3 VÉDSKÉ OBDOBÍ

Árjové postupně pronikali a osídlovali oblast Indického poloostrova, dostávali se do těsného kontaktu s původními obyvateli, obohacovali kulturu místních kmenů o svoje zvyky. Postupně vznikala nová kultura. Představu o tehdejším životě, znalostech a rozvoji vědeckých poznatků si můžeme utvořit na základě nejstarších památek Indie – védských textů.

Védy jsou nábožensko-filozofické spisy, hymny, kultické a magické předpisy. Výraz *véda* označuje soubor poznatků a znalostí, zejména znalostí obětních formulí, rituálů a melodií. Jazykem védské literatury je tzv. védský jazyk, někdy nazývaný mantrový dialekt, který je považován za předchůdce *sanskrtu*.[1] Védy původně nebyly sepsány, po dlouhá staletí se předávaly jen ústním podáním z pokolení na pokolení. Základní texty byly uspořádány do čtyř sbírek *samhit* (někdy psáno *sanhit*), které tvoří starší védskou literaturu. Jedná se o cenný historický pramen, v němž má původ indická filozofie.[2]

Čtyři základní sbírky jsou:[3]

a) *Rgvéda* – sbírka 1028 hymnů rozdělených do 10 knih. Obsahuje obětní písně, které se obracejí k bohům s prosbami a chvalořečením. Byly recitovány knězem při oběti. Je nejstarší ze sbírek a tvoří jádro véd.
b) *Sámavéda* – sbírka melodií, která textově opakuje hymny Rgvédy. Je zde uveden správný způsob recitace v průběhu oběti.
c) *Jadžurvéda* – soubor obětních formulí zvaných mantry, které byly nezbytné pro úspěch obřadu. Nalezneme zde i popis detailů védského rituálu.
d) *Atharvavéda* – kouzelnické průpovědi a magická zaklínadla proti nemocem či pohromám. Obsahuje hymny a průpovědi sloužící potřebám černé a bílé magie.

Čtyři védské sbírky původně existovaly zřejmě ve více verzích podle různých kmenových tradic. Současná podoba véd se ustálila kolem 2. tisíciletí př. n. l. a byla kodifikována jako posvátná. Za její autory byli prohlášeni sami bohové, od nich podle legendy prostřednictvím prvních věštců, tzv. *ršijů*, texty získali lidé (viz [Zb1]). Písně *Rgvédy* jsou tematicky pestré, kromě oslavných písní a zaříkávadel se objevují i počátky světské tématiky – nářek hráče kostek nad neustálými prohrami (*Píseň hráče*).

---

[1] Védský jazyk se používal zhruba v době 1500 – 500 př. n. l., období klasického sanskrtu nastupuje asi od 5. – 4. stol. př. n. l.

[2] Bhandarkar Oriental Research Institute shromáždil v různých oblastech Indie 30 rukopisů Rgvédy a uložil je v Deccan College Post-Graduate and Research Institute v Púně. Jsou psány písmem *šáradá* (*śāradā*) a *dévanágarí* (*devanāgarī*) na březové kůře a papíru.

[3] Védy jsou podrobně popsány například v [Zb2]. Studiem a výkladem védských textů se zabývalo mnoho indologů, např. nizozemský indolog a badatel Jan Gonda (1905 – 1991), rumunský religionista Mircea Eliade (1907 – 1986), německý historik a indolog Heinrich Zimmer (1851 – 1910). K lepšímu pochopení obsahu védských sbírek bylo vydáno několik slovníků, například *Sanskrit-Wörterbuch* (O. Böhtlingk, R. Roth), *A Sanskrit-English Dictionary* (M. Monier-Williams), *Wörterbuch zum Rig-Veda* (H. G. Grassmann) a řada dalších.

Védská literatura podává svědectví o náboženství své doby. Jedná se hlavně o víru v personifikované přírodní síly a jevy, které je nutné neustále si usmiřovat a získávat oběťmi. Védské sbírky uvádějí jména 33 bohů rozdělených do tří kategorií – pozemské bohy v čele s bohem ohně Agni, nebeské bohy vedené bohem slunce Súrjou a bohy větru, mezi nimiž přední místo zaujímá vládce všech bohů Indra.

Uctívání bohů bylo provázeno obětním kultem. K bohům se obraceli lidé se svými prosbami při oběti. Obřady měly pečlivě propracovaný řád. Zpočátku se nekonaly v chrámech, ale na posvátné půdě, která byla pečlivě vybrána a vyměřena. Hlavní a nejdůležitější byl oheň, principem rituálu bylo nabízení různých obětí ohni. Jako oběť sloužilo hlavně jídlo, někdy i zvířata a při některých obřadech vysoce ceněný nápoj *sóma*.[4] Později vznikaly zvláštní stavby pro uctívání bohů.

Zatímco se hovorový jazyk vyvíjel, texty provázející obřady zůstávaly stále neměnné, proto se stávaly méně srozumitelnými a kněží museli vysvětlovat jejich význam. V letech 1000 až 500 př. n. l. tak postupně vznikala mladší védská literatura, sbírky výkladů a úvah o védských knihách.

Mladší védskou literaturu tvoří:

a) *Bráhmany* (*brāhmaṇa*; asi 800 př. n. l.) jsou nejstarší sanskrtské prozaické texty, soubory výkladů jednotlivých obětí, které obsahují i úvahy o jejich smyslu, významu a původu[5] a různé legendy o vzniku obětí. Zdůrazňují význam bráhmanů, které nazývají lidskými bohy.
b) *Áranjaky*, tj. lesní texty (*āraṇyaka*; asi 700 př. n. l.) se zabývají mystikou a symbolikou obětí.[6]
c) *Upanišady* (*upaniṣad*; asi 600 – 500 př. n. l.) vykládají význam védských hymnů, obsahují meditace a rozhovory o věcech božských i světských. Ústředním problémem upanišad je otázka života a smrti. Někteří myslitelé hledali nositele života ve vodě, jiní jej spatřovali ve vzduchu a třetí hlavní proud hledal nositele života v ohni – podobně jako staří Řekové, kteří se také zabývali hledáním pralátky (*arché*).

Pro matematiku jsou mnohem důležitější dodatky k védám, tzv. *védángy* (*vedāṅga*)[7] – pomocné vědní disciplíny, které patří k okrajovým védám. Zatímco védy jsou považovány za zjevená díla, tzv. *šruti* (*śruti*),[8] védángy patří do

[4] *Sóma* byl opojný nápoj, šťáva lisovaná z neznámé rostliny, jednou z diskutovaných možností je i muchomůrka červená.

[5] Jedna z nejstarších sbírek obětnických výkladů *Šatapathabráhmana* (*Bráhmana sta cest*), která obsahuje sto oddílů ve čtrnácti knihách, pojednává nejen o výkladu oběti, ale i o způsobech studia véd a pohřebních obřadech. Podává také svědectví o tom, jak pokračovalo osidlování směrem na východ. Bůh Agni začal vypalovat džungli a za ním kráčel lid od břehů řeky Sarasvatí. V této době řeka zanikla.

[6] Přídavné jméno „lesní“ znamenalo, že texty „se mají odříkávat v lese“, že tedy asketům žijícím v lese nahrazovaly obětní úkony. Někteří historikové však soudí, že obsah *áranjak* byl natolik posvátný, že musel být „odříkáván v lese“, tj. o samotě, viz [Zb2].

[7] Slovo *védánga* doslova znamená „úd védy“.

[8] Do kategorie *šruti* patří to, „co bylo vyslechnuto“, texty byly lidem sděleny bohy, a proto jsou dané, neměnné.

skupiny textů označovaných jako díla zapamatovaná, tzv. *smrti* (*smṛti*).[9]

Védángy byly rozděleny do šesti skupin, které tvořily fonetika, tzv. *šikšá* (*śikṣā*), gramatika, tzv. *vjákarana* (*vyākaraṇa*), etymologie, tzv. *nirukta* (*nirukta*), umění prozódie, tzv. *čhandas* (*chandas*), astronomie včetně matematiky a astrologie, tzv. *džjótiša* (*jyotiṣa*), pravidla pro obřady, tzv. *kalpa* (*kalpa*). V posledních dvou jsou obsaženy nejdůležitější informace o matematice ve védském období. *Kalpa* pojednávala o pravidlech a metodách provádění védských rituálů, obětí a obřadů. Všechny texty byly vytvořeny úsporným způsobem ve formě *súter* (*sūtra*) – pravidel.[10]

Sútry obsahovaly stručné formulace jednotlivých pravidel seřazené v logické návaznosti. Memorovaly se a byly doprovázeny ústním výkladem, který se v různých „školách“ mohl lišit. *Sútry*, charakteristické osobitým způsobem vyjadřování, bývaly často ve verších, snažily se s maximální stručností vystihnout podstatu obsahu nebo výsledky. Snahou bylo vynechat co nejvíce sloves a řadit za sebou podstatná jména do dlouhých skupin, jež se snadno učily nazpaměť. Úsporné vyjadřování byl způsob, jak se vyrovnat s nedostatkem psacích potřeb. Tímto postupem se obsah *súter* zachoval, osvojili si jej nejen další učenci, ale i autoři knih. Jazykovědec a filozof Pataňdžali (2. stol. př. n. l.) se proslavil výrokem: *autor se raduje z každé ušetřené slabiky více než otec z narození syna.*

Převážná část staroindické literatury je psaná v *sanskrtu*.[11] Významná je kniha o gramatice sanskrtu nazvaná *Aštádhjájí* (*Aṣṭādhyāyī*).[12] Jejím autorem je bráhman Pánini (asi 5. stol. př. n. l.), který provedl pevnou gramatickou kodifikaci sanskrtu, utřídil gramatiku, nezasáhl však do fonetiky.[13]

Kalpasútry (*kalpa-sūtra*) neboli sbírky pravidel pro obřady se dělily na dvě kategorie; *grhjasútry* (*gṛhya-sūtra*) obsahovaly pravidla pro rodinné domácí obřady pořádané například u příležitosti svatby nebo narození dítěte, na ně navazovaly *dharmasútry* (*dharma-sūtra*), které popisovaly povinnosti různých vrstev obyvatelstva. Z nich se dovídáme informace o životě společnosti kolem roku 500 př. n. l. Ve druhé skupině, zvané *šrautasútry* (*śrauta-sūtra*), byla popsána přesná, často velmi složitá pravidla pro konstrukci a vyměřování obětní půdy, tzv. *védi* (*vedi*), obětních ohňů, tzv. *agni* (*agni*), mohyl a oltářů, tzv. *čiti* (*citi*), v různých ročních obdobích. Někdy byl připojen i krátký komentář.

