Kapitola 1

Z historie goniometrických funkcí

1.1 Počátky trigonometrie ve starověku

1.1.1 Měření úhlů a délek tětiv

Rovinný úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným počátkem. Tak zní dnešní definice rovinného geometrického útvaru. Ovšem zrod tohoto pojmu má úzkou spojitost s dělením kruhu. Již od starověkých Babyloňanů pochází dělení kruhu na 360 stejných částí (kruhových výsečí), které Babyloňané nazvali *stupně*, dodnes běžně používané jednotky úhlové míry. Dělení *plného úhlu* na 360 stupňů a jednoho stupně na 60 minut od nich převzali Řekové. Šedesátková číselná soustava Babyloňanů je dnes zastaralá, ovšem rozdělení kruhu na 360 stupňů se dochovalo do současnosti.

Teprve novověký pohled na goniometrické funkce a jejich užití v diferenciálním a integrálním počtu přivedly matematiky k názoru, že velikosti úhlů je přirozené vyjadřovat v *obloukové míře* s úhlovou jednotkou *radián*. Jeden radián je středový úhel, který přísluší oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Plný úhel má 2π radiánů – což je 360 stupňů. Samotné slovo *radián* bylo navrženo v roce 1871 Jamesonem Thomsonem. Dřívější návrhy byly např. *rad* nebo *radiál*.

První práce o trigonometrii souvisely s problémem určování poměru odvěsen pravoúhlého trojúhelníku a jeho závislosti na ostrém vnitřním úhlu tohoto trojúhelníku. Již staří Řekové znali jednoduchý aparát na určování času pomocí tyče vrhající stín určité délky. Sloupek slunečních hodin byl v podstatě obdobný prostředek na výpočet goniometrické funkce kotangens z délky sloupu a délky stínu. Samozřejmě se antičtí matematici o funkci jako takovou nezajímali. Říká se, že Thalés z Milétu (asi 624 – 548 př. n. l) byl prvním z dlouhé řady řeckých filozofů, který zjišťoval výšku pyramidy porovnáváním délky jejího stínu s délkou stínu, který vrhala vhodná tyč. Starořecká trigonometrie však nezahrnovala pouze a jen poznatek o podobnosti dvou pravoúhlých trojúhelníků.

Obrázek 1.1: Thalés z Milétu

Nicméně tento druh porovnávání a výpočet pomocí délek stínů byl v antice velice dobře znám a může být nazván předchůdcem vlastní trigonometrie.

Nejdůležitější pro rozvoj trigonometrie v moderním slova smyslu byly práce starověkého řeckého astronoma, který pocházel z Nikaie v Bitýnii, Hipparcha (asi 190 – 120 př. n. l.). Z toho, co

Obrázek 1.2: Hipparchos

Hipparchos napsal, se nám do dnešní doby téměř nic nedochovalo. O jeho díle si můžeme udělat pouze představu, a to prostřednictvím knihy Klaudia Ptolemaia s názvem *Almagest*. Pro své astronomické výpočty potřeboval Hipparchos tabulku trigonometrických poměrů. Avšak neměl se kam obrátit, žádná taková tabulka dosud neexistovala. Vzal tedy v úvahu libovolný trojúhelník vepsaný do kruhu, čímž se každá z jeho tří stran stala tětivou kružnice, jež kruh omezovala. K výpočtu velikostí různých prvků trojúhelníka bylo potřeba stanovit délku tětivy příslušné danému středovému úhlu. To se stalo hlavním úkolem trigonometrie pro mnohá následující staletí. Hipparchos sestavil tabulky tětiv pro různé středové úhly kružnice při stálém poloměru. Byly to vlastně tabulky dvojnásobných sinů poloviny středového úhlu. Sám Hipparchos napsal dvanáct knih o počítání délek tětiv v kruhu, ale všechny tyto knihy byly s koncem antické epochy ztraceny.

1.1.2 Ptolemaiovy výpočty

Klaudios Ptolemaios (asi 85 – 165 n. l.) byl řecký geograf, astronom a astrolog, který pravděpodobně žil a pracoval v egyptské Alexandrii.

Obrázek 1.3: Klaudios Ptolemaios

Jeho největší dílo *Syntaxis megale (Velká soustava)* – astronomický spis, který byl vydán okolo roku 140 a v 8. století přeložen do arabštiny pod názvem *Almagest*, byl založen na domněnce, že nehybná Země je umístěna ve středu vesmíru a nebeská tělesa kolem ní obíhají po předepsaných drahách. Našemu zájmu se těší Ptolemaiova tabulka tětiv, která je předmětem kapitoly 10 a 11 první knihy Almagestu. Tato tabulka udává délku tětivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který ji vymezuje. Středový úhel, k němuž se délky vztahují, postupuje po 0,5° na intervalu od 0° do 180°.

Z našeho hlediska jde vlastně o tabulku sinů úhlů od 0° do 90°, postupujících po čtvrtině stupně. Když totiž označíme poloměr kruhu r, středový úhel řeckým písmenem α a délku tětivy $\mathrm{tet}(\alpha)$, obdržíme vztah

$$\mathrm{tet}(\alpha) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

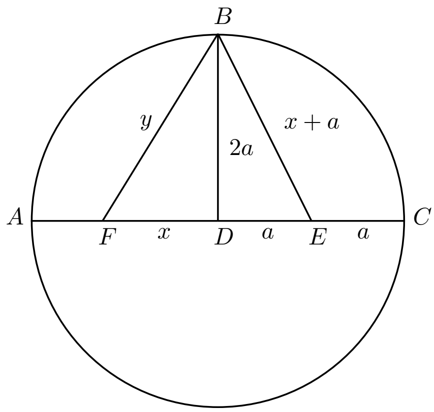
Ptolemaios rozdělil průměr kruhu na 120 stejných jednotkových dílů (délky 1^d), tedy poloměru r přiřazoval délku 60 dílů ($r = 60^d$). Jeho tabulka udává délky tětiv s přesností na dvě šedesátinná místa, tedy s chybou řádu 60^{-2}.

Uvedením jednotlivých metod, jak Ptolemaios postupně zmíněnou tabulku doplňoval, vytvoříme pro funkci $\mathrm{tet}(\alpha)$ malou, avšak obsažnou teorii, kterou Ptolemaios ke svým výpočtům potřeboval. Stejně jako on budeme pracovat s poloměrem délky $r = 60^d$.

1. Funkce $\mathrm{tet}(\alpha)$ je definovaná pro $\alpha \in \langle 0; 180^\circ \rangle$ a platí $0^d \leq \mathrm{tet}(\alpha) \leq 120^d$.

2. Hodnoty $\mathrm{tet}(0^\circ) = 0^d$, $\mathrm{tet}(60^\circ) = 60^d$ a $\mathrm{tet}(180^\circ) = 120^d$ jsou zřejmé. Ze znalosti Pythagorovy věty Ptolemaios vypočítal $\mathrm{tet}(90^\circ) = 84^d51'10''$, kde $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^d$ a $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^d$. (Všechny Ptolemaiovy hodnoty $\mathrm{tet}(\alpha)$ budeme uvádět rovnítkem, správněji bychom měli psát $\doteq$.)

3. Pro výpočet hodnot $\mathrm{tet}(\alpha)$, kde $\alpha \in \{36^\circ; 72^\circ; 108^\circ; 144^\circ\}$, musel nejdříve Ptolemaios dokázat, že délka $|DF|$ části ramene EF rovnoramenného trojúhelníka EFB z obr. 1.4 je rovna délce strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kruhu s průměrem AC a že délka $|BF|$ je délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do téhož kruhu (viz podkapitola 2.4). Díky



Obrázek 1.4

těmto výsledkům lze určit délky tětiv příslušných úhlů následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} |DE|^2 + |DB|^2 &= |BE|^2, \\ (30^d)^2 + (60^d)^2 &= |BE|^2, \\ |BE| &= 67^d4'55'' = |EF|, \\ |DF| &= |EF| - |DE| = 67^d4'55'' - 30^d, \\ |DF| &= 37^d4'55'', \\ \mathrm{tet}(36^\circ) &= 37^d4'55''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |DF|^2 + |DB|^2 &= |BF|^2, \\ (37^d4'55'')^2 + (60^d)^2 &= |BF|^2, \\ |BF| &= 70^d32'3'', \\ \mathrm{tet}(72^\circ) &= 70^d32'3''. \end{aligned}$$

Jakmile byly všechny výše zmíněné hodnoty tet(α) určeny, mohl Ptolemaios ukázat, jak vypočítat délky dalších tětiv na základě toho, že do kruhu vepsaný úhel, který leží proti průměru, je pravý. Proto užitím Pythagorovy věty ve tvaru

$$(\mathrm{tet}(\alpha))^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = (120^d)^2,$$

který mimochodem odpovídá dnešnímu vztahu pro goniometrickou jedničku

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

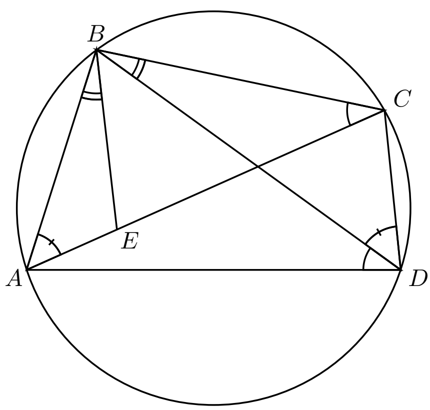
Ptolemaios určil hodnoty $\mathrm{tet}(108^\circ) = 97^d4'56''$ a $\mathrm{tet}(144^\circ) = 114^d7'37''$. Podobně z hodnoty $\mathrm{tet}(60^\circ) = 60^d$ vypočítal $\mathrm{tet}(120^\circ) = 103^d55'23''$.

4. Dosud popsané metody vedou pouze k určení několika málo jednotlivých hodnot funkce tet(α). Pro výpočet všech dalších hodnot funkce tet(α) potřeboval Ptolemaios nový matematický nástroj. Tím se stala významná planimetrická věta, která dnes nese Řekovo jméno.

Ptolemaiova věta. *V každém tětivovém čtyřúhelníku platí: Součet součinů délek jeho protilehlých stran je roven součinu délek jeho úhlopříček.*

Při označení podle obr. 1.5 lze větu vyjádřit rovností

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.$$



Obrázek 1.5: K Ptolemaiově větě

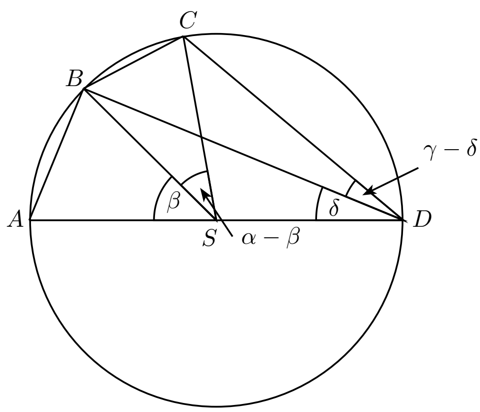
Důkaz. Sestrojme bod E na úhlopříčce AC tak, aby úhly ABE a DBC byly shodné, viz obr. 1.5, na kterém jsou rovněž vyznačeny dvě dvojice shodných obvodových úhlů. Další postup důkazu můžeme stručně zapsat takto:

- $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle EBC|$ $\quad$ $(|\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EBD| + |\sphericalangle DBC|)$,
- $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BCE|$ $\quad$ (obvodové úhly nad tětivou AB),
- $\dfrac{|BC|}{|CE|} = \dfrac{|BD|}{|DA|}$ $\quad$ ($\triangle ABD \sim \triangle EBC$ podle věty uu),
- $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DBC|$ $\quad$ (dáno konstrukcí bodu E),
- $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BDC|$ $\quad$ (obvodové úhly nad tětivou BC),
- $\dfrac{|BA|}{|AE|} = \dfrac{|BD|}{|DC|}$ $\quad$ ($\triangle ABE \sim \triangle DBC$ podle věty uu),
- $|BC| \cdot |AD| = |BD| \cdot |CE|$ $\quad$ (přepsána třetí rovnost),
- $|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |AE|$ $\quad$ (přepsána šestá rovnost).

Nyní poslední dvě rovnosti sečteme a součet upravíme:

$$
\begin{aligned}
|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| &= |BD| \cdot |AE| + |BD| \cdot |CE|,\\
|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| &= |BD| \cdot (|AE| + |CE|),\\
|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| &= |AC| \cdot |BD|.
\end{aligned}
$$

Důkaz je hotov. Ještě poznamenejme, že ve speciálním případě, kdy tětivový čtyřúhelník je obdélníkem, získáme uvedeným postupem důkaz Pythagorovy věty pro obecný pravoúhlý trojúhelník ABC, který nejprve doplníme na obdélník $ABCD$ (bod E z obr. 1.5 bude patou výšky z vrcholu B na přeponu AC). $\square$



Obrázek 1.6: Ke vzorci pro tet$(\alpha - \beta)$

5. Díky dokázané větě našel Ptolemaios odpověď na dvě důležité otázky:

   (a) *Jak z hodnot* $\operatorname{tet}(\alpha)$, $\operatorname{tet}(\beta)$ *vypočítat hodnotu* $\operatorname{tet}(\alpha-\beta)$*?*
   Pro dané úhly α, β, kde $0^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$, uvážíme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do půlkruhu s průměrem AD tak, že $|\sphericalangle ASB| = \beta$ a $|\sphericalangle ASC| = \alpha$ (obr. 1.6). Pak $|AB| = \operatorname{tet}(\beta)$, $|AC| = \operatorname{tet}(\alpha)$ a $|BC| = \operatorname{tet}(\alpha-\beta)$. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem víme, že $|\sphericalangle ADC| = \gamma = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle ADB| = \delta = \frac{\beta}{2}$. Následujme jeho postup:

   - $|CD| = \sqrt{|AD|^2 - |AC|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\operatorname{tet}(\alpha))^2}$ (Pyth. věta),
   - $|BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\operatorname{tet}(\beta))^2}$ (Pyth. věta),
   - $|BC| = \dfrac{|AC|\sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} - |AB|\sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}}{|AD|}$ (Ptol. věta),
   - $\operatorname{tet}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tet}(\alpha)\sqrt{(120^d)^2 - (\operatorname{tet}(\beta))^2} - \operatorname{tet}(\beta)\sqrt{(120^d)^2 - (\operatorname{tet}(\alpha))^2}}{120^d}$ (dosazení).

