí vzhůru. Po každém odrazu dosáhne míček výšky rovné $\frac{3}{5}$ té výšky, z níž právě dopadl.

a) Jestliže jsme pustili míček z výšky 12 m, určete, jaké výšky dosáhne po třetím odrazu od podlahy?

b) Z jaké výšky jsme pustili míček, jestliže po třetím odrazu od podlahy dosáhl výše $2\frac{1}{3}$ m?

Řešení. a) Po třetím odrazu dosáhne míček výšky (v metrech)

$$12 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 12 \cdot \frac{27}{125} = \frac{324}{125} = 2\frac{74}{125}\,.$$

b) Výšku (v metrech), ze které jsme míček pustili, dostaneme, když dělíme číslo $2\frac{1}{3}$ číslem $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ neboli když vypočteme součin

$$2\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{7}{3} \cdot \frac{125}{27} = \frac{875}{81} = 10\frac{65}{81}\,.$$

2. V obchodě měli ráno určitý počet bochníků chleba. Z toho závodní kuchyně odebrala $\frac{3}{4}$ zásoby a $\frac{1}{4}$ bochníku. Potom $\frac{3}{4}$ zbytku zásoby a $\frac{1}{4}$ bochníku koupilo sousední uzenářství, $\frac{3}{4}$ zbytku této nové zásoby a $\frac{1}{4}$ bochníku koupila mateřská škola na svačiny žákům, načež $\frac{3}{4}$ zbytku poslední zásoby a $\frac{1}{4}$ bochníku odebral kupující.

a) Vypočtěte, kolik bochníků chleba měli původně v obchodě.

b) Vysvětlete, jak je to možné, že při žádném z uvedených prodejů nemusil prodavač bochník rozkrajovat.

Řešení. a) Po prvním prodeji zbylo:

$$\frac{1}{4}\text{ zásoby } - \frac{1}{4}\text{ bochníku.}$$

Po druhém prodeji zbylo:

$$\frac{1}{4^2}\text{ zásoby } - \frac{1}{4^2}\text{ bochníku } - \frac{1}{4}\text{ bochníku.}$$

Po třetím prodeji zbylo:

$$\frac{1}{4^3}\text{ zásoby } - \frac{1}{4^3}\text{ bochníku } - \frac{1}{4^2}\text{ bochníku } - \frac{1}{4}\text{ bochníku.}$$

Po čtvrtém prodeji zbylo:

$$\frac{1}{4^4}\text{ zásoby } - \frac{1}{4^4}\text{ bochníku } - \frac{1}{4^3}\text{ bochníku } - \frac{1}{4^2}\text{ bochníku } - \frac{1}{4}\text{ bochníku.}$$

Jestliže tím byla celá zásoba vyprodána, je poslední zbytek nula; to znamená, že

$$\frac{1}{4^4}\text{ zásoby je rovna } \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4}\right)\text{ bochníku.}$$

Celou zásobu dostaneme, když toto číslo znásobíme číslem 4^4, t. j. celá původní zásoba je (v bochnících)

$$4^4\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 = 85\ .$$

V tomto případě skutečně nastal případ b), že totiž prodavač nemusil žádný bochník rozkrajovat; tu

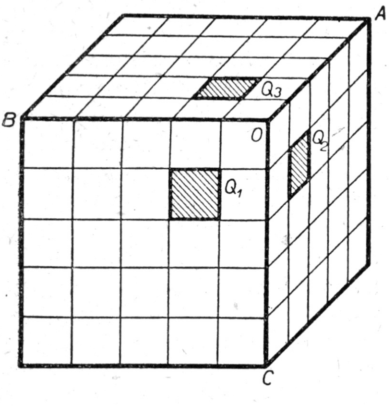
[1] jednotlivé odprodeje jsou:

$$85 \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 63\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 64;$$
$$21 \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 15\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 16;$$
$$5 \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 3\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 4;$$
$$1 \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 1.$$

[2] zbytky po odprodeji jsou:

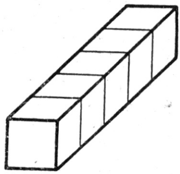
21; 5; 1; 0.

Z textu úlohy neplyne, zda po čtvrtém prodeji zbyl nebo nezbyl nějaký chléb. Jestliže však nějaký chléb zbyl, potom z otázky b) plyne, že to byl celý počet bochníků, označme jej n. Potom z předchozího vyplývá, že $\frac{1}{4^4}$ zásoby je rovna $\left(\frac{85}{4^4} + n\right)$ bochníků. Původní zásoba tedy byla $(85 + 4^4 \cdot n)$ bochníků.



Obr. 26.

3. Budiž dána krychle o hraně velikosti 5 cm; krychle je slepena z krychliček o hraně 1 cm. Zvolme na povrchu dané krychle tři čtverečky Q_1, Q_2, Q_3 o stranách 1 cm tak, jak je naznačeno v obr. 26. Nad čtverečkem Q_1 ve směru hrany OA (viz obr. 26) vyrazíme sloupec složený z pěti krychliček



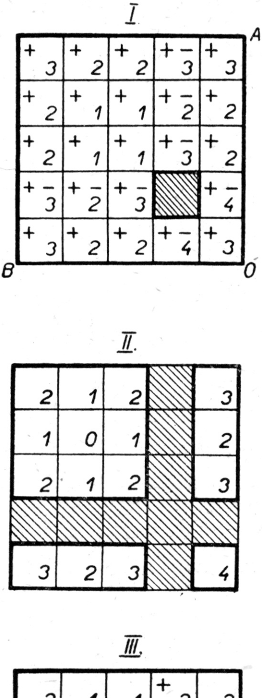
Obr. 27.

8—55-17-03

(vyňatá část je znázorněna v obr. 27); tím vznikne v dané krychli otvor. Obdobným způsobem sestrojíme otvor nad čtverečkem $\mathbf{Q}_2$ ve směru hrany OB a dále nad čtverečkem $\mathbf{Q}_3$ otvor ve směru hrany OC. (Celkem bylo vyňato 13 krychliček.)

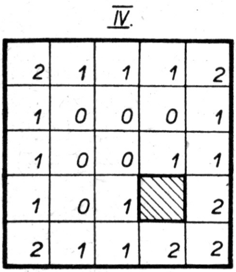
Nyní provrtanou krychli ponoříme do červené barvy, aby se povrch a dutiny obarvily. Po uschnutí krychli rozbijeme na krychličky o hranách 1 cm.

Určete, kolik jsme dostali krychliček, které mají obarvenou 1) jednu, 2) dvě, 3) tři, 4) čtyři, 5) pět, 6) šest, 7) žádnou stěnu?

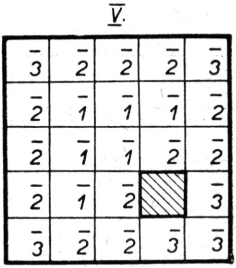


Obr. 28., 29., 30.