Pojednání o pravidlech pro stavbu oltářů a ohňů se objevovala jako samostatné práce, kterým se říkalo *šulbasútry* (*śulba-sūtra*) nebo jen *šulby* (*śulba*). Jsou to nejstarší geometrické spisy, které představují tradiční indickou matematiku vyvinutou pro stavbu védských oltářů různých typů a tvarů. Slovo *šulba* (někdy *šulva*) nebo *radždžu* (*rajju*) znamenalo „provaz“, který byl užíván při

[9] Do kategorie *smrti* patří to, „co bylo zapamatováno“, protože původně se šířily z generace na generaci pouze ústní tradicí.

[10] *Sútra* znamená vlákno, nit.

[11] *Sanskrt* neboli *saṃskṛta bhāṣā* znamená „upravený jazyk“.

[12] *Aštádhjájí* doslova znamená „osmidílná“, zpravidla se překládá jako *Osm kapitol o gramatice*.

[13] O životě Pániniho se mnoho neví, dokonce i doba, ve které žil, je určena jen přibližně.

vyměřování oltářů.[14]

Nejznámější a nejdůležitější jsou *šulbasútry*, které sestavil Baudhájana (Baudhāyana; 8. stol. př. n. l.), Mánava (Mānava; kolem 750 př. n. l.), Ápastamba (Āpastamba; 6. stol. př. n. l.) a Kátjájana (Kātyāyana; 2. stol. př. n. l.).

3.1 Obřady a oltáře

Pro každý obřad byl předepsán oltář určitého tvaru a velikosti. Oltáře byly orientovány podle linky *práčí* (*prācī*)[15] směrem východ – západ, tato důležitá přímka byla vyměřena podle stínu gnómónu (viz [Pl1]) a byla při konstrukci vždy zmiňována, protože tvořila osu symetrie. Někdy byla také nazývána *pršthjá* (*pṛṣṭhyā*)[16] (viz [SA]). Pouze přesně provedený obětní rituál zaručoval úspěch, sebemenší chyba či odchylka od předepsaného postupu, třeba jen položení obřadního nádobí na nesprávné místo, obličej obřadníka obrácený nesprávným směrem, nesprávný přízvuk na slově mohl mít účinek naprosto opačný, mohl způsobit neúspěch a neštěstí. Přesně vykonaná oběť byla podle výkladu bráhmanů všemocná. Přinášela zdraví, potomky, moc, majetek, místo v nebi.

Pro přesné vyměření velikosti oltáře byly používány různé jednotky délky, nejčastěji zmiňované jsou uvedeny v následující tabulce.

Jednotka	**Vztahy**	**Poznámka**
angula (*aṅgula*)	asi 1,8 cm ($\frac{3}{4}$ palce)	šířka prstu, 34 sezamových semen
pada (*pada*)	15 *angulů*	stopa
prakrama (*prakrama*)	2 *pady* = 30 *angulů*	krok
vjáma (*vyāma*)	96 *angulů*	výška člověka od paty až ke kořínkům vlasů
puruša (*puruṣa*)	120 *angulů*	výška dospělého muže se vztyčenými pažemi
pradéša (*pradeśa*)	$\frac{1}{10}$ *puruši* = 12 *angulů*	krátká píď, vzdálenost mezi špičkou palce a ukazováčku
aratni (*aratni*)	$\frac{1}{5}$ *puruši* = 24 *angulů*	loket

Obětní obřady se dělily do dvou skupin, *nitja* (*nitya*) a *kámja* (*kāmya*).[17] Do

[14] Slova *šulba* či *šulva* nebo *radždžu* byla používána i ve smyslu měření (označovala jak proces měření, tak výsledek), resp. umění měřit, tj. geometrie, viz [Dat].

[15] Doslovný význam *práčí* je „přední“, zde však znamenalo „východ“ tam totiž směřovala jejich migrace.

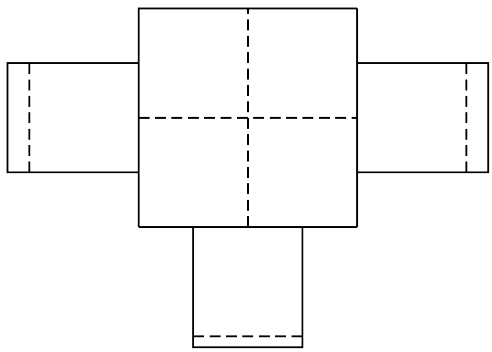
[16] *Pršthjá* znamená „západ“.

[17] *Nitja* znamená „trvalé“, doslovný překlad slova *kámja* je „vytoužené“, volně „vyžádané“ nebo „opční“.

první skupiny patřily běžné denní rituály, které se podle védského náboženství musely povinně konat v každém domě, aby přinesly rodině štěstí a zdraví. Jejich zanedbání bylo považováno za hřích. Za tímto účelem byly v domě udržovány tři typy ohňů (*agni*) v oltářích speciálních tvarů – *gárhapatja* (*gārhapatya*; oheň hospodáře), *áhavaníja* (*āhavanīya*; oheň pro oběť) a *dakšinágni* (*dakṣiṇāgni*; jižní oheň).[18] Potřebné oltáře musely být stavěny s velkou přesností, aby vyhovovaly určitým speciálním požadavkům na tvar a velikost. Oltář pro oheň *gárhapatja* byl někdy čtvercový, v jiném systému kruhový, oltář pro oheň *áhavaníja* byl čtvercový a pro oheň *dakšinágni* měl tvar půlkruhu. Každý z těchto oltářů musel mít plochu velikosti 1 čtverečný *vjáma*.[19]

Kromě těchto denních aktů uctívání existovaly ještě mnohem složitější obětní obřady pro získání milovaných předmětů nebo potřeb. Tyto rituály se nazývaly *kámja* a byly veřejné. Obětní oltáře pro takový obřad vyžadovaly mnohem pracnější konstrukci složenou z cihel ve tvaru obdélníků, objevují se i nové tvary cihel – trojúhelníky a rovnoramenné lichoběžníky. Během obřadu obětování bylo třeba přeměnit původní oltář na jiný buď stejného nebo jiného tvaru, jehož velikost plochy byla v určitém daném poměru k velikosti plochy původního oltáře. Tyto obřady byly sezónní, pořádaly se například při úplňku, při slunovratu apod. Mezi nejnáročnější rituály patřily *agničajana* (*agni-cayana*) a *ašvamédha* (*aśva-medha*). Oltáře byly větší než u domácích obřadů, jejich původní plocha měla velikost $7\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů*.

Mezi nejstarší typy oltářů patřil oltář *šjénačit* (*śyena-cit*) ve tvaru primitivního sokola (viz obr. 3.1). Jeho tělo bylo složeno ze čtyř čtverců o obsahu 1 čtverečný *puruša*, každé křídlo bylo tvořeno obdélníkem s rozměry 1 krát $1\frac{1}{5}$ *puruši* a ocas byl obdélník 1 krát $1\frac{1}{10}$ *puruši*, tedy s obsahem rovným $4 \cdot 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{10} = 7\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů*.[20]



Obr. 3.1: Oltář ve tvaru primitivního sokola

Pro další obřady byly potřebné oltáře s jinými tvary, například velký oltář

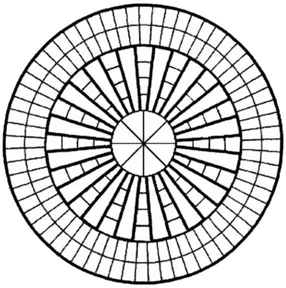
[18] Albert Bürk připomíná, že už v hymnech *Rgvédy* „znalí“ muži vyměřovali sídlo Agniho, viz [BuA1], str. 543.

[19] *Vjáma* byla standardní míra pro oltáře denních obřadů, viz [MFM], [Bag3].

[20] Délka křídel byla vyjádřena jako 1 *puruša* a 1 *aratni*, délka ocasu 1 *puruša* a 1 *pradéša*.