   Poznamenejme, že když rovnost z Ptolemaiovy věty vydělíme výrazem $|AD|^2$, získáme

   $$\frac{|AB|}{|AD|}\cdot\frac{|CD|}{|AD|} + \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AD|}\cdot\frac{|BD|}{|AD|},$$

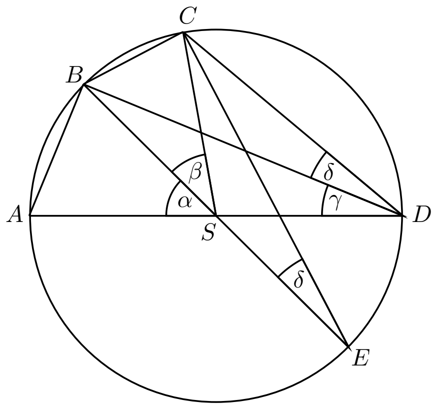
   což se dá v situaci z obr. 1.6 pomocí funkcí sinus a kosinus podle novodobého zápisu přepsat na tvar známého rozdílového vzorce

   $$\sin(\gamma-\delta) = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta.$$

   V tomto okamžiku mohl Ptolemaios díky znalosti všech dosavadních hodnot $\operatorname{tet}(\alpha)$ vypočítat délky tětiv pro všechny úhly o velikosti $k\cdot 6^\circ$, kde $k\in\mathbb{N}$. Tedy

   $$\begin{aligned}\operatorname{tet}(18^\circ) &= \operatorname{tet}(90^\circ - 72^\circ) = 18^d46'19'',\\ \operatorname{tet}(12^\circ) &= \operatorname{tet}(72^\circ - 60^\circ) = 12^d32'36'',\\ \operatorname{tet}(6^\circ) &= \operatorname{tet}(18^\circ - 12^\circ) = 6^d16'50'',\\ \operatorname{tet}(24^\circ) &= \operatorname{tet}(60^\circ - 36^\circ) = \ldots,\\ &\vdots\end{aligned}$$

   (b) *Jak z hodnot* $\operatorname{tet}(\alpha)$, $\operatorname{tet}(\beta)$ *vypočítat hodnotu* $\operatorname{tet}(\alpha+\beta)$*?*
   Pro dané úhly α, β, kde $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ a $\alpha+\beta < 180^\circ$, uvážíme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do půlkruhu s průměrem AD tak, že $|\sphericalangle ASB| = \alpha$ a $|\sphericalangle BSC| = \beta$ (obr. 1.7). Pak $|AB| = \operatorname{tet}(\alpha)$, $|BC| = \operatorname{tet}(\beta)$ a $|AC| = \operatorname{tet}(\alpha+\beta)$. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem víme, že $|\sphericalangle ADB| = \gamma = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle BDC| = \delta = \frac{\beta}{2}$. Pro následující odvození je nutná konstrukce pomocného bodu E – úsečka BE je průměr kruhu. Tentokrát užijeme Ptolemaiovu větu dvakrát – pro čtyřúhelníky $ABCD$ a $BCDE$.



Obrázek 1.7: Ke vzorci pro $\mathrm{tet}(\alpha + \beta)$

- $|AD| = |BE| = 120^d$ (průměry kruhu),
- $|BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\alpha))^2}$ (Pyth. věta),
- $|CE| = \sqrt{|BE|^2 - |BC|^2} = \sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\beta))^2}$ (Pyth. věta),
- $|DE| = |AB| = \mathrm{tet}(\alpha)$ ($\triangle DES \cong \triangle ABS$),
- $|BC| \cdot |DE| + |CD| \cdot |BE| = |BD| \cdot |CE|$ (Ptol. věta),
- $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$ (Ptol. věta).

V posledních dvou rovnostech vystupují neznámé hodnoty $|AC|$ a $|CD|$. Druhou z nich eliminujeme, když rovnice vhodně vynásobíme (první vynásobíme $-|AB|$ a druhou $|AD|$) a následně je sečteme. Ještě než tak učiníme, přepíšeme $|DE|$ hodnotou $|AB|$ a $|BE|$ hodnotou $|AD|$. Tudíž

$$-|AB| \cdot (|BC| \cdot |AB| + |CD| \cdot |AD|) = -|AB| \cdot (|BD| \cdot |CE|),$$
$$|AD| \cdot (|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|) = |AD| \cdot (|AC| \cdot |BD|).$$

Po sečtení a úpravách obdržíme rovnost

$$|BC| \cdot (|AD|^2 - |AB|^2) = |BD| \cdot (|AC| \cdot |AD| - |CE| \cdot |AB|), \qquad (*)$$

která je po dosazení ekvivalentní s rovností

$$\mathrm{tet}(\beta) \cdot \Big((120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\alpha))^2\Big) =$$
$$= \sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\alpha))^2} \cdot \left(\mathrm{tet}(\alpha + \beta) \cdot 120^d - \sqrt{(120^d)^2 - (\mathrm{tet}(\beta))^2} \cdot \mathrm{tet}(\alpha)\right).$$

Vyjádřením členu $\operatorname{tet}(\alpha+\beta)$ tak Ptolemaios získal kýžený vzorec

$$\operatorname{tet}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tet}(\alpha)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(\beta))^2}+\operatorname{tet}(\beta)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(\alpha))^2}}{120^d}.$$

Poznamenejme, že když rovnost $(*)$ vydělíme výrazem $|AD|^3$, získáme

$$\frac{|BC|}{|AD|}\cdot\left(1-\frac{|AB|^2}{|AD|^2}\right)=\frac{|BD|}{|AD|}\cdot\left(\frac{|AC|}{|AD|}-\frac{|CE|}{|AD|}\cdot\frac{|AB|}{|AD|}\right),$$

což se dá v situaci z obr. 1.7 pomocí funkcí sinus a kosinus podle novodobého zápisu s přihlédnutím k rovnosti $|\sphericalangle BEC|=|\sphericalangle BDC|=\delta$ přepsat na tvar

$$\sin\delta(1-\sin^2\gamma)=\cos\gamma\,(\sin(\gamma+\delta)-\sin\gamma\cos\delta)\,.$$

Odtud po dělení hodnotou $\cos\gamma\neq 0$ získáme známý tvar součtového vzorce

$$\sin(\gamma+\delta)=\sin\gamma\cos\delta+\cos\gamma\sin\delta.$$

Díky odvozenému vzorci pro $\operatorname{tet}(\alpha+\beta)$ obdržel Ptolemaios pro případ $\alpha=\beta$ aparát na výpočet hodnot $\operatorname{tet}(3^\circ)$, $\operatorname{tet}(1{,}5^\circ)$ a $\operatorname{tet}(0{,}75^\circ)$ z hodnoty $\operatorname{tet}(6^\circ)$, kterou již znal:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tet}(6^\circ)=\operatorname{tet}(3^\circ+3^\circ)&=\frac{2\cdot\operatorname{tet}(3^\circ)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(3^\circ))^2}}{120^d},\\
6^d16\text{'}50\text{''}&=\frac{2\cdot\operatorname{tet}(3^\circ)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(3^\circ))^2}}{120^d},\\
&\ \vdots\\
\operatorname{tet}(3^\circ)&=3^d8\text{'}28\text{''}.\\
\operatorname{tet}(3^\circ)&=\frac{2\cdot\operatorname{tet}(1{,}5^\circ)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(1{,}5^\circ))^2}}{120^d},\\
3^d8\text{'}28\text{''}&=\frac{2\cdot\operatorname{tet}(1{,}5^\circ)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(1{,}5^\circ))^2}}{120^d},\\
&\ \vdots\\
\operatorname{tet}(1{,}5^\circ)&=1^d34\text{'}15\text{''}.\\
\operatorname{tet}(1{,}5^\circ)&=\frac{2\cdot\operatorname{tet}(0{,}75^\circ)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(0{,}75^\circ))^2}}{120^d},\\
1^d34\text{'}15\text{''}&=\frac{2\cdot\operatorname{tet}(0{,}75^\circ)\sqrt{(120^d)^2-(\operatorname{tet}(0{,}75^\circ))^2}}{120^d},\\
&\ \vdots\\
\operatorname{tet}(0{,}75^\circ)&=0^d47\text{'}8\text{''}.
\end{aligned}$$

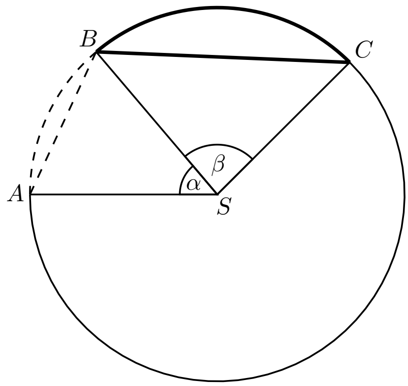
6. Aby mohl Ptolemaios sestavit tabulku délek tětiv s krokem $0{,}5^\circ$, potřeboval ještě vypočítat hodnotu $\operatorname{tet}(1^\circ)$ jako hodnotu ležící mezi $\operatorname{tet}(0{,}75^\circ)$ a $\operatorname{tet}(1{,}5^\circ)$. Použil k tomu duchaplnou metodu interpolace, která byla známa již astronomu Aristarchovi (asi 320 – 250 př. n. l.) a která je pro délky tětiv založena na této vlastnosti: Splňují-li úhly α, β nerovnosti $0^\circ\ <\ \alpha\ <\ \beta<180^\circ$, pak platí

$$1<\frac{\operatorname{tet}(\beta)}{\operatorname{tet}(\alpha)}<\frac{\beta}{\alpha},$$

viz obr. 1.8, na kterém poměr $\beta : \alpha$ je poměrem délek vyznačených oblouků BC a AB, zatímco $\mathrm{tet}(\beta) : \mathrm{tet}(\alpha)$ je poměrem $|BC| : |AB|$ příslušných tětiv. (V dnešní terminologii jde o implikaci $0^\circ < \gamma < \delta < 90^\circ \Rightarrow 1 < \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} < \frac{\delta}{\gamma}$, která plyne z toho, že funkce sinus je na intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ rostoucí a konkávní.) Původní geometrický důkaz zde uvádět nebudeme, lze ho však nalézt v [4] nebo [43]. Následujme Ptolemaiův postup, který Aristarchovu nerovnost využil hned dvakrát:

$$\frac{\mathrm{tet}(1^\circ)}{\mathrm{tet}(0{,}75^\circ)} < \frac{1}{0{,}75} \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{tet}(1{,}5^\circ)}{\mathrm{tet}(1^\circ)} < \frac{1{,}5}{1}.$$

Po dosazení hodnot $\mathrm{tet}(0{,}75^\circ)$ a $\mathrm{tet}(1{,}5^\circ)$ dospěl Ptolemaios k odhadům



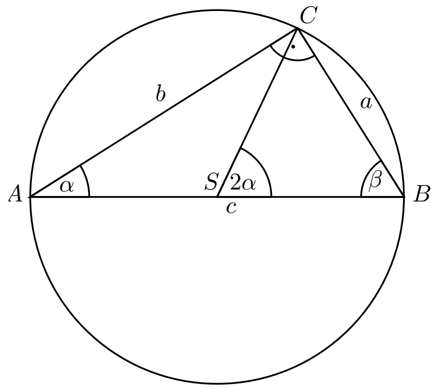
Obrázek 1.8

$$\mathrm{tet}(1^\circ) < 1^d 2\text{'}50\text{''} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{tet}(1^\circ) > 1^d 2\text{'}50\text{''}.$$

Jelikož je hodnota $\mathrm{tet}(1^\circ)$ zároveň menší a větší jak délka 1^d2'50" (vyšlo to tak, protože hodnoty $\mathrm{tet}(0{,}75^\circ)$ a $\mathrm{tet}(1{,}5^\circ)$ byly přibližné), mohl Ptolemaios zapsat poslední hodnotu, díky níž již byl schopen vyplnit celou tabulku délek tětiv – $\mathrm{tet}(1^\circ) = 1^d2$'50".

Nyní vylíčíme, jak mohl Ptolemaios pomocí své tabulky vyřešit jakýkoliv rovinný trojúhelník. Po vzoru Hipparcha budeme uvažovat trojúhelník vepsaný do kruhu. Popíšeme nyní pouze ten nejjednodušší případ, kdy zkoumaný trojúhelník ABC bude pravoúhlý. Nutno však poznamenat, že Ptolemaios si věděl rady i s obecnými trojúhelníky, a to výpočty ve dvou pravoúhlých trojúhelnících, které dostaneme, když původní trojúhelník rozdělíme některou jeho výškou na dvě části. Na tomto postupu se v pozdějších dobách budovala *novější trigonometrie* až do své současné podoby.

