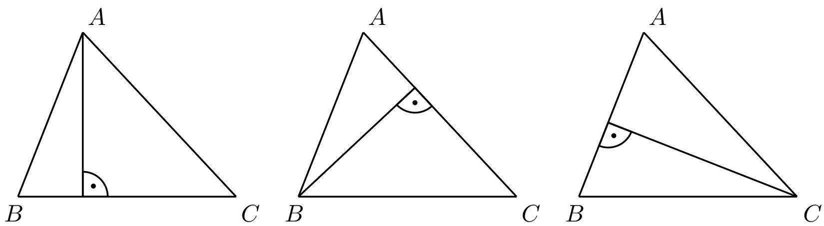
Kapitola 3

Goniometrie obecného trojúhelníku

3.1 Věty o průmětech

Goniometrické hodnoty (ostrých) úhlů jsme zavedli v předchozí kapitole jako poměry stran pravoúhlých trojúhelníků. Abychom je uplatnili při výpočtech v obecných trojúhelnících, použijeme obrat, který byl znám již starověkým matematikům: zkoumaný trojúhelník rozdělíme výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. V případě *ostroúhlého* trojúhelníku tak máme dokonce tři možnosti (obr. 3.1). Co je všem třem rozdělením na dva pravoúhlé trojúhelníky společné?



Obrázek 3.1

Pro přepony a odvěsny každého páru vytvořených trojúhelníků platí:

1. přepony jsou dvě strany původního trojúhelníku,
2. společná odvěsna je výška na třetí stranu,
3. součet zbylých odvěsen je roven třetí straně.

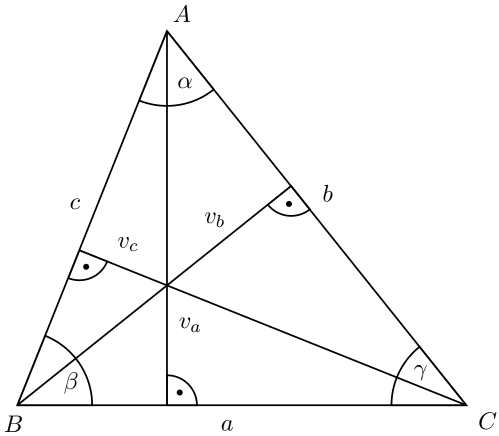
V této kapitole ukážeme, že z těchto tří vlastností lze odvodit všechna pravidla pro výpočty v obecných trojúhelnících. K tomu nejprve v uvažovaných dvojicích pravoúhlých trojúhelníků vyjádříme pomocí přepon a vnitřních úhlů jejich odvěsny (podle obr. 3.2)[1] a pak vlastnosti uvedené v bodech 2 a 3 vyjádříme vztahy v levém, resp. pravém sloupci:

- $v_a = c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$,
- $v_b = c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma$,
- $v_c = b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$,

- $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$,
- $b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha$,
- $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$.

[1] Nepotřebujeme k tomu pochopitelně výsledek, jehož první historicky známý důkaz podal L. Euler a který je z obr. 3.2 patrný, že totiž výšky trojúhelníku procházejí jedním bodem. Zmíníme se o něm v závěru podkapitoly 3.6.

Tyto rovnosti vlastně vyjadřují vztahy pro kolmé průměty libovolných dvou stran trojúhelníku do



Obrázek 3.2

směru třetí strany a do směru k němu kolmého. Proto se jim často říká *věty o průmětech.* Jejich základní důsledky (známé pod názvy sinová a kosinová věta) posoudíme v podkapitolách 3.3 a 3.4. Předtím ještě vyřešíme důležitou otázku, jak zařídit, abychom věty o průmětech mohli používat ve stejné podobě nejen pro ostroúhlé, ale i tupoúhlé trojúhelníky, aniž bychom museli přecházet od tupých vnitřních úhlů k ostrým vnějším úhlům.

3.2 Goniometrické hodnoty tupých úhlů

Věty o průmětech – základ celé trigonometrie – byly v podkapitole 3.1 odvozeny a mají prozatím smysl pro trojúhelníky, které jsou ostroúhlé. Dosud jsme totiž nedefinovali hodnoty $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ v případě, kdy $90° < \alpha < 180°$. Hodnoty sinu a kosinu tupého úhlu nyní zavedeme právě tak, aby věty o průmětech platily pro strany a úhly libovolného trojúhelníku.[2]

Dvě ze tří výšek *tupoúhlého* trojúhelníku ABC s vnitřním úhlem $\alpha \in (90°, 180°)$ leží vně trojúhelníku, totiž výšky v_b a v_c. Zaměříme se pouze na jednu z nich, např. výšku v_c.[3] Její patu výšky v_c označíme P a vedlejší úhel k úhlu α označíme α' (obr. 3.3). Jeho velikost je $\alpha' = 180° - \alpha < 90°$. Výšku v_c nyní vyjádříme pomocí sinů úhlů v pravoúhlých trojúhelnících PBC a PAC:

$$v_c = a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha'.$$

V podkapitole 3.1 jsme v ostroúhlém trojúhelníku ABC odvodili dvojí vyjádření výšky v_c ve tvaru

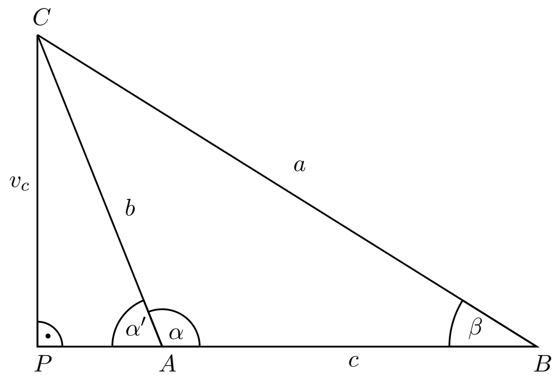
$$v_c = a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha.$$

Aby věty o průmětech libovolných dvou stran do směru kolmého k třetí straně byly vyjádřeny stejným vzorcem pro strany a úhly libovolného trojúhelníku, budeme požadovat, aby pro hodnotu sinu tupého úhlu α platilo

$$\sin\alpha = \sin\alpha'.$$

[2]Pomocí limitních úvah v kap. 2 zavedené hodnoty $\sin 90° = 1$ a $\cos 90° = 0$ zaručují platnost vět o průmětech i pro pravoúhlé trojúhelníky – jsou to triviální rovnosti.

[3]Ke stejnému závěru bychom došli i při úvaze o druhé „vnější“ výšce v_b.



Obrázek 3.3

Vrátíme se k pravoúhlým trojúhelníkům PBC a PAC z obr. 3.3 a tentokrát pomocí kosinů jejich úhlů vyjádříme stranu c:

$$c = |AB| = |BP| - |AP| = a \cdot \cos\beta - b \cdot \cos\alpha'.$$

V podkapitole 3.1 jsme v ostroúhlém trojúhelníku ABC odvodili vyjádření strany c ve tvaru

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha.$$

Porovnání obou rovností vede k požadavku, aby pro hodnotu kosinu tupého úhlu α platilo

$$\cos\alpha = -\cos\alpha'.$$

Oba odvozené požadavky splníme, když pro každé $\alpha \in (90°, 180°\rangle$ definujeme:

$$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha), \tag{3.1}$$

$$\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha). \tag{3.2}$$

Vzorce 3.1 a 3.2 pak zřejmě platí i pro $\alpha \in \langle 0°, 90°\rangle$.