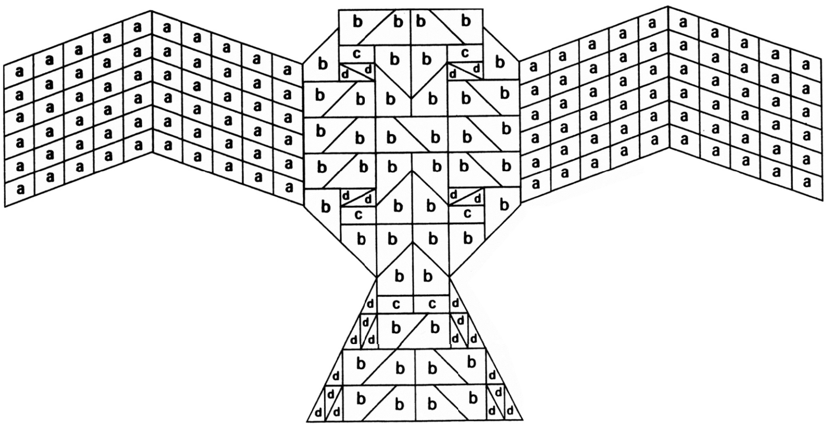
mahávédi (*mahā-vedi*) měl tvar rovnoramenného lichoběžníku.[21] Jiné obřady vyžadovaly trojúhelník, obvykle rovnoramenný, kosočtverec, kruh atd. Každý z oltářů měl stejnou velikost jako sokol, tj. $7\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů*.

Oltáře byly stavěny z pěti vrstev cihel, jejich výška obvykle dosahovala ke kolenům a každá vrstva obsahovala přesný počet cihel předepsaných tvarů.[22] Pro menší oltáře stačilo 21 cihel, pro velké bylo třeba až 200 cihel v jedné vrstvě. Oltář *rathačakra* (*ratha-cakra*) měl tvar kola vozu s paprsky a obručí (viz obr. 3.2), jeho konstrukci využívající sedm typů cihel v liché vrstvě a devět typů cihel v sudé popsal Baudhájana.



Obr. 3.2: Sudé a liché vrstvy oltáře *rathačakra*[23]

Jeden z nejsložitějších oltářů měl tvar velkého sokola, tzv. *šjéna* (*śyena*), se zahnutými křídly a roztaženým ocasem, viz obr. 3.3. Lidé věřili, že přinesená oběť umožní duši prosebníka dostat se s pomocí sokola do nebe. První vrstvu tohoto oltáře tvořilo na každém křídle 60 cihel typu a, tělo obsahovalo 46 cihel typu b, 6 typu c a 24 typu d (viz [Jo1]).[24]



Obr. 3.3: Oltář ve tvaru velkého sokola[25]

---

[21] Též oltáře *sautrámanívédi* (*sautrāmaṇī-vedi*) nebo *ašvamédhavédi* (*aśva-medha-vedi*).

[22] V některých případech se oltáře skládaly i z deseti nebo patnácti vrstev, viz [Th].

[23] Převzato z [Pri].

[24] Jiný tvar sokola je uveden v [Kn].

[25] Převzato z [Jo1].

3.2 Šulbasútry

Šulbasútry (*śulba-sūtra)* jsou soubory pravidel pro konstrukci obětních oltářů. Jejich autoři jsou neznámí, jméno dostala každá *šulbasútra* po učenci, který ji sestavil a sepsal; ani o těchto lidech se mnoho neví, je možné, že to byli duchovní (viz [CR]). Nejvýznamnější jsou *šulbasútra* Baudhájany, *šulbasútra* Ápastamby a *šulbasútra* Kátjájany.

Baudhájanova *šulbasútra* je nejstarší a největší. Je rozdělena do tří kapitol, z nichž první obsahuje 116 pravidel neboli *súter*, z toho dvě jsou úvodní a dalších 19 definuje různé míry a měření, která se v těchto textech běžně používala. Pravidla 22 až 62 se týkala geometrie nutné ke konstrukci obětních oltářů, pravidla 63 až 116 stručně popisovala vzájemnou polohu a prostorovou velikost různých oltářů. Druhá kapitola je tvořena 86 pravidly, z nichž ta hlavní, 1 až 61, jsou věnována obecnému popisu prostorových vztahů při různých konstrukcích velkého oltáře pro oheň postaveného z cihel. Ve třetí kapitole je 323 pravidel, která popisují konstrukce sedmnácti různých druhů *kámja agni* (oltáře pro oběti za účelem získání určitého předmětu), některé velmi podrobně (viz [Dat]).

Šulbasútra Ápastamby je rozdělena do šesti částí; první, třetí a pátá mají po třech kapitolách, druhá, čtvrtá a šestá jsou rozdělené do čtyř kapitol. Celkem tak práce obsahuje v 21 kapitolách 223 pravidel. V prvních třech kapitolách jsou popsány důležité geometrické poučky potřebné při konstrukci oltářů, obsah dalších tří kapitol se týká vzájemné polohy a velikosti různých oltářů. Na rozdíl od Baudhájany, Ápastamba krátce popsal i metody pro jejich konstrukci, což byly konkrétní aplikace obecných geometrických pouček z předchozí části. Zbývající kapitoly se zabývají konstrukcí *kámja agni*. Většina geometrických pouček je stejná u Ápastamby a Baudhájany, ale část týkající se *kámja agni* je u Ápastamby stručnější (viz [Dat]).

Kátjájanova *šulbasútra*[26] se skládá ze dvou částí, první obsahuje pravidla, stejně jako u předchozích autorů. Je rozdělena do sedmi odstavců, v nichž je 90 pravidel s geometrickými poučkami, ale nezabývá se konstrukcí *kámja agni*. Druhá část je psána ve verších[27] a popisuje měřicí provaz, gnómón, ale i vlastnosti stavitelů oltářů a podává několik obecných pouček o jejich chování (viz [Dat]).

Dochovaly se ještě další texty, jejichž autory jsou Maitrájana, Váráha a Vádhula (Maitrāyaṇa, Vārāha, Vādhula.).[28] Později vzniklo k *šulbasútrám* mnoho komentářů. Původní *šulbasútry* obsahovaly jen strohý text pravidel; vysvětlivky, obrázky a tabulky byly připojeny pozdějšími komentátory.[29]

---

[26] Někdy nazývaná též *Kātyāyana Śulba-pariśiṣṭa* nebo *Kātiya Śulba-pariśiṣṭa*.

[27] Rukopis, který je v Londýně, obsahuje 48 veršů, zatímco rukopis v Púně jich má jen 40, viz [Dat].

[28] R. C. Gupta v článku [Gu5] uvedl i jména dalších učenců spojených se *šulbasútrami*.

[29] *Šulbasútry* komentovali např. Veṅkateśvara (nebo Vyaṅkateśvara), Dvārakānatha, Kapardi, Karavinda, Gopāla, Sundararāja, Karka, Rāma, Vājapeyin, Mahīdhara (nebo Mahīdāsa) a Gaṅgādhara, viz [Gu5].

Při stavbě oltářů byly potřebné tyto matematické znalosti:

a) sestrojení kolmice k dané přímce,
b) konstrukce základních geometrických útvarů – trojúhelníků, čtverců, obdélníků, rovnoramenných lichoběžníků, kruhů,
c) kombinace ploch – například konstrukce čtverce, jehož obsah je součtem nebo rozdílem obsahů dvou různých čtverců,
d) konstrukce rovnoplochých útvarů – transformace trojúhelníku ve čtverec a obrácený proces, kvadratura kruhu, cirkulatura čtverce,
e) konstrukce stejných tvarů s dvojnásobným, trojnásobným či vícenásobným obsahem.

Pravidla byla uvedena bez jakéhokoli odvození či důkazu, chyběly i obrázky a náčrtky. Asi proto, že to byl záznam orálního textu, který si při předávání okomentovali a vysvětlili. Některé popsané metody jsou přesné, například konstrukce čtverce s obsahem rovným obsahu daného obdélníku, některé pouze přibližné, například konstrukce čtverce s obsahem rovným obsahu daného kruhu.

Z konstrukcí uvedených v *šulbasútrách* plyne znalost běžně používaných jednoduchých tvrzení, například:

a) každou úsečku lze rozdělit na libovolný počet stejných dílů,
b) každá úhlopříčka půlí obdélník,
c) úhlopříčky obdélníku se navzájem půlí a dělí obdélník na čtyři díly, přičemž dva a dva protilehlé jsou shodné,
d) trojúhelník, který je vytvořen sousedními vrcholy čtverce a středem protilehlé strany, má poloviční obsah než čtverec,
e) maximální čtverec, který může být vepsán do kružnice, má vrcholy na kružnici.