Z elementární geometrie víme, že přepona AB pravoúhlého trojúhelníku ABC z obr. 1.9 je průměrem opsaného kruhu a že $|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle BAC|$. Předpokládejme, že velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a délka přepony $c = |AB|$ jsou dány. Nejdříve vypočítáme 2α a použijeme tabulku k zjištění délky odpovídající tětivy BC. Jejikož Ptolemaiva tabulka předpokládá délku průměru $c = 120$, výsledek ještě musíme vynásobit zlomkem $\frac{c}{120}$. Tak dostaneme délku a odvěsny BC. Délku b druhé odvěsny AB pak spočítáme pomocí Pythagorovy věty a třetí úhel $\beta = |\sphericalangle ABC|$ snadno určíme z rovnosti $\beta = 90^\circ - \alpha$. Kdyby naopak byly dány strany a a c, zlomek $\frac{a}{c}$ nejprve vynásobíme číslem 120.



Obrázek 1.9

Teprve potom sáhneme po tabulce délek tětiv, kde budeme *obráceně* hledat velikost 2α, ze které pak po dělení dvěma určíme velikost α.

Ptolemaiův postup výpočtu můžeme zapsat ve tvaru vzorce

$$a = \frac{c}{120} \cdot \mathrm{tet}(2\alpha). \qquad (**)$$

To nás přivádí k zajímavému komentáři: násobení a dělení číslem 120 je v šedesátkové soustavě obdobné tomu, když násobíme a dělíme číslem 20 v desítkové soustavě. Provádíme to jednoduše tak, že po vynásobení nebo vydělení číslem 2 ještě posuneme desetinnou čárku o jedno místo doprava nebo doleva. Vzorec (∗∗) tudíž vyžaduje, abychom zdvojnásobili úhel, vyhledali ho v tabulce, délku odpovídající tětivy vydělili dvěma a nakonec posunuli šedesátinnou čárku. Bylo jen otázkou času, než někdo zkrátil tohle úmorné počítání sestavením jiné tabulky, která dvojnásobnému úhlu přiřazuje délku poloviční tětivy. Tento úkol, který dnes můžeme nazvat sestavením tabulky pro funkci sinus, splnili až učenci středověké Indie.

Dobytí Řecka Římem a řada jiných příčin postupně přivodily úpadek helénské kultury. Po Ptolemaiovi nevytvořili alexandrijští učenci v oblasti astronomie a trigonometrie, stejně jako v dalších vědních oborech, nic podstatného. Římská kultura také nebyla žádnou spásou, protože Římané nevymysleli v tomto období nového téměř nic, sami jen kopírovali to, co převzali od Řeků. Další rozvoj matematiky v oblasti trigonometrie je teprve spojován s národy Indů (od 5. stol. n. l.) a Arabů (od 7. stol. n. l.).

1.2 Středověký zrod trigonometrických veličin

Podle internetové encyklopedie Wikipedie je středověk tradiční označení dějinné epochy mezi koncem starověku a antické civilizace a začátkem novověku, které se poprvé objevilo v období renesance. Středověk je obvykle ohraničen pádem Západořímské říše v roce 476 a objevením Ameriky Kryštofem Kolumbem roku 1492 či zveřejněním 95 tezí Martinem Lutherem roku 1517.

Již dlouho před pátým stoletím našeho letopočtu se začala matematika rozvíjet na dalekém Východě – v Číně a Indii. Tato vývojová etapa dále pokračovala v arabských zemích, v Íránu a ve Střední Asii, později v Evropě a asi v 15. století až 16. století spěla ke svému konci.

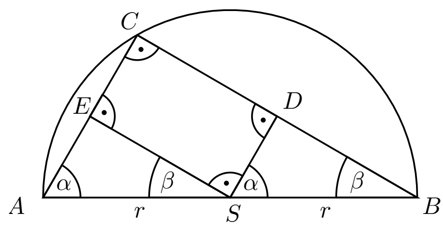
Přibližně tísíc let středověku prošly ať už existující či nově vznikající oblasti matematiky velkým vývojem (jazyk, pojmy, postupy, symbolika). Nejinak tomu bylo i v oblasti našeho zájmu, v trigonometrii. Tabulky tětiv, díky nimž byli starověcí astronomové schopni dopočítat úhly i délky stran pravoúhlého trojúhelníka, ustupovaly do pozadí. Objevovaly se vhodnější trigonometrické veličiny (jako například *sinus* nebo *tangens*), které byly po řadu staletí chápány jako *délky*, později jako *poměry*, *podíly čísel* (zlomky) a konečně jako *čísla*. I názvy a symboly pro nové trigonometrické veličiny prošly složitým vývojem. Málokdo ví, že až učenci raného novověku dali těmto veličinám označení, které přetrvalo až do dneška.

Velké uplatnění v astronomii a kartografii a potřeba stále přesnějších tabulek motivovaly mnohé středověké vzdělance k novým a stále hlubším zkoumáním, jaké obecné vlastnosti mají závislosti, které trigonometrické veličiny vyjadřují. Jejich výsledky pak na přelomu patnáctého a šestnáctého století vedly ke vzniku teorie goniometrických funkcí, které se analytickou cestou definitivně „odpoutaly“ od svých staletých nositelů – délek stran a velikostí úhlů trojúhelníků. Pro geometrické výpočty se význam těchto funkcí nijak nesnížil, ba naopak. Analytické prostředky tyto výpočty (nadále v praxi vysoce potřebné a žádané) ještě více zefektivnily.

Zaměříme se nyní na dvě asijské oblasti a uvedené nejdůležitější stránky vývoje středověké trigonometrie doplníme o konkrétní přínosy jednotlivých osobností. Přestože objektem našeho zájmu je především trigonometrie rovinná, nezapomeneme ani na trigonometrii sférickou, která byla rovněž intenzívně rozvíjena. Mnohá stěžejní díla té doby jsou provázaným výkladem metod výpočtů v rovinných i sférických trojúhelnících.

1.2.1 Trigonometrie v Indii

V oblasti trigonometrie se Indové opírali o práce helénistických autorů, ale přinesli také mnoho nového. Nejvíce čerpali z Ptolemaiova učení o délkách tětiv, které je popsané v části 1.1.2. Vzpomeňme, že jeho tabulka udává délku tětivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který vymezuje. Řešení libovolného rovinného trojúhelníku pomocí Ptolemaiovy tabulky bylo však velice zdlouhavé, což vedlo indické učence k zavedení nových trigonometrických veličin. První a nejdůležitější byla veličina *sinus*. Díky ní se již s tětivami při řešení trojúhelníků setkáváme velice málo, neboť poloviční délka tětivy oblouku φ je rovna sinu oblouku $\frac{\varphi}{2}$. Ilustrujme nyní poloviční délky tětiv v kružnici



Obrázek 1.10: Délky polovičních tětiv

o daném poloměru r pomocí obrázku 1.10. Za předpokladu, že poloměr kruhu se rovná jedné a při označení $\alpha = |\measuredangle BAC|$ definujeme po vzoru Indů veličiny *sinus* a *kosinus* příslušné úhlu α rovnostmi

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}|BC| = |BD| = |SE|, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}|AC| = |AE| = |SD|.$$

Po zavedení úhlu $\beta = |\measuredangle ABC| = 90° - \alpha$ okamžitě dostáváme rovnosti $\sin\beta = \cos\alpha$ a $\cos\beta = \sin\alpha$.

Je nutné zdůraznit, že těmto dvěma novým *délkovým* veličinám, které Indové používali pouze pro úhly z intervalu $\langle 0, 90^\circ \rangle$, říkáme dnešním způsobem *sinus* a *kosinus* a jejich hodnoty značíme $\sin\alpha$, resp. $\cos\alpha$, i když to je korektní pouze v případě poloměru $r = 1$. Sami Indové pro tyto veličiny měli své názvy, které následně prošly dlouhým historickým vývojem. Zmíníme se o něm o pár řádků níže.

Z provedené úvahy o dvojicích úhlů α, β z obr. 1.10 plyne, že sinus a kosinus jsou dva exempláře veličiny téhož druhu („poloviční tětivy“), což přesněji zapíšeme rovností

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Otázka zní, proč je tedy Indové vůbec rozlišovali a nevystačili si s jednou veličinou, jako si dříve Ptolemaios vystačil s $\operatorname{tet}\alpha$, délkou tětivy příslušnou středovému úhlu α? *Dvojice* sinus, kosinus umožnila Indům vyjadřovat jednodušeji vztahy mezi stranami a úhly pravoúhlého trojúhelníku a také různé důležité vzorce, jako například vztah pro „sinus poloviny oblouku“

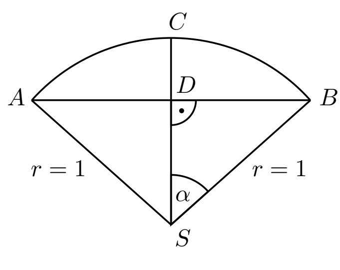
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r(r - \cos\alpha)}{2}}$$

či vzorce pro „sinus součtu a rozdílu“

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{r}, \qquad \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{r}.$$

(Pro nás neobvyklý jmenovatel r je namístě, neboť trigonometrické veličiny byly tehdy chápány jako *délky*.) Všechny tyto vztahy Indové popisovali slovně bez jakékoliv algebraické symboliky, navíc při poloměru r různém od 1. Představme si další komplikaci, kdybychom každé užití hodnoty $\cos\alpha$ museli nahradit popisem výpočtu $\sin(90^\circ - \alpha)$, nejčastěji zřejmě pomocí výrazu $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$! Další historie matematiky ukázala, že zrod indických „dvojčat“ sinus a kosinus byl opravdu šťastnou událostí – díky nim dnes elegantně vyjadřujeme nejenom třeba sinovou a kosinovou větu z planimetrie trojúhelníku, ale také hodnoty exponenciální funkce v oboru komplexních čísel.

Je překvapující, že podle [47] v dobách středověkých považovali matematici za druhou (po sinu) nejdůležitější trigonometrickou veličinu nikoliv kosinus, ale dnes již téměř zapomenutý *sinusversus*, délku úsečky *mezi tětivou a obloukem*. Za předpokladu $r = 1$ a při označení $\alpha = \frac{1}{2}|\measuredangle ASB|$ je veličina sinusversus příslušná úhlu α znázorněna na obr. 1.11 délkou úsečky CD, tedy $\operatorname{sinvers}\alpha = |CD|$. Význam této veličiny byl v řadě trigonometrických aplikací větší než význam kosinu, neboť např.



Obrázek 1.11: Délka sinusversus

v zeměměřictví a stavitelství odedávna patřily k základním početním údajům *výšky úsečí* a *vzepětí oblouků* (angl. *versed sines*). I když podle obrázku 1.11 zřejmě platí

$$\operatorname{sinvers}\alpha = |CD| = |SC| - |SD| = 1 - \cos\alpha,$$

i tento jednoduchý převodní vztah by v namáhavé praxi středověkých výpočtů znamenal další (tedy nežádoucí) početní operaci (o to více komplikovanou v pozdější epoše výpočtů s logaritmy). Proto byly hodnoty $\operatorname{sinvers} \alpha$ tabelizovány, zejména pro malá α s přesností větší než hodnoty sinů a kosinů, protože bylo navíc zásadní otázkou, nakolik se hodnota $\operatorname{sinvers} \alpha$, řádově menší než $\sin \alpha$, přibližuje k nule. V dnešní počítačové době ztratily tyto numerické argumenty svoji váhu, a tak funkci $1-\cos \alpha$ nadále nějak pojmenovávat zcela pozbylo smyslu.

Jak jsme v předchozím slíbili, promluvíme krátce o etymologickém vývoji termínů sinus, kosinus a sinusversus. S těmito veličinami (ovšem pod jinými názvy) se setkáváme již v anonymních astronomických dílech *Siddhántas* a také ve veršovaném astronomickém a matematickém traktátu *Árjabhattíja*, který byl sepsán roku 499 třiadvacetiletým Árjabhattou. Árjabhatta zde používal slovo *arddhadžíva* pro délku poloviny tětivy – pro veličinu sinus. Později zkrátil název na pouhé *džíva*. Když arabští učenci přeložili dílo *Árjabhattíja*, indický termín změnili na *džiba*, následně na skutečné arabské slovo *džaib*, tj. ňadra, výstřih, vypuklost atd. Ve dvanáctém století bylo při překladu z arabštiny do latiny použito slovo *sinus*, které mělo týž základní význam jako *džaib*. Zkrácený zápis *sin* se poprvé objevil u anglického profesora astronomie Edmunda Guntera (1581 – 1626).

Veličinu kosinus nazýval Árjabhatta *kótidžíva*, tj. sinus zbytku (doplňku do 90°). Slovo *kótidžíva* bylo přeloženo do arabštiny jako *džaib al-tamam* a následně do latiny ve dvanáctém století jako *sinus residui*. V patnáctém století se objevuje u Peurbacha (1423 – 1461) a Regiomontana (1436 – 1476) označení *sinus complementi*, tj. sinus doplňku, ze kterého s největší pravděpobodností vznikl záměnou pořadí a zkrácením náš dnešní *cosinus*, který Edmund Gunter na přelomu šestnáctého a sedmnáctého století zapisoval jako *co.sinus*. Zkratka *cos* se poprvé objevila roku 1674 u anglického matematika a geometra Jonase Moora (1617 – 1679).

Slovem *utkramadžíva* nazývali Indové sinusversus. Když ve dvanáctém století začali učenci používat latinské termíny všech trigonometrických veličin, mezi nimiž byl i *sinusversus*, pro termín sinus (aby ho odlišili od sinusversu) měli název *sinus rectus*, tj. přímý sinus a poloměr kružnice nazývali *sinus totus*, tj. úplný sinus. Tento poslední termín se udržoval v evropských dílech věnovaných trigonometrii až do dob Eulera, který svými pracemi definitivně prosadil pro poloměr trigonometrické kružnice hodnotu $r = 1$.