Řešení. Abychom snadněji úlohu rozřešili, rozřežeme krychli na desky tvaru kvádru, a to rovinnými řezy rovnoběžnými s horní podstavou krychle. Tím dostaneme pět desek tvaru kvádru o rozměrech 5 cm, 5 cm, 1 cm; tyto desky na dané krychli od shora dolů očíslujeme číslicemi I, II, III, IV, V. Desky si zobrazíme čtverci o rozměrech 5 cm, 5 cm (viz obr. 28 až 32); mysleme si, že se na desky díváme se shora, takže vidíme horní stěnu čtvercové desky. Je-li horní stěna krychličky v určité desce obarvena, pak do čtverečku, který krychličku znázorňuje, napíšeme znaménko $+$; je-li obarvena stěna dolní, napíšeme znaménko $-$. Je-li obarvena pobočná stěna krychličky, potom stranu čtverečku v obrázku vytáhneme tlustou úsečkou. Tak snadněji spočítáme, kolik stěn má krychlička obarvených; celkový počet obarvených stěn krychličky napíšeme také dovnitř čtverečku. Ty krychličky, které jsme z krychle vyňali, znázorníme v obrázcích vyšrafovaným čtverečkem.



Obr. 31.



Obr. 32.

Výsledky, které získáme, napíšeme do tabulky. V tabulce na př. v řádku označeném II (t. j. deska čís. II) čteme: 1 krychlička je neobarvená, 4 krychličky mají obarvenou 1 stěnu, 6 krychliček má obarvené dvě stěny, 4 krychličky 3 stěny, 1 krychlička má obarvené 4 stěny; celkem má deska 16 krychliček.

V předposledním řádku, označeném S, čteme výsledek: 11 krychliček je neobarvených, 36 krychliček má obarvenou jednu stěnu, 42 dvě stěny, 20 tři stěny, 3 čtyři stěny.

Provedeme zkoušku: Snadno přímo zjistíme, že je obarveno 192 stěn ($150 - 6 + 12 \cdot 4$): skutečně platí

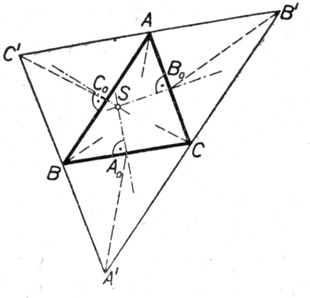
$$36 \cdot 1 + 42 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 192 .$$

Počet obarvených krychliček v jednotlivých deskách je patrný z této tabulky:

	Deska číslo	Počet krychliček, které mají obarveno n stěn					Počet krychliček v desce
		$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	
	I	0	4	10	8	2	24
	II	1	4	6	4	1	16
	III	4	10	8	2	0	24
	IV	6	12	6	0	0	24
	V	0	6	12	6	0	24
S*)		11	36	42	20	3	112
	Obarv. stěn	0	36	84	60	12	192

*) S = celkový počet krychliček.

4. Je dán trojúhelník ABC. Určete střed S kružnice trojúhelníku ABC opsané a to tak, že při konstrukci budete užívat jen trojúhelníkových pravítek (nikoli kružítka). Pomocí pravítek rýsujte rovnoběžky a kolmice. Odůvodněte správnost nalezené konstrukce.



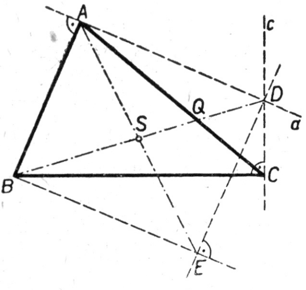
Obr. 33.

Řešení (obr. 33). Veďme každým vrcholem trojúhelníka ABC pomocí dvou trojúhelníkových pravítek rovnoběžku s protější stranou trojúhelníka. Tím dostaneme trojúhelník $A'B'C'$; označení zvolíme tak, aby bod A ležel na úsečce $B'C'$, bod B na úsečce $C'A'$ a bod C na úsečce $A'B'$.

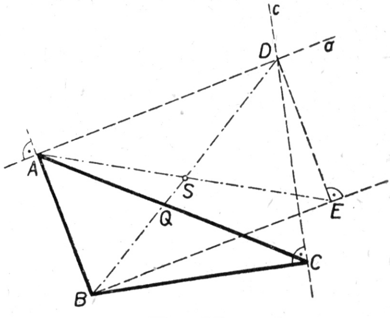
Nyní sestrojíme středy stran trojúhelníka ABC. Protože na př. $ABCB'$ je rovnoběžník, proto se úsečky AC, BB' navzájem půlí; označme B_0 jejich průsečík. Bod B_0 je tedy středem strany AC. Stejně sestrojíme střed C_0 strany AB a střed A_0 strany BC.

Pomocí dvou trojúhelníkových pravítek sestrojíme v bodě A_0 kolmici o_1 k přímce BC, dále v bodě B_0 kolmici o_2 k přímce CA a konečně v bodě C_0 kolmici o_3 k přímce AB. Z geometrie víte, že všechny tři přímky o_1, o_2, o_3 procházejí jedním bodem, středem S kružnice trojúhelníku ABC opsané. (Kolmice o_1, o_2, o_3 rýsujeme všechny tři pro kontrolu přesnosti rýsování.)

Jiné řešení. Jestliže v trojúhelníku ABC je úhel $\sphericalangle ABC$ pravý, potom sestrojíme rovnoběžník $ABCD$. Protože jeho úhel $\sphericalangle ABC$ je pravý, je rovnoběžník $ABCD$ obdélník a jeho úhlopříčky AC, BD se protínají ve středu S obdélníka $ABCD$. Kružnice o středu S a o poloměru $SA = SB = SC$ prochází všemi vrcholy tohoto obdélníka a tedy je to kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Proto je bod S hledaným bodem.



Obr. 34.



Obr. 35.

Nechť žádný úhel trojúhelníka ABC není pravý; nechť pro určitost jsou na př. úhly $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle BCA$ ostré a úhel $\sphericalangle ABC$ ostrý nebo tupý (obr. 34 a 35). Sestrojme v bodě A přímku $a \perp AB$ a v bodě C přímku $c \perp BC$. Podle známé věty (viz Matematika pro 7. post. roč., věta 6, str. 289) se přímky a, c protnou v bodě D. Bod D leží vně trojúhelníka ABC, ale uvnitř úhlu ABC (to plyne snadno podle Eukleidova postulátu). Odtud plyne, že je tedy $ABCD$ vypuklý čtyrúhelník.

Úsečky AC, BD mají společný bod Q, který leží uvnitř každé z nich. Přímka BD rozděluje vypuklý čtyrúhelník $ABCD$ ve dva pravoúhlé trojúhelníky o společné přeponě BD. Podle Thaletovy věty je střed S úsečky BD středem kružnice k opsané trojúhelníkům ABD, BCD; její poloměr je $SA = SB = SC = SD$. Rovnoběžník $ABED$ má při vrcholu A pravý úhel a proto je obdélníkem. Kružnice k je zřejmě kružnicí tomuto obdélníku opsanou a proto je S průsečíkem úhlopříček AE, BD.