3.3 Pýthagorova věta

Z uvedených pravidel je zřejmé, že autoři znali Pýthagorovu větu a často ji používali, v pravidlech je uvedeno mnoho základních pýthagorejských trojic, například

$$(3,4,5)\,,\ (5,12,13)\,,\ (8,15,17)\,,\ (7,24,25)\,,\ (12,35,37)\,.$$

Při konstrukcích se pracovalo i s jejich násobky, například[30]

$$(12,16,20),\ (15,20,25)\,,$$

a kromě těchto celočíselných trojic byly uvedeny i některé racionální, například

$$\left(2\frac{1}{4},\ 3,\ 3\frac{1}{4}\right),\ \left(7\frac{1}{2},\ 10,\ 12\frac{1}{2}\right),\ \left(1\frac{2}{3},\ 4,\ 4\frac{1}{3}\right),\ \left(2\frac{1}{2},\ 6,\ 6\frac{1}{2}\right),$$

[30] Další násobky, potřebné zejména při konstrukci *mahávédi*, je možno nalézt např. v [MS1].

$$\left(2\frac{1}{12},\ 5,\ 5\frac{5}{12}\right),\ \left(78\frac{1}{3},\ 188,\ 203\frac{2}{3}\right),\ \left(11\frac{1}{4},\ 27,\ 29\frac{1}{4}\right).$$

Pýthagorejské trojice se objevovaly v *šulbasútrách* v souvislosti s konstrukcemi čtverce, obdélníku či lichoběžníku, které byly při stavbě oltářů zásadní.[31] Konstrukce pravoúhlého trojúhelníku se stranami a, b, c, kde $a^2 + b^2 = c^2$, se prováděla tak, že se vyměřila vzdálenost $AB = a$ a vzal se provaz délky $b + c$, na němž se ve vzdálenosti b od kraje vyznačil bod N, ten se nazýval *njančana* (*nyancana*). Konce provazu se upevnily v bodech A a B, a provaz, držený v bodě N, byl natažen do strany, kde se pak označil třetí vrchol trojúhelníku.[32] Protože rozhodující byl právě bod N, někdy se o tomto postupu mluví jako o metodě *njančana* (viz [Dan]). Podobným způsobem byly konstruovány i jiné než pravoúhlé trojúhelníky.

Baudhájana popsal speciální případ, metodu zdvojnásobení čtverce:[33]

BSS/i.9
Provaz natažený přes diagonálu čtverce vytváří dvakrát větší obsah.

Ápastamba předložil obecnější znění:[34]

ApSS/i.4
Provaz natažený přes diagonálu obdélníku vytváří stejný obsah jako svislá a vodorovná strana dohromady.

Pýthagorova věta byla při geometrických konstrukcích využívána velmi často, sloužila i ke konstrukci iracionalit, například $\sqrt{2}$.

Je pravděpodobné, že Pýthagorova věta byla známa v Indii dříve než v 5. stol. př. n. l., neboť pravidla obsažená v *šulbasútrách* jsou mnohem starší než sepsané texty. Dokonce už v dílech *Taittiríjasamhitá* a *Šatapathabráhmana* (*Taittirīya-saṃhitā*, *Śata-patha-brāhmaṇa*; asi 8. stol. př. n. l.) jsou uvedeny míry oltáře pro oběť *sóma*, při jehož konstrukci se Pýthagorova věta používala (viz [BuA1]).[35]

---

[31] Nejstarší dochované pýthagorejské trojice jsou uvedeny na mezopotámské tabulce Plimpton 322 (19. až 17. stol. př. n. l.), kde je 15 pýthagorejských trojic. Pravděpodobně byly stanoveny generováním dvojic nesoudělných přirozených čísel $p > q$ vztahem $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$. Hodnoty jsou poměrně velké, čísla p a q byla volena většinou dvojciferná, více viz [BBV]. V Řecku se vědci snažili odvodit obecný postup pro nalezení pýthagorejských trojic; Pýthagorás je vyjádřil pro p přirozené jako $(2p^2 + 2p, 2p + 1, 2p^2 + 2p + 1)$, Platón uvedl trojici $(p^2 - 1, 2p, p^2 + 1)$.

[32] Viz například sloka ApSS/i.2, podle [BuA2], str. 327.

[33] Podle [Pl1], str. 20–21, [Ju], str. 101, podobná pravidla uvedli Ápastamba i Kátjájana, viz sloky ApSS/i.5, KSS/ii.8.

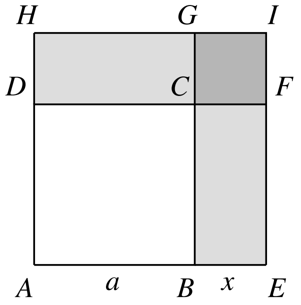
[34] Podle [Pl1], str. 20, [BuA2], str. 101.

[35] V díle *Taittiríjasamhitá* je také pravděpodobně první zmínka o cihlách *ištaká* (*iṣṭakā*), z nichž se oltáře stavěly, viz [Kak2].

Ápastamba velmi stručně popsal metodu na zvětšení čtverce:[36]

ApSS/iii.9
Přidej obdélník, který se připojí na dvou stranách [čtverce – na východní a na severní] *a v* [severovýchodním] *rohu čtverec vytvořený daným prodloužením.*

Konstrukce je znázorněna na obrázku 3.4. K danému čtverci $ABCD$ o straně a se připojily dva obdélníky $BEFC$ a $CGHD$ a čtverec $CFIG$. Původní čtverec $ABCD$ měl obsah a^2, obsah čtverce $AEIH$ byl $c^2 = a^2+2ax+x^2$. Pokud obsah připojeného gnómónu $BEIHDC$ byl také druhou mocninou $2ax + x^2 = b^2$, a to staří indičtí učenci snadno poznali, bylo možné tímto způsobem získat další pýthagorejskou trojici (viz [BuA1]).[37]



Obr. 3.4: Zvětšení čtverce

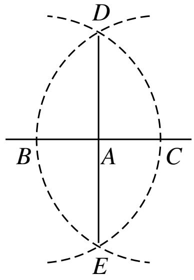
3.4 Geometrické konstrukce

V *šulbasútrách* jsou uvedeny různé metody pro konstrukce základních geometrických útvarů, některé z nich využívají provaz či šňůru, jiné bambusovou tyč. Základem konstrukcí je sestrojení kolmice k dané přímce. Metod existovalo více, uvedeme jednu z nich:[38]

Vezmi dva body $[B, C]$ *na dané přímce ve stejné vzdálenosti od daného bodu* $[A]$. *Opiš kružnici se středem B a poloměrem BC. Podobně další se středem C a poloměrem BC. Označ D, E průsečíky těch kružnic a spoj DE nebo AD nebo AE. Pak tato přímka je kolmá k dané přímce BC v bodě A.*

Postup sestrojení kolmice je patrný z obr. 3.5.

[36] Podle [BuA2], str. 336.
[37] Další domněnky, jak bylo možno odvodit pýthagorejské trojice, jsou uvedeny například v [Dan].
[38] Podle [Dat], str. 53–54.



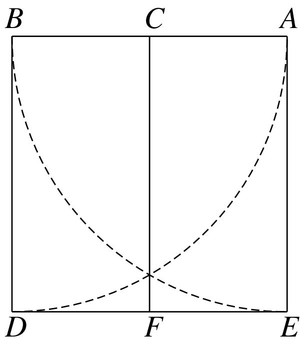
Obr. 3.5: Konstrukce kolmice

Konstrukce čtverce

V *šulbasútrách* je popsáno pět metod na konstrukci čtverce s danou délkou strany. Ápastamba ji popsal takto:[39]

> **ApSS/viii.8–10 až ix.1**
> *Na bambusové tyči udělej dvě díry* [A, B] *ve vzdálenosti rovné výšce obětníka se vztyčenýma rukama a třetí* [C] *ve středu mezi nimi. Polož bambusovou tyč ve směru východ – západ a upevni kolíky do děr. Pak uvolni dva kolíky* [C, B] *a opiš kružnici* [otáčením bambusu] *jihovýchodním směrem dírou na konci. Pak upevni tyč na západě* [v původní poloze] *a opiš další kružnici jihozápadním směrem dírou na opačném konci. Nyní bambus* [zcela] *uvolni a upevni krajní díru na střední kolík* [C], *polož směrem k průsečíku kružnic a upevni kolík do nejvzdálenější díry* [F]. *Pak upevni na ten kolík střední díru bambusu a polož směrem ke krajům kružnic, upevni dva kolíky* [E, D] *do dvou* [krajních] *děr. To je čtverec* [$ABDE$ mající stranu] *1 puruša.*

Konstrukce čtverce podle Ápastambova pravidla je vidět na obrázku 3.6.



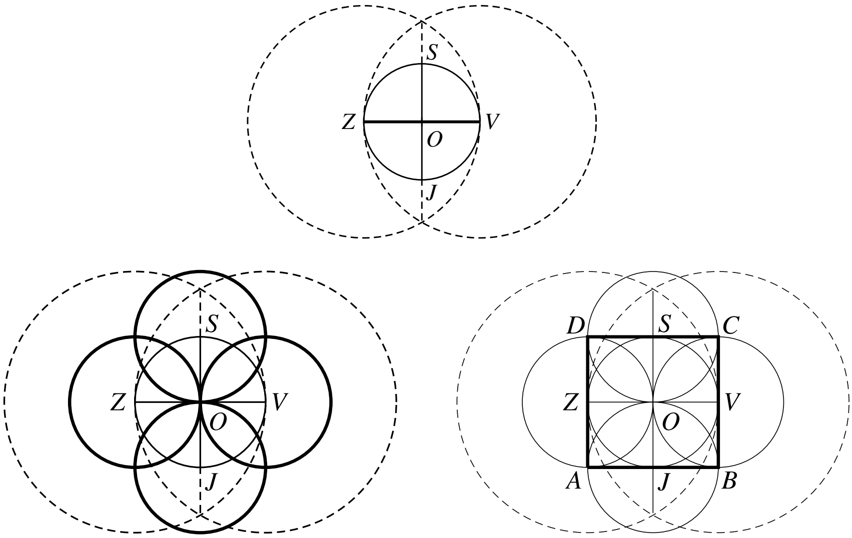
Obr. 3.6: Konstrukce čtverce

[39] Podle [BuA2], str. 352–353.