Tímto postupem, totiž na základě vzorců, které ještě jednou zapíšeme pro úhly v obloukové míře

$$\boxed{\sin x = \sin(\pi - x) \quad \text{a} \quad \cos x = -\cos(\pi - x),}$$

jsme definiční obory funkcí $\sin x$ a $\cos x$ rozšířili z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ na interval $\langle 0, \pi\rangle$. Grafy těchto funkcí jsou zobrazeny na obr. 3.4.

Bez důkazu, který je triviální, uvedeme, že vzorec zvaný goniometrická jednička

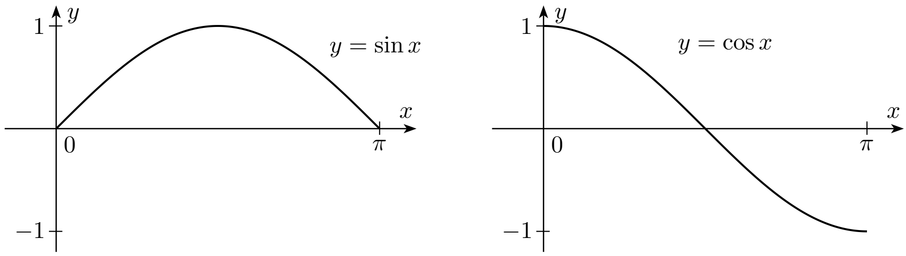
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(viz podkapitola 2.2) zůstává v platnosti pro každé $\alpha \in \langle 0°, 180°\rangle$. Následující dva vzorce

$$\sin(\alpha + 90°) = \cos\alpha, \tag{3.3}$$

$$\cos(\alpha + 90°) = -\sin\alpha \tag{3.4}$$

pro sinus a kosinus součtu ostrého úhlu s úhlem pravým pro libovolné $\alpha \in \langle 0°, 90°\rangle$ již důkazy opatříme.



Obrázek 3.4: Grafy funkcí sinus a kosinus na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$

Důkaz vzorců 3.3 a 3.4:
Jelikož je úhel $\alpha + 90°$ tupý, použijeme vzorce 3.1 a 3.2 z definice sinu a kosinu tupého úhlu:

$$\sin(\alpha + 90°) = \sin[180° - (\alpha + 90°)] = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 90°) = -\cos[180° - (\alpha + 90°)] = -\cos(90° - \alpha) = -\sin\alpha,$$

kde jsme nakonec využili vztah goniometrické funkce se svou kofunkcí z části 2.1.2.

3.3 Sinová věta a obsah trojúhelníku

V trigonometrické praxi je *sinová věta* jedno z nejužívanějších tvrzení o rovinných trojúhelnících. Její obvyklý tvar odvodíme z věty o výškách trojúhelníku jako průmětech stran, kterou můžeme podle podkapitoly 3.1 zapsat pro ostroúhlý trojúhelník ABC jako

$$v_a = c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma,$$
$$v_b = c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma,$$
$$v_c = b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta,$$

a která díky proceduře z podkapitoly 3.2 nyní platí pro obecný trojúhelník ABC (bez ohledu na to, zda je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý). Přepíšeme-li rovnosti součinů na rovnosti podílů, dostaneme:

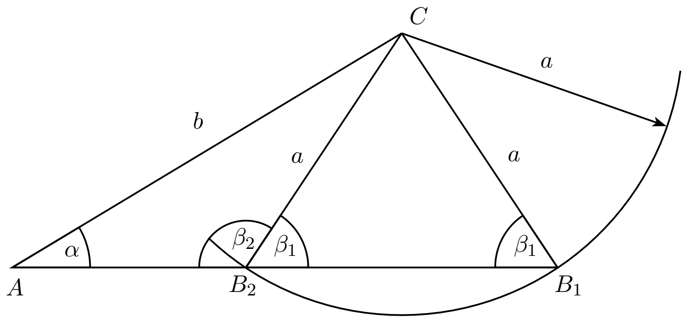
Věta 3.3.1 (Sinová věta)**.** *V libovolném trojúhelníku ABC platí:*

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}} \qquad \textit{neboli} \qquad \boxed{a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.} \tag{3.5}$$

Sinovou větu používáme k standardním výpočtům zejména v následujících případech:

- Máme dány dva úhly trojúhelníku a délku jedné jeho strany a chceme dopočítat velikosti zbývajících stran.
- Známe délky dvou stran trojúhelníku a velikost jednoho úhlu, který tyto strany nesvírají, a chceme zjistit zbývající úhly.

Pokud je ve druhém případě zadán úhel oproti *menší* z obou daných stran, vede úloha ke dvěma možným výsledkům – viz konstrukci na obr. 3.5. Vzhledem ke vzorci $\sin(\pi - x) = \sin x$ není totiž číslo x z intervalu $(0, \pi)$ hodnotou $\sin x$ určeno jednoznačně (pro úhly z obr. platí $\sin\beta_1 = \sin\beta_2$,



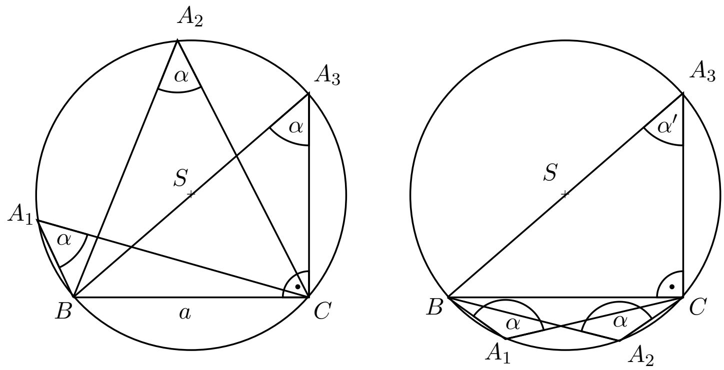
Obrázek 3.5: Dáno a, b, α, sestrojte ΔABC.

neboť $\beta_1 + \beta_2 = 180°$).

Kromě obvyklého tvaru (3.5) sinové věty odvodíme ještě tzv. *rozšířenou sinovou větu* založenou na vlastnostech úhlů v kružnici. Podle věty o obvodovém úhlu je totiž poměr $a : \sin\alpha$ konstantní pro všechny trojúhelníky ABC s proměnným vrcholem A, společnou stranou BC a společnou opsanou kružnicí (viz obr. 3.6 vlevo pro úhel $\alpha < 90°$). V poloze $A = A_3$, kdy BA_3 je průměrem dané kružnice, je podle Thaletovy věty úhel A_3CB pravý, takže

$$\sin\alpha = \frac{a}{|BA_3|}, \qquad \text{odtud} \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = |BA_3| = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice. Stejný vzorec platí i v případě tupého úhlu α (viz obr. 3.6 vpravo), kdy ostrý úhel u vrcholu A_3 má velikost $\alpha' = 180° - \alpha$, neboť $\sin\alpha' = \sin\alpha$. Dostáváme tak slíbenou



Obrázek 3.6

rozšířenou sinovou větu: *V libovolném trojúhelníku ABC vepsaném do kružnice o poloměru r platí*

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.} \tag{3.6}$$

V této podkapitole se ještě zmíníme o vzorcích pro obsah trojúhelníku, ve kterých vystupuje funkce sinus a které odvodíme ze základních vzorců pro obsah trojúhelníku ABC

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c.$$

1.
$$\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha}$$

Odvození:

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$, podobně ostatní dva vzorce.

2.
$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}}$$

Odvození:

$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \dfrac{a}{2r} = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4r}.$

3.
$$\boxed{S = 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$$

Odvození:

$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\gamma \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\gamma \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\gamma \cdot 2r \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha =$
$= 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$

Proslulý *Heronův vzorec* pro obsah trojúhelníku odvodíme v příkladu 3.7.4 pomocí kosinové věty.