Odtud plyne konstrukce bodu S: Sestrojíme přímky a, c tak, že $a \perp AB$, $c \perp BC$, při čemž a prochází bodem A a c prochází bodem C; jejich průsečík je D. Nyní sestrojíme obdélník $ABED$, takže je $DE \| AB$, $BE \| AD$. Střed S obdélníka $ABED$ je hledaný střed kružnice trojúhelníku ABC opsané. Postup konstrukce vyhovuje podmínkám úlohy.

Konstrukci ve svém řešení
naznačila s. Věra Vajtaurová,
B kurs 3. osmiletky, Znojmo.

5. Z Číny došla zásielka troch druhov čaju. Všetkých troch druhov bolo celkom menej ako 4 t; pritom čisté váhy všetkých troch druhov sa navzájom sebe rovnali. Prvý druh bol dopravený v 76 jednakých debničkách, druhý v 57 jednakých debničkách inej veľkosti, tretí druh v 60 jednakých debničkách ešte inej veľkosti. V každej debničke bol celý počet kilogramov čaju.

Koľko kg každého druhu čaju bolo a koľko kg čaju bolo v jednotlivých debničkách?

Riešenie. Každá debnička prvého druhu obsahuje x kg čaju; číslo x je prirodzené. Podobne je prirodzené číslo y, ktoré udáva počet kilogramov čaju v debničke druhého druhu a z počet kilogramov v debničke tretieho druhu.

Prvého čaju je celkom $76x$ kg, druhého $57y$ kg a tretieho $60z$ kg. Pritom platí

$$76x = 57y = 60z\,.$$

Označme N toto prirodzené číslo. Pretože celkom máme menej než 4000 kg čaju, je

$$N < \frac{4000}{3}, \text{ t. j. } N < 1333\frac{1}{3}.$$

Číslo N musí byť deliteľné každým z čísel 76, 57, 60, takže N je spoločným násobkom týchto čísel. Vieme, že každý spoločný násobok niekoľkých čísel sa rovná súčinu ich najmenšieho spoločného násobku a ľubovoľného prirodzeného čísla. Preto vypočítame najmenší spoločný násobok čísel 76, 57, 60; označíme ho n. Je

$$76 = 2 \cdot 2 \cdot 19, \quad 57 = 3 \cdot 19, \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

takže

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 1140.$$

Pretože je $2n = 2280$, hľadané číslo N sa rovná práve číslu n, t. j. $N = 1140$. Z rozkladu čísla n na prvočinitele ľahko vypočítame, že $x = 15$, $y = 20$, $z = 19$.

Záver. Každého druhu čaju bolo 1140 kg. V debničkách prvého druhu bolo po 15 kg čaju, v debničkách druhého druhu po 20 kg čaju a v debničkách tretieho druhu po 19 kg čaju.

6. S. Novák je předsedou JZD v obci. Jezdívá občas z obce do okresního města. Tam pro něho odpoledne přijíždí na motocyklu z jejich obce vždy ve stejnou dobu jeho syn, který jej hned po svém příjezdu odváží domů. Domů přijíždějí vždy o 17. hodině po půlhodinové jízdě.

Jednoho dne skončil s. Novák v okresním městě svá jednání dříve a vydal se o 15. hodině 45 min. obvyklou cestou pěšky synovi vstříc. Jakmile se setkali, nasedl s. Novák na motocykl a odjeli ihned domů, kam dojeli o 16. hod. 50 min. Předpokládáte-li, že motocykl jede oběma směry (t. j. z obce do města a zpět) stejnou rychlostí, vypočítejte:

a) V kolik hodin se onoho dne oba setkali?

b) Jaký díl vzdálenosti z města k obci ušel s. Novák pěšky?
c) Jaký je poměr rychlostí pěší chůze s. Nováka a motocyklu?

Řešení. a) Toho dne, o němž se v úloze mluví, se otec se synem vrátili o 10 minut dříve než obvykle. Protože syn vyjel o 16. hodině, byl na cestě celkem jen 50 minut a setkal se s otcem o 16 hod. 25 min.

b) Za jednu minutu ujel syn $\frac{1}{30}$ délky cesty z obce do města, neboť cesta do města mu trvala 30 minut. Protože se zmíněného dne s otcem setkal o 16 hod. 25 min., projel $\frac{25}{30}$ délky cesty, t. j. $\frac{5}{6}$ cesty.

Ušel tedy otec $\frac{1}{6}$ délky cesty z města do své obce.

c) Otec vyšel z města o 15 hod. 45 min. a syna potkal o 16 hod. 25 min. Šel tedy 40 minut; za tu dobu ušel $\frac{1}{6}$ délky cesty. Jeho rychlost za minutu byla

$$\frac{1}{6} : 40 = \frac{1}{240} \text{ délky cesty.}$$

Syn ujel za jednu minutu $\frac{1}{30}$ délky cesty; jeho rychlost za minutu proto byla $\frac{1}{30}$ délky cesty. Poměr rychlosti otce a syna tedy je

$$\frac{1}{240} : \frac{1}{30} = \frac{30}{240} = \frac{1}{8},$$

t. j. 1 : 8.

Podle řešení s. Jaromíra Prchlíka,
8.b jedenáctiletky
v Poděbradech.

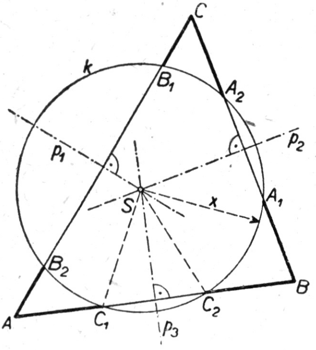
7. Je dán trojúhelník ABC. Kružnice k protíná úsečky AB, BC, CA postupně ve dvojicích bodů (buď různých nebo splývajících)

$$(C_1, C_2), \quad (A_1, A_2), \quad (B_1, B_2).$$

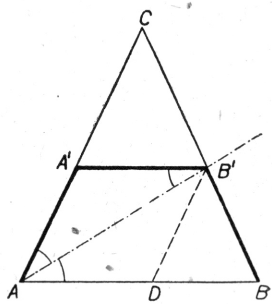
Určete, jak musí být zvolen střed a poloměr kružnice k, aby platilo

$$AC_1 = BC_2, \quad BA_1 = CA_2, \quad CB_1 = AB_2.$$

Řešení (obr. 36). Označme S střed hledané kružnice k. Ta prochází body C_1, C_2. Jsou-li body C_1, C_2 různé, pak buď bod S leží na přímce AB a je středem úsečky C_1C_2 anebo bod S na přímce AB neleží; pak je trojúhelník SC_1C_2 rovnoramenný, neboť je $SC_1 = SC_2$. V obou případech však bod S zřejmě leží na ose p_3 úsečky C_1C_2. Jestliže však body C_1, C_2



Obr. 36.