Jinou metodu popsal Baudhájana:[40]

BSS/i.22–28
Chceš-li sestrojit čtverec, vezmi provaz dlouhý jako jeho strana, udělej na koncích uzly a označ střed. Poté, co nakreslíš čáru požadované délky [směrem východ – západ], *upevni tyč v jejím středu. Oba uzly přivaž na tyč a značkou* [uprostřed provazu] *nakresli kruh. Nyní upevni tyče na obou koncích průměru* [východ – západ]. *Uvaž jeden uzel na východní tyč a nakresli kružnici druhým uzlem. Nakresli podobnou kružnici okolo západní tyče. Na spojnici průsečíků kružnic* [od severu k jihu] *bude nalezen druhý průměr. Poté, co upevníš oba uzly na východní tyč, opiš značkou kružnici. Podobně opiš kružnice okolo jižní, západní a severní tyče. Vnější průsečíky těchto kružnic určují čtverec.*

Při této konstrukci čtverce o straně a se vyznačila vzdálenost $|ZV| = a$ a označil její střed O, kolem něj se opsala základní kružnice s poloměrem $\frac{a}{2}$. Další pomocné kružnice s poloměrem a se opsaly kolem bodů Z a V, pomocí jejich průsečíků se stanovila kolmice k úsečce ZV procházející jejím středem O, průsečíky této kolmice se základní kružnicí byly označeny S a J (viz obr. 3.7 nahoře). Kolem každého z bodů Z, V, S a J se opsala kružnice s poloměrem $\frac{a}{2}$ (viz obr. 3.7 dole vlevo), jejich průsečíky určovaly vrcholy hledaného čtverce $ABCD$ (viz obr. 3.7 dole vpravo).



Obr. 3.7: Konstrukce čtverce – druhý způsob

Pro konstrukci obdélníku se stranami dané délky existovala podobná pravidla jako pro konstrukci čtverců.

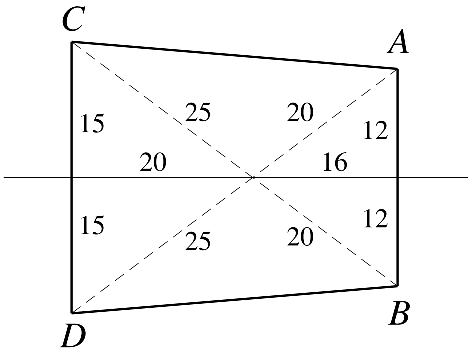
[40] Podle [Dat], str. 56–57.

Konstrukce rovnoramenného lichoběžníku

Následující metodu uvedl Ápastamba pro konstrukci velkého oltáře *mahávédi*. Tento oltář má podle tradice tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož základna byla dlouhá 30 *padů*, čelo 24 *padů* a výška 36 *padů*.[41] Ápastamba popsal čtyři metody, které se liší jen málo. Jedna z nich je tato:[42]

> **ApSS/v.3**
> *Diagonála obdélníku, jehož strany jsou* 3 *a* 4 [*pady*], *je* 5. *S těmi zvětšenými o trojnásobek* [jsou určeny] *dva východní vrcholy védi. S těmi zvětšenými o čtyřnásobek* [jsou určeny] *dva západní vrcholy.*

Popsaný lichoběžník je na obrázku 3.8.



Obr. 3.8: Konstrukce rovnoramenného lichoběžníku

Ápastambova metoda využívá Pýthagorovu větu:

$$3^2 + 4^2 = 5^2\,,$$

$$(3 + 3\cdot 3)^2 + (4 + 3\cdot 4)^2 = (5 + 3\cdot 5)^2\,, \qquad 12^2 + 16^2 = 20^2\,,$$

$$(3 + 4\cdot 3)^2 + (4 + 4\cdot 4)^2 = (5 + 4\cdot 5)^2\,, \qquad 15^2 + 20^2 = 25^2\,.$$

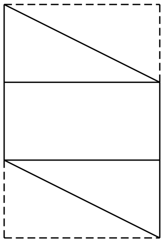
Konstrukce rovnoběžníku

Z různých metod na konstrukci rovnoběžníku vybereme jednu popsanou Ápastambou:[43]

> **ApSS/xvi.8**
> *Sestroj obdélník dlouhý* $\frac{1}{5}$ *puruši od východu na západ a* $\frac{1}{10}$ *puruši široký, na sever stejně jako na jih připoj další* [stejně velký obdélník]. *Sestroj jejich diagonály ze severozápadních vrcholů.*

[41] Vrcholy se nazývaly *šróni* (*śroṇi*, tj. kyčle) a *amsa* (*aṃsa*, tj. ramena), viz [SA].
[42] Podle [BuA2], str. 340–341.
[43] Podle [BuA2], str. 375.

Postup konstrukce je patrný z obr. 3.9.



Obr. 3.9: Konstrukce rovnoběžníku

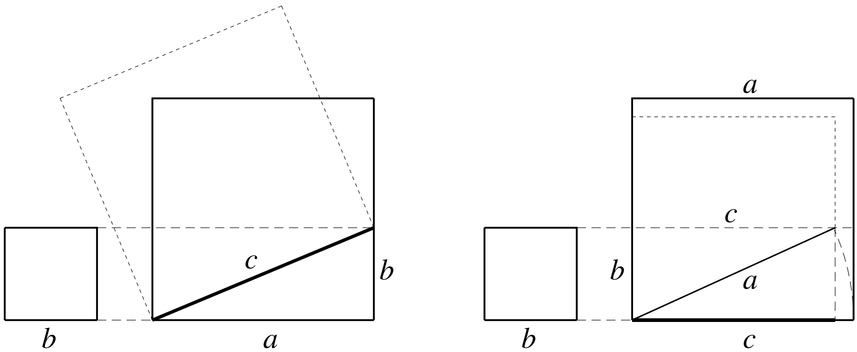
3.5 Kombinace ploch

Konstrukce čtverce s obsahem rovným součtu, resp. rozdílu obsahů dvou různých čtverců

Téměř ve všech *šulbasútrách* nalezneme popis konstrukce čtverce, jehož obsah je roven součtu nebo rozdílu obsahů dvou daných různých čtverců. Následující pravidla uvedl Ápastamba:[44]

> **ApSS/ii.4**
> *Odděl z většího* [čtverce] *pruh o straně menšího čtverce. Diagonála odříznutého pruhu sjednocuje oba* [čtverce].
>
> **ApSS/ii.5**
> *Chceš-li si odečíst od čtverce* [jiný] *čtverec, tak odřízni pruh o straně toho čtverce, který chceš odečíst a táhni delší stranou odříznutého pruhu napříč ke druhé straně. Kde protne* [protilehlou stranu], *tento* [kus] *se odřízne. Tím je* [menší čtverec] *odečten.*

V obou případech se uplatní znalost Pýthagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$, resp. $a^2 - b^2 = c^2$, postup je vidět na obrázku 3.10.



Obr. 3.10: Součet a rozdíl obsahů dvou čtverců

[44] Podle [BuA2], str. 332–333, [Pl1], str. 21, podobně i ve slokách BSS/ii.1, BSS/ii. 2, KSS/ii.13, KSS/iii.3.

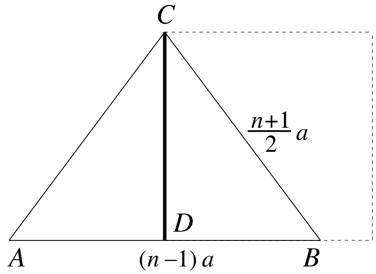
Konstrukce čtverce s obsahem rovným součtu obsahů n stejných čtverců

Kátjájana popsal konstrukci čtverce, který má stejný obsah jako n stejných daných čtverců:[45]

KSS/vi.5
Tolik [n] *čtverců* [stejně velkých o straně a], *kolik si přeješ sloučit v jeden; příčná čára* [základna] *bude* [rovna] *o jednu méně, dvojnásobná strana bude* [rovna] *o jednu více,* [takto] *vytvoř* [rovnoramenný] *trojúhelník. Jeho šíp* [výška] *to dává.*

Jestliže n byl počet stejných čtverců o straně a, které se měly sloučit v jeden, sestrojil se rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB měla délku $(n-1)$-násobku délky strany a. Obě ramena AC a BC dohromady měla délku $(n+1)$-násobku délky strany a. Konstrukce podle pravidel uvedených v *šulbasútrách*:

Nakreslila se úsečka AB délky $(n-1)a$. V bodech A a B se upevnily dvě tyče a na ně se přivázaly dva konce provazu délky $(n+1)a$. Provaz se držel za prostředek a natáhl se do strany, tam se označil bod C. V polovině strany AB se označil bod D a spojily se body C, D. Pak čtverec nad stranou CD měl stejný obsah jako n daných čtverců (viz obr. 3.11).



