2 Ľubica Holá: Zovšeobecnenie pojmu spojitosť funkcie

Veľká časť prác prof. Neubrunna sa venuje rôznym zovšeobecneniam pojmu spojitosti, hlavne kvázispojitosti, trocha spojitosti a c-spojitosti funkcií a multifunkcií (množinovo-hodnotových zobrazení).

Už od vzniku pojmu funkcie vlastnosť spojitosti funkcie dobre vystihovala predstavy o neprerušovanom dianí, o dráhe pohybujúceho sa bodu, atď. Spojitosti funkcie sa venovala aj sa venuje veľká pozornosť, a preto sú prirodzené snahy o zovšeobecnenie tohto pojmu. Jedno takéto zovšeobecnenie vzniklo pri štúdiu bodov spojitosti funkcií z R^n do R, ktoré sú spojité v každej premennej a získalo veľké aplikácie.

Už R. Baire v 1899 vo svojom článku [2] dokázal nasledujúci výsledok:

Nech $f : R^2 \to R$ je funkcia, ktorá je spojitá v každej premennej. Potom f má nasledujúcu vlastnosť:

(*) Pre $\forall$ bod $(x_0, y_0) \in R^2$, pre $\forall$ kruh K so stredom (x_0, y_0) a pre $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ kruh $K_1 \subset K$ taký, že $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$ pre $\forall (x, y) \in K_1$.

R. Baire tiež poznamenal vo svojej práci ([2], strana 95), že podmienka (*) bola navrhnutá Vitom Volterrom.

Vlastnosť (*) dostala pomenovanie kvázispojitosť. Pojem kvázispojitosti bol zavedený S. Kempistym v roku 1932 v jeho práci [33] pre reálne funkcie niekoľkých reálnych premenných. Kempisty uvádza vo svojej práci

[33], že kvázispojitosť má svoj pôvod v práci H. Hahna [21] z roku 1919. Zrejme Kempisty nemal informácie o Bairovej práci z roku 1899.

Kempistyho definícia kvázispojitosti sa dá zovšeobecniť pre ľubovoľné topologické priestory.

Definícia 2.1. ([46]) *Nech X a Y sú topologické priestory. Nech $f : X \to Y$. Hovoríme, že f je kvázispojitá v bode $x_0 \in X$, ak pre každú otvorenú množinu $U \subset X$, takú, že $x_0 \in U$ a pre každú otvorenú množinu $V \subset Y$, takú, že $f(x_0) \in V$, existuje taká neprázdna otvorená množina $G \subset U$, že $f(G) \subset V$. Funkcia $f : X \to Y$ je kvázispojitá, ak je kvázispojitá v každom bode $x \in X$.*

N. Levine uvádza v práci [38] definíciu polospojitej (semicontinuous) funkcie pomocou pojmu poloótvorenej množiny. V práci [54] sa dokazuje, že tento pojem polospojitej funkcie pomocou poloótvorenej množiny je totožný s pojmom kvázispojitej funkcie, ako je definovaný v hore uvedenej definícii.

W. W. Bledsoe vo svojej práci [6] zaviedol pojem susedskej (neighbourly) funkcie pre metrické priestory X a Y. V práci [41] S. Marcus dokázal, že pojem neighbourly funkcie je ekvivalentný pojmu kvázispojitej funkcie z Definície 1.

Ďaľší užitočný pojem zovšeobecnej spojitosti, ktorý úzko súvisí s kvázispojitosťou je pojem spríbuznenej (cliquish, apparentée) funkcie. Pojem spríbuznenej funkcie bol zavedený H. Thielmanom v jeho práci [61].

Definícia 2.2. ([61]) *Nech X je topologický priestor a nech (Y, d) je metrický priestor. Nech $f : X \to Y$. Hovoríme, že funkcia je spríbuznená (cliquish, apparentée) v bode $x_0 \in X$, ak pre každé $\epsilon > 0$ a pre každú otvorenú množinu $U \subset X$, takú, že $x_0 \in U$ existuje taká neprázdna otvorená množina $G \subset U$, že pre každé dva body $x_1, x_2 \in G$ platí $d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$. Ak je funkcia $f : X \to Y$ spríbuznená v každom bode $x \in X$, hovoríme, že f je spríbuznená na X.*

Zrejme ak f je spojitá v $x_0 \in X$, tak je tiež kvázispojitá v x_0 a tiež spríbuznená v x_0. Ak f je kvázispojitá v $x_0 \in X$, tak je tiež spríbuznená v x_0. Obrátené tvrdenia neplatia (pozri [59]). Napríklad funkcia $f : R \to R$ definovaná tak, že

$$f(x) = 0 \text{ pre } x \leq 0 \text{ a } f(x) = 1 \text{ pre } x > 0,$$

je v bode $x = 0$ kvázispojitá, ale nie je v ňom spojitá.