3.4 Kosinová věta, závislost tří kosinů

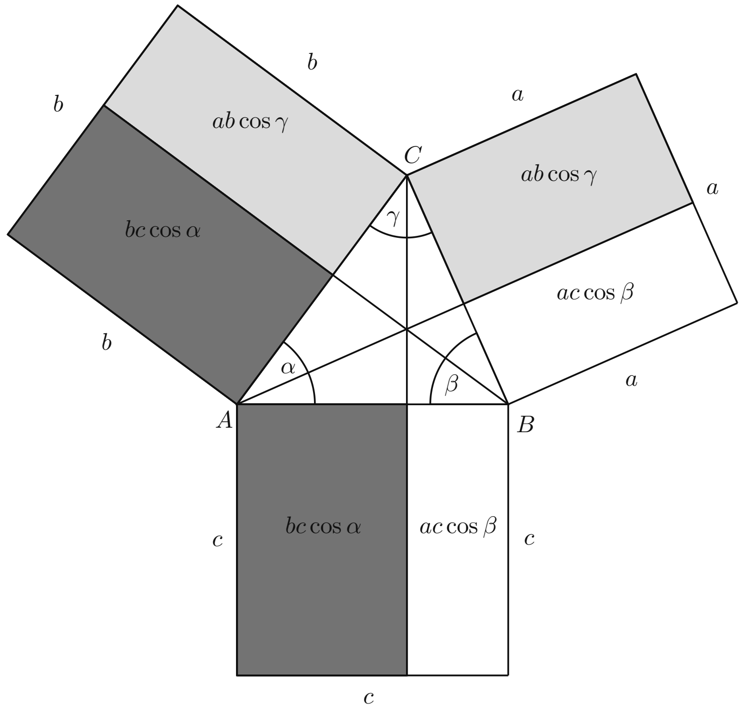
Sinová věta nám nepomůže vyřešit trojúhelník, když máme dány dvě jeho strany a úhel, který svírají, nebo když známe délky všech tří stran trojúhelníku. Nový prostředek, kterým zbývající dva případy vyřešíme, se jmenuje *kosinová věta* a věnujeme mu celou tuto podkapitolu.

Kosinovou větu odvodíme z věty o průmětech

$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta,$$
$$b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha,$$
$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha,$$

uvedené v podkapitole 3.1 a platné, znovu připomínáme, pro obecný trojúhelník ABC. Nejdříve jednotlivé rovnosti vynásobíme po řadě délkami stran a, b, c

$$a^2 = a \cdot b \cdot \cos\gamma + a \cdot c \cdot \cos\beta, \tag{3.7}$$
$$b^2 = b \cdot a \cdot \cos\gamma + b \cdot c \cdot \cos\alpha, \tag{3.8}$$
$$c^2 = c \cdot a \cdot \cos\beta + c \cdot b \cdot \cos\alpha \tag{3.9}$$



Obrázek 3.7: Důkaz $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$ přes obsahy

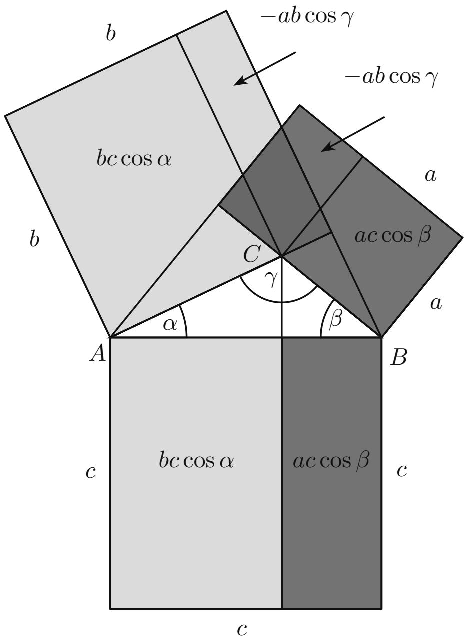
a nové rovnosti mezi sebou sečteme a odečteme, jak je vidět níže:

$$
\begin{aligned}
(3.7) + (3.8) - (3.9):&\qquad a^2 + b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma,\\
(3.8) + (3.9) - (3.7):&\qquad b^2 + c^2 - a^2 = 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,\\
(3.9) + (3.7) - (3.8):&\qquad c^2 + a^2 - b^2 = 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta.
\end{aligned}
$$

Dodejme, že ze získaných rovností, které ihned přepíšeme do obvyklých tvarů kosinové věty, naopak plynou sčítáním a odčítáním rovnosti (3.7) – (3.9), a tedy i výchozí tři rovnosti. Proto je věta o průmětu dvou stran trojúhelníku do směru třetí strany algebraicky ekvivalentní s kosinovou větou, k jejímuž důkazu jsme (narozdíl od obvyklého učebnicového postupu) nepotřebovali Pythagorovu větu.

Věta 3.4.1 (Kosinová věta)**.** *V libovolném trojúhelníku ABC platí rovnosti:*

$$
\boxed{\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,\\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,\\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.
\end{aligned}} \tag{3.10}
$$



Obrázek 3.8: Důkaz $a^2 + b^2 + (-2ab\cos\gamma) = c^2$ přes obsahy

Vztah čtverců a^2, b^2, c^2 daný kosinovou větou lze rovněž odvodit názorně (viz obr. 3.7 pro ostroúhlý trojúhelník, obr. 3.8 pro tupoúhlý trojúhelník a obr. 3.9 pro pravoúhlý trojúhelník). V jednotlivých obrázcích obdélníky téže barvy sice nejsou shodné, mají však shodné obsahy uvedených hodnot.[4]

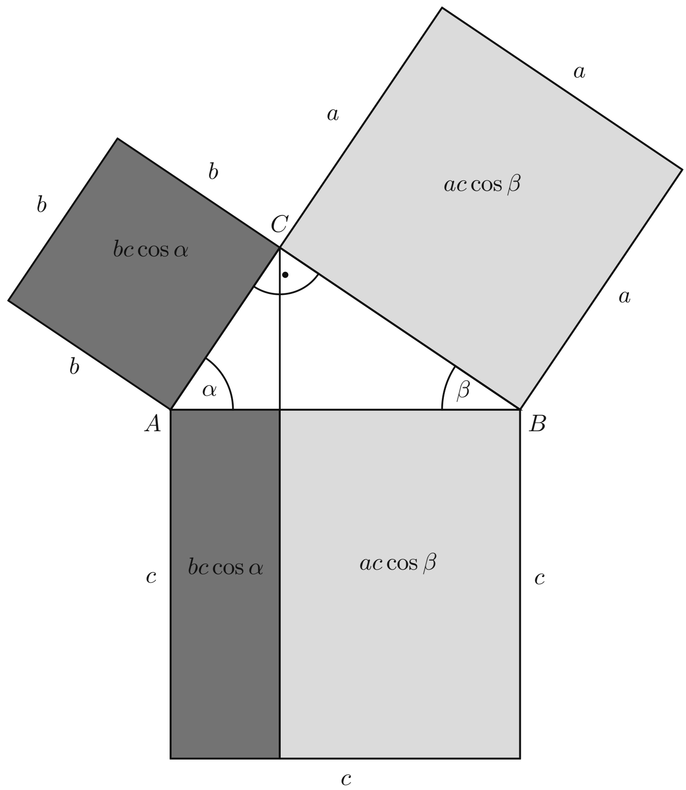
Praktické výpočty založené na kosinové větě umožňují jak přímé určení délek z levých stran vzorců (3.10), tak jednoznačné určení úhlů, jejichž kosiny vystupují na pravých stranách. Druhý fakt je dán tím, že funkce kosinus je na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, ve kterém leží úhly každého trojúhelníku, *prostá*, tedy hodnotou $\cos x$ je číslo x z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ určeno jednoznačně.