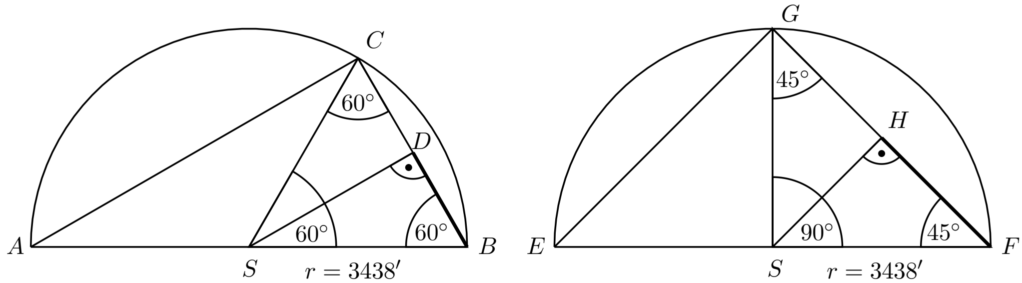
Při hodnocení přínosu indických vědců pro trigonometrii nesmíme zapomenout na tabulky trigonometrických veličin, bez kterých by byla tato věda prakticky nepoužitelná. První tabulka sinů a sinusversů se nalézá v anonymní astronomické práci ze 4. a 5. století *Súrja Siddhánta* a v díle *Árjabhattíja*. V práci *Árjabhattíja* jsou uvedeny hodnoty obou těchto veličin pro úhel $3{,}75° = 225'$ a jeho celočíselné násobky. Porovnáním s tabulkami od Ptolemaia můžeme konstatovat, že první indické tabulky nedosahovaly přesnosti Ptolemaiova *Almagestu*.

Dříve než se zaměříme na způsob výpočtu tabulek, promluvíme o jisté zvláštnosti *míry* (jednotek, ve kterých tyto délky vyjadřujeme celými čísly nebo zlomky) trigonometrických veličin. Stejně jako ve starověkém Řecku, také Indové dělili kruh na 360 stupňů neboli 21600 (úhlových) minut. Vzpomeňme na Ptolemaia, který průměr kruhu rozdělil na 120 stejných jednotkových dílů (délky 1^d), takže poloměr kruhu měl velikost $r = 60^d$. Těmito díly a jejich šedesátinnými zlomky potom Ptolemaios vyjadřoval délky tětiv. Většina indických vědců však stejnou míru u trigonometrických veličin nepoužívala, ne jinak tomu bylo u autorů již zmíněných *Siddhántás* a *Árjabhattíja*. Ti šli ve stopách Hipparcha. Zda se jim více zamlouvaly Hipparchovy myšlenky, nebo se jim Ptolemaiův *Almagest* do rukou dostal později než spisy Hipparchovy, se můžeme jen domýšlet. Hipparchos vyjadřoval trigonometrické veličiny a délky oblouků pomocí stejné jednotky – uváděl je v (úhlových) minutách. Tuto jednotku délky určil tak, že položil poloměr kruhu rovný 3438 minutám ($r = 3438'$). K tomuto číslu patrně dospěl ze vzorce pro obvod kruhu $o = 2\pi r = 360° = 360 \cdot 60'$. Pro zajímavost ze vzorce vyjádříme a pro hodnotu $r = 3438'$ vyčíslíme konstantu π:

$$\pi = \frac{21600'}{2r} = \frac{21600'}{2 \cdot 3438'} = 3{,}141361\ldots$$

Vidíme, že chyba je až na místě desetitisícin.

Způsob, jakým indičtí učenci tabulky sestavovali, není nikde autenticky popsán. S největší pravděpodobností po vzoru Hipparcha nejdříve zjistili hodnoty $\sin 90°$, $\sin 30°$ a $\sin 45°$. Hodnota $\sin 90° = 3438'$ byla zřejmá, jelikož je to právě polovina délky tětivy oblouku o velikosti 180°, tedy poloměr r. Hodnota $\sin 30° = 1719'$ je poloviční délka poloměru a hodnota $\sin 45° = 2431'$ byla spočítána z Pythagorovy věty pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, viz obr. 1.12. Následně



Obrázek 1.12: $\sin 30° = |BD|$ a $\sin 45° = |FH|$

hodnoty sinů pro další úhly do tabulek Indové doplnili pomocí jim známého vztahu pro sinus polovičního oblouku (který jsme uvedli výše), až dospěli k hodnotě $\sin 3{,}75°$. Poté počítali siny doplňků těchto úhlů a polovin těchto doplňků atd.

Do 12. století žádný indický astronomický text neobsahoval tabulky trigonometrických veličin pro úhly menší než 3,75°. Podstatně přesnější tabulky sinů s nejmenším úhlem 1° sestavil až Bháskara (1114 – ?), který počítal se stejnou hodnotou poloměru $r = 3438'$ a položil $\sin 1° = 60'$. Využil tedy přiblížení $\sin\alpha \approx \alpha$, které, jak je známo, platí pro malá α právě v obloukové míře.

Praktické úlohy, které Indové řešili, byly věnované měření vzdáleností a výšek pomocí vertikální tyče – gnómonu a pomocí podobnosti. Gnómon a jeho projekce (stín) tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, vedou tedy k trigonometrickým úlohám. Početní stránka těchto úloh předcházela zavedení veličin *tangens* a *kotangens*. Setkáváme se však s nimi až v první polovině 9. století v dílech učenců arabského chalifátu.

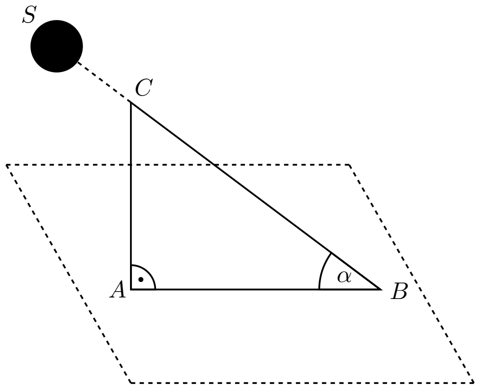
1.2.2 Trigonometrie v arabských zemích

Arabská matematika byla nejvíce ovlivněna matematikou mezopotámskou, řeckou a indickou. Z indické matematiky převzala zápis čísel a algoritmy pro písemné počítání, z řecké matematiky abstraktní geometrii a myšlenku axiomatické výstavby matematiky, z mezopotamského a egyptského světa převzala tradici numericky náročných výpočtů a především důraz na užití matematiky v praktickém životě. Desítkový poziční systém pronikal pomalu na Blízký východ a byl používán vedle domácích systémů.

Pro rozvoj matematiky měla základní význam hlavní přírodní věda té doby – astronomie. Není tedy divu, že stejně jako v Indii, rovněž v islámských zemích byli matematikové většinou i astronomy. Článkem, který spojoval matematiku a astronomii, byla právě trigonometrie.

Základ arabských trigonometrických znalostí tvořila díla předchůdců starších kultur – jedna z indických *Siddhántas*, Ptolemaiův *Almagest* a Menelaova *Sférika*. Inspirováni jejich výsledky a metodami zavedli arabští učenci některé nové trigonometrické pojmy, prozkoumali vlastnosti trigonometrických veličin a vyřešili všechny případy rovinných a sférických trojúhelníků. Tím postupně propracovali trigonometrii jako samostatnou oblast matematiky.

Přistupme k tomu hlavnímu, čím konkrétním přispěli arabští učenci k rozvoji trigonometrie – zavedli nové veličiny *tangens*, *kotangens* a také *sekans* a *kosekans*. Tyto trigonometrické veličiny se



Obrázek 1.13: Svislá tyč a její stín

v islámských dílech objevily v devátém století v souvislosti s gnómonikou, tedy nikoli v souvislosti s tětivami a oblouky vztahujícími se ke kruhu, jak tomu bylo u veličin sinus a kosinus. Na obrázku 1.13 vidíme Slunce S a tyč AC kolmou k povrchu Země. Tyč AC vrhá stín AB, z jehož konce B je vrchol C tyče vidět pod výškovým úhlem, který označíme α. Za předpokladu, že $|AC| = 1^\circ = 60^{'}$, závisí délka stínu $|AB|$ i délka $|BC|$ slunečního paprsku mezi body B a C pouze na úhlu α. Tyto dvě Araby zavedené veličiny dnes nazýváme *kotangens*, respektive *kosekans*:

$$\operatorname{cotg} \alpha = |AB|, \qquad \operatorname{cosec} \alpha = |BC|.$$

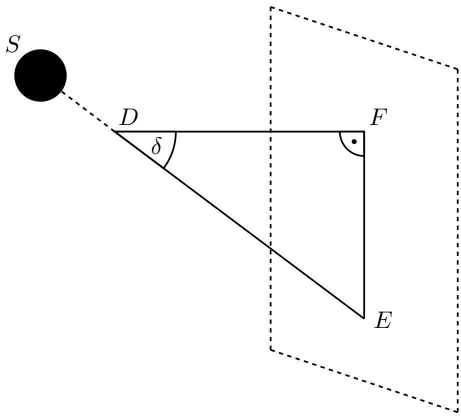
Veličiny tangens a sekans definovali arabští učenci podobně. Tentokrát upevnili tyč DF kolmo na svislou zeď, aby byla vodorovná, tj. rovnoběžná se zemským povrchem (viz obr. 1.14). Tyč DF vrhá stín EF. Z vrcholu tyče D je konec E stínu vidět pod úhlem, který označíme δ. Za předpokladu, že $|DF| = 1^\circ = 60^{'}$, závisí délka stínu $|EF|$ i délka $|DE|$ slunečního paprsku mezi body D a E pouze na úhlu δ. Tyto dvě veličiny dnes nazýváme *tangens*, respektive *sekans*:

$$\operatorname{tg} \delta = |EF|, \qquad \sec \delta = |DE|.$$

Ještě jednou poznamenejme, že ve středověkých arabských zemích byly trigonometrické veličiny délky (kotangens se nazýval *prvním*, tangens *druhým stínem*), jejichž mírou byly (obloukové) stupně. Dnes jsou to samozřejmě čísla. Zdůrazněme, že Arabové tyto veličiny přiřazovali pouze úhlům z intervalu $\langle 0, 90^\circ \rangle$.

Systematický výklad všech nových trigonometrických veličin (sin, cos, sinvers, tg, cotg, sec, cosec) najdeme v astronomické práci *Zdokonalení Almagestu*, napsané již koncem 9. století al-Battáním. Je v ní odvozena řada vztahů, mezi nimi vyjádření tangens a kotangens pomocí poměrů sinu a kosinu ve tvaru

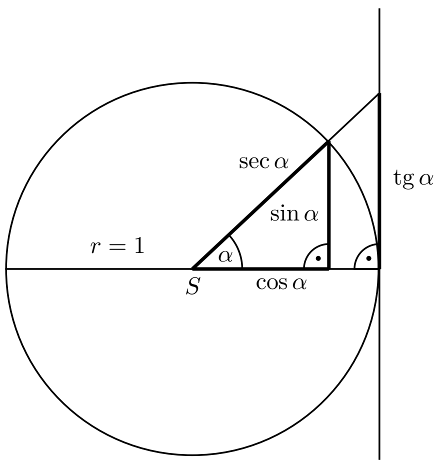
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad \text{a} \qquad \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{r} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$



Obrázek 1.14: Vodorovná tyč a její stín

(Znovu upozorňujeme na neobvyklý jmenovatel r.) Přes tyto dva jednoduché převodní vztahy veličiny tangens a kotangens neztratily svůj význam, naopak našly rychle mnohá uplatnění i mimo gnómoniku (zejména v astronomii), takže tabulky jejich hodnot byly velmi potřebné.

Asi sto let po *Zdokonalení Almagestu* se objevily ještě propracovanější základy trigonometrie v *Knize dokonalosti* astronoma Abu'l-Wafy (940 – 997), který v ní definoval (patrně historicky



Obrázek 1.15: Trigonometrické veličiny na jednotkové kružnici

poprvé) všechny trigonometrické veličiny jednotně pomocí kružnice způsobem, který je nám dobře znám a který je pro ostrý úhel α znázorněn na obr. 1.15. Je na něm také krásně vidět původ termínů tangens a sekans, které pocházejí z latiny a které se objevily v Evropě až v 16. a 17. století. Výraz tangens totiž v doslovném překladu znamená „dotýkající se, tečný“ a termín sekans má české synonymum „protínající, sečný“.

S použitím trigonometrie se nesetkáváme u islámských autorů jen v oblasti astronomie, ale také v matematické geografii u perského kartografa a cestovatele al-Bírúního (973 – 1048). Jeho dílo o jedenácti knihách *Masúdovský kánón* zaujímá velmi důležité místo v historii trigonometrie. Je jí totiž věnována celá třetí kniha. Al-Bírúní zde nejdříve pro $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ spočítal délky stran pravidelných n-úhelníků vepsaných do kružnice o daném poloměru a následně při $n = 9$ pro tuto délku odvodil kubickou rovnici. Dále se věnoval důkazům vět o délkách tětiv, které jsou ekvivalentní větám o sinu součtu a rozdílu dvou úhlů, sinu dvojnásobku úhlu, sinu poloviny úhlu atd. Mimo jiné al-Bírúní také vyvinul nové metody přibližných výpočtů hodnot jako je např. $\text{tet}\,1° = 2\sin 0{,}5°$, kterou využil k sestavení velmi přesných tabulek hodnot sinů a tangens, mimochodem jedněch z prvních, které jsou vypočteny pro poloměr $r = 1$. Tento výběr al-Bírúní komentuje přáním zbavit se neustálého dělení a násobení šedesáti. Poznamenejme, že v Evropě to ve 14. století byl Thomas Bradwardinus, který jako první doporučil brát délku poloměru $r = 1$.