Obr. 3.11: Součet obsahů n stejných čtverců

Opět byla užita Pýthagorova věta, pro trojúhelník BCD platí:

$$(CD)^2 = (BC)^2 - (BD)^2 = \left(\frac{n+1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}a\right)^2 =$$
$$= \frac{n^2+2n+1}{4}a^2 - \frac{n^2-2n+1}{4}a^2 = na^2\,.$$

V případě, že číslo n je čtvercem, tj. $n = m^2$, lze odtud odvodit obecný tvar některých pýthagorejských trojic $(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2})$. Podobně vyjadřoval trojice i Platón (viz [BeJ2]).

Existovala i pravidla pro konstrukci čtverce s obsahem stejným jako dva dané trojúhelníky či dva dané pětiúhelníky (viz [Dat]).

---

[45] Podle [Dat], str. 72–73.

3.6 Transformace

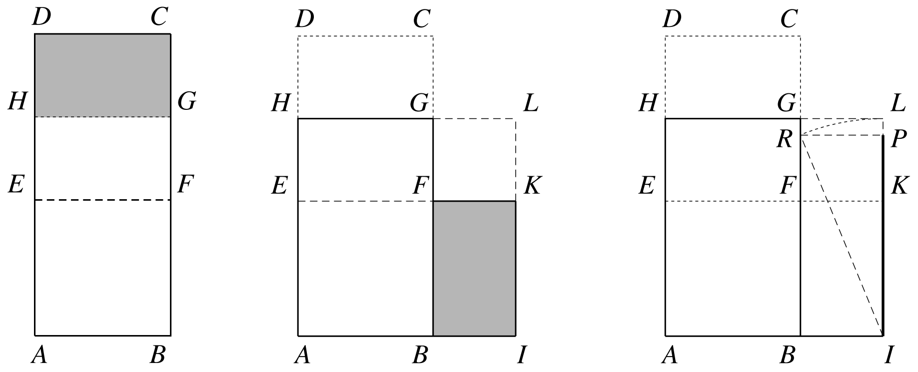
Při konstrukci oltářů byly důležité rovnoploché útvary, byla potřebná transformace („přeměna“) jednoho útvaru na druhý o stejném obsahu. Někdy musel nový útvar, kromě stejné velikosti plochy, splňovat ještě nějakou další podmínku, nejčastěji měl předepsanou délku jedné strany.

Transformace obdélníku na čtverec

Ápastamba, Baudhájana i Kátjájana popsali metodu k sestrojení čtverce s obsahem stejným jako daný obdélník. Následující pravidlo pochází od Ápastamby:[46]

> **ApSS/ii.7**
> *Chceš-li přeměnit obdélník na čtverec, odděl čtvercovou část o jeho šířce; rozděl zbytek na dva stejné díly, přesuň a otoč* [vzdálenější z nich] *a připoj ke straně čtverce. Pak přidej* [čtvercový] *díl k zaplnění* [prázdného místa v rohu]. *To bylo učeno* [dříve] *jak odečíst* [připojený čtverec od nově vytvořeného].

Popis konstrukce je znázorněn na následujících obrázcích. Byl dán obdélník $ABCD$. Bod E leží na straně AD tak, že $|AE| = |AB|$. Pak se doplnil čtverec $ABFE$. Následně se v polovině strany ED označil bod H a obdélník $EFCD$ se rozdělil na poloviny úsečkou HG (viz obr. 3.12 vlevo). Pak se obdélník $HGCD$ přemístil do pozice $FBIK$ a doplnil se čtverec $AILH$ (viz obr. 3.12 uprostřed). Hledaný čtverec měl obsah rovný rozdílu obsahů čtverců $AILH$ a $FKLG$. Strana IL se otočila kolem bodu I tak, že protľala stranu BG v bodě R, tedy $|IL| = |IR|$. Nyní se vedla bodem R rovnoběžka RP se stranou GL tak, že bod P ležel na straně IL. Pak IP je stranou hledaného čtverce, který má obsah stejný jako obdélník $ABCD$ (viz obr. 3.12 vpravo).



Obr. 3.12: Transformace obdélníku na čtverec

[46] Podle [Pl1], str. 22, [Dat], str. 83, podobně též BSS/ii.5, KSS/iii.2.

Označíme-li $|AB| = a$ a $|BC| = b$, pak strana malého čtverce $FKLG$ má délku $\frac{b-a}{2}$, strana velkého čtverce $AILH$ je $a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$. Pak byla využita identita

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab\,.$$

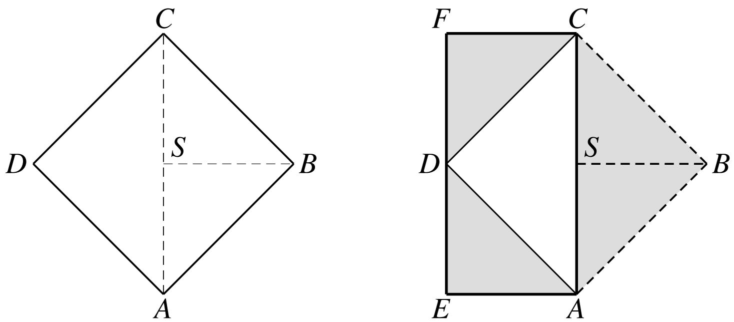
Budou-li čísla a, b čtverce, tj. $a = n^2$, $b = m^2$, dostáváme obecný tvar pýthagorejských trojic $(mn, \frac{m^2-n^2}{2}, \frac{m^2+n^2}{2})$.

Transformace čtverce na obdélník

Baudhájana uvedl i pravidlo na transformaci čtverce na obdélník:[47]

BSS/i.52
Chceš-li přeměnit čtverec na obdélník, rozděl ho diagonálou. Rozděl opět jednu z částí na dvě a připoj je vhodně tak, aby odpovídaly dvěma stranám [druhé poloviny].

Byl dán čtverec $ABCD$. Rozdělil se diagonálou AC a bod v jejím středu se označil S (viz obr. 3.13 vlevo). Pak se trojúhelník ABS otočil do pozice ADE a podobně trojúhelník CSB do pozice CFD. Pak vzniklý obdélník $EACF$ měl stejný obsah jako původní čtverec $ABCD$ (viz obr. 3.13 vpravo).



Obr. 3.13: Transformace čtverce na obdélník

Transformace čtverce na obdélník s danou délkou strany

Transformaci čtverce na obdélník, jehož strana je daná, popsal Ápastamba:[48]

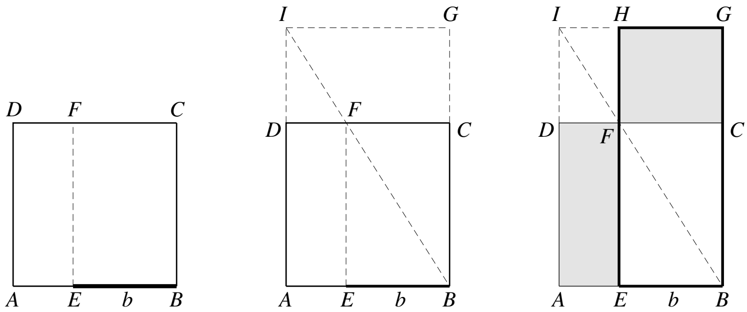
ApSS/iii.1
Chceš-li přeměnit čtverec na obdélník [odděl obdélníkový díl] *se stranou dlouhou jak si přeješ* [daná strana obdélníku]. *Co přebývá, mělo by se přidat* [k prvnímu] *tak, aby to pasovalo.*

---

[47] Podle [Dat], str. 85.

[48] Podle [Pl1], str. 22, [BuA2], str. 334. Podobné pravidlo je také BSS/ii.4.

$ABCD$ byl daný čtverec se stranou délky a. Jestliže strana b hledaného obdélníku byla menší než strana čtverce a, pak se oddělila délka b ze stran AB a CD, tím vznikl obdélník $EBCF$ (viz obr. 3.14 vlevo). Úhlopříčka BF se prodloužila, až proťala stranu AD v bodě, který označíme I, a doplnil se obdélník $ABGI$ (viz obr. 3.14 uprostřed). Prodloužená strana EF proťala stranu GI v bodě H (viz obr. 3.14 vpravo). Pak $EBGH$ byl hledaný obdélník s obsahem rovným obsahu čtverce $ABCD$ a stranou EB dané délky b.



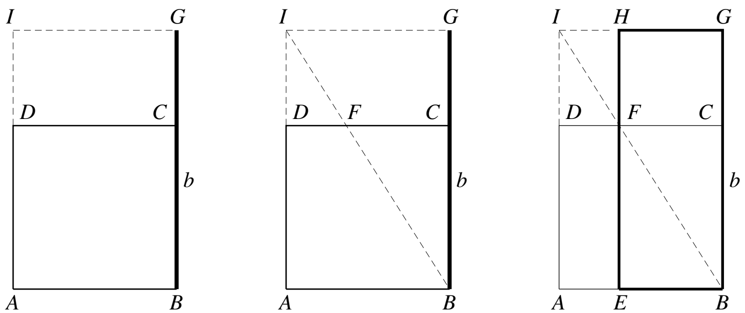
Obr. 3.14: Transformace čtverce na obdélník s danou délkou strany

Tato metoda je založena na shodnosti trojúhelníků:

$$\triangle\, ABI \cong \triangle\, GIB, \qquad \text{protože } BI \text{ je diagonála obdélníku } ABGI,$$
$$\triangle\, EBF \cong \triangle\, CFB, \qquad \triangle\, DFI \cong \triangle\, HIF.$$

Obsah obdélníku $AEFD$ je proto stejný jako obsah obdélníku $FCGH$, tedy obsah obdélníku $EBGH$ je stejný jako obsah daného čtverce $ABCD$.