Obr. 37.

splynou, je přímka AB tečnou kružnice k v bodě C_1, a proto je $SC_1 \perp AB$; označme v tomto případě přímku SC_1 také p_3. Ve všech případech ze vztahu $AC_1 = BC_2$ však plyne, že nejen body C_1, C_2 jsou souměrně sdružené podle přímky p_3, ale i body A, B. Odtud plyne, že přímka p_3 je osou úsečky AB.

Stejně se dokáže, že bod S musí ležet na ose p_1 úsečky BC a na ose p_2 úsečky CA. Je tedy bod S středem kružnice trojúhelníku ABC opsané. Přitom poloměr x hledané kružnice k je menší nebo roven SA (poloměru opsané kružnice trojúhelníku ABC), ale poloměr x je větší nebo roven největší ze vzdáleností bodu S od přímek AB, BC, CA.

Obráceně, kružnice k opsaná kolem bodu S poloměrem x, který vyhovuje předchozím podmínkám, protíná strany trojúhelníka ABC po řadě v bodech C_1, C_2, A_1, A_2, B_1, B_2, které mají vlastnost vyslovenou v textu úlohy. Dokažme, že na př. platí $AC_1 = BC_2$. Kružnice k je souměrná podle osy p_3 úsečky AB; proto jsou i body C_1, C_2 (ať různé nebo splývající) souměrně sdružené podle přímky p_3. Je tedy úsečka BC_2 souměrně sdružená s úsečkou AC_1, a proto je $AC_1 = BC_2$.

8. V trojuholníku ABC platí $AC = BC$. Na stranách AC, BC zvoľte postupne body A', B' tak, aby platilo

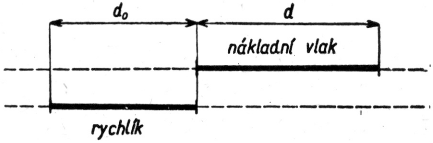
$$AA' = A'B' = BB' .$$

Nájdite konštrukciu bodov A', B' a dokážte, že je $A'B' \parallel AB$.

Riešenie (obr. 37). Predpokladajme, že body A', B' vyhovujú daným podmienkam a zostrojme na polpriamke AB bod D tak, aby platilo $AD = A'B'$. Os úsečky AB je osou súmernosti, v ktorej sú zrejme body A', B' združené. Je teda priamka $A'B'$ kolmá na túto os, t. j. $A'B' \parallel AB$. Z toho vyplýva, že štvoruholník $ADB'A'$ je rovnobežník, a to kosoštvorec, lebo $AD = A'B' = AA'$. Preto jeho uhlopriečka AB' rozpoľuje uhol $\sphericalangle A'AD$ (t. j. $\sphericalangle CAB$). Tým sme našli konštrukciu bodu B' (a pravda, aj A').

Ak zostrojíme bod B' pomocou osi uhla $\sphericalangle CAB$ a vedieme ním priamku $p \parallel AB$, dostaneme bod $A' \equiv p \cdot AC$. Body A', B' majú skutočne požadovanú vlastnosť. Lebo ak zostrojíme na polpriamke AB bod D tak, aby platilo $AD = A'B'$, je štvoruholník $ADB'A'$ rovnobežník. Pretože AB', je osou uhla $\sphericalangle A'AD$, je $\sphericalangle A'AB' = \sphericalangle B'AD$; pretože je $A'B' \parallel AB$, je $\sphericalangle B'AD = \sphericalangle A'B'A$ (uhly striedavé). Preto $\sphericalangle A'AB' = \sphericalangle A'B'A$, t. j. $\triangle AB'A'$ je rovnoramenný a platí $A'A = A'B' = BB'$, čo sme mali dokázať.

9. Rychlík délky 200 m jede rychlostí 16 m za vteřinu. Na druhé koleji trati přejíždí opačným směrem nákladní vlak. Strojvedoucí rychlíku zjistil, že nákladní vlak minul lokomotivu za 12 vteřin; dále zjistil, že od okamžiku, kdy se setkaly lokomotivy obou vlaků až do okamžiku, kdy se minuly oba poslední vagony vlaků, uplynulo 20 vteřin. Jak dlouhý byl nákladní vlak a jakou jel rychlostí?



Situace při setkání lokomotiv

Obr. 38.

Řešení. Velikosti úseček měřme v metrech, dobu ve vteřinách. Zaveďme tato označení (obr. 38):

$d_0 = 200$ je délka rychlíku (v metrech);
$c_0 = 16$ je rychlost rychlíku (v metrech za vteřinu);
$t_1 = 12$ je doba (ve vteřinách), za kterou mine nákladní vlak lokomotivu rychlíku (od chvíle setkání lokomotiv);
$t_2 = 20$ je doba, za kterou se od okamžiku setkání obou lokomotiv setkají poslední vagony obou vlaků;
$d =$ délka nákladního vlaku;
$c =$ rychlost nákladního vlaku.

Na vzájemné situaci obou vlaků se nic nezmění, jestliže bude nákladní vlak stát, ale rychlík pojede rychlostí $c_0 + c$. Lokomotiva rychlíku projede podél nákladního vlaku za t_1 vteřin dráhu d, takže platí

$$(c_0 + c)t_1 = d\,. \tag{1}$$

Stojí-li nákladní vlak, pak od chvíle setkání obou lokomotiv musí poslední vagon rychlíku projet za t_2 vteřin dráhu $d_0 + d$, takže platí

$$(c_0 + c)t_2 = d_0 + d\,. \tag{2}$$

Vztahy (1), (2) jsou dvě rovnice pro dvě neznámé c, d. Máme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} d - ct_1 &= c_0 t_1 , \\ d - ct_2 &= c_0 t_2 - d_0 . \end{aligned} \tag{3}$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$c(t_2 - t_1) = d_0 - c_0(t_2 - t_1) ,$$

a tedy

$$c = \frac{d_0}{t_2 - t_1} - c_0 , \tag{4}$$

neboť je

$$t_2 - t_1 \neq 0 .$$

Nyní za c dosaďme ze vztahu (4) do rovnice (3); obdržíme

$$d = \frac{d_0 t_1}{t_2 - t_1} . \tag{5}$$

Po dosazení za c_0, d_0, t_1, t_2 do (4), (5) dostaneme

$$d = 200 \cdot \frac{12}{20 - 12} = 200 \cdot \frac{12}{8} = 200 \cdot \frac{3}{2} = 300 ;$$

$$c = \frac{200}{20 - 12} - 16 = \frac{200}{8} - 16 = 25 - 16 = 9 .$$

Nákladní vlak jel rychlostí 9 m za vteřinu, jeho délka byla 300 m.

J i n é ř e š e n í. Rychlík jel rychlostí 16 m za vteřinu, nákladní vlak rychlostí a metrů za vteřinu. Pozorovatel v rychlíku viděl věc tak, jako by rychlík stál a nákladní vlak se pohyboval rychlostí $16 + a$ metrů za vteřinu, takže nákladní vlak míjel pozorovatele v rychlíku právě rychlostí $16 + a$ metrů za vteřinu.