Ještě poznamenejme, že v případě, kdy známe délky všech stran trojúhelníku, můžeme ze vzorců (3.10) snadno určit znaménka hodnot $\cos\alpha$, $\cos\beta$ a $\cos\gamma$ a podle nich rozhodnout, zda jde o trojúhelník ostroúhlý (všechny tři hodnoty jsou kladné), tupoúhlý (mezi hodnotami je jedna záporná) nebo pravoúhlý (jedna hodnota je nulová). Tak například podle prvního ze vzorců (3.10) platí:

- $\alpha < 90°$, je-li $b^2 + c^2 > a^2$,
- $\alpha = 90°$, je-li $b^2 + c^2 = a^2$,
- $\alpha > 90°$, je-li $b^2 + c^2 < a^2$.

V druhé části této podkapitoly odvodíme, jaká závislost platí mezi kosiny vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku. Vrátíme se k rovnostem z věty o průmětech, které tentokrát zapíšeme ve

[4] Čtverce nad stranami trojúhelníku jsou na obrázcích rozděleny na dvojice obdélníků způsobem, který odpovídá rovnostem (3.7) – (3.9) z našeho důkazu kosinové věty. Tato „vizualizace“ kosinové věty je převzata z knihy [20].



Obrázek 3.9: Důkaz $a^2 + b^2 = c^2$ přes obsahy

tvaru

$$\begin{aligned} a - \cos\gamma{\cdot}b - \cos\beta{\cdot}c &= 0, \\ -\cos\gamma{\cdot}a + \qquad b - \cos\alpha{\cdot}c &= 0, \\ -\cos\beta{\cdot}a - \cos\alpha{\cdot}b + \qquad c &= 0. \end{aligned}$$

Protože trojice (a, b, c) je netriviálním řešením takové homogenní soustavy tří lineárních rovnic, musí být determinant této soustavy roven nule:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vyjádřením determinantu např. pomocí Sarrusova pravidla dostaneme následující výsledek.[5]

Věta 3.4.2. *Pro kosiny vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku ABC platí*

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.}$$

[5] Odvození jsme převzali z učebnice [22].

Všimněme si, že podle dokázané věty je trojúhelník ABC

- ostroúhlý, je-li $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1$,
- pravoúhlý, je-li $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,
- tupoúhlý, je-li $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1$.

O tom, který ze tří případů nastane, rozhoduje totiž znaménko součinu $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ z dokázaného vzorce. Mnohé jiné trigonometrické nerovnosti posoudíme v podkapitole 5.2.

3.5 Tangentová věta, Mollweidovy vzorce

Nejen funkce sinus a kosinus, ale také funkce tangens dává název jednomu tvrzení o rovinných trojúhelnících.

Věta 3.5.1 (Tangentová věta). *Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a protilehlými stranami délek a, b, c platí*

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}, \qquad \frac{a-c}{a+c} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}.} \tag{3.11}$$

Než přistoupíme k důkazu, poznamenejme, že v minulosti měla tangentová věta velký numerický význam, neboť v případě (3.11) jde o rovnosti, které se snadno logaritmují (narozdíl od rovností (3.10) z kosinové věty). Proto dřívější počtáři dávali přednost tangentové větě například při úloze vypočítat z daných délek a, b a úhlu γ trojúhelníku ABC zbylou stranu c. Dnes bychom spíše sáhnuli po kosinové větě, avšak v dané situaci ze známých hodnot $a-b, a+b$ a $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$ můžeme z prvního ze vzorců (3.11) určit $\frac{\alpha-\beta}{2}$, poté vypočítat $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$ a stranu c nakonec dopočítat ze sinové věty.

Posoudíme nyní první ze vzorců (3.11), v dalších dvou jde jen o cyklickou záměnu. Podle našeho dosavadního výkladu má tento vzorec smysl, jen když oba úhly $\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}$ leží v intervalu $\langle 0°, 90°)$. Pro druhý úhel, který je roven $90° - \frac{\gamma}{2}$, to platí automaticky; pro první úhel dostáváme podmínku $\alpha \geq \beta$ neboli $a \geq b$. V případě $a < b$ bychom proto měli psát upravený vzorec

$$\frac{b-a}{a+b} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Chceme-li však, aby vzorce (3.11) měly univerzální platnost, stačí dodefinovat hodnoty tangens pro úhly z intervalu $(-90°, 0°\rangle$ tak, aby pro každé x platilo

$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x.$$

Tangentovou větu nebudeme dokazovat přímo. Ukážeme nejprve, že plyne z tzv. *Mollweidových vzorců* (vypíšeme a níže dokážeme jen jednu ze tří analogických dvojic)

$$\boxed{\begin{aligned} (a-b)\cdot\cos\frac{\gamma}{2} &= c\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ (a+b)\cdot\sin\frac{\gamma}{2} &= c\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \end{aligned}}$$

Když totiž tyto rovnosti mezi sebou vydělíme a použijeme implikaci

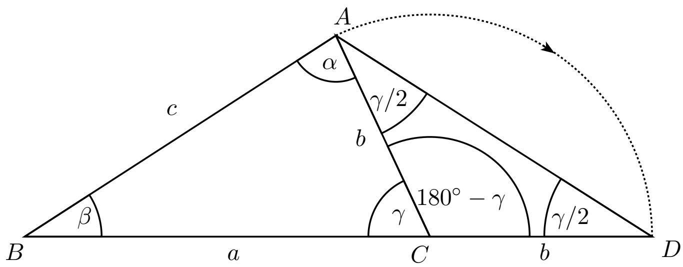
$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},$$

dostaneme rovnou první ze vzorců (3.11). Nezbývá než odvodit oba vypsané Mollweidovy vzorce. Algebraicky je možné je získat ze sinové věty

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

za pomocí vzorců pro $\sin\alpha-\sin\beta$, $\sin\alpha+\sin\beta$, které však posoudíme až v kap. 4. Místo toho nyní dokážeme Mollweidovy vzorce názorně pomocí dvou užitečných obrázků, kterými např. při konstrukčních úlohách znázorňujeme součet, resp. rozdíl dvou stran trojúhelníku. Budeme přitom předpokládat, že platí $a \geq b$, a tedy i $\alpha \geq \beta$.[6]

Na obrázku 3.10 vidíme takový trojúhelník ABC, jehož strana AC je otočena kolem bodu C do směru prodloužené strany BC za vrchol C. Vznikl tak rovnoramenný trojúhelník ACD s vnitřním úhlem ACD proti základně AD o velikosti $180^\circ-\gamma$. Odtud plyne $|\angle ADC|=|\angle CAD|=\frac{\gamma}{2}$. Nyní



Obrázek 3.10

se zaměříme na trojúhelník ABD, ve kterém platí $|BD|=a+b$,

$$|\angle BAD|=\alpha+\frac{\gamma}{2}=\alpha+\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}=90^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}$$

a napíšeme pro něj sinovou větu. Následně užijeme vzorec (3.3) a provedeme drobnou úpravu:

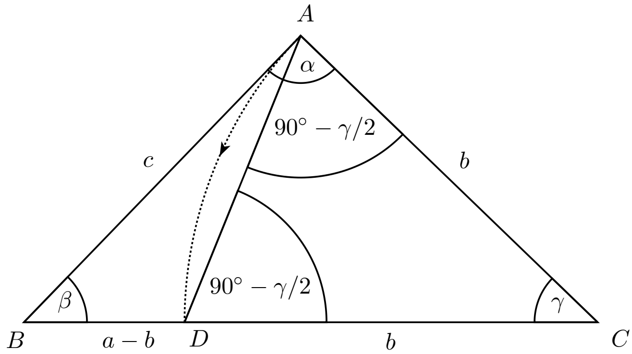
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\text{, odkud } (a+b)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=c\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Mollweidův vzorec pro součet stran je tak dokázán.