Funkcia $f : R \to R$ definovaná tak, že

$$f(x) = 0 \text{ pre } x \neq 0 \text{ a } f(0) = 1$$

je v bode $x = 0$ spríbuznená, ale nie je v ňom kvázispojitá.

Veta 2.1. ([59])*Nech X je topologický priestor a nech (Y, d) je metrický priestor. Nech $f : X \to Y$. Potom množina*

$$A(f) = \{x \in X : f \textit{ je spríbuznená v } x\}$$

je uzavretá v X.

Dôsledok 2.1. ([59]) Nech $f : X \to Y$, kde X je topologický priestor a (Y, d) je metrický priestor. Nech $A(f)$ je hustá množina. Potom f je spríbuznená na X.

Z Dôsledku 2.1 vyplýva tiež, že keď množina $Q(f)$ bodov kvázispojitosti funkcie f je hustá v X, tak f je spríbuznená funkcia.

Pojem spríbuznenej funkcie bol použitý T. Neubrunnom, T. Šalátom a M. Švecom v [59] pri štúdiu bodov spojitosti kvázispojitej funkcie s hodnotami v metrickom priestore.

Veta 2.2. ([59]) *Nech $f : X \to Y$, kde X je topologický priestor a (Y, d) je metrický priestor. Nech $C(f)$ je množina bodov spojitosti funkcie f. Potom $A(f) \setminus C(f)$ je množina typu F_σ a je prvej Bairovej kategórie.*

Veta 2.2 hovorí, že množina bodov nespojitosti spríbuznenej funkcie nemôže byť príliš bohatá z hľadiska kategórie, ak jej definičný obor je množina druhej kategórie. Z tohto pohľadu sa zdá, že spríbuznené, resp. kvázispojité funkcie s hodnotami v metrickom priestore sú blízke spojitým funkciám, a preto by sa dalo očakávať, že budú mať aj niektoré známe vlastnosti spojitých funkcií, napr. to, že sú merateľné. S. Marcus vo svojej práci [41] ukázal, že existuje kvázispojitá funkcia $f : [0, 1] \to R$, ktorá nie je lebesguovsky merateľná.

Nasledujúci príklad je príkladom kvázispojitej lebesguovsky nemerateľnej funkcie $f : R \to R$ (pozri [29]), ktorej množina bodov nespojitosti je riedka avšak kladnej Lebesguovej miery.

Príklad 2.1. Nech C je kompaktná, riedka množina kladnej Lebesguovej miery. Položme $d(x, C) = inf\{|x - c| : c \in C\}$. Nech N je lebesguovsky nemerateľná podmnožina množiny C. Definujme funkciu $f : R \to R$ nasledovne:

$$f(x) = 0, \text{ keď } x \in N, \; f(x) = 1, \text{ keď } x \in C \setminus N \text{ a}$$

$$f(x) = sin(1/d(x, C) \text{ pre } x \notin C.$$

Predpoklad vo Vete 2.2, že Y je metrický priestor je podstatný, ako ukazuje nasledujúci príklad:

Príklad 2.2. ([56]) Nech $X = R$ s klasickou euklidovskou topológiou τ_1 a na $Y = R$ uvažujme topológiu τ_2 tzv. Sorgenfreyovej priamky, ktorej bázu tvorí systém polootvorených intervalov

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b, a, b \in R\}.$$

Je známe ([14]), že priestor (Y, τ_2) nie je metrizovateľný. Definujme funkciu $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ nasledovne: $f(x) = x$ pre každé $x \in X$. Zrejme priestor (X, τ_1) je priestor druhej Bairovej kategórie, funkcia f je kvázispojitá, avšak nie je spojitá v žiadnom bode.

Povieme, že topologický priestor X je Bairov priestor [14], keď každá neprázdna otvorená množina je druhej Bairovej kategórie. Každý úplny metrický priestor a lokálne kompaktný priestor je Bairov priestor.

Veta 2.2 má nasledujúci dôsledok pre Bairove priestory:

Dôsledok 2.2. Nech X je Bairov priestor a (Y, d) je metrický priestor. Nech $f : X \to Y$ je kvázispojitá funkcia. Potom množina $C(f)$ bodov spojitosti funkcie f je hustá G_δ množina v X.

V súvislosti s Dôsledkom 2.2 a Príkladom 2.2 Z. Piotrowski vo svojej práci [56] položil nasledujúcu otázku pre kvázispojité funkcie definované na Bairovom priestore.