Poslední vagon nákladního vlaku projel podél celého rychlíku (t. j. 200 m) za 20—12 neboli 8 vteřin, takže se vzhledem k pozorovateli v rychlíku pohyboval rychlostí $16 + a$ metrů za vteřinu.

Proto je

$$8(16 + a) = 200 .$$

Odtud postupně dostáváme

$$16 + a = 25 , \quad a = 9 .$$

Nákladní vlak jel rychlostí 9 metrů za vteřinu, pozorovatel v rychlíku měl dojem, že nákladní vlak se pohybuje rychlostí $16 + 9$, t. j. 25 m za vteřinu. Od okamžiku, kdy se setkaly lokomotivy obou vlaků, do okamžiku, kdy se míjely poslední vagony, uplynulo 20 vteřin. Za tu dobu projel poslední vagon nákladního vlaku vzhledem k pozorovateli v rychlíku celou délku x nákladního vlaku (představme si, že rychlík před sebou ještě tlačí vagony v celkové délce x) a potom celou délku 200 m rychlíku, tedy celkem $200 + x$. Proto je

$$20 \cdot 25 = 200 + x ,$$

a tedy

$$500 = 200 + x$$

a

$$x = 300 .$$

Nákladní vlak měl délku 300 m.

Zkouškou se snadno přesvědčíme o správnosti řešení.

Upraveno podle řešení
s. L. Kuklové, 8. roč. osmiletky
v Žehuni, okres Poděbrady.

10. Ktorým najmenším prirodzeným číslom musíme násobiť číslo 56 010 528, aby sme dostali číslo, ktoré je druhou mocninou určitého prirodzeného čísla a ktoré je súčasne treťou mocninou iného prirodzeného čísla?

Riešenie. Rozložme dané číslo a v prvočinitele; platí

$$a = 56\,010\,528 = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 7^4 .$$

Dané číslo máme znásobiť určitým prirodzeným číslom tak, aby súčin s bol jednak druhou mocninou určitého prirodzeného čísla, jednak treťou mocninou iného určitého prirodzeného čísla. Preto musia byť exponenty prvočiniteľov hľadaného súčinu s deliteľné jednak dvoma, jednak troma. Preto je

$$s = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 7^6 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^6 = [(2 \cdot 3 \cdot 7)^3]^2 = [(2 \cdot 3 \cdot 7)^2]^3.$$

Pretože je

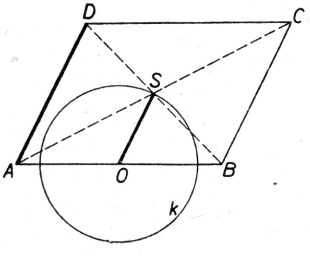
$$s = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 7^4 \cdot (2 \cdot 7^2)$$

alebo

$$s = a \cdot (2 \cdot 7^2)\,,$$

číslo, ktorým treba dané číslo a znásobiť, sa rovná $2 \cdot 7^2 = 2 \cdot 49 = 98$.

11. Je daná úsečka veľkosti m. Zvoľme v rovine dva rôzne body A, B; predstavme si, že zostrojíme všetky rovnobežníky $ABCD$, pre ktoré je $AD = m$. Aký útvar vyplnia stredy všetkých rovnobežníkov $ABCD$?



Obr. 39.

Riešenie (obr. 39). Označme S stred jedneho z rovnobežníkov $ABCD$, ktoré vyhovujú úlohe, t. j. pre ktoré platí $AD = m$. Označme O stred úsečky AB. Potom úsečka OS je strednou priečkou trojuholníka ABD; pre ňu platí $OS \parallel AD$, $OS = \frac{1}{2} \cdot AD$ alebo $OS = \frac{1}{2}m$. Preto všetky stredy S rovnobežníkov $ABCD$ ležia na kružnici k so stredom O a polomerom $\frac{1}{2}m$. Pritom musíme vylúčiť z kružnice k jej priesečíky s priamkou AB, lebo stred S rovnobežníka $ABCD$ nikdy nepadne na jeho stranu AB, ale leží vnútri rovnobežníka.

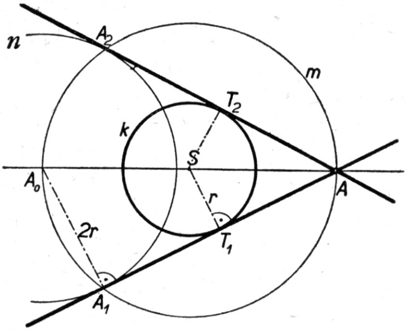
Obrátene, zvoľme na kružnici $k \equiv (O, \frac{1}{2}m)$ ľubovoľne bod S, ktorý neleží na priamke AB. Potom ľahko zostrojíme body C, D tak, že rovnobežník $ABCD$ má za stred práve zvolený bod S. Konštrukciu bodov C, D urobíme takto:

Na predĺžení úsečky AS za bod S nanesieme úsečku AS, čím dostaneme bod C. Na predĺžení úsečky BS za bod S nanesieme úsečku BS, čím dostaneme bod D. Pretože sa podľa konštrukcie uhlopriečky AC, BD štvoruholníka $ABCD$ navzájom rozpoľujú, je $ABCD$ podla známej poučky z planimetrie rovnobežník. Ľahko dokážeme, že platí $AD = 2 \cdot OS = 2 \cdot \frac{1}{2}m = m$, takže $ABCD$ je skutočne rovnobežník vyhovujúci našej úlohe. Teda:

Všetky stredy rovnobežníkov $ABCD$, ktoré vyhovujú úlohe, vyplnia kružnicu k, ktorá má stred O v strede úsečky AB a ktorej polomer je $\frac{1}{2}m$; z tejto kružnice musíme vylúčiť jej priesečíky s priamkou AB.

12. Je dána kružnice k o středu S a poloměru r; dále je dán bod A, který leží vně kružnice k. Proveďte tuto konstrukci: Kolem bodu S opište kružnici m o poloměru SA a označte A_0 druhý krajní bod jejího průměru jdoucího bodem A. Dále opište kolem bodu A_0 kružnici n o poloměru $2r$. Označte A_1, A_2 průsečíky kružnic m, n.

Dokažte, že přímky AA_1, AA_2 se dotýkají dané kružnice k.



Obr. 40.

Řešení (obr. 40). Podle Thaletovy věty je trojúhelník $\triangle AA_0A_1$ pravoúhlý ($\sphericalangle AA_1A_0 = R$), t. j. $AA_1 \perp A_0A_1$.

Označme T_1 střed úsečky AA_1; bod S je středem úsečky AA_0. Proto je ST_1 střední příčkou trojúhelníka AA_0A_1, takže je $ST_1 \parallel A_0A_1$, $ST_1 = \frac{1}{2} \cdot A_0A_1$, neboli $ST_1 = \frac{1}{2} \cdot 2r = r$; proto bod T_1 je bodem dané kružnice $k \equiv (S, r)$.