Nejznámější orientální učenec v oblasti trigonometrie byl Nasír ad-Dín at-Túsí (1201 – 1274) se svým hlavním dílem o pěti knihách *Traktát o úplném čtyřstranu*. Je to první práce, ve které již trigonometrie nebyla pouhým pomocníkem astronomie, ale ve které se učení o řešení trojúhelníka považuje za samostatnou oblast matematiky. At-Túsí ve svém díle vybudoval první skutečně úplnou a celistvou soustavu rovinné i sférické trigonometrie od základních pojmů a vztahů až k algoritmům řešení všech typických úloh. O rovinné trigonometrii pojednává pouze třetí z pěti knih. Můžeme se v ní například setkat s úlohou vyjádřenou dvojicí rovnic

$$x \pm y = d \qquad \text{a} \qquad \frac{\sin x}{\sin y} = p,$$

kde x a y jsou neznámé úhly, d daný úhel a p dané číslo. K těmto soustavám, kterým se dnes říká *Snellovy*, se vrátíme v kapitole 4 při řešení příkladu 4.5.1.

Podívejme se nyní, jaké nové početní postupy vyvinuli arabští učenci pro sestavování tolik potřebných trigonometrických tabulek, které byly zahrnovány do tzv. „zídž“, což bychom přeložili jako sbírky tabulek pro astronomy a geografy. Nejstarší dochované arabské trigonometrické tabulky z 9. století (jedny sestavené al-Chwárizmím, druhé al-Habašem) byly jako i u většiny pozdějších arabských autorů vyčísleny pro poloměr $r = 60$ a z hlediska metod i přesnosti byly srovnatelné s tabulkami Ptolemaia. Ten, jak jsme dříve podrobně popsali, klíčovou hodnotu $\text{tet}\,1°$ získal z hodnot $\text{tet}\,0{,}75°$ a $\text{tet}\,1{,}75°$ postupem, jehož meze přesnosti odpovídají tomu, že na intervalu $\langle 0{,}75°; 1{,}75° \rangle$ nahradíme funkci $\alpha \mapsto \text{tet}\,\alpha$ funkcí lineární. S novátorstvím v tomto ohledu přišel až Abu'l-Wafá, který v již vzpomenuté *Knize dokonalosti* pro svou tabulku sinů s krokem $0{,}25°$ provedl výpočet klíčové hodnoty $\sin 0{,}5°$ nikoliv ze dvou, ale tří blízkých hodnot $\sin\alpha$, a to pro úhly α rovné ve stupních zlomkům $\frac{12}{32}$, $\frac{15}{32}$ a $\frac{18}{32}$. Tyto tři hodnoty sinů je možné určit ze vzorců pro sinus rozdílu a sinus polovičního úhlu a ze známých hodnot sinu, a to díky rovnostem $12 = 72 - 60, 15 = 45 - 30, 18 = 36 : 2$ a díky tomu, že platí $32 = 2^5$. Na základě pravidla

$$0° < \alpha < \beta < \beta + \delta < 90° \Rightarrow \sin(\alpha + \delta) - \sin\alpha > \sin(\beta + \delta) - \sin\beta,$$

které je geometricky dokázáno v [5, str. 305] a které vyjadřuje, že funkce sinus je na intervalu $(0°; 90°)$ konkávní, pak Abu'l-Wafá získal odhady

$$\sin\alpha + \frac{\sin(\alpha + 3\delta) - \sin\alpha}{3} < \sin(\alpha + \delta) < \sin\alpha + \frac{\sin\alpha - \sin(\alpha - 3\delta)}{3},$$

které ho volbou $32\alpha = 15°$ a $32\delta = 1°$ po dlouhých a náročných výpočtech přivedly k hodnotě $\sin 0{,}5°$ s obdivuhodnou přesností (řádově 10^{-8}).

Zdůrazněme, že jak Ptolemaiův, tak i Abu'l-Wafův postup určování klíčové hodnoty ze dvou či tří vstupních hodnot má přesnostní bariéru: klíčovou hodnotu nemůžeme výpočtem dostat s libovolnou přesností (na které by mohla záviset délka výpočtů), i kdybychom měli vstupní hodnoty sebepřesnější. Je pozoruhodné, že později al-Bírúní v 11. století a Marjám Čelebí v 15. století popsali postupy, kterými lze tuto bariéru překonat. Popíšeme v samotném závěru této části podstatu výpočtu Marjáma Čelebího (metodu však vymyslel jeho dědeček al-Kaší, jehož dílo se však nedochovalo), protože je zajímavě spojena s úlohou o trisekci libovolného úhlu a numerickým řešením kubických rovnic.

Marjám Čelebí nejprve poměrně snadno vypočetl (jedinou!) vstupní hodnotu $v = \sin 3°$, kterou lze s libovolnou přesností určit z hodnot sin 72° a sin 60°. Klíčovou hodnotu $x = \sin 1°$ pak Čelebí počítal ze vztahu

$$4 \sin^3 1° + \sin 3° = 3 \sin 1°,$$

tedy cestou řešení kubické rovnice $4x^3 + v = 3x$ s parametrem v. K numerickému výpočtu kořenů podobných rovnic vymyslel al-Kaší jednoduchý iterační algoritmus se zaručenou konvergencí k hledanému kořenu ([5, str. 317–318]). Dnes je patrné, že uvedený vztah mezi hodnotami sin 3° a sin 1° je okamžitým důsledkem vzorce pro sinus trojnásobného úhlu

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

který ovšem takto trigonometricky patrně zapsal až F. Viète. Marján Čelebí ovšem získal vztah hodnot sin 3° a sin 1° z tzv. rovnice pro trisekci úhlů ([5, str. 314–316]), tedy rovnice pro slavnou antickou úlohu o rozdělení libovolného úhlu na tři menší shodné úhly, která byla známa v arabských zemích od 11. století. Konkrétním výpočtem dosáhl Čelebí hodnoty sin 1° s přesností 10^{-10}.

Stejně jako matematici islámských zemí převzali vše již objevené od Indů, Řeků, Syřanů a Babylóňanů, tak i učenci středověké Evropy, než začali sami svými příspěvky obohacovat vědu, sáhli nejdříve po písemnostech předchozích kultur. Mohli tak začít stavět své výsledky na pevném základě.

1.3 Trigonometrie v Evropě 15. – 17. století

Po šesti stoletích vědecky neplodného raného středověku (konec 5. až začátek 12. století), kdy se evropští učenci zabývali výhradně náboženskými a scholastickými úvahami, nastalo v Evropě postupné oživování věd a umění, které bylo spojeno se vznikem městské kultury. V době obchodních výprav a křižáckých válek se Evropané seznámili nejen s vymoženostmi východní kultury, ale i s kulturními poklady dávno zapomenutého antického světa. To vše dalo mohutný podnět k samostatné tvůrčí činnosti evropských učenců. Pozvolna začíná jedno z nejkrásnějších a na památky nejbohatších období v dějinách Evropy – renesance.

Neopomenutelný význam pro rozvoj matematiky měly překlady z řečtiny a arabštiny do jazyka latinského, který se stal společným pro všechny západoevropské učence té doby. Například do latiny přeložený Ptolemaiův *Almagest* (z řečtiny i arabštiny) mohli středověcí evropští matematici a astronomové studovat již ve druhé polovině 12. století.

Podoba a přehlednost trigonometrických tabulek ve středověké Evropě byly závislé na způsobu zapisování čísel a jejich vyjadřování zlomky. S naší moderní desítkovou poziční soustavou a s indo-arabskými číslicemi byla Evropa seznámena v 8. století. Tento indo-arabský systém nebyl ihned přijat širokou veřejností, která dávala přednost zápisům čísel pomocí římských číslic. Nicméně evropští učenci vnímali výhodu nového systému a nadšeně ho obhajovali. Hlavně díky výkladu o indo-arabských číslicích v díle *Liber abaci* (1202) od Leonarda Pisánského získala desítková poziční soustava všeobecnou podporu ve vědeckých kruzích.

První trigonometrické tabulky využívající nového systému byly sestaveny okolo roku 1460 rakouským astronomem a matematikem Georgem Peurbachem (1423 – 1461). Narozdíl od Ptolemaia, který položil poloměr kruhu r rovný 60 jednotkám a následně délky tětiv vyjadřoval pomocí šedesátinných zlomků, Peurbach kombinoval systém o základu šedesát se systémem o základu deset. Zvolil poloměr kruhu $r = 600\,000$ jednotek a hodnoty trigonometrických veličin vyjadřoval celými čísly v desítkovém systému. Peurbachův žák Regiomontanus, o němž se více zmíníme v této podkapitole, nejdříve zvětšil poloměr kruhu na $r = 6\,000\,000$, ovšem velice brzy se šedesátkového systému vzdal a roku 1467 sepsal první čistě desetinné trigonometrické tabulky při poloměru kruhu $r = 10^7$. Hodnoty trigonometrických veličin byly opět zapisovány celými čísly. Při přechodu od $r = 10^7$ ke konečnému $r = 1$, jak je tomu dnes, se význam těchto tabulek neztratil: zapsaná celá čísla se stala čitateli desetinných zlomků (desetinná čárka se posunula o sedm míst doleva). Ke skutečnému přechodu k desetinným zlomkům dospěl ve svých trigonometrických tabulkách až F. Viète. Pro zajímavost uvedeme Viètův zápis hodnoty jedné z goniometrických veličin (při $r = 10^5$):

$$\sin 60^\circ = 86{,}602|540{,}37.$$

Svislá čára odděluje čitatele zlomku od celého čísla (jmenovatele Viète vynechává) a čárky slouží k seskupování řádů od nuly vždy po třech. Dnes bychom jeho výsledek zapsali smíšeným číslem ve tvaru $\sin 60^\circ = 86602\frac{54037}{10^5}$.

Až do 16. století stáli u rozvoje trigonometrie hlavně astronomové. Není tedy žádným překvapením, že jím byl i vynikající německý matematik Johannes Müller alias Regiomontanus (1436 – 1476), který napsal dílo *O trojúhelnících všelikých knih patero* – první evropskou práci, v níž byla trigonometrie chápána jako samostatná matematická disciplína. V této významné práci, která se skládala z pěti knih, Regiomontanus metodicky uspořádal trigonometrické znalosti Ptolemaia a indických a arabských učenců. První kniha začíná zavedením základních pojmů. Funkce sinus je zde uvedena po vzoru indické definice. Ta pravá trigonometrie (tedy řešení obecných trojúhelníků) se objevuje až v knize druhé. Sinová věta, stejně tak jako všechna ostatní pravidla, je uvedena pomocí slovních spojení, nikoli v symbolech. Objevuje se zde také poprvé vzorec pro obsah S trojúhelníka ABC ve tvaru

$$S = \frac{bc\sin\alpha}{2}.$$

Je neobvyklé, že Regiomontanus nikdy nepoužil funkci tangens, přestože ji musel znát, ať už od svého blízkého přítele Peurbacha, nebo z arabských výpočtů stínů.

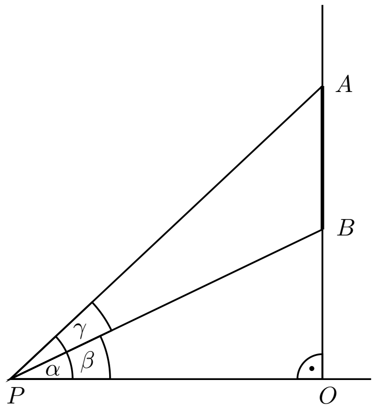
Zbývající tři knihy pojednávají o sférické geometrii a trigonometrii – obou nezbytných nástrojích astronomie. Regiomontanus celé dílo dokončil roku 1464, avšak publikováno bylo až roku 1533.

Nyní se zmíníme o jedné Regiomontanově úloze, v níž se hledá maximum. Byla to mimochodem první úloha tohoto druhu od dob starořecké matematiky. Jelikož žil Regiomontanus dvě stě let před objevením diferenciálního počtu, problém řešil elementární metodou. Zadání zní: Tyč AB dané délky je zavěšena svisle tak, že se nedotýká podlahy. Vzdálenost mezi spodním koncem tyče B a podlahou je dána délkou úsečky BO (viz obr. 1.16). Otázka zní: V jaké vzdálenosti od bodu O se nachází na podlaze bod P, z něhož je tyč vidět pod největším úhlem γ?