Trojúhelník ABC s vnitřními úhly $\alpha\geq\beta$ uvážíme i při odvození druhého Mollweidova vzorce. Tentokrát však otočíme kratší stranu AC kolem bodu C do směru polopřímky CB (obr. 3.11). Dostaneme tak rovnoramenný trojúhelník ACD s vnitřními úhly u základny AD o velikosti

$$|\angle ADC|=|\angle CAD|=\frac{180^\circ-\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}.$$

[6] Mollweidovy vzorce platí pro všechny trojúhelníky ve stejné podobě, když hodnoty sinu a kosinu dodefinujeme pro úhly z intervalu $(-90^\circ,0^\circ)$ tak, aby platilo $\sin(-x)=-\sin x$ a $\cos(-x)=\cos x$, což je v souladu s dřívější dohodou $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$ podle vzorce $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$.



Obrázek 3.11

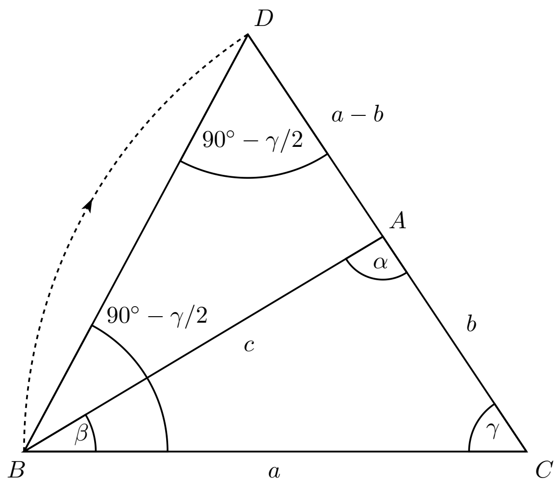
Sinová věta pro trojúhelník ABD se stranou BD délky $a-b$ a velikostmi vnitřních úhlů

$$|\angle BAD| = \alpha - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\angle ADB| = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

má následující tvar, který snadno upravíme pomocí vzorce (3.3):

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(90^\circ + \frac{\gamma}{2})} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\ \text{, odkud}\ (a-b)\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = c\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tím je Mollweidův vzorec pro rozdíl stran dokázán.



Obrázek 3.12

Dodejme, že stejně úspěšně jsme mohli otočit delší stranu BC kolem bodu C do směru kratší strany

AC prodloužené za vrchol A (viz obr. 3.12). Získali bychom tím rovnoramenný trojúhelník BCD s vnitřními úhly u základny BD o velikosti

$$|\angle CBD| = |\angle BDC| = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

I nyní vede použití sinové věty pro trojúhelník ABD s délkou strany $|AD| = a - b$ a velikostí vnitřního úhlu

$$|\angle ABD| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

rychle k výsledku:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\text{ , odkud } (a-b)\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = c\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

3.6 Odvození součtových vzorců

Jak uvidíme v kapitole 4, prakticky všechny další goniometrické vzorce se dají odvodit ze součtových vzorců

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}} \tag{3.12}$$

které měly i zásadní význam při sestavování tabulek goniometrických funkcí. Nyní, v závěrečné teoretické podkapitole kapitoly o trojúhelnících, podáme dva důkazy součtových vzorců (3.12) pro případ, kdy všechny tři úhly $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ leží v intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$. Toho využijeme ve 4. kapitole, kdy na uvedený případ převedeme důkaz součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus definované v oboru $\mathbb{R}$.

Před dvěma slíbenými důkazy si povšimněme, že podmínky $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in (0^\circ, 180^\circ)$ zaručují existenci trojúhelníku s vnitřními úhly α, β, $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$. Protože $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$, stačí k důkazům (3.12) ověřit, že pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku ABC platí vzorce

$$\begin{aligned}\sin\gamma &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos\gamma &= \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Přistoupíme nyní k prvnímu, algebraickému důkazu vzorců (3.13), při kterém využijeme vzorce z vět o průmětech stran trojúhelníku a goniometrickou jedničku. Výhodou tohoto prvního důkazu bude jeho „univerzálnost“, protože nebude nutné rozlišovat, zda zkoumaný trojúhelník s vnitřními úhly α, β, γ je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý.

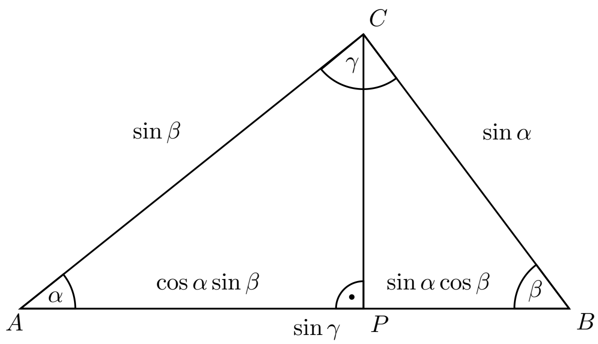
K odvození prvního ze vzorců (3.13) použijeme pouze tři vztahy $c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$, $a\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha$, $b\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\beta$:

- $c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$,
- $c\cdot\sin\gamma = (a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha)\cdot\sin\gamma$,
- $c\cdot\sin\gamma = (a\cdot\sin\gamma)\cdot\cos\beta + (b\cdot\sin\gamma)\cdot\cos\alpha$,
- $c\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta + c\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha$,
- $\sin\gamma = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$.

Druhý ze vzorců (3.13) odvodíme tak, že kromě tří vztahů $b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha$, $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$ využijeme též goniometrickou jedničku:

- $a \cdot \cos\gamma = b \cdot 1 - c \cdot \cos\alpha$,
- $a \cdot \cos\gamma = b \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - c \cdot \cos\alpha$,
- $a \cdot \cos\gamma = b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha - c \cdot \cos\alpha$,
- $a \cdot \cos\gamma = (b \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot (c - b \cdot \cos\alpha)$,
- $a \cdot \cos\gamma = a \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot a \cdot \cos\beta$,
- $\cos\gamma = \sin\beta \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \cos\beta$.

Při druhém geometrickém důkazu vzorců (3.13) se přesvědčíme, že součtové vzorce v podobě (3.13) se dají „přečíst“ z délek úseků stran a výšek zkoumaného trojúhelníku. Takový postup je jistě názornější a didakticky poučnější, vyžaduje však zakreslení několika obrázků pro ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky. Z rozsahových důvodů se omezíme pouze na případ, kdy oba úhly α, β jsou ostré, pro důkaz druhého vzorce (3.13) nakreslíme pouze jeden obrázek, v němž i úhel γ bude ostrý.



Obrázek 3.13

Podle sinové věty můžeme vybrat jednotku délky tak, že trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ bude mít strany délek $a = \sin\alpha, b = \sin\beta, c = \sin\gamma$ (viz obr. 3.13),[7] a odvodíme nejprve vzorec $\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$:

- $\triangle ACP : \cos\alpha = \dfrac{|AP|}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad |AP| = \cos\alpha\sin\beta$,
- $\triangle BCP : \cos\beta = \dfrac{|BP|}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad |BP| = \sin\alpha\cos\beta$,
- $|AB| = \sin\gamma = |AP| + |BP| = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$.