Protože však je $A_0A_1 \perp AA_1$, $A_0A_1 \parallel ST_1$, je podle známé poučky z planimetrie také

$$ST_1 \perp AA_1 .$$

Víme, že tečna kružnice k v jejím bodě T_1 je kolmá k poloměru ST_1; proto je AA_1 hledaná tečna. Stejným způsobem se dokáže, že také přímka AA_2 je tečnou dané kružnice k.

13. V nádobě máme 910 cm³ solného roztoku, který vznikl rozpuštěním 80 g soli v čisté vodě. Odlejme 245 cm³ roztoku a doplňme odebrané množství čistou vodou na původních 910 cm³. Pak odlejme z nového roztoku opět 245 cm³ a odebrané množství doplňme zase čistou vodou na původních 910 cm³. Kolik gramů soli je v 910 cm³ posledního roztoku?

Řešení. 1 cm³ daného roztoku obsahuje $\frac{80}{910}$ gramů soli. Odebrali jsme tedy $\frac{80}{910} \cdot 245$ gramů soli. V nádobě tedy zbude po prvním odebrání $\frac{80}{910} \cdot (910 - 245)$ gramů soli, t. j. $\frac{80 \,.\, 665}{910}$ gramů soli.

Je vidět, že při každém odlití ubíráme z roztoku $\frac{245}{910}$ rozpuštěného v něm množství soli, takže v něm zbývá $\frac{665}{910}$ tohoto množství. Po druhém odlití a doplnění vodou zbývá tedy v roztoku

$$x = 80 \cdot \frac{665}{910} \cdot \frac{665}{910} \text{ gramů soli.}$$

Je

$$\frac{665}{910} = \frac{19}{26},$$

takže

$$x = 80 \cdot \frac{19 \cdot 19}{2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{20 \cdot 361}{169} = \frac{7220}{169} \doteq 43\,.$$

Ve zbylém roztoku je asi 43 g soli.

14. Nech $x238y$ značí päťmiestne prirodzené číslo N v desiatkovej sústave (x je cifra na mieste desaťtisícoviek, y je cifra na mieste jednotiek). Aké musia byť cifry x, y, aby číslo N bolo deliteľné pätnástimi?

Riešenie. Aby číslo N bolo deliteľné pätnástimi, musí byť deliteľné tromi aj piatimi. Je známe, že číslo deliteľné piatimi má na mieste jednotiek nulu alebo päťku, je teda

[1] buď $y = 0$, [2] buď $y = 5$.

Prípad [1]. Nech je $y = 0$. Ak má číslo N byť deliteľné troma, musí byť jeho ciferný súčet násobkom čísla 3, t. j. musí platiť

$$x + 2 + 3 + 8 + 0 = 3k,$$

kde k je nejaké prirodzené číslo. Odtiaľ vypočítame

$$x + 13 = 3k \quad \text{alebo} \quad k = \frac{x + 13}{3}. \tag{1}$$

Pretože x je cifra päťciferného čísla stojaca na mieste stotisícok, je x niektorá z cifier 1, 2, 3, . . ., 9 (nie však nula). Dosadzujme za x do (1) čísla 1, 2, . . ., 9; potom len tie z nich môžu vyhovovať úlohe, pre ktoré je k tiež prirodzené číslo, t. j., pre ktoré je číslo $x + 13$ deliteľné troma. Je to:

a) $x = 2, k = 5$, b) $x = 5, k = 6$, c) $x = 8, k = 7$.

Čísla 22 380, 52 380, 82 380, ktoré sme tak dostali, skutočne vyhovujú úlohe.

9 – 55-17-03

Prípad [2]. Nech je $y = 5$. Rovnako ako v prípade [1] musí platiť

$$x + 2 + 3 + 8 + 5 = 3k,$$

kde k je prirodzené číslo. Odtiaľ vypočítame

$$x + 18 = 3k \text{ alebo } k = \frac{x + 18}{3},$$

kde opäť x môže sa rovnať niektorému z čísel 1, 2, 3, ..., 9, pričom však $x + 18$ musí byť deliteľné troma. Rovnako ako v prípade [1] dojdeme k hodnotám (pozor, je $x \neq 0$):

a) $x = 3, k = 7$, b) $x = 6, k = 8$, c) $x = 9, k = 9$.

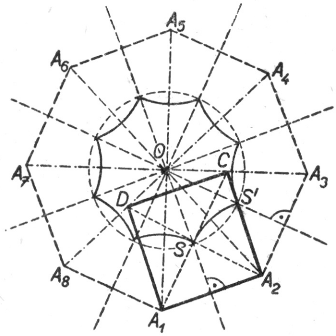
Príslušné čísla 32 385, 62 385, 92 385 skutočne vyhovujú úlohe.

15. Narýsujte pravidelný osmiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ a označte O jeho střed. Uvnitř tohoto osmiúhelníka sestrojte nad úsečkou A_1A_2 čtverec A_1A_2CD; jeho střed označte S. Čtvercem, který jste sestrojili, budete pohybovat tak, že stále zůstane v daném osmiúhelníku. Čtverec nejdříve otočíte kolem bodu A_2 tak, že vrchol C splyne s bodem A_3; novou polohu bodu D označte D'. Čtverec, který jste tak dostali, pak otočíte opět, tentokrát kolem bodu A_3, a to tak, že bod D' po otočení splyne s bodem A_4. Stejným způsobem postupně provedete další otáčení čtverce kolem bodů A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_1. Při posledním otočení se čtverec dostane do své původní polohy.

Vyšetřte, jakou čáru při všech osmi otočeních opsal střed S daného čtverce.

Řešení (obr. 41). Platí $\sphericalangle A_1OA_2 = \frac{360°}{8} = 45°$, $\sphericalangle OA_1A_2 = 67\frac{1}{2}°$, $\sphericalangle A_8A_1A_2 = 135°$. Protože je $\sphericalangle SA_1A_2 = 45°$, je $\sphericalangle SA_1A_2 < \sphericalangle OA_1A_2$, a bod S tedy padne dovnitř trojúhelníka OA_1A_2; je tedy $A_1S < A_1O$. Při prvním pohybu čtverce A_1A_2CD se bod S otáčí kolem bodu A_2 po kruhovém oblouku z polohy S do polohy S', kde $\sphericalangle S'A_2A_3 = 45°$.

Je tedy $\sphericalangle SA_2S' = \sphericalangle A_1A_2A_3 - 2 \cdot \sphericalangle A_1A_2S = 135° - 2 \cdot 45° = 45°$ (to plyne i z toho, že $\sphericalangle CA_2A_3 = \sphericalangle A_1A_2A_3 - \sphericalangle A_1A_2C$). Protože je $\sphericalangle SA_2C = 45°$, padne bod S' právě dovnitř úsečky A_2C, neboť je $A_2S < A_2C$ (odvěsna pravoúhlého trojúhelníka A_2CS je menší než jeho přepona A_2C).



Obr. 41.