Otázka 2.1. ([56]) Nech X je Bairov priestor. Pre ktoré topologické priestory Y (okrem metrických priestorov a priestorov so spočítateľnou bázou) platí, že každá kvázispojitá funkcia $f : X \to Y$ má množinu $C(f)$, bodov spojitosti funkcie f, neprázdnu?

Otázku 2.1 riešilo mnoho matematikov, spomeňme aspoň práce [31, 35]. V práci [31] Ľ. Holá a Z. Piotrowski ukázali, že keď X je Bairov priestor a Y je p-priestor s G_δ diagonálou (tzv. zovšeobecnený metrický priestor), tak každá kvázispojitá funkcia $f : X \to Y$ má množinu $C(f)$, bodov spojitosti funkcie f, hustú G_δ v X (teda veľkú z hľadiska Bairovej kategórie).

V ďaľšom budeme vidieť, že Dôsledok 2.2 má aplikácie aj pri štúdiu vlastností minimálnych usco multifunkcií.

Cenná a často citovaná práca prof. Neubrunna [53], *Quasicontinuity*, ktorá vyšla v roku 1989 v Real Analysis Exchange, podáva prehľad výsledkov, týkajúcich sa kvázispojitosti, ktoré boli získané do roku 1988. Nájdeme tu výsledky, týkajúce sa bodov spojitosti kvázispojitých funkcií, konvergencií kvázispojitých funkcií, ekvivalentné definície kvázipojitosti, aplikácie kvázispojitosti, atď. Okrem jedno-hodnotových funkcií uvažuje prof. Neubrunn vo svojej práci [53] aj množinovo-hodnotové funkcie, ktoré nazýva tiež multifunkcie.

Ľahko sa nahliadne, že rovnomerná limita postupnosti kvázispojitých funkcií je kvázispojitá funkcia. Jednoduchý príklad postupnosti $\{f_n : n = 1, 2, ...\}$, kde $f_n : [0, 1] \to R$, $n = 1, 2, ...$, $f_n(x) = x^n$, ukazuje, že postupnosť kvázispojitých funkcií môže bodovo konvergovať k funkcii, ktorá nie je kvázispojitá [53]. Avšak limitná funkcia je spríbuznená.

Bledsoe vo svojej práci [6] ukázal, že bodová limita postupnosti kvázispojitých funkcií definovaných na topologickom prietore X s hodnotami v metrickom priestore Y, má množinu bodov nespojitosti prvej Bairovej kategórie. Ak teda X je Bairov priestor, tak limitná funkcia je spríbuznená, ako vyplýva z Dôsledku 2.1. Nutná a postačujúca podmienka, aby bodová limita postupnosti kvázispojitých funkcií definovaných na Bairovom priestore, s hodnotami v metrickom priestore bola kvázispojitá, bola nájdená v práci [28].

Klasická Kempistyho veta o kvázispojitosti funkcií dvoch premenných, ktoré sú kvázispojité v každej premennej ([33]), bola zovšeobecnená v [42] N. F. G. Martinom pre funkcie $f : X \times Y \to Z$, kde X je Bairov priestor, Y je priestor so spočítateľnou bázou a Z je metrický priestor. Profesor Neubrunn vo svojej práci [46] našiel ďalšie zovšeobecnenie tejto vety pre regulárny priestor Z.

Nech $f : X \times Y \to Z$ je funkcia definovaná na súčine topologických pries- torov $X \times Y$. Pre každé $x \in X$ definujme funkciu $f_x : Y \to Z$ nasledovne

$$f_x(y) = f(x, y).$$

Pre každé $y \in Y$ definujeme funkciu $f^y : X \to Z$ analogicky.

Veta 2.3. ([46]) *Nech X je Bairov priestor, Y je priestor so spočítateľnou bázou a Z je regulárny. Nech $f : X \times Y \to Z$ je taká funkcia, že $f_x : Y \to Z$ je kvázispojitá pre každé $x \in X$ a $f^y : X \to Z$ je kvázispojitá pre každé $y \in Y$. Potom f je kvázispojitá.*

Kempistyho veta bola úspešne použitá Marcusom v jeho práci [41] k získaniu nasledujúceho výsledku, týkajúceho sa diferencovateľnosti funkcií dvoch premenných:

Veta 2.4. ([41]) *Nech $f : R^2 \to R$ je funkcia dvoch premenných, ktorá má v každom bode (x, y) konečné parciálne derivácie. Nech $f_x : R \to R$ je spojitá pre každé $x \in R$ a $f^y : R \to R$ je spojitá pre každé $y \in R$. Potom množina tých bodov, v ktorých f nie je diferencovateľná, je prvej kategórie.*

Výsledok platí aj pre funkcie n-premenných.