Regiomontanus pro své řešení vyjádřil poměr $\cos\gamma : \sin\gamma$ (veličiny tangens a kotangens nepoužíval) ve tvaru součtu dvou zlomků, který bychom dnes pomocí vzorce pro kotangens rozdílu úhlů α, β z obrázku odvodili takto:

$$\operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\frac{|PO|}{|AO|}\frac{|PO|}{|BO|}+1}{\frac{|PO|}{|BO|}-\frac{|PO|}{|AO|}} = \frac{|PO|}{|AO|-|BO|} + \frac{|AO|\cdot|BO|}{(|AO|-|BO|)\cdot|PO|}.$$

Největší možný úhel γ odpovídá nejmenší možné hodnotě $\operatorname{cotg}\gamma$. Základem dalšího Regiomontanova postupu pro odhad součtu dvou zlomků byla užitečná nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým



Obrázek 1.16: Extremální Regiomontanova úloha

průměrem dvou kladných čísel u a v. Tato nerovnost $\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{u \cdot v}$ se stane rovností právě tehdy, když kladná čísla u a v jsou si rovna. Položíme-li $u = \frac{|PO|}{|AO|-|BO|}$ a $v = \frac{|AO|\cdot|BO|}{(|AO|-|BO|)\cdot|PO|}$, obdržíme

$$\operatorname{cotg}\gamma = u + v \geq 2\sqrt{u \cdot v} = 2\sqrt{\frac{|PO|}{|AO| - |BO|} \cdot \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO| - |BO|) \cdot |PO|}} = \frac{2\sqrt{|AO| \cdot |BO|}}{|AO| - |BO|}.$$

Nejmenší hodnota $\operatorname{cotg}\gamma$ tedy nastane, když bude platit $u = v$:

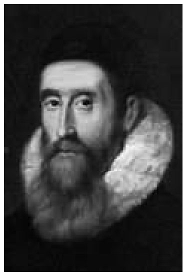
$$\frac{|PO|}{|AO| - |BO|} = \frac{|AO| \cdot |BO|}{(|AO| - |BO|) \cdot |PO|},$$
$$|PO| = \sqrt{|AO| \cdot |BO|}.$$

Hledaný bod P je umístěn od bodu O ve vzdálenosti, která je rovna geometrickému průměru výšek bodů A a B měřených od podlahy. V geometrické interpretaci je takový bod P bodem kružnice, která prochází koncovými body A, B tyče a dotýká se přímky podlahy právě v bodě P. Výsledek rovinné úlohy se svislou tyčí se pro Regiomontana stal rovněž motivací pro další velice zajímavou, tentokrát prostorovou úlohu o nalezení nejpříznivější pozice pro pohled do daného okna budovy.

V první polovině 17. století se o podstatný přínos pro praxi trigonometrických výpočtů zasloužil anglický matematik John Napier (1550 – 1617), když roku 1614 objevil logaritmy. Myšlenka zavedení logaritmů má své kořeny právě u výpočtů podle trigonometrických vzorců, a to ve snaze převést součin či podíl trigonometrických veličin na jejich součet nebo rozdíl. Astronomové si totiž uvědomili, že počítání bude jednodušší a kratší, když hledané součiny a podíly vypočítají pomocí sčítání a odčítání.

Dnes mluvíme o logaritmech jako o funkcích jejich základu a logaritmovaného čísla. Hlavním zájmem Napierovy doby však bylo sestavení logaritmických tabulek. Mezi všemi průkopníky byl John Napier (autor samotného termínu „logaritmus“) první, který sestavil tabulky logaritmů hodnot sinů.[1] Znovu připomeňme, že ještě v 17. století byly hodnoty sinu stále chápány jako délky. Aby

[1] O významu trigonometrických výpočtů v tehdejší době svědčí i skutečnost, že přímé tabulky logaritmů čísel (a ne sinů) se objevily až o několik let později.



Obrázek 1.17: John Napier

dostal Napier požadovanou přesnost, položil $\sin 90° = r = 10^7$ (stejně jako Regiomontanus). Na ukázku uvedeme jeden řádek z Napierovy tabulky, která sestává ze sedmi sloupců.

34°40'	5 688 011	5 642 242	3 687 872	1 954 370	8 224 751	55°20'

První sloupec udává velikost úhlu α, druhý hodnotu sinu pro daný úhel α. V posledním sloupci se dočteme velikost úhlu doplňkového $(90° - \alpha)$ a v předposledním hodnotu $\sin(90° - \alpha)$, což je hodnota $\cos\alpha$ (hodnoty sinu a kosinu jsou tedy přirozená čísla menší než 10^7). Třetí resp. pátý sloupec uvádí tzv. Napierovy logaritmy sinu ze druhého resp. kosinu ze šestého sloupce. Podle této (dnes již zapomenuté) konstrukce se „logaritmem“ čísla x nazývalo číslo $y = \mathrm{NapLog}\, x$ určené rovností $x = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^y$. Konečně prostřední sloupec udává hodnotu rozdílu zápisů ve třetím a pátém sloupci, rovnou hodnotě Napierova logaritmu pro tangens úhlu v prvním sloupci:

$$\mathrm{NapLog}(\sin\alpha) - \mathrm{NapLog}(\cos\alpha) = \mathrm{NapLog}\left(10^7 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \mathrm{NapLog}(\mathrm{tg}\,\alpha).$$

(Pro rozdíl Napierových logaritmů platí pro nás méně obvyklý vzorec $\mathrm{NapLog}(a) - \mathrm{NapLog}(b) = \mathrm{NapLog}(10^7 \cdot \frac{a}{b})$. O činiteli r ve vztahu $\mathrm{tg}\,\alpha = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ jsme psali v části 1.2.2.) Jednotlivé řádky Napierovy tabulky odpovídají hodnotám úhlu α s krokem 1 minuta.

Pro zajímavost numericky ověříme hodnotu z třetího sloupce uvedeného řádku Napierovy tabulky:

$$y = \mathrm{NapLog}(5\,688\,011) \Leftrightarrow 5\,688\,011 = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^y.$$

Poslední rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé y:

$$y = \frac{\ln \frac{10^7}{5\,688\,011}}{\ln \frac{10^7}{10^7 - 1}}.$$

Jmenovatel posledního zlomku je velmi malé kladné číslo:

$$\ln \frac{10^7}{10^7 - 1} = \ln\left(1 + \frac{1}{10^7 - 1}\right) \doteq \frac{1}{10^7 - 1} \text{ podle vzorce } \ln(1 + x) \doteq x,$$

takže pro hodnotu $y = 5\,642\,242$ z Napierovy tabulky nám vychází

$$y \doteq (10^7 - 1) \cdot \ln \frac{10^7}{5\,688\,011} \doteq 5\,642\,244.$$

Další postava z přelomu 16. a 17. století, která se zasloužila o přetvoření celé matematiky, a tedy i trigonometrie, do podoby, jak ji známe dnes, není nikdo jiný než velký francouzský aritmetik

Obrázek 1.18: Francois Viète

a algebraik, ale také geometr a především velký právník a advokát, Francois Viète (1540 – 1603). Jeho nejdůležitější dílo *Úvod do analytického umění* z roku 1591 je považováno za nejrannější práci o symbolické algebře, ve které se čtenář seznamuje se systémem zápisu matematických vztahů, který odpovídá tomu našemu dnešnímu. Známé veličiny Viète označuje souhláskami a neznámé samohláskami, rovnici definuje jako porovnání neznámé veličiny s veličinou pevně danou a podává základní pravidla pro řešení rovnic. Tento Viètův přínos – přechod od slovní k symbolické algebře – je jeden z nejdůležitějších počinů v historii matematiky.

Nás ovšem především zajímá Viètův přínos v oblasti trigonometrie. Stejně tak jako byl Viète úspěšným zakladatelem symbolické algebry, může být také oprávněně nazýván otcem celkového analytického přístupu k trigonometrii. Ve svém díle *Canon mathematicus* z roku 1579 zhotovil rozsáhlé tabulky všech šesti trigonometrických veličin pro úhly blízké jedné minutě. Viète v nich dal přednost desetinným zlomkům před šedesátinnými. Aby se ovšem vyhnul zápisům tisíců zlomků, vybral si pro tvorbu sinových a kosinových tabulek hodnotu $r = \sin 90^\circ = 100\,000$.

Při řešení ostroúhlých trojúhelníků Viète objevil tvrzení ekvivalentní tangentové větě, o které pojednáme v podkapitole 3.5 a kterou dnes zapisujeme vzorcem

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

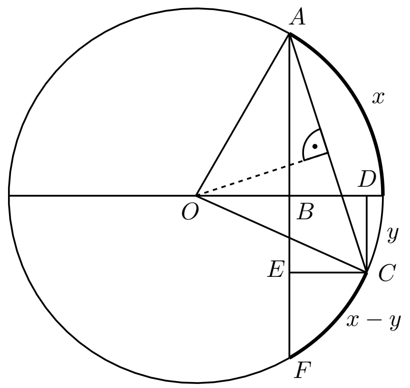
a která měla po staletí velký význam, neboť narozdíl od kosinové věty umožnila při trigonometrických výpočtech užívat logaritmy. Ačkoliv byl Viète možná prvním, kdo zmíněnou formuli používal, poprvé vyšla tiskem až roku 1583 v díle *Geometria rotundi* od autora Thomase Fincka.

V době Vièta se objevovaly v celé Evropě různé druhy dalších trigonometrických vzorců, které měly za následek snížení pracnosti výpočtů při řešení trojúhelníků. Mezi nimi byla také skupinka vzorců, pomocí kterých se dal součin či podíl převést na součet či rozdíl (nebo naopak). Pomocí obr. 1.19 odvodíme spolu s Viètem alespoň jeden z nich. Obloukům délek x, y odpovídají hodnoty $\sin x = |AB|$ a $\sin y = |CD|$. Potom platí

$$\sin x + \sin y = |AB| + |CD| = |AE| = |AC| \cos\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

přitom v posledním kroku jsme využili, že AC je základnou rovnoramenného trojúhelníku OAC s úhlem $x+y$ při vrcholu O. Když zavedeme substituce $A = \frac{x+y}{2}$ a $B = \frac{x-y}{2}$, obdržíme užitečnější tvar

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B.$$



Obrázek 1.19

Podobným způsobem lze odvodit vztahy

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B,$$
$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B,$$
$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B.$$

Jeden z těchto vzorců – převod součinu kosinů na jejich součet – byl znám již arabským učencům, ovšem až koncem 16. století, a to hlavně zásluhou Vièta, se všechny tyto vztahy staly široce užívanými. Když například chtěl někdo vynásobil dvě čísla 98,436 a 79,253, přiřadil polovinu prvního čísla a číslo druhé kosinům $\cos A = 49{,}218$ ($49{,}218 = \frac{98{,}436}{2}$) a $\cos B = 79{,}253$ a z tehdy dostupných tabulek pro trigonometrické veličiny zjistil úhly A a B. Z tabulek vyhledal hodnoty $\cos(A+B)$ a $\cos(A-B)$ a jejich sečtením získal kýžený součin zadaných čísel 98,436 a 79,253. Poznamenejme, že součin byl nalezen bez použití operace násobení a bez logaritmů. Aplikací výše zmíněných vztahů na výpočet součinu dvou čísel jsme zřejmě moc času a energie neušetřili. Když si však připomeneme, že trigonometrické tabulky v té době s více jak deseti nebo patnácti platnými číslicemi nebyly nijak neobvyklé, práci šetřící možnost využít vztahy pro převod součinu na součet se stala stále více vyslovovanou. S podíly bylo možno zacházet stejným způsobem, tentokrát za dopomoci tabulek pro sekans a kosekans.

Asi nikde není Viètovo zobecnění ryzí trigonometrie na analytickou teorii goniometrických funkcí výraznější než ve spojitosti s jeho vzorci pro n-násobný úhel. Vztahy pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu byly známy již Ptolemaiovi a vztahy pro trojnásobný úhel mohly být jednoduše odvozeny z Ptolemaiových vzorců pro sinus a kosinus součtu dvou úhlů. Pouze s velkým úsilím bychom s pomocí Ptolemaiových pravidel dospěli ke vztahům pro $\sin nx$ a $\cos nx$. Viète použil duchaplnou myšlenku týkající se pravoúhlých trojúhelníků a velice známé algebraické identity

$$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2) = (ad+bc)^2 + (bd-ac)^2 = (ad-bc)^2 + (bd+ac)^2$$

k tomu, aby dospěl ke vzorcům pro vícenásobné úhly rovnocenné s těmi, které dnes zapisujeme ve tvaru

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots,$$
$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5}\cos x^{n-5} \sin^5 x - \dots$$

a ve kterých vidíme snadný důsledek Moivreovy věty, o níž pojednáme v podkapitole 1.4.

Jak jsme již zmínili, byl to právě Viète, se kterým si trigonometrie začala osvojovat svůj moderní analytický charakter. Kromě symbolické algebry k tomu přispěla také analytická geometrie, u jejíhož zrodu stáli velikáni jako byl francouzský filosof, matematik a fyzik René Descartes (1596 – 1650) a francouzský matematik Pierre de Fermat (1601 – 1665). Tento objev je skutečně pro goniometrii významný. Uvědomme si, že dnes se goniometrické funkce sinus a kosinus definují pomocí souřadnic bodů na jednotkové kružnici.

K dalšímu rozvoji trigonometrie a jejímu přerodu v samostatnou matematickou disciplínu, které dnes říkáme goniometrie, přispěla v první polovině 17. století narůstající vlna uplatnění goniometrických funkcí, a to nejenom při triangulačních výpočtech na určování poloh a vzdáleností užívaných nejčastěji pro účely geodézie, navigace, metrologie, astrometrie nebo při řízení palby, ale také v nových oblastech fyziky, které byly od samotné trigonometrie vzdálené. Galileův objev, že každý pohyb může být rozložen na dvě složky podél kolmých čar, volal po užívání trigonometrických veličin. V 17. století, kdy se velice cenila dělostřelecká dovednost, byla velice významnou motivací snaha pomocí výpočtů s goniometrickými veličinami určit místo dostřelu projektilu vystřeleného z kanónu.

V souvislosti s triangulační metodou zmíníme alespoň jednoho holandského astronoma a matematika Willebrorda Snella (1580 – 1626), který se zabýval určováním délek zemských rovnoběžek. Po vyslovení tohoto jména v souvisloti s goniometrií by byl hřích opomenout jeho zákon o lomu světla, který zní: poměr sinu úhlu dopadu a sinu úhlu lomu je pro dvě různá homogenní prostředí stálý a rovný poměru velikostí rychlostí vlnění v jednotlivých prostředích.