Odtud výsledek: Dráha, kterou postupně bod S opíše, se skládá z osmi shodných oblouků. První oblouk má střed A_2 a poloměr A_2S, t. j. polovina úhlopříčky čtverce A_1A_2CD; přímka A_2O je osou souměrnosti tohoto oblouku. Snadno se zjistí, že celá dráha bodu S má osm os souměrnosti. Jsou to jednak čtyři hlavní úhlopříčky A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8 daného osmiúhelníka a dále čtyři osy stran osmiúhelníka (při tom totiž osy protějších stran daného osmiúhelníka — na př. A_1A_2, A_5A_6 — navzájem splývají).

16. Je dána úsečka AB a uvnitř jedné poloroviny vyťaté přímkou AB jsou dány takové body M, N, že součet úhlů $\sphericalangle MAB$, $\sphericalangle NBA$ je roven 2R. Úhel $\sphericalangle MAB$ je rozdělen polopřímkami AM_1, AM_2 ve tři sobě rovné úhly tak, že

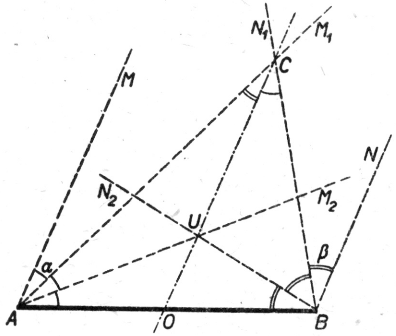
10—55-17-03

$\sphericalangle MAM_1 = \frac{1}{3} \cdot \sphericalangle MAB$. Rovněž úhel $\sphericalangle NBA$ je polopřímkami BN_1, BN_2 rozdělen ve tři sobě rovné úhly tak, že $\sphericalangle NBN_1 = \frac{1}{3} \cdot \sphericalangle NBA$. Označme C průsečík polopřímek AM_1, BN_1 a U průsečík polopřímek AM_2, BN_2.

Co musí platit o daných úhlech $\sphericalangle MAB$, $\sphericalangle NBA$, aby bylo $UC \| AM$?

Řešení (obr. 42). Označme

$$\sphericalangle BAM_2 = \sphericalangle M_2AM_1 = \sphericalangle M_1AM = \alpha\,,$$
$$\sphericalangle ABN_2 = \sphericalangle N_2BN_1 = \sphericalangle N_1BN = \beta\,.$$



Obr. 42.

Podle předpokladu je

$$\sphericalangle BAM + \sphericalangle ABN = 180°$$

a podle známé poučky z planimetrie proto platí

$$AM \| BN\,. \tag{1}$$

Ze vztahu (1) plyne

$$3\alpha + 3\beta = 180°,$$

a tedy

$$\alpha + \beta = 60°, \tag{2}$$

a proto

$$2\alpha + 2\beta = 120°. \tag{3}$$

Ze vztahu (3) podle Eukleidova axiomu plyne, že polopřímky AM_1, BN_1 se protínají v určitém bodě C uvnitř poloroviny ABM (je $\sphericalangle BAM_1 + \sphericalangle ABN_1 = 120° < 180°$). Podle vztahu (2) se stejně dokáže, že polopřímky AM_2, BN_2 se protínají v určitém bodě U (je $\sphericalangle BAM_2 + \sphericalangle ABN_2 = 60° < 180°$) a bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC. Protože AM_2, BN_2 jsou po řadě osy úhlů $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ v trojúhelníku ABC, je i polopřímka CU osou úhlu $\sphericalangle BCA$ (podle poučky „osy úhlů trojúhelníka ABC procházejí týmž bodem U, který se nazývá střed kružnice trojúhelníku vepsané"). Proto je

$$\sphericalangle ACU = \sphericalangle BCU\,. \tag{4}$$

Podle textu úlohy máme úhly $\sphericalangle MAB$, $\sphericalangle NBA$ určit tak, aby platilo $UC \| AM$. Předpokládejme, že jsme takové úhly a tím i přímky UC, AM našli. Potom platí

$$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACU = \alpha \tag{5}$$

(střídavé úhly, při čemž je $AM \| CU$). Podle (1) je $AM \| BN$ a dále $UC \| AM$; proto je (viz Matematika pro 7. post. ročník, příklad 6, str. 289) též $UC \| BN$. Odtud plyne, že

$$\sphericalangle BCU = \sphericalangle CBN = \beta \tag{6}$$

(střídavé úhly, při čemž je $CU \| BN$). Dosaďme ze vztahů (5), (6) do vztahu (4), pak dostaneme

$$\alpha = \beta\,. \tag{7}$$

Dosadíme-li odtud do vztahu (2), dostaneme $2\alpha = 60°$, t. j. $\alpha = 30°$ a vzhledem ke vztahu (7) je také $\beta = 30°$. Proto je $\sphericalangle MAB = 3\alpha = 90°$, $\sphericalangle NBA = 3\beta = 90°$. Jestliže má tedy úloha řešení, jsou přímky AM, BN kolmé k přímce AB.

Obráceně, nechť přímky AM, BN jsou kolmé k přímce AB; tu je

$$\sphericalangle MAB = 90°, \quad \sphericalangle NBA = 90°$$

a tedy

$$\sphericalangle MAC = \tfrac{1}{3} \cdot 90° = 30°, \tag{8}$$
$$\sphericalangle CAB = \tfrac{2}{3} \cdot 90° = 60°, \; \sphericalangle CBA = \tfrac{2}{3} \cdot 90° = 60°.$$

Z posledních dvou vztahů plyne, že trojúhelník ABC je rovnostranný a proto je $\sphericalangle BCA = 60°$. Označme CU osu tohoto úhlu; pak je $\sphericalangle ACU = 30°$. Podle vztahu (8) tedy platí

$$\sphericalangle ACU = \sphericalangle MAC ;$$

to jsou však střídavé úhly a z jejich shodnosti plyne, že platí $CU \parallel AM$, což jsme měli dokázat.

Přímky CU, AM jsou tedy rovnoběžné právě tehdy, když jsou oba úhly $\sphericalangle MAB$, $\sphericalangle NBA$ pravé.

Je tedy $\sphericalangle MAB = 3\alpha = 90°$, $\sphericalangle NBA = 3\beta = 90°$. Tím: Jestliže přímky AM, BN stojí kolmo k přímce AB, potom je přímka CU rovnoběžná s přímkou AM (a tím i s přímkou BN).

9. Úlohy II. kola kategorie D

1. Z konečné stanice městských pouličních autobusových tratí vycházejí tři okružní autobusové tratě.

Tři určité vozy označené čísly 1, 2, 3 vyjely v 5 hodin ráno na své tratě. Vůz č. 1 po svém návratu na konečnou stanici vyjíždí opět v 5 hodin 40 minut. Vůz č. 2 vyjíždí znovu o 6 hod. a vůz č. 3 vyjíždí znovu v 6 hodin 20 min. S těmito časovými rozdíly projíždějí vozy své tratě po celý den.