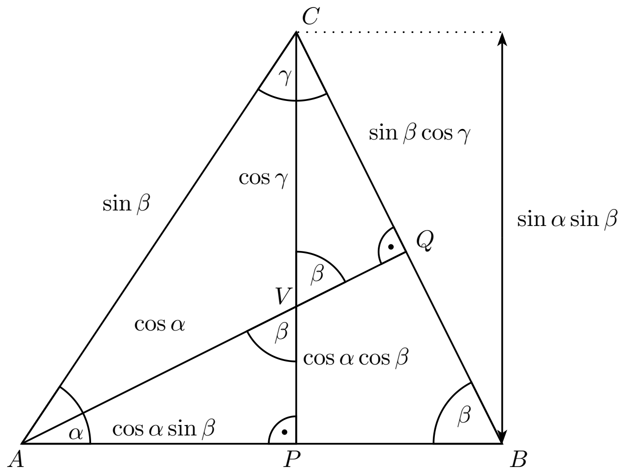
Trojúhelník ABC s délkami stran $a = \sin\alpha, b = \sin\beta, c = \sin\gamma$ (obr. 3.14) použijeme i pro odvození druhého vzorce $\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$. Uvážíme k tomu ještě průsečík V výšek

[7] Podle rozšířené sinové věty se tehdy jedná o trojúhelník vepsaný do kružnice o průměru 1.

CP a AQ:

- $\triangle ACP : \sin\alpha = \dfrac{|CP|}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad |CP| = \sin\alpha\sin\beta$,
- $\triangle ACP : \cos\alpha = \dfrac{|AP|}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad |AP| = \cos\alpha\sin\beta$,
- $\triangle BCP : |\angle BCP| = 90^\circ - \beta \Rightarrow \triangle CVQ : |\angle CVQ| = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$,
- $|\angle CVQ| = \beta \Rightarrow |\angle AVP| = \beta$,
- $\triangle APV : \sin\beta = \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{|AV|} \quad \Rightarrow \quad |AV| = \cos\alpha$,
- $\triangle APV : \cos\beta = \dfrac{|PV|}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad |PV| = \cos\alpha\cos\beta$,
- $\triangle ACQ : \cos\gamma = \dfrac{|CQ|}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad |CQ| = \sin\beta\cos\gamma$,
- $\triangle CQV : \sin\beta = \dfrac{\sin\beta\cos\gamma}{|CV|} \quad \Rightarrow \quad |CV| = \cos\gamma$,
- $|CV| = |CP| - |PV| \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta$.

Poslední důkaz má ještě jeden zajímavý důsledek, tvrzení o existenci průsečíku výšek trojúhelníku.



Obrázek 3.14

Zjistili jsme totiž, že dvě výšky trojúhelníku, totiž AQ a CP, se protínají v takovém bodě V, že $|AV| = \cos\alpha$ a $|CV| = \cos\gamma$. Kdybychom místo výšky CP vybrali výšku BR z vrcholu B a celý postup zopakovali, usoudili bychom, že stejný bod V výšky AQ leží i na výšce BR (a to tak, že platí $|BV| = \cos\beta$).

Na závěr této podkapitoly dodejme, že oba podané trigonometrické důkazy (algebraický i geometrický) součtových vzorců (3.12) lze snadno upravit i na důkazy rozdílových vzorců

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

a to znovu pochopitelně pro případ, kdy všechny tři úhly $\alpha, \beta, \alpha-\beta$ leží v intervalu $(0°, 180°)$. Tehdy totiž můžeme zopakovat oba postupy pro trojúhelník s trojicí vnitřních úhlů $\alpha' = 180° - \alpha, \beta' = \beta$ a $\gamma' = \alpha - \beta$ (zřejmě $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$). Dostaneme tak opět vzorce (3.13), tentokrát v podobě

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(180° - \alpha)\cos\beta + \cos(180° - \alpha)\sin\beta,\\ \cos(\alpha-\beta) &= \sin(180° - \alpha)\sin\beta - \cos(180° - \alpha)\cos\beta,\end{aligned}$$

ze kterých již okamžitě plynou kýžené vzorce (3.14) díky rovnostem $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ a $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

3.7 Příklady

■ **Příklad 3.7.1.** Pomocí sinové věty dokažte dvě tvrzení:

- v libovolném trojúhelníku ABC platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le 1 \Rightarrow \min\{\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha\} < 30°,$$

- je-li V průsečík výšek trojúhelníku ABC, který není pravoúhlý, mají kružnice opsané trojúhelníkům ABV, BCV a ACV stejný poloměr jako kružnice opsaná trojúhelníku ABC.

Řešení:
Důkaz prvního tvrzení:

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\alpha \ge \beta \ge \gamma$, a následně dokážeme, že platí $\beta + \gamma < 30°$. Z trojúhelníkové nerovnosti $b + c > a$ (součet délek dvou stran trojúhelníku je vždy větší než délka strany třetí)[8] a ze sinové věty plyne $\sin\beta + \sin\gamma > \sin\alpha$. Odtud a ze zadání dostáváme

$$1 \ge \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > \sin\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha.$$

Z nerovnosti $2\sin\alpha < 1$ vyplývá $\sin\alpha < \frac{1}{2}$, tedy $\alpha \in (0°; 30°)$ nebo $\alpha \in (150°; 180°)$. Ovšem z předpokladu, že $\alpha \ge \beta \ge \gamma$, plyne $\alpha \ge \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 60°$, tudíž $\alpha > 150°$. Součet zbývajících dvou úhlů $\beta + \gamma$ (rovný $180° - \alpha$) tedy musí být menší než $30°$.

Důkaz druhého tvrzení:

Podle rozšířené sinové věty mají kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ABV poloměry

$$r_{ABC} = \frac{|AB|}{2\sin\gamma} \quad \text{a} \quad r_{ABV} = \frac{|AB|}{2\sin|\angle AVB|}.$$

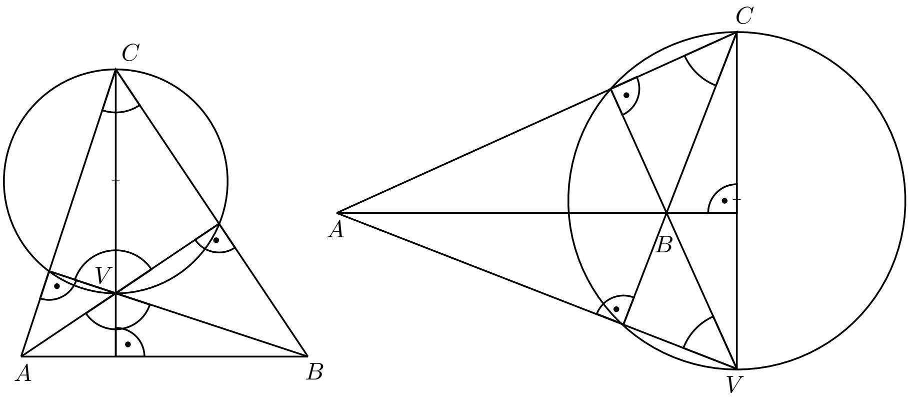
Protože platí buď $|\angle AVB| = 180° - \gamma$ (jsou-li oba úhly α, β ostré jako na obr. 3.15 vlevo), nebo $|\angle AVB| = \gamma$ (je-li jeden z úhlů α, β tupý jako na obr. 3.15 vpravo), je v každém případě splněna rovnost $\sin|\angle AVB| = \sin\gamma$, a tedy i rovnost $r_{ABC} = r_{ABV}$. Pro poloměry r_{BCV} a r_{ACV} je důkaz analogický.