Další oblast fyziky, která byla výrazně studována v 17. a 18. století, se zabývala jedním z periodických pohybů – kmitáním. Velké námořní stavby v té době si žádaly stále větší přesnost navigační techniky. To přimělo vědce se zabývat kmitáním kyvadel a pružností různých druhů. Uvedeme alespoň jedno jméno nizozemského fyzika a matematika, který vytvořil teorii fyzikálního kyvadla a zkonstruoval kyvadlové hodiny. Nebyl jím nikdo jiný než Christiaan Huygens (1629 – 1695). S narůstajícím zdokonalováním hudebních nástrojů byli také vědci stále více motivováni zabývat se chvěním (kmitáním) strun, zvonů a dechových píšťal. Při popisech těchto i jiných periodických jevů hrají goniometrické funkce zásadní roli, kterou naznačíme v příkladu 4.7.1. Dalšími aplikacemi goniometrických funkcí uvnitř samotné elementární matematiky se budeme zabývat v závěrečné kapitole celé práce.

1.4 Eulerova reforma goniometrie

Leonhard Euler se narodil 15. dubna roku 1707 v Basileji (Švýcarsko). Rozšířil a doplnil všechny oblasti matematického myšlení, mnohé tak dobře a podstatně, jako by byly jím zcela nově vytvořeny. My se v následujícím textu samozřejmě omezíme na Eulerův přínos v jediné disciplíně – goniometrii.

Obrázek 1.20: Leonhard Euler

1.4.1 Hlavní rysy Eulerovy reformy

Z obecného pohledu na goniometrii je nejvýraznější Eulerovou zásluhou, že různé (do té doby pouze numericky vyčíslované a tabulizované) trigonometrické hodnoty *přetvořil ve funkce.* Toto tvrzení vzhledem ke složitému historickému vývoji pojmu funkce nyní vysvětlíme a upřesníme.

V dnešní době je termín funkce matematickým názvem pro *zobrazení* z nějaké množiny M do množiny čísel (většinou reálných nebo komplexních) nebo do množiny vektorů (pak se mluví o vektorové funkci). Je to tedy jakýkoliv předpis, který každému prvku z M jednoznačně přiřazuje nějaké číslo nebo vektor (hodnotu funkce). Přívlastkem „jakýkoliv“ vyjadřujeme, že předpis nemusí nést žádné známky pravidelnosti či obecnosti, funkční hodnoty pro jednotlivé prvky mohou být vyjádřeny různými vzorci, nemusí být mezi nimi žádná „příbuznost“ původu.

Pro Eulera, od něhož pochází označení $y = f(x)$ z roku 1748, však pojetí funkce znamenalo existenci jednotného analytického výrazu obsahujícího x, podle kterého se dá y vypočítat. Na funkci tedy musela být dána určitá univerzální formule, do které mohlo být za proměnnou x dosazeno jakékoliv číslo – reálné či komplexní. Euler pak rozděloval funkce na dvě skupiny, a to na funkce *algebraické* a *transcendentní.* Nejjednodušší tvary algebraických funkcí s proměnnou x podle Eulera jsou:

$$y = a + x,\ y = a - x,\ y = ax,\ y = \frac{a}{x},\ y = x^a,\ y = \sqrt[a]{x},$$

všechny ostatní algebraické funkce dostane jejich skládáním. Transcendentní funkce jsou podle Eulera takové, které nelze úkony algebraickými konečným tvarem vyjádřit. Patří sem funkce exponenciální, goniometrické, logaritmické a cyklometrické. Tak pro dříve výlučně geometricky chápané hodnoty sinu a kosinu Euler objevil analytické formule ve tvaru (nekonečných) řad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\ ,\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots .$$

Tyto univerzální formule mimo jiné odstranily pochybnosti, jak definovat hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro čísla x, která nevyjadřují velikost ostrých úhlů.

Do doby Eulerovy bylo v trigonometrii mnoho nedořešených teoretických otázek. Jak jsme právě naznačili, nebyla ještě vyjasněna otázka znamének goniometrických funkcí úhlů v různých kvadrantech. To bylo příčinou toho, že často vznikal zmatek v převodních vzorcích. Neexistovala ani jednotná symbolika, každý vzorec se odvozoval geometricky pomocí zvláštního náčrtku atd.

Uvedené vzorce zbavily Eulera nutnosti spojovat hodnoty sinu a kosinu s délkami stran pravoúhlého trojúhelníku. Navíc i při této trigonometrické interpretaci právě Eulerovou zásluhou začali lidé považovat goniometrické hodnoty nikoli za *délky* úseček (jako tomu bylo ve starověku a ve středověku), nýbrž za *čísla*, která vyjadřují poměry těchto délek. Tak například číslo 1, největší hodnotu funkce sinus, nazýval Euler *plný sinus.* Zdůrazněme, že podle [2] pro ty, kteří Eulerovy spisy znají, neexistuje žádná pochybnost, že Euler goniometrické funkce jako číselné chápal. Svědčí o tom i název *Von den transcendenten Zahlgrossen, welche aus dem Kreise entspringen* z německého překladu 8. kapitoly Eulerova díla *Introductio*, které budeme v další části textu popisovat. Přitom je důležité poukázat na fakt, že pro Eulera goniometrické funkce nebyly pouhé podíly délek stran pravoúhlých trojúhelníků, nýbrž skutečné (analytické) funkce proměnného úhlu s číselným vyjádřením v radiánech.

Tím, že se Euler díval na hodnoty goniometrických funkcí jako na čísla bez geometrického rozměru, mohl je začít používat ve vzorcích, aniž by narušil jejich homogenitu. Krásným příkladem je kosinová věta vyjádřená známou rovností $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, v níž je poslední člen – stejně jako tři předchozí – skalární veličina rozměru rovinného obsahu. Sám Euler o tom píše: „Domnívám se, že jsem první zavedl do algebry siny a tangenty úhlu tak, aby se s nimi mohlo zacházet jako s ostatními čísly a nerušeně provádět operace všeho druhu.“

Označování stran trojúhelníka malými písmeny latinské abecedy a, b, c, protějších úhlů pak velkými písmeny téže abecedy A, B, C umožnilo Eulerovi značně zjednodušit trigonometrické vzorce, které tak nabyly známé symetrie. Témuž účelu sloužilo Eulerem zavedené zkrácené označení goniometrických funkcí úhlu z znaky $\sin .z, \cos .z, \mathrm{tang}\,.z, \cot .z, \sec .z, \mathrm{cosec}\,.z$ nebo $\sin .A.z, \cos .A.z$ atd. Písmeno A u posledních zápisů je počátečním písmenem latinského slova „arcus“ – oblouk. Tu a tam se také v jeho spisech vyskytuje $\sin .v.z$ namísto sinvers („sinus versus“ – latinsky – vzepětí oblouku, hodnota daná vzorcem $v = \mathrm{versin}\alpha = 1 - \cos\alpha$). My však budeme Eulerem odvozené vztahy zapisovat tak, jak jsme zvyklí v dnešní době.

Byl to právě L. Euler, který sestavil řadu analytických rovností, které goniometrické funkce splňují. Některé z nich v další části textu vypíšeme. Nyní upozorněme pouze na významný Eulerův objev, že funkce $\sin x, \cos x$ a e^x splňují v oboru komplexních čísel jednoduchý a nečekaný vztah

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x.$$

Přestože Euler nenapsal žádné samostatné dílo věnované ucelenému výkladu goniometrických funkcí, jeho práce byly již v 18. století vědeckým podkladem pro sestavení některých učebnic trigonometrie a goniometrie, na svou dobu velice pokrokových. Jednou z prvních byla např. učebnice akademika M. J. Golovina *Rovinná a prostorová trigonometrie s algebraickými důkazy*, vydaná v Rusku roku 1789. Tato učebnice obsahovala všechny nejdůležitější vzorce pro goniometrické funkce téměř v tom tvaru, v jakém jich používáme v nynější době.

V další části podrobněji popíšeme místa, kde goniometrické funkce vystupují v jedné z Eulerových stěžejních knih, která se stala základní učebnicí infinitezimálního počtu a podnítila další rozvoj matematické analýzy ve druhé polovině 18. století.

1.4.2 Introductio in Analysin infinitorum (1748)

Ve svém díle *Úvod do analýzy* z roku 1748 Euler vytvořil z trigonometrie skutečnou vědu o goniometrických funkcích, podal její analytický výklad a odvodil řadu goniometrických vztahů z několika základních vzorců. Jeho postup a výsledky nyní stručně popíšeme.

Goniometrickým funkcím se Euler ve své knize *Introductio* začíná věnovat v 8. kapitole tvořené §126–142. V jejím úvodním paragrafu 126 připomíná měření úhlů pomocí kružnicových oblouků a označuje délku jednotkové polokružnice (vypsanou na 162 desetinných míst) symbolem π. V §127 pak úhlu z v obloukové míře přiřazuje pomocí bodu na jednotkové kružnici hodnoty $\sin z$ a $\cos z$, vypisuje je pro úhly $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, uvádí rovnosti

$$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

a definuje

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \mathrm{cotg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, z}.$$

V dalším paragrafu pak zmiňuje bez důkazu vzorce pro sinus a kosinus součtu a rozdílu dvou úhlů (jež považuje za známé z trigonometrie) a odvozuje vzorce pro hodnoty funkcí po zvětšení nezávislé proměnné o celé periody a poloviny period. K nim ještě v § 129 připojuje vzorce pro hodnoty

$$\sin(2y+z),\ \sin(3y+z),\ \sin(4y+z) \text{ a } \cos(2y+z),\ \cos(3y+z),\ \cos(4y+z).$$

V § 130 následují vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu, ke kterým se připojují v § 131 rovnosti, pomocí kterých jsou součty a rozdíly $\sin a$ a $\sin b$, $\cos a$ a $\cos b$ převedeny na součiny. Paragraf 132 pak přináší rovnost pro násobení komplexních jednotek

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

která je ještě rozšířena na podobnou rovnost pro tři nezávislé proměnné. Protože je zákon tvoření takových součinů ihned rozpoznatelný, Euler pokračuje v následujících paragrafech uvedením vzorce

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

a obdobným vzorcem pro $\sin nz$. Odtud v §133 získává pomocí binomické věty známé výrazy pro $\cos nz$ a $\sin nz$ ve tvaru mnohočlenů proměných $\sin z$ a $\cos z$. Tyto rozvoje dnes zpravidla odvozujeme oddělením reálných a imaginárních částí v rovnosti

$$\cos nz + \mathrm{i}\sin nz = (\cos z + \mathrm{i}\sin z)^n,$$

když její pravou stranu rozvineme podle binomické věty. Tato známá rovnost je dnes označována jako Moivreova věta podle matematika Abrahama de Moivrea (1667 – 1754), který uvedenou rovnost v roce 1722 objevil, nikdy ji však ve svých pracích nezveřejnil.[2]

Euler dále v §134 pokračuje: pokud je z oblouk tak malý, že $\sin z = z$ a $\cos z = 1$, a za n uvažujeme nekonečně velké číslo, takže nz bude konečný oblouk x, pak bude $\sin z = z = \frac{x}{n}$ a ze zmíněných mnohočlenů pro $\cos nz, \sin nz$ dostaneme známé mocninné řady pro $\sin x$ a $\cos x$. Bylo to bez užití integrálního počtu historicky první odvození sinové a kosinové řady, kterými lze analyticky definovat funkce sinus a kosinus a které jsme vypsali na str. 32. Pokud do těchto řad dosadíme za $x = \frac{m\pi}{2n}$, pak dostaneme mocninné řady pro $\sin\frac{m\pi}{2n}$ a $\cos\frac{m\pi}{2n}$, které Euler ještě v §134 vypisuje až k 29., resp. 30. mocnině zlomku $\frac{m}{n}$ a jejich koeficienty uvádí s přesností na 28 desetinných míst. Tyto řady ostatně oznámil už v roce 1739 v pojednání *Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes, tam naturales, quam artificiales.* V § 135 díla *Introductio* jsou uvedeny řady pro $\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}$ a $\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{2n}$, ve kterých se 13místnými koeficienty dochází Euler až k mocnině $\left(\frac{m}{n}\right)^{25}$, ovšem bez udání odvození. Zmiňuje, že tyto řady můžeme nacházet pomocí dělení sinových a kosinových řad, později však dodává jiné jejich podrobné odvození. Spočívá v tom, že se snadno určí nulové body funkcí $\cos\frac{x\pi}{2n} + \operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}\cdot\sin\frac{x\pi}{2n}$ a tyto se pak s jejich pomocí rozvinou v nekonečné součiny. Tím, že pak na druhé straně vypíšeme mocninné řady pro $\cos\frac{x\pi}{2n}$ a $\sin\frac{x\pi}{2n}$ a nekonečné součiny roznásobíme, dostaneme pomocí porovnání koeficientů u stejně vysokých mocnin x součty různých řad, z nichž ta první je tvaru:

$$\frac{\pi}{4mn}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n} = \frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} + \cdots.$$

Podobně získáme součet řady

$$\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \frac{1}{36n^2-m^2} + \cdots\right).$$

[2] [25], str. 83.

Nyní Euler jednotlivé členy těchto řad rozvíjí v nekonečné geometrické řady a po přeskupení sčítanců dostane řadu z mocnin zlomku $\frac{m}{n}$ opatřených koeficienty tvaru

$$1+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{7^{2k}}+\cdots \text{ resp. } \frac{1}{4^{2k}}+\frac{1}{6^{2k}}+\frac{1}{8^{2k}}+\cdots.$$

Sčítání takových řad, které se Jakobovi Bernoullimu zdálo býti nepřekonatelnou překážkou, si Euler dovolil již v letech 1734 – 35.