Jestliže strana b hledaného obdélníku byla větší než strana a čtverce $ABCD$, postup byl podobný. Prodloužily se strany AD a BC a na nich se označily body I a G takové, že $|AI| = |BG| = b$. Vznikl obdélník $ABGI$ (viz obr. 3.15 vlevo). Diagonála BI proťala stranu CD v bodě F (viz obr. 3.15 uprostřed). Pak CF byla šířkou hledaného obdélníku. Bodem F se vedla rovnoběžka se stranou AI, která proťala stranu AB v bodě E a stranu GI v bodě H (viz obr. 3.15 vpravo). Pak $EBGH$ byl hledaný obdélník s obsahem rovným obsahu čtverce $ABCD$ a stranou EB dané délky b.



Obr. 3.15: Transformace čtverce na obdélník s danou délkou strany

Popsaná geometrická konstrukce má i algebraický význam, jde o geometrické řešení rovnice

$$bx = a^2,$$

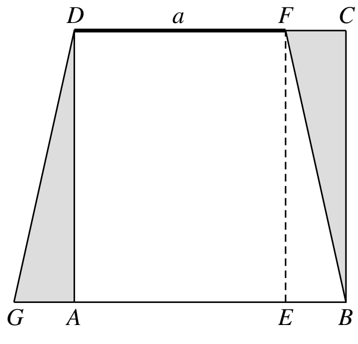
kde a je délka strany daného čtverce, b je daná délka jedné strany hledaného obdélníku, x je hledaná délka druhé strany. Podobné postupy užívali i staří Řekové (viz např. [BeJ2]).

Transformace čtverce nebo obdélníku na rovnoramenný lichoběžník s danou délkou kratší základny

Baudhájana i Ápastamba popsali metodu *zkrácení čtverce nebo obdélníku na jedné straně*, což je způsob, jak přeměnit čtverec nebo obdélník na rovnoramenný lichoběžník, u něhož je známá velikost horní základny (čela):[49]

> **BSS/i.55**
> *Chceš-li zkrátit čtverec nebo obdélník na jedné straně* [odděl obdélníkový díl] *zkrácením délky strany. Rozděl zbytek diagonálou a připoj* [tyto dva díly] *k oběma stranám* [odděleného dílu] *po převrácení.*

Byl dán čtverec $ABCD$ a délka horní základny lichoběžníku a. Z daného čtverce se oddělil obdélník $AEFD$, kde $|AE| = |FD| = a$, zbylý obdélník $EBGF$ se rozdělil úhlopříčkou FB. Nakonec se trojúhelník BCF přemístil do polohy DAG, tím byl zkonstruován lichoběžník $GBFD$, jehož horní základna měla požadovanou délku $|FD| = a$ (viz obr. 3.16).



Obr. 3.16: Transformace obdélníku na rovnoramenný lichoběžník

Transformace čtverce nebo obdélníku na trojúhelník

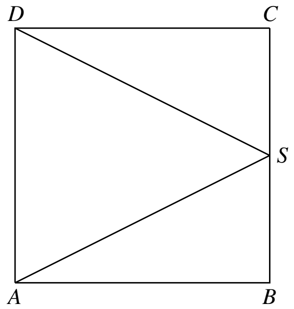
Pravidlo, jak transformovat čtverec na rovnoramenný trojúhelník se stejným

[49] Podle [Dat], str. 91.

obsahem, popsal například Baudhájana:[50]

BSS/i.56
Chceš-li přeměnit čtverec nebo obdélník na trojúhelník, sestroj čtverec s dvojnásobnou plochou než plocha obrazce [který se má přeměnit]. *Upevni tyč uprostřed jeho východní strany. Uvaž na ni dva provazy a natáhni směrem k západním vrcholům. Odřízni díly na druhé straně provazů.*

Čtverec $ABCD$ byl sestrojen tak, aby jeho obsah byl dvakrát větší než obsah původního čtverce, resp. obdélníku, pro to existovala pravidla. Trojúhelník ASD je polovinou čtverce $ABCD$, proto má stejný obsah jako původní obrazec (viz obr. 3.17).



Obr. 3.17: Transformace čtverce na rovnoramenný trojúhelník

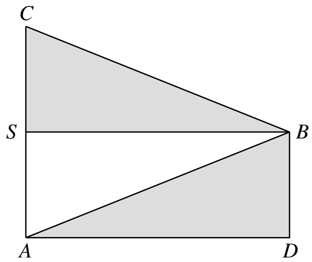
Transformace rovnoramenného trojúhelníku na čtverec

Pravidlo, jak transformovat rovnoramenný trojúhelník na čtverec, uvedl Kátjájana:[51]

KSS/iv.5
Chceš-li přeměnit rovnoramenný trojúhelník na čtverec, odřízni jeho severní polovinu podle střední linky; pak ji překlop a polož k protější straně. Podle metody konstrukce čtverce se stejnou plochou jako obdélník sestroj čtverec. To je ta metoda konstrukce.

Podle Kátjájanovy metody se nejprve sestrojil obdélník $ADBS$ se stejným obsahem jako původní rovnoramenný trojúhelník ABC, při tom se využila shodnost trojúhelníků SBC a ADB (viz obr. 3.18), pak se použila již dříve uvedená metoda přeměny obdélníku na rovnoplochý čtverec.

[50] Podle [Dat], str. 92.
[51] Podle [Dat], str. 92–93.



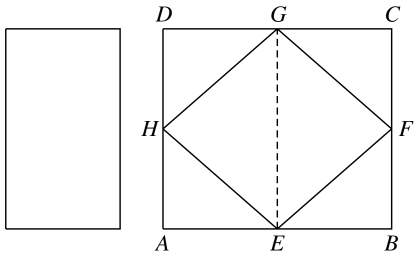
Obr. 3.18: Transformace rovnoramenného trojúhelníku na čtverec

Transformace čtverce nebo obdélníku na kosočtverec

Metodu transformace daného čtverce nebo obdélníku na kosočtverec vysvětlil Baudhájana takto:[52]

> **BSS/i.57**
> *Chceš-li přeměnit čtverec nebo obdélník na kosočtverec, sestroj obdélník s dvojnásobnou plochou* [než původní útvar]. *Upevni tyč ve středu východní strany. Uvaž na ni dva provazy a natáhni směrem ke středům severní a jižní strany* [obdélníku]. *Odřízni díly na druhé straně* [provazů]. *Tímto je také vysvětlena konstrukce druhého trojúhelníku.*

Obdélník $ABCD$ vznikl spojením dvou shodných obdélníků. Trojúhelník EFG má poloviční obsah než obdélník $EBCG$, totéž platí pro trojúhelník EGH a obdélník $AEGD$. Tedy kosočtverec $EFGH$ má stejný obsah jako původní obdélník (viz obr. 3.19). Podobná pravidla uvedli i Ápastamba a Kátjájana.



Obr. 3.19: Transformace obdélníku na kosočtverec

Transformace čtverce na kruh

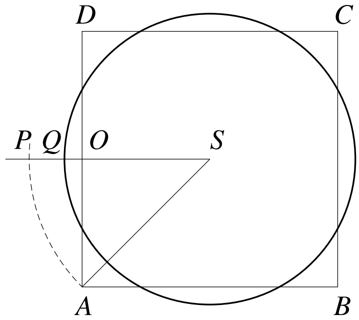
V *šulbasútrách* byl často řešen problém nalezení kruhu se stejným obsahem jako daný čtverec. Podobné metody uváděli i další autoři, takto popsal pravidlo

[52] Podle [Dat], str. 93.

Ápastamba:[53]

ApSS/iii.2
Chceš-li přeměnit čtverec na kruh, otoč polovinu diagonály směrem k přímce východ – západ; pak nakresli kružnici dohromady s jednou třetinou toho, co leží vně [čtverce].

Pravidlo říká, že v daném čtverci $ABCD$ se nalezl střed S jako průsečík úhlopříček. Pak se polopřímka SA otočila kolem středu S do pozice SP tak, aby SP byla kolmá ke straně AD. Střed strany AD byl označen jako O. Na úsečce OP byl vyznačen bod Q tak, že délka $|OQ|$ byla jednou třetinou délky $|OP|$. Hledaný kruh měl střed S a jeho poloměr měl délku $|SQ|$ (viz obr. 3.20).



Obr. 3.20: Transformace čtverce na kruh

Označíme-li a stranu daného čtverce $ABCD$, pak polovina úhlopříčky má délku $|SA| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, dále je $|OQ| = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)a = \frac{\sqrt{2}-1}{6}a$, průměr d hledaného kruhu pak je

$$d = \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)a = \frac{2+\sqrt{2}}{3}a\,.$$

Této metodě odpovídá hodnota $\pi \approx 3{,}088$.

Transformace kruhu na čtverec

Všechny *šulbasútry* obsahují různé metody popisující kvadraturu kruhu, například Baudhájana napsal:[54]

BSS/i.59
Chceš-li přeměnit kruh na čtverec, rozděl jeho průměr na osm dílů; pak rozděl jeden na dvacet devět dílů a z nich dvacet osm vynech a také šestinu dílu [z předchozího dělení] *zmenšenou o osminu.*

[53] Podle [BuA2], str. 335, [Pl1], str. 23, podobně i BSS/ii.9, KSS/iii.11.
[54] Podle [Dat], str. 143.