■ **Příklad 3.7.2.** Užitím sinové věty dokažte tzv. *Cevovu větu*[9]: Jsou-li uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC zvoleny po řadě body D, E, F (obr. 3.16), pak následující tři podmínky jsou ekvivalentní:

(1) úsečky AD, BE, CF procházejí jedním bodem,

[8] Trojúhelníková nerovnost $b + c > a$ formálně plyne z rovnosti $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$ z věty o průmětech, neboť $\cos\gamma < 1$ a $\cos\beta < 1$.

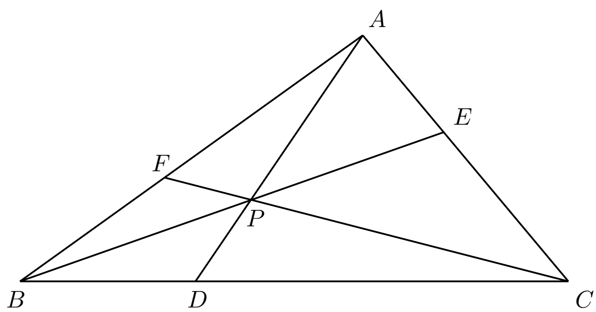
[9] Giovanni Ceva (1647 – 1734), italský matematik.



Obrázek 3.15: Obvodové úhly v kružnici nad průměrem CV

(2) $\dfrac{\sin|\angle ABE|}{\sin|\angle CBE|}\cdot\dfrac{\sin|\angle BCF|}{\sin|\angle ACF|}\cdot\dfrac{\sin|\angle CAD|}{\sin|\angle BAD|}=1,$

(3) $\dfrac{|AF|}{|BF|}\cdot\dfrac{|BD|}{|CD|}\cdot\dfrac{|CE|}{|AE|}=1.$



Obrázek 3.16

Řešení: Důkaz se bude skládat ze tří částí. Postupně ukážeme, že (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) a následně (3) $\Rightarrow$ (1).

Předpokládejme, že platí (1) a průsečík úseček AD, BE, CF označme P. Díky sinové větě v trojúhelníku ABP obdržíme rovnost

$$\frac{\sin|\angle ABE|}{\sin|\angle BAD|}=\frac{\sin|\angle ABP|}{\sin|\angle BAP|}=\frac{|AP|}{|BP|}.$$

Obdobně získáme rovnosti

$$\frac{\sin|\angle BCF|}{\sin|\angle CBE|}=\frac{|BP|}{|CP|}\quad \text{a}\quad \frac{\sin|\angle CAD|}{\sin|\angle ACF|}=\frac{|CP|}{|AP|}$$

použitím sinové věty v trojúhelnících BCP a ACP. Když všechny tři rovnosti spolu vynásobíme, dostaneme (2).

Předpokládejme, že platí (2). Sinovu větu nyní použijeme po řadě na trojúhelníky ABD a ACD:

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{\sin|\angle ADB|}{\sin|\angle BAD|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin|\angle CAD|}{\sin|\angle ADC|}.$$

Jelikož $|\angle ADB| + |\angle ADC| = 180°$, platí $\sin|\angle ADB| = \sin|\angle ADC|$. Toho využijeme při krácení, když výše uvedené rovnosti spolu vynásobíme. Získáme tak

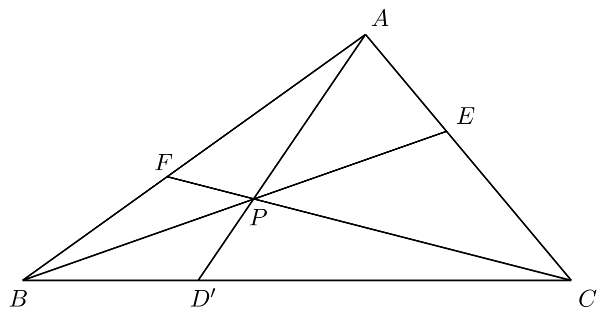
$$\frac{|CD|}{|BD|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin|\angle CAD|}{\sin|\angle BAD|}.$$

Analogicky odvodíme i rovnosti

$$\frac{|AE|}{|CE|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sin|\angle ABE|}{\sin|\angle CBE|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|BF|}{|AF|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin|\angle BCF|}{\sin|\angle ACF|}.$$

Podmínku (3) obdržíme po vynásobení všech třech odvozených rovností díky předpokladu (2).

Předpokládejme, že platí (3) a že úsečky BE a CF se protínají v bodě P. Nechť polopřímka AP protne úsečku BC v bodě D' (obr. 3.17). Stačí dokázat, že $D = D'$. Úsečky AD', BE a CF



Obrázek 3.17

procházejí jedním bodem P. Podle již dokázaných implikací (1) ⇒ (2) ⇒ (3), uplatněných k trojici bodů E, F, D', musí tedy platit

$$\frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BD'|}{|CD'|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} = 1.$$

Porovnáním s předpokladem (3) nám vyplývá, že $\frac{|BD'|}{|CD'|} = \frac{|BD|}{|CD|}$. Jelikož body D a D' leží na úsečce BC, jsou díky poslední rovnosti identické. Podmínka (1) je tímto dokázána.

■ **Příklad 3.7.3.** Pomocí kosinové věty odvoďte:

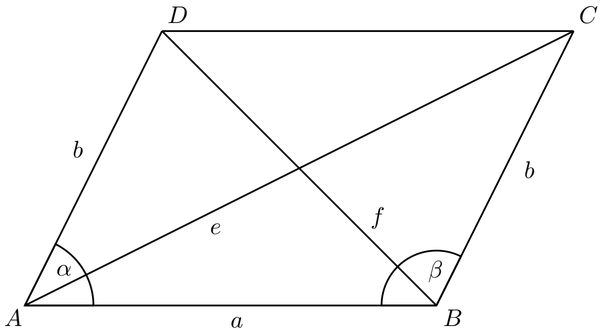
- rovnost $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$ pro délky stran a úhlopříček libovolného rovnoběžníku $ABCD$,
- vzorec $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ pro délku těžnice libovolného trojúhelníku ABC a jeho zobecnění v podobě tzv. *Stewartova vzorce*[10] $|CX| = \sqrt{pa^2 + qb^2 - pqc^2}$, kde bod X rozděluje stranu AB délky c na úseky $|AX| = pc$ a $|BX| = qc$ (takže $p + q = 1$).

[10] Matthew Stewart (1717 – 1785), skotský astronom a matematik, profesor univerzity v Edinburghu.