Kvázispojitosť našla svoje aplikácie tiež v teórii topologických grúp [1, 10, 34, 56], v teórii selekcií množinovo-hodnotových zobrazení [18, 24, 25, 26, 27, 43] a tiež v dynamických systémoch [11]. Nedávno sa objavili zaujímavé práce, v ktorých sa kvázispojitosť využíva pri štúdiu tzv. CHART grúp [44]. CHART grupy vznikli pri štúdiu okrajových tokov na kompaktných priestoroch [44].

Pod vedením profesora Šaláta a profesora Neubrunna na ich seminároch z teórie reálnych funkcií a z teórie multifunkcií vzniklo mnoho prác venovaných štúdiu kvázispojitosti funkcií a multifunkcií. Spomeňme aspoň niektoré práce: [8, 36, 39, 43, 45, 55, 53, 58].

V práci [46] prof. Neubrunn pracoval aj s pojmom trocha spojitej funkcie.

Definícia 2.3. ([19]) *Nech X a Y sú topologické priestory. Funkcia $f : X \to Y$ sa volá trocha spojitá (somewhat continuous), keď pre každú otvorenú množinu $V \subset Y$ takú, že $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, $Int f^{-1}(V) \neq \emptyset$.*

Je zrejmé, že každá kvázispojitá funkcia je trocha spojitá.

Lema 2.1. ([46]) *Nech X a Y sú topologické priestory. Funkcia $f : X \to Y$ je kvázispojitá vtedy a len vtedy, keď existuje nejaká báza $\mathcal{B}$ priestoru X taká, že reštrikcia $f \mid B$ je trocha spojitá pre každé $B \in \mathcal{B}$.*

Pojem trocha spojitej funkcie úzko súvisi s pojmom feebly spojitej funkcie. Feebly spojité funkcie študovali tiež Z. Frolík [16], J. Doboš [12] a iní matematici. Feebly spojité funkcie sú užitočným nástrojom pri štúdiu Bairových priestorov.

Veta 2.5. ([16, 22, 5]) *Nech X a Y sú topologické priestory. Nech $f : X \to Y$ je bijekcia, taká, že f aj f^{-1} sú trocha spojité. Potom X je Bairov priestor vtedy a len vtedy, keď Y je Bairov priestor.*

Veta 2.6. ([46]) *Nech X je Bairov priestor, Y je priestor so spočítateľnou bázou a Z je regulárny. Nech $f : X \times Y \to Z$ je taká funkcia, že pre každé $x \in X$, $f_x : Y \to Z$ je trocha spojitá a pre každé $y \in Y$, $f^y : X \to Z$ je kvázispojitá. Potom f je trocha spojitá.*

Poznamenajme, že dôkaz Vety 2.3 je založený na Lemme 2.1 a Vete 2.6.

Profesor Neubrunn bol prvým slovenským matematikom, ktorý sa venoval štúdiu topologických vlastností množinovo-hodnotových zobrazení a v tejto oblasti viedol aj mnohých svojich doktorandov alebo študentov: J. Malík [40], V. Toma [60], V. Baláž [3], M. Matejdes [43], A. Náther [45], Ľ. Holá, I. Kupka [30], K. Sakálová [57], D. Holý [23]. Najvýznamnejšie sú jeho výsledky týkajúce sa zdola a zhora kvázispojitých multifunkcií [15, 53, 52, 50, 48, 49].

Pojem množinovo-hodnotového zobrazenia, zhora a zdola polospojitosti množinovo-hodnotového zobrazenia sú klasické pojmy [37].

Množinovo-hodnotové zobrazenie (multifunkcia) [53] z X do Y je funkcia, ktorá priradí každému prvku z X nejakú neprázdnu podmnožinu množiny Y. Poznamenajme, že v literatúre sa často pripúšťa, že množinovo-hodnotové zobrazenie nadobúda aj prázdne množiny ([5]).

Definícia 2.4. *Nech X, Y sú topologické priestory a F je multifunkcia z X do Y. F sa volá zhora (zdola) polospojitá v bode $x_0 \in X$, keď pre každú otvorenú množinu $V \subseteq Y$, takú, že*

$$F(x_0) \subseteq V \ \ (F(x_0) \cap V \neq \emptyset)$$

existuje otvorené okolie U bodu x_0 také, že $F(x) \subseteq V$ $(F(x) \cap V \neq \emptyset)$ pre každé $x \in U$. F sa volá zhora (zdola) spojitá, keď je zhora (zdola) spojitá v každom bode priestoru X.