V § 136 a § 137 *Introductia* jsou zmíněny prostředky potřebné k výhodnému sestavování tabulek hodnot goniometrických funkcí na základě dříve odvozených řad. K tomu Euler podotýká, že s pomocí již od Vièta známých vzorců

$$\sin(30^\circ+z)=\cos z-\sin(30^\circ-z) \text{ a } \cos(30^\circ+z)=\cos(30^\circ-z)-\sin z$$

mohou být pouhým sčítáním a odečítáním nalezeny hodnoty sinu a kosinu úhlů převyšujících 30° z hodnot pro úhly menší než 30°. Pak Euler ze vzorce pro $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ vyvozuje vzorce

$$\mathrm{tg}\,2a=\frac{2\mathrm{tg}\,a}{1-\mathrm{tg}^2 a} \text{ a } \mathrm{cotg}\,2a=\frac{\mathrm{cotg}\,a-\mathrm{tg}\,a}{2}$$

a ze druhého pro $a=30^\circ-b$ dostává třetí vzorec

$$\mathrm{tg}(30^\circ+2b)=\frac{\mathrm{cotg}(30^\circ-b)-\mathrm{tg}(30^\circ-b)}{2}.$$

Z těchto tří vzorců již můžeme počítat kotangenty a tangenty úhlů převyšujících 30° (z hodnot pro úhly menší než 30°).

V §138 Euler přináší analytická vyjádření funkcí sinus a kosinus pomocí exponenciální funkce ve tvaru jednoduchých vzorců

$$\cos v=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v}}{2} \text{ a } \sin v=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v}}{2\mathrm{i}},$$

jež odvozuje z rovností

$$\cos v=\frac{\left(1+\frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n+\left(1-\frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n}{2} \text{ a } \sin v=\frac{\left(1+\frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n-\left(1-\frac{\mathrm{i}v}{n}\right)^n}{2\mathrm{i}} \text{ pro } n=\infty.$$

Na toto odvození Euler patrně přišel po obdržení zprávy, kterou mu napsal Mikuláš I. Bernoulli v dopise ze 13. července 1742. Uvedl v něm, že již v 1728 seznámil svého strýce (Johanna Bernoulliho) se vzorcem

$$\sin nA=\frac{\left(\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z\right)^n-\left(\sqrt{1-z^2}-\mathrm{i}z\right)^n}{2\mathrm{i}}, \text{ kde } z=\sin A,$$

který pro $A=\frac{v}{n}$ při nekonečně velkém n přechází do výše uvedeného vzorce pro $\sin v$. Euler však teprve v *Introductio* oba uvedené vzorce pro $\cos v$ a $\sin v$ sestavil, udal jejich odvození a jako důsledek ještě získal zápisy komplexních jednotek ve tvaru

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=\cos v+\mathrm{i}\sin v,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}v}=\cos v-\mathrm{i}\sin v.$$

O rok později (1749) opublikoval také vyjádření hodnot $\sin(x+iy)$ a $\cos(x+iy)$ z hodnot $\cos x$, $\sin x$, e^y, e^{-y}.

V obou následujících paragrafech 139 a 140 Euler doplňuje předchozí skupinu vzorců s komplexními hodnotami funkcí tak, že ještě odvozuje vztah mezi logaritmem a tangentou

$$z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \ln \frac{\cos z + \mathrm{i} \sin z}{\cos z - \mathrm{i} \sin z} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \ln \frac{1 + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\, z}{1 - \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\, z}.$$

Z toho pak získává pomocí řady

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

řadu pro arkustangens

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

a odtud pak volbou $x = 1$ Leibnizovu řadu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

V závěrečných paragrafem 141 a 142 celé posuzované kapitoly 8 Euler uvádí některé další řady pro výhodnější výpočet čísla π.

K otázkám řešeným v kapitole 8 *Introductia* se Euler vrací i ve svých pozdějších pracích. Udělejme proto malou odbočku a poznamenejme nejprve, že jako doplněk k výše zmíněným rozvojům hodnot $\sin n\varphi$ a $\cos n\varphi$ (uvedli jsme je již dříve na str. 31 jako Viètův výsledek) Euler uvádí v pojednání *Subsidium calculi sinuum* (1754) „opačná“ vyjádření mocnin $\cos^n \varphi$ a $\sin^n \varphi$ pomocí hodnot $\cos k\varphi$ a $\sin k\varphi$, kde $0 \le k \le n$:

$$\begin{aligned}
2^{n-1} \cos^n \varphi &= \sum_{k=0}^{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\varphi, \\
2^{4n-1} \sin^{4n} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k \binom{4n}{k} \cos(4n-2k)\varphi, \\
2^{4n-2} \sin^{4n-1} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n-1} \binom{4n-1}{k} \sin(4n-2k-1)\varphi, \\
2^{4n-3} \sin^{4n-2} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n-1} (-1)^{2k+1} \binom{4n-2}{k} \cos(4n-2k-2)\varphi, \\
2^{4n-4} \sin^{4n-3} \varphi &= \sum_{k=0}^{k=2n-2} (-1)^k \binom{4n-3}{k} \sin(4n-2k-3)\varphi.
\end{aligned}$$

Do těchto rovností, které jsou správné pro přirozená n, Euler ale bez rozpaků dosazuje celá záporná n, aniž by se staral o konvergenci nebo divergenci takto vznikajících nekonečných řad. Tak Euler dospěl k různým nesprávným výsledkům, které zde nebudeme vypisovat. Místo toho ještě uvedeme, že Euler rovněž sestavil rozvoje do podobných řad pro funkce $\sin^m \varphi \cos^n \varphi$ a nakonec dokázal větu, že pokud lze najít součet řady

$$Z = Az^m + Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} + \cdots ,$$

mohou být určeny také součty

$$\begin{aligned} S &= A\cos m\varphi + B\cos(m+n)\varphi + C\cos(m+2n)\varphi + \cdots\,, \\ T &= A\sin m\varphi + B\sin(m+n)\varphi + C\sin(m+2n)\varphi + \cdots\,. \end{aligned}$$

K tomu Euler dodává, že pomocí této věty může být sčítáno mnoho řad sestavených ze sinů nebo kosinů násobků téhož úhlu. V příkladech, které uvádí, jsou poprvé vyjádřeny racionální funkce nezávislé proměnné (tedy úhlu) pomocí takových řad. Mnoho let poté (1773 a 1776) se Euler opět k této větě vrátil.

Tyto výzkumy o funkcích úhlů, které vytvářejí aritmetické posloupnosti, Eulera později přivádějí ke studiu vztahů mezi funkcemi takových úhlů, které jsou členy geometrických posloupností. Euler přitom vychází z rovnosti

$$s = \frac{\sin s}{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s}{4}\cos\frac{s}{8}\cdots},$$

kterou zveřejnil v roce 1737, a dostává některé řady, které mu pak posloužily k výpočtu π.

Velkou roli v Eulerových analytických výzkumech sehrála vyjádření trigonometrických funkcí nekonečnými součiny, protože díky nim mohl Euler úplně vyřešit Johanem Bernoullim nastolený problém sčítání řad tvaru

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots\,,$$

kde parametr m je přirozené číslo. Již v pojednání *De summit serierum reciprocarum* z let 1734 – 35 Euler odvodil rozklad sinu na nekonečný součin, když uvážil rovnici

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{3!y^3} - \frac{s^5}{5!y^5} + \cdots\,,$$

kde je $y = \sin s$, jako rovnici (s parametrem y a neznámou s) o nekonečně vysokém stupni a podle analogie s mnohočleny rozložil její pravou stranu pomocí známé periodicity sinu do nekonečného součinu kořenových činitelů

$$\left(1 - \frac{s}{A}\right)\left(1 - \frac{s}{p-A}\right)\left(1 - \frac{s}{-p-A}\right)\left(1 - \frac{s}{2p+A}\right)\left(1 - \frac{s}{-2p+A}\right)\cdots\,,$$

přičemž A znamenalo nejmenší kladné $\arcsin y$ a p bylo psáno místo π. Z Viètových vztahů mezi kořeny rovnice a jejími koeficienty pak vycházejí hodnoty elementárních symetrických funkcí těchto kořenů a pomocí Newtonova vzorce rovněž hodnoty součtů jejich mocnin daného stupně.

Pro případ, že $y = \sin A = 1$, tedy $A = \frac{\pi}{2}$ (Euler píše q), můžeme žádané součty řad vyjádřit pomocí mocnin π. Tak dostaneme např. součet Leibnizovy řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4},$$

součty

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},\ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

atd. Tímto postupem se dá získat součet řady $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2m}}$ pro jakékoliv přirozené m. Nás ovšem více zajímá přímé vyjádření sinu jako nekonečného součinu, ke kterému Euler uvedené rozvoje připojil. Sinová řada

$$y = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + \cdots$$

totiž pro $y = 0$ dává rovnici

$$0 = s\left(1 - \frac{s^2}{3!} + \frac{s^4}{5!} - \frac{s^6}{7!} + \cdots\right)$$

a protože úhly, jejichž sinus je roven nule, se rovnají $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, \ldots$, platí podle stejného principu rozklad

$$\sin s = s\left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Mikuláš I. Bernoulli dvakrát Eulera dopisem upozornil na to, že tato odvození nejsou v žádném případě korektní, že není dokázána ani konvergence sinové řady a že Viètovy vztahy o rovnicích konečného stupně se nedají rozšířit bezprostředně na rovnice o nekonečně vysokém stupni. Euler svůj způsob odvození přesto také později zopakoval; tak je tomu ve dvou pojednáních z let 1740 a 1743, kde sestavil nekonečné součiny pro $\sin \frac{m}{n}\pi$, $\cos \frac{m}{n}\pi$, stejně tak jako v *Introductio*, kde jsou mocninné řady rovněž pojaty jako mnohočleny nekonečně vysokého stupně. Přesto v posledním díle Euler modifikoval sestavení nekonečných součinů způsobem, že nejprve hyperbolické funkce

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \ \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

rozložil na součiny a pak po dosazení $\mathrm{i}x$ za x přešel k trigonometrickým funkcím.

Když pak Euler dosadil speciálně $x = \frac{m\pi}{2n}$, vyplynula mu vyjádření koeficientů rozvojů funkcí $\sin \frac{m\pi}{2n}$ a $\cos \frac{m\pi}{2n}$, ke kterým se přidružily ještě dva další, když se píše $n - m$ místo m (§ 184). Z nich vyplynuly odpovídající rozvoje dalších čtyř funkcí (§ 186), stejně tak jako praktické řady k výpočtu hodnot $\ln \sin \frac{m\pi}{2n}$ a $\ln \cos \frac{m\pi}{2n}$, ve kterých Euler pokračoval až ke 30., popř. 38. mocnině zlomku $\frac{m}{n}$. Koeficienty těchto řad počítal na 20 desetinných míst.

Vraťme se po delší odbočce znovu k popisovanému dílu *Introductio*. V něm se Euler zabývá goniometrickými funkcemi nejen ve výše komentované kapitole 8, nýbrž rovněž v kapitole 14, jež má v německém překladu název *Von der Vervielfachung und Teilung der Winkel* a jež je tvořena paragrafy 234–263. Náplní první části (§236–257) je hledání různých vztahů mezi hodnotami

$$f(nz) \quad \text{a} \quad f\left(\pm z + \frac{kT}{n}\right) \text{ pro } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

kde z je reálná proměnná, f je vždy jedna z goniometrických funkcí (Euler postupně uvažuje sinus, kosinus, sekans, kosekans, tangens a kotangens), T označuje nejmenší kladnou periodu funkce f a n je přirozené číslo dané parity (sudé nebo liché). Obecně vzato, Euler tyto vztahy odvozuje tak, že hodnotu $f(nz)$ vyjádří ve tvaru $f(nz) = P(x)$, kde $P(x)$ je vhodný polynom proměnné $x = f(z)$ (závislý na dané funkci f a daném čísle n) a pak zapíše všechny kořeny algebraické rovnice $P(x) - f(nz) = 0$, kterými jsou hodnoty f se zlomkovými argumenty uvedenými výše. Kýžené vzorce pak dostane vypsáním Viètových vztahů mezi kořeny a koeficienty sestavené rovnice. Nejdůležitějším z těchto vztahů je vyjádření hodnoty $f(nz)$ ve tvaru (konečného) součinu dotyčných kořenů. Dodejme, že polynomické vyjádření $\sin nz = P(x)$ v případě sudého čísla n neexistuje; Euler tehdy nachází vyjádření $\sin nz = P(x)\sqrt{1 - x^2}$, v němž odmocnina zastupuje hodnotu $\cos z$, a před dalším postupem se odmocniny zbaví umocněním, aby dostal polynomickou rovnici.

V druhé části kapitoly 14 (§258–261) se Euler věnuje odvozování vzorců pro konečné součty

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \sin(s + kt) \ \text{ a } \ \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos(s + kt),$$

které uvedl již v roce 1743 v VII. svazku *Miscelanea Berolinensia*, protože je potřeboval k výpočtu jistého integrálu. Správné vzorce pro tyto konečné součty dostává tak, že pro první součet uváží rozdíl nekonečných řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sin(s+kt) - \sum_{k=n}^{\infty} z^k \sin(s+kt)$$

a do vzorců pro součty obou řad dosadí hodnotu $z = 1$ (pro niž však jde o rozdíl dvou *divergentních* řad). Podobným postupem (který dnes nemůžeme pokládat za korektní) Euler získává i správný vzorec pro výše uvedený konečný součet kosinů.

Shrňme stručně závěr plynoucí z předchozího výkladu. Dvěma popsanými kapitolami díla *Introductio* se Euler zasloužil o skutečný zrod teorie goniometrických funkcí, jež do té doby byly pouhými prostředky trigonometrických výpočtů. Ve zmíněném díle se mu dokonale povedlo přetvořit dotyčné funkce do formální analytické podoby, v jaké s nimi pracujeme dodnes.