V kolik hodin dopoledne budou tyto tři vozy opět vyjíždět současně z konečné stanice.

Řešení. Vůz č. 1 opětovně vyjíždí po 40 minutách, vůz č. 2 po 60 minutách a vůz č. 3 po 80 minutách. Od 5 hodin do chvíle, kdy všechny tři vozy opět vyjedou současně, uplyne určitý počet minut. Toto číslo musí být dělitelné čísly 40, 60, 80; je to tedy společný násobek těchto čísel. Situace nastane po prvé, když je tento společný násobek nejmenší. Určíme jej rozkladem daných čísel v prvočinitele:

$$40 = 2^3 \cdot 5, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 80 = 2^4 \cdot 5,$$

$$n(40, 60, 80) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240\,.$$

Vozy vyjedou opět současně za 240 minut po páté hodině neboli v 9 hod.

2. Zlomek $\frac{1}{13}$ vyjádřete jako desetinný zlomek. Která cifra stojí v tomto zlomku na 1000. místě za desetinnou čárkou?

Řešení. Platí $\frac{1}{13} = 0{,}\overline{076923}$. Protože se cifry na desetinných místech našeho periodického čísla vždy po šesti opakují a protože je

$$1000 = 6 \cdot 166 + 4\,,$$

je na tisícím místě stejná cifra jako na čtvrtém. Je to tedy cifra 9.

3. Narýsujte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno: $AB = 7$ cm, $\sphericalangle BAD = 60°$, při čemž strana CD prochází průsečíkem M os úhlů $\sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle ABC$.

Dokažte, že pro tento rovnoběžník platí

$$AB = 2 \cdot AD\,.$$

Řešení (obr. 43). Konstrukci rovnoběžníka $ABCD$ provedeme takto: Narýsujeme úsečku $AB = 7$ cm a zvolíme jednu z polorovin vyťatých přímkou AB. Ve zvolené polorovině sestrojíme úhel $\sphericalangle BAP = 60°$ a k polopřímce AP vedeme bodem B polopřímku BQ s ní souhlasně rovnoběžnou. Sestrojíme osy AU, BV úhlů $\sphericalangle BAP$, $\sphericalangle ABQ$ a označíme M průsečík těchto polopřímek. Bodem M sestrojíme rovnoběžku p k přímce AB; její průsečíky s přímkami AP, BQ označíme D, C. Čtyrúhelník $ABCD$ je hledaný rovnoběžník.

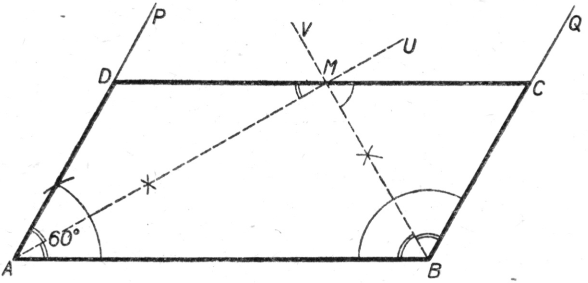
Nyní platí:

$\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD$, neboť AM je osa úhlu $\sphericalangle BAD$,

$\sphericalangle DMA = \sphericalangle BAM$, neboť AB, MD jsou dvě rovnoběžné přímky (úhly střídavé). Je tedy

$$\sphericalangle DMA = \sphericalangle MAD\ ;$$

proto je trojúhelník DMA rovnoramenný se základnou AM. Proto DM, AD jsou jeho ramena a platí $DM = AD$.



Obr. 43.

Stejně se dokáže o trojúhelníku CBM, že $MC = BC$, což můžeme též psát $MC = AD$. Je tedy $CD = 2 \cdot AD$, což jsme měli dokázat.

4. Narýsujte (dosti veliký) trojúhelník ABC. Uvnitř strany AC zvolte bod E; bodem E sestrojte rovnoběžku s přímkou AB a označte F její průsečík se stranou BC. Bodem F sestrojte rovnoběžku s přímkou AC a označte G její průsečík se stranou AB.

Jak je třeba volit bod E, aby přímka EG byla rovnoběžná s přímkou BC?

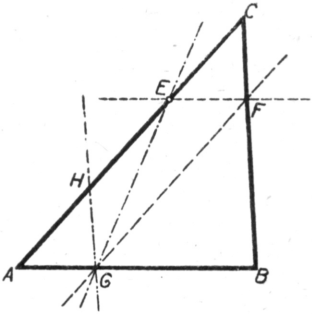
Co platí o bodech F a G?

Řešení (obr. 44). Podle konstrukce je $EF \parallel AB$, $FG \parallel AC$, takže čtyrúhelník $AEFG$ je rovnoběžník. Proto platí

$$AE = GF\,. \tag{1}$$

Jestliže se nám podařilo zvolit bod E tak, že je $EG \parallel BC$, potom také čtyrúhelník $ECFG$ je rovnoběžník (neboť podle konstrukce je $EC \parallel FG$). V tom případě platí

$$GF = EC\,. \tag{2}$$



Obr. 44.

Z obou výsledků (1) a (2) pak dostaneme

$$AE = EC\,.$$

Jestliže tedy je $EG \parallel BG$, je bod E středem úsečky AC. Zvolme nyní bod E ve středu úsečky AC. Podle konstrukce je v tomto případě úsečka EF střední příčkou trojúhelníka ABC a bod F středem úsečky BC. Z téhož důvodu je pak úsečka FG také střední příčkou a bod G středem úsečky AB. Je proto úsečka EG střední příčkou trojúhelníka ABC a o ní víme, že platí $EG \parallel BC$.

Tím jsme dokázali, že jediný bod E, který vyhovuje úloze, je střed úsečky AC; potom také body F, G jsou středy stran BC, AB.

Jiné řešení. Podle konstrukce je čtyrúhelník $AEFG$ rovnoběžník, a proto platí

$$AE = GF\,. \tag{1}$$

Bodem G veďme rovnoběžku s přímkou BC a označme H její průsečík s přímkou AC. Čtyrúhelník $CFGH$ je podle konstrukce také rovnoběžník. Proto platí

$$GF = CH\,. \tag{2}$$

Z obou výsledků (1), (2) plyne, že

$$AE = CH\,. \tag{3}$$

Bodem G prochází k přímce BC jediná rovnoběžka a tou je přímka GH. Předpokládejme, že je $GE \| BC$; potom přímky GH a GE splynou, t. j. splynou i body H a E. V tomto případě podle výsledku (3) platí $AE = CE$ a bod E je středem úsečky AC.

Obráceně, jestliže bod E je středem úsečky AC, je úsečka EF střední příčkou a bod F středem úsečky BC. Z téhož důvodu je úsečka FG střední příčkou a bod G středem úsečky AB. Proto je úsečka GE rovněž střední příčkou a o ní víme, že je rovnoběžná s přímkou BC, t. j. $GE \| BC$.

Tím jsme dokázali, že jediný bod E, který vyhovuje úloze, je střed úsečky AC.