Definícia 2.5. ([53]) *Nech X, Y sú topologické priestory a F je multifunkcia z X do Y. F sa volá zhora (zdola) kvázispojitá v bode $x_0 \in X$, keď pre každú otvorenú množinu $V \subseteq Y$, takú, že*

$$F(x_0) \subseteq V (F(x_0) \cap V \neq \emptyset)$$

a pre každú otvorenú množinu U obsahujúcu x_0, existuje neprázdna otvorená množina $G \subseteq U$ taká, že $F(x) \subseteq V$ $(F(x) \cap V \neq \emptyset)$ pre každé $x \in G$. F sa volá zhora (zdola) kvázispojitá, keď je zhora (zdola) kvázispojitá v každom bode priestoru X.

Definícia 2.6. ([15]) *Nech X, Y sú topologické priestory a F je multifunkcia z X do Y. F sa volá kvázispojitá v bode $x_0 \in X$, keď pre každú dvojicu otvorených množín $G_1, G_2 \subseteq Y$, takú, že*

$$F(x_0) \subseteq G_1, F(x_0) \cap G_2 \neq \emptyset$$

a pre každú otvorenú množinu U obsahujúcu x_0, existuje neprázdna otvorená množina $G \subseteq U$ taká, že

$$F(x) \subseteq G_1 a F(x) \cap G_2 \neq \emptyset pre\ každé x \in G.$$

F sa volá kvázispojitá, keď je kvázispojitá v každom bode priestoru X.

Veta 2.7. ([15]) *Nech X, Y sú topologické priestory a F je multifunkcia z X do Y s kompaktnými hodnotami. Keď má priestor Y spočítateľnú bázu, tak množina bodov, v ktorých je F súčasne zhora a zdola kvázispojitá, ale nie je kvázispojitá je prvej Bairovej kategórie.*

Veta 2.7 hovorí, že keď X je Bairov priestor, Y má spočítateľnú bázu a F je multifunkcia s kompaktnými hodnotami, ktorá je súčasne zdola aj zhora kvázispojitá, tak F je kvázispojitá v bodoch množiny, ktorá je veľká z hľadiska Bairovej kategórie.

Ďaľším typom zovšeobecnenej spojitosti, ktorým sa professor Neubrunn zaoberal vo svojich prácach, je pojem $c-$spojitosti. Pojem $c-$spojitosti zaviedli K. R. Gentry a H. B. Hoyle vo svojej práci [20] a úzko súvisí s pojmom uzavretého grafu funkcie.

Definícia 2.7. ([20]) *Nech X a Y sú topologické priestory. Funkcia $f : X \to Y$ sa volá $c-$spojitá v $x_0 \in X$, keď pre každú otvorenú množinu $V \subset Y$ takú, že $x_0 \in f^{-1}(V)$ a takú, že $Y \setminus V$ je kompakt, existuje okolie U bodu x_0, že $f(U) \subset V$. Funkcia $f : X \to Y$ sa volá c-spojitá, keď je c-spojitá v každom bode priestoru X.*

Definícia 2.8. ([51]) *Nech X a Y sú topologické priestory. Multifunkcia F z X do Y sa volá c- zhora spojitá v $x_0 \in X$, keď pre každú otvorenú množinu $V \subset Y$ takú, že $F(x_0) \subset V$ a takú, že $Y \setminus V$ je kompakt, existuje okolie U bodu x_0, že $F(U) \subset V$. Multifunkcia $F : X \to Y$ je c-zhora spojitá, keď je c-zhora spojitá v každom bode priestoru X.*

Nech F je multifunkcia z X do Y. Označme znakom $Gr(F)$, graf multifunkcie F, kde

$$Gr(F) = \{(x, y) : y \in F(x)\}$$

Multifunkcia F z X do Y sa volá uzavretá [51], keď $Gr(F)$ je uzavretá množina v $X \times Y$. Keď multifunkcia $F : X \to Y$ je uzavretá, tak je c-zhora spojitá.

Veta 2.8. ([51]) *Nech X a Y sú topologické priestory a Y je Hausdorffov lokálne kompaktný priestor. Keď F je uzavreto-hodnotová c-zhora spojitá multifunkcia, potom je F uzavretá.*

Dôsledok 2.3. ([51]) *Nech X a Y sú topologické priestory a Y je Hausdorffov lokálne kompaktný priestor. Nech $f : X \to Y$ je c-spojitá funkcia. Potom funkcia f má uzavretý graf.*

Je známe, že spojitá funkcia z topologického priestoru do Hausdorffovho priestoru má uzavretý graf a tiež, že zhora spojitá multifunkcia s uzavretými hodnotami z topologického priestoru do regulárneho topologického priestoru má tiež uzavretý graf (pozri [5]).