Řešení:
Důkaz prvního tvrzení:
Kosinovu větu použijeme hned dvakrát, a to pro trojúhelníky ABC a ABD (obr. 3.18):

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \\ f^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \end{aligned}$$

Jelikož $\alpha + \beta = 180°$, podle (3.2) platí $\cos\alpha + \cos\beta = 0$. Po sečtení výše uvedených rovností proto



Obrázek 3.18

obdržíme:

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab(\cos\alpha + \cos\beta), \\ e^2 + f^2 &= 2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Důkaz druhého tvrzení:
Označme $d = |CX|, \varphi = |\angle AXC|$ a $\psi = |\angle BXC|$ (obr. 3.19). Pro trojúhelníky ACX a BCX napíšeme kosinovu větu a rovnosti vynásobíme po řadě čísly q a p:

$$\begin{aligned} b^2 &= d^2 + (pc)^2 - 2pcd\cos\varphi \qquad / \cdot q, \\ a^2 &= d^2 + (qc)^2 - 2qcd\cos\psi \qquad / \cdot p. \end{aligned}$$

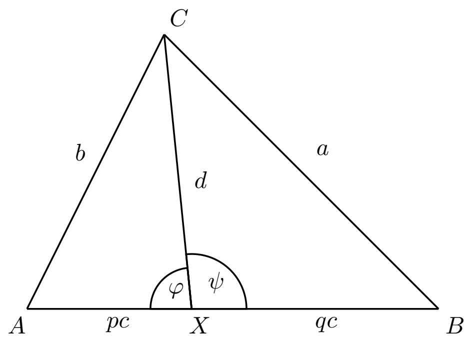
Jejich sečtením získáme

$$pa^2 + qb^2 = (p+q)d^2 + pq(p+q)c^2 - 2pqcd(\cos\varphi + \cos\psi).$$

Nyní dosadíme $p + q = 1$ a z $\varphi + \psi = 180°$ plynoucí rovnost $\cos\varphi + \cos\psi = 0$, čímž po malých úpravách vyjde *Stewartův vzorec*. Vzorec pro délku těžnice z něho dostaneme, když X bude střed strany AB, takže bude platit $p = q = \frac{1}{2}$.

■ **Příklad 3.7.4.** Pomocí vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ pro obsah trojúhelníku ABC a s využitím kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ odvoďte Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku ABC:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$



Obrázek 3.19

Řešení:

$$
\begin{aligned}
&\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\\
&S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2},\\
&S = \frac{2ab}{4}\sqrt{\frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2},\\
&S = \frac{1}{4}\sqrt{((2ab)+(a^2+b^2-c^2))\cdot((2ab)-(a^2+b^2-c^2))},\\
&S = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+2ab+b^2-c^2)\cdot(-a^2+2ab-b^2+c^2)},\\
&S = \frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-c^2)\cdot(-(a-b)^2+c^2)},\\
&S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},\\
&S = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}},\\
&S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
\end{aligned}
$$

■ **Příklad 3.7.5.** Ostroúhlý trojúhelník ABC má obsah S. Dokažte, že platí

$$\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{b^2c^2-4S^2}+\sqrt{c^2a^2-4S^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Řešení: Do levé strany dokazované rovnosti postupně dosadíme za S vzorce z podkapitoly 3.3 pro obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta$ a budeme upravovat:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2b^2 - 4\left(\frac{ab\sin\gamma}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4\left(\frac{bc\sin\alpha}{2}\right)^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4\left(\frac{ca\sin\beta}{2}\right)^2} &= \\
= \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2\sin^2\gamma} + \sqrt{b^2c^2 - b^2c^2\sin^2\alpha} + \sqrt{c^2a^2 - c^2a^2\sin^2\beta} &= \\
= \sqrt{a^2b^2\cdot(1-\sin^2\gamma)} + \sqrt{b^2c^2\cdot(1-\sin^2\alpha)} + \sqrt{c^2a^2\cdot(1-\sin^2\beta)} &= \\
= \sqrt{a^2b^2\cdot\cos^2\gamma} + \sqrt{b^2c^2\cdot\cos^2\alpha} + \sqrt{c^2a^2\cdot\cos^2\beta} &= \\
= ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ca\cos\beta &= \\
= \frac{a}{2}b\cos\gamma + a\frac{b}{2}\cos\gamma + \frac{b}{2}c\cos\alpha + b\frac{c}{2}\cos\alpha + \frac{c}{2}a\cos\beta + c\frac{a}{2}\cos\beta &= \\
= \frac{a}{2}(b\cos\gamma + c\cos\beta) + \frac{b}{2}(c\cos\alpha + a\cos\gamma) + \frac{c}{2}(a\cos\beta + b\cos\alpha)&.
\end{aligned}$$

Po poslední úpravě vidíme ve všech třech závorkách věty o průmětech z podkapitoly 3.1, tedy

$$\frac{a}{2}(b\cos\gamma + c\cos\beta) + \frac{b}{2}(c\cos\alpha + a\cos\gamma) + \frac{c}{2}(a\cos\beta + b\cos\alpha) = \frac{a}{2}a + \frac{b}{2}b + \frac{c}{2}c = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

■ **Příklad 3.7.6.** Pro trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a obsahem S dokažte vzorec

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Řešení: Ze vzorce $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ pro obsah trojúhelníku plyne vyjádření

$$bc\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2S\operatorname{cotg}\alpha,$$

které dosadíme do rovnosti $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ z kosinové věty. Dostaneme první ze tří vztahů

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{cotg}\alpha, \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 4S\operatorname{cotg}\beta, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 4S\operatorname{cotg}\gamma,$$

další dva se odvodí analogicky. Získané rovnosti sečteme a postupně upravíme do dokazovaného tvaru:

- $a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{cotg}\alpha + a^2 + c^2 - 4S\operatorname{cotg}\beta + a^2 + b^2 - 4S\operatorname{cotg}\gamma$,
- $4S\operatorname{cotg}\alpha + 4S\operatorname{cotg}\beta + 4S\operatorname{cotg}\gamma = a^2 + b^2 + c^2$,
- $4S\,(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma) = a^2 + b^2 + c^2$,
- $\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

■ **Příklad 3.7.7.** Užitím kosinové věty dokažte, že pro délky úhlopříček libovolného tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ platí vzorce[11]

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \qquad \text{a} \qquad f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

[11] Jejich objev je podle [45] přisuzován indickému matematiku Mahavirovi z 9. stol. n. l.

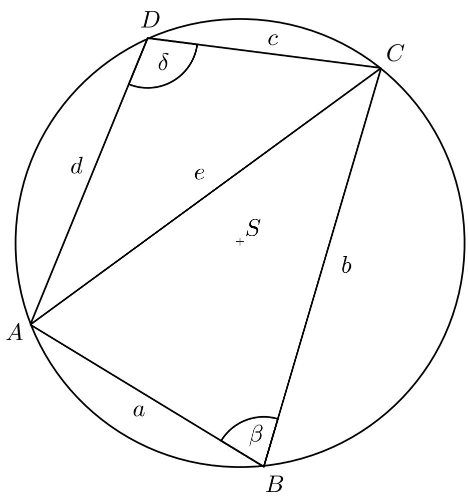
Všimněte si, že pokud vzorce mezi sebou vynásobíme, dostaneme slavnou Ptolemaiovu větu, totiž rovnost $ef = ab + cd$, které jsme se věnovali v kapitole 1, kde jsme také podali její (pravděpodobně historicky původní) podobnostní důkaz.
Řešení: Zaměříme se na trojúhelníky ABC a ACD (obr. 3.20). Napíšeme pro ně rovnosti z kosinové věty a po řadě je vynásobíme hodnotami cd a ab:

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \qquad && / \cdot cd, \\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta \qquad && / \cdot ab. \end{aligned}$$

Nyní obě rovnosti sečteme a pomocí úprav získáme kýžený vzorec. Jelikož pro obvodové úhly β, δ platí $\beta + \delta = 180°$, použijeme během odvozování rovnost $\cos\beta + \cos\delta = 0$:

$$\begin{aligned} (ab + cd)e^2 &= cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) - 2abcd(\cos\beta + \cos\delta), \\ (ab + cd)e^2 &= (a^2cd + c^2ab) + (b^2cd + d^2ab), \\ (ab + cd)e^2 &= ac(ad + bc) + bd(bc + ad), \\ (ab + cd)e^2 &= (ac + bd)(ad + bc), \\ e^2 &= \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \\ e &= \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}. \end{aligned}$$

Vzorec pro délku f se odvodí analogicky.



Obrázek 3.20