Profesor Neubrunn vo svojej práci [51] uviedol zaujímavý príklad, že predpoklad lokálnej kompaktnosti vo Vete 2.8 a Dôsledku 2.3 je podstatný.

Štúdiom multifunkcií s uzavretými grafmi sa zaoberal aj J. Joseph vo svojej práci [32], V. Baláž, Ľ. Holá a T. Neubrunn v spoločnej práci [4] a tiež mnoho iných matematikov.

Jednou z najdôležitejších oblastí v štúdiu množinovo-hodnotových zobrazení je teória selekcií. Funkcia f je selekciou multifunkcie F z priestoru

X do priestoru Y, keď $f(x) \in F(x)$ pre každé $x \in X$. Klasické výsledky sa týkajú spojitých a merateľných selekcií [5]. Existencia spojitej selekcie zdola polospojitej multifunkcie s uzavretými konvexnými hodnotami v Banachovom priestore a definovanej na parakompaktnom topologickom priestore, je známa ako Michaelova veta. Základný výsledok týkajúci sa merateľnej selekcie merateľnej multifunkcie bol dokázaný K. Kuratowskim a C. Ryll-Nardzewskim [5]. Práce M. Matejdesa [43] a Ľ. Holej a D. Holého [24, 25, 26] sa zaoberajú štúdiom kvázispojitých selekcií množinovo-hodnotových zobrazení.

Akronym usco (cusco) je pre zhora spojité množinovo-hodnotové zobrazenia s neprázdnymi kompaktnými (konvexnými) hodnotami. Takéto množinovo-hodnotové zobrazenia sú zaujímavé vo funkcionálnej analýze, lebo popisujú spoločné vlastnosti maximálnych monotónnych operátorov a konvexného subdiferenciálu. Minimálne usco a minimálne cusco zobrazenia sa študujú v mnohých prácach ([9, 13, 24, 25, 26, 27]) a našli aplikácie vo funkcionálnej analýze, v optimalizácii, v selekčných vetách a v štúdiu diferencovateľnosti lipschitzovských funkcií. Poznamenajme, že všetky známe charakterizácie minimálnych usco a minimálnych cusco zobrazení sú v triede usco a cusco zobrazení.

Multifunkcia F z topologického priestoru X do topologického priestoru Y sa volá minimálna usco multifunkcia [13], keď je minimálnym prvkom v množine všetkých usco multifunkcií z X do Y; t.z., že F je usco multifunkcia a $Gr(F)$, graf multifunkcie F, neobsahuje ako vlastnú podmnožinu graf žiadnej inej usco multifunkcie z X do Y. Použitím Zornovej lemmy sa ľahko ukáže, že každá usco multifunkcia z X do Y obsahuje minimálnu usco multifunkciu z X do Y ([13]).

Keď X je topologický priestor a Y je Hausdorffov topologický priestor, tak každá usco multifunkcia z X do Y je uzavretá.

Zaujímavá charakterizácia minimálnych usco a minimálnych cusco multifunkcií pomocou kvázispojitých, subspojitých selekcií bola nájdená v prácach Ľ. Holej a D. Holého [24, 26].

Funkcia f z topologického priestoru X do topologického priestoru Y je subspojitá v $x \in X$ [17], keď pre každú sieť (x_i), ktorá konverguje k x, existuje konvergentná podsieť siete $(f(x_i))$. Funkcia f sa volá subspojitá, keď je subspojitá v každom bode priestoru X.

Veta 2.9. ([24]) *Nech X, Y sú topologické priestory, Y je regulárny a F je multifunkcia z X do Y. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

1. *F je minimálna usco multifunkcia;*

2. *každá selekcia f multifunkcie F je kvázispojitá, subspojitá a uzáver grafu f, $\overline{Gr(f)} = Gr(F)$;*

3. *existuje kvázispojitá, subspojitá selekcia f multifunkcie F taká, že uzáver grafu f, $\overline{Gr(f)} = Gr(F)$.*

Poznamenajme, že bod 3 v predchádzajúcej Vete dáva ľahký návod, ako nájsť minimálnu usco multifnkciu.

Pomocou bodu 2 vo Vete 2.9 a Dôsledku 2.2 možno dokázať nasledujúce tvrdenie, ktoré popisuje vlastnosti minimálnych usco zobrazení definovaných na Bairovom priestore s hodnotami v metrickom priestore.

Veta 2.10. *Nech X je Bairov priestor a nech (Y, d) je metrický priestor. Nech F je minimálna usco multifunkcia z X do Y. Potom množina bodov jednohodnotovosti multifunkcie F obsahuje hustú G_δ množinu v X.*

Dôkaz. Nech f je selekcia multifunkcie F. Podľa predchádzajúcej Vety je funkcia f kvázispojitá. Z Dôsledku 2.2 vyplýva, že množina $C(f)$ bodov spojitosti funkcie f je hustá G_δ množina v X. Ľahko sa ukáže, že $F(x) = \{f(x)\}$ pre každé $x \in C(f)$.

Literatúra

[1] Arhangeľskii, A. V.: *Topological invariants in algebraic environment*. In Recent Progress in General Topology II, North-Holland, 2002.

[2] Baire, R.: *Sur les fonctions des variables réelles.* Ann. Mat. Pura Appl. 3 (1899), 1–122.

[3] Baláž, V.: *On almost and weak forms of continuity of functions and multifunctions*. Math. Slovaca 37 (1987), 53–61.

[4] Baláž, V., Holá, Ľ., Neubrunn, T.: *Remarks on c-continuous multifunctions*. AMUC 50-51 (1987), 159–165.

[5] Beer, G.: *Topologies on closed and closed convex sets*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[6] Bledsoe, W. W.: *Neighbourly functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 114–115.

[7] Borsík, J., Holá, Ľ., Holý, D.: *Baire spaces and quasicontinuous mappings*. Filomat 25 (2011), 69–83.

[8] Borsík, J.:*Points of continuity, quasicontinuity and cliquishness*. Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 26 (1994), 5–20.

[9] Borwein, J. M., Zhu, Q. J.: *Techniques of variational analysis*. Springer Verlag, 2005.

[10] Bouziad, A.: *Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group*. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 953–959.

[11] Crannell, A., Frantz, M., LeMasurier, M.: *Closed relations and equivalence classes of quasicontinuous functions*. Real Anal. Exchange 31 (2006/2007), 409–424.

[12] Doboš, J.: *A note on the invariance of Baire spaces under mappings.* Čas. pěst. mat. 108 (1983), 409–411.

[13] Drewnowski, L., Labuda, I.: *On minimal upper semicontinuous compact-valued maps*. Rocky Mountain J. Math. 20 (1990), 737–752.

[14] Engelking, R.: *General Topology*. Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[15] Ewert, J., Neubrunn T.: *On quasi-continuous multivalued maps*. Demonstr. Math. 21 (1988), 697–711.

[16] Frolík, Z.: *Remarks concerning invariance of Baire spaces under mappings*. Czech. Math. J. 86 (1961), 381–385.

[17] Fuller, R. V.: *Relations among continuous and various non-continuous functions*. Pacific J. Math. 25(3) (1968), 495–509.

[18] Giles, J. R., Bartlett, M. O.: *Modified continuity and a generalization of Michael's selection theorem*. Set-Valued Analysis 1 (1993), 365–378.

[19] Gentry, K. R., Hoyle, H. B.: *Somewhat continuous functions*. Czech. Math. J. 21 (96) (1971), 5–12

[20] Gentry, K. R., Hoyle, H. B.: *C-continuous functions*. The Yokohama Math. J. 18 (1970), 72–76.

[21] Hahn, H.: *Über Funktionen mehrerer Veraderlicher, die nach jeder einzelnem Veraderlichen steting sind*. Matematische Zeitschrift (1919), 306–313.

[22] Haworth, R. C., McCoy, R. A.: *Baire spaces*. Dissertationes Math., Warszawa, 1977.

[23] Holý, D.: *On multifunctions with closed graphs*. Math. Bohemica 126 (2001), 729–736.

[24] Holá, Ľ., Holý, D.: *Minimal usco maps, densely continuous forms and upper semi-continuous functions*. Rocky Mountain J. Math. 39 (2009), 545–562.

[25] Holá, Ľ., Holý, D.: *Relations between minimal usco and minimal cusco maps*. Portugal. Math. 70 (2013), 211–224.

[26] Holá, Ľ., Holý, D.: *New characterizations of minimal cusco maps*. Rocky Mountain J. Math. 44 (2014), 1851–1866.

[27] Holá, Ľ., Holý, D.: *Minimal usco and minimal cusco maps and compactness*. J. Math. Anal. Appl. (2016). (V tlači.)

[28] Holá, Ľ., Holý, D.: *Pointwise convergence of quasicontinuous mappings and Baire spaces*. Rocky Mountain J. Math. 41 (2011), 1883–1894.

[29] Holá, Ľ., Holý, D., Moors, W.: *Usco mappings and quasicontinuity*. (Preprint 2016.)

[30] Holá, Ľ., Kupka, I.: *Closed graph and open mapping theorems for linear relations*. AMUC 46-47 (1985), 157–162.

[31] Holá, Ľ., Piotrowski, Z.: *Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces*. Tatra Mt. Math. Publ. 42 (2009), 148–160.

[32] Joseph, J. E.: *Multifunctions and graphs*. Pacific J. Math. 79 (1978), 509–529.

[33] Kempisty, S.: *Sur les fonctions quasicontinues*. Fund. Math. 19 (1932), 184–197.

[34] Kenderov, P., Kortezov, I. S., Moors, W. B.: *Topological games and topological groups*. Topology Appl. 109 (2001), 157–165.

[35] Kenderov, P., Kortezov, I. S., Moors, W. B.: *Continuity points of quasicontinuous mappings*. Topology Appl. 109 (2001), 321–346.

[36] Kostyrko, P.: *Quasi-continuity and some classes of Darboux Baire 1 functions*. Comm. Math. Univ. Carolinae 29 (1988), 601–609.

[37] Kuratowski, K.: *Les fonctions semi-continues dans l' espace des ensembles fermés*. Fund. Math. 18 (1932), 148–159.

[38] Levine, N.: *Semi-open sets and semicontinuity in topological spaces*. Amer. Math. Monthly 70 (1963), 36–43.

[39] Lipinski, J., Šalát, T.: *On the points of quasi-continuity and cliquishness of functions*. Czech. Math. J. 21 (1971), 484–489.

[40] Malík, J.: *Some questions of continuity, measurability and integrability of multifunctions* (Czech). Thesis, The library of Comenius University, Michalská 1, Bratislava, 1983.

[41] Marcus, S.: *Sur les fonctions quasicontinues au sense de S. Kempisty*. Coll. Math. 8 (1961), 47–53.

[42] Martin, N.F.G.: *Quasicontinuous functions on product spaces*. Duke Math. J. 28 (1961), 39–44.

[43] Matejdes, M.: *Sur les selecteurs des multifonctions*. Math. Slovaca 37 (1981), 111–124.

[44] Moors, W. B.: *Fragmentable mappings and CHART groups*. Fund. Math. (2016). (V tlači.)

[45] Náther, O.: *On generalized semicontinuity – preserving multifunctions*. Math. Slovaca 36 (1986), 407–416.

[46] Neubrunn, T.: *A generalized continuity and product spaces*. Math. Slovaca 26 (1976), 97–99.

[47] Neubrunn, T.: *A note on mappings of Baire spaces*. Math. Slovaca 27 (1977), 173–176, Erratum, Math. Slovaca 27 (1977), 442.

[48] Neubrunn, T.: *On quasicontinuity of multifunctions.* Math. Slovaca 32 (1982), 147–154.

[49] Neubrunn, T., Náther, A.: *On a characterization of quasicontinuous multifunctions*. Čas. pěst. mat. 107 (1982), 294–300.

[50] Neubrunn, T.: *On sequential characterizations of quasicontinuous multifunctions*. AMUC 44-45 (1984), 147–153.

[51] Neubrunn, T.: *c-continuity and closed graphs*. Čas pěst. mat. 110 (1985), 172–178.

[52] Neubrunn, T.: *On lower and upper quasicontinuity*. Demonstr. Math. 19 (1986), 403–410.

[53] Neubrunn, T.: *Quasicontinuity*. Real Anal. Exchange 14 (1988/1989), 259–306.

[54] Neubrunnová, A.: *On certain generalisation of the notion of continuity*. Mat. čas. SAV 23 (1973), 374–380.

[55] Neubrunnová, A.: *On quasi-continuous and cliquish functions*. Čas. pěst. mat. 99 (1974), 109–114.

[56] Piotrowski, Z.: *Separate and joint continuity in Baire groups*. Tatra Mt. Math. Publ. 14 (1998), 109–116

[57] Sakálová, K.: *Continuity property of multifunctions*. AMUC 56-57 (1989), 159–165.

[58] Sakálová.: *Graph continuity and quasicontinuity*. Tatra Mt. Math. Publ. 2 (1993), 69–75.

[59] Švec, M., Šalát, T., Neubrunn, T.: *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*. Alfa, Bratislava, 1987.

[60] Toma, V.: *Quelques problémes de mesurabilité des multifonctions. (Some problems of the measurability of multifunctions.)* Sém. Anal. Convexe 13 (1983), 6.1–6.17.

[61] Thielman, H.: *Types of functions.* Amer. Math. Monthly 60 (1953), 156–161.