Strana hledaného čtverce je

$$a = \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right) d\,,$$

kde d je průměr daného kruhu. Této metodě odpovídá hodnota $\pi \approx 3{,}088$.

Jedno z možných vysvětlení lze odvodit z předchozí úlohy:

$$d = \frac{2+\sqrt{2}}{3} a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{3d}{2+\sqrt{2}}\,.$$

Protože staří indičtí učenci už od dob Baudhájany uvažovali $\sqrt{2} = \frac{577}{408}$, hledali ve vztahu $a = \frac{1224}{1393} d$ nějaké vhodné vyjádření koeficientu u d. Je možné, že vycházeli ze vztahu

$$\frac{1224}{1393} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393}\,,$$

kde zanedbávali poslední člen, tedy uvažovali[55]

$$\frac{1224}{1393} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\,,$$

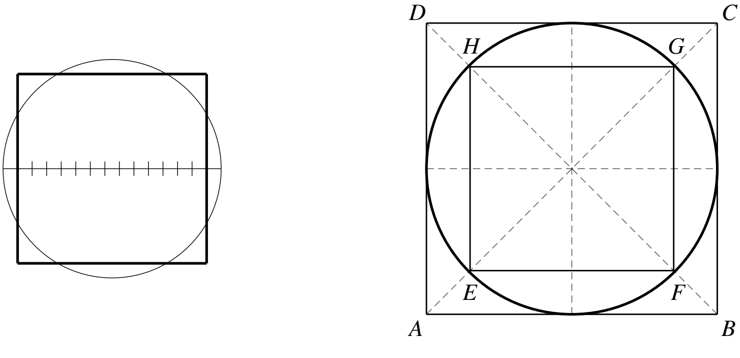
neboli

$$a = \frac{1224}{1393} d \approx \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right) d\,.$$

Ápastamba uvedl jednodušší, avšak méně přesnou metodu:[56]

ApSS/iii.3
Rozděl [průměr] *na patnáct dílů a odstraň dva. To je zhruba strana* [stejného] *čtverce.*

Je to přibližná metoda založená na konstrukci čtverce, jehož strana a má délku $\frac{13}{15}\,d$, kde d je průměr daného kruhu (viz obr. 3.21 vlevo).



Obr. 3.21: Transformace kruhu na čtverec

[55] Různé domněnky, jak staří Indové mohli dospět k tomuto vyjádření, jsou uvedeny v [Dat].

[56] Podle [BuA2], str. 335, [Pl1], str. 23, podobně také BSS/ii.11, KSS/iii.12.

Jedno z možných zdůvodnění tohoto postupu je uvedeno v [Dat]. Dané kružnici se opíše čtverec $ABCD$ a vepíše čtverec $EFGH$. Strana čtverce $ABCD$ má délku $2r$ a jeho obsah je $4r^2$. Strana menšího čtverce $EFGH$ má délku$\sqrt{2}r$ a jeho obsah je $2r^2$ (viz obr. 3.21 vpravo).

Označíme-li obsah kruhu S, pak platí

$$2r^2 < S < 4r^2 .$$

Kruh leží „uprostřed", jeho obsah může být přibližně aritmetickým průměrem uvedených čtverců:

$$S = \frac{4r^2 + 2r^2}{2} = 3r^2 .$$

To odpovídá hodnotě $\pi = 3$. Označme stranu hledaného čtverce a. Protože požadujeme, aby čtverec měl stejný obsah jako kruh, přibližně platí

$$a^2 = S = 3r^2 \qquad \Rightarrow \quad a = \sqrt{3}r .$$

Pro hodnotu $\sqrt{3}$ se používalo vyjádření $\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}$, odtud tedy $a = \frac{26}{15}r = \frac{13}{15}d$.

Z této metody můžeme odvodit i odpovídající hodnotu π, která je ovlivněná přibližnou hodnotou $\sqrt{3}$:

$$\pi = 4\left(\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{676}{225} \approx 3{,}00444 .$$

To není příliš dobrá aproximace, rozhodně už staří Babyloňané znali přesnější (viz [BBV]).

V *šulbasútrách* „nalezneme" mnoho různých hodnot π. Je to tím, že autoři nehledali přímo číslo π, jeho hodnoty dnes můžeme odvodit z různých přibližných metod transformace ploch, každé metodě tak odpovídá jiná hodnota π.[57]

Poznamenejme, že v Mezopotámii se většinou počítalo s hodnotou $\pi = 3$ nebo $\pi = 3\frac{1}{8}$, ze starých egyptských výpočtů obsahu kruhu je možné odvodit hodnotu $\pi \approx 3{,}1605$ (viz [BBV]). Archimédés (asi 287 až 212 př. n. l.) porovnáním obvodů 96-úhelníků opsaných a vepsaných do kruhu provedl velmi přesný odhad $3{,}140845 \approx 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857$ (viz [BS]).

3.7 Podobnost

Jak už bylo řečeno, oltář *mahávédi* měl tvar rovnoramenného lichoběžníku[58] se základnou 30 *padů* (nebo *prakramů*), čelem 24 *padů* (nebo *prakramů*) a výškou 36 *padů* (nebo *prakramů*), jeho obsah byl $S = 972$. Oltáře *sautrámanívédi*,

[57] Další nepříliš přesné hodnoty π odvozené z dalších konstrukcí jsou uvedeny např. v [Kak4], [Ku1].

[58] Rovnoramenný lichoběžník byl oblíbený i v Mezopotámii.

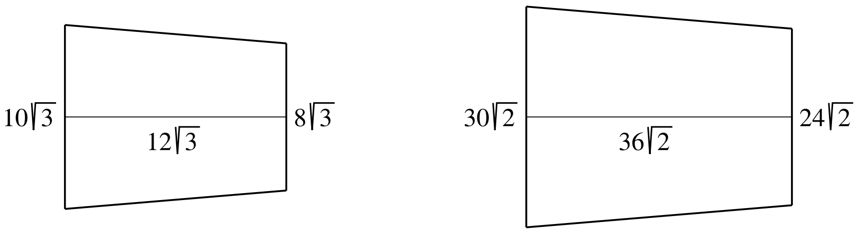
resp. *ašvamédhavédi* měly mít podle pravidel stejný tvar, ale třetinový, resp. dvojnásobný obsah (viz obr 3.22). Ápastamba popsal jejich konstrukci pomocí *trtíja-karaní* (*tṛtīya-karaṇī*, tj. $\sqrt{\frac{1}{3}}$), *tri-karaní* (*tri-karaṇī*, tj. $\sqrt{3}$), resp. *dvi-karaní* (*dvi-karaṇī*, tj. $\sqrt{2}$):[59]

ApSS/v.8

[Při *sautrámanívédi* je] *trtíja-karaní prakrama místo prakrama; nebo pomocí tri-karaní* [*prakrama*, přitom jsou] *obě kratší strany osminásobné a desetinásobné, pršthjá je dvanáctinásobná.*

ApSS/vi.1

[Při konstrukci *védi* pro oběť koně] *se použije dvi-karaní prakrama místo prakrama.*



Obr. 3.22: Lichoběžníky s daným poměrem velikosti obsahů

Pro menší z oltářů byly základny dlouhé $\frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$, $\frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$ a výška $\frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$, obsah pak byl

$$S_1 = 12\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(8\sqrt{3} + 10\sqrt{3}) = 324 \ (= \frac{1}{3}S)\,,$$

Podobně pro větší oltář:

$$S_2 = 36\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}(24\sqrt{2} + 30\sqrt{2}) = 1\,944 \ (= 2S)\,.$$

Takto bylo možné zkonstruovat oltáře stejného tvaru s n-násobným obsahem. Podobná metoda se používala i pro oltáře složitějších tvarů, například pro zmiňovaný oltář *šjénačit* ve tvaru primitivního sokola s obsahem $7\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů* (viz obr. 3.1). Tato velikost se však týkala pouze první konstrukce, při druhé konstrukci musela mít plocha velikost $8\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů*, při třetí $9\frac{1}{2}$ atd., takto se pokračovalo až k velikosti $101\frac{1}{2}$. Baudhájana uvedl toto pravidlo:[60]

BSS/ii.12

Rozděl to, co je rozdíl od původní [dané] *velikosti oltáře, na* 15 *dílů, přičti ke každé* [základní] *části daného tvaru dva z těchto dílů. Pak sestroj obrazec* [stejným způsobem jako původní] *se* $7\frac{1}{2}$ *těchto* [upravených] *jednotek.*

[59] Podle [BuA2], str. 342. Konstrukce délek $\sqrt{3}$ a $\sqrt{\frac{1}{3}}$ jsou popsány v odstavci 3.9.

[60] Podle [Dat], str. 154–155.

Podle tohoto tvrzení se sestrojil čtverec s obsahem m čtverečných *purušů*, který se rozdělil na 15 stejných dílů – obdélníků. Dva z těchto dílů se sloučily s jednotkovým čtvercem tak, že vznikl nový čtverec o straně délky $\sqrt{1+\frac{2m}{15}}$ *puruši*. Tato délka se pak stala novou jednotkou pro konstrukci oltáře, jehož obsah byl

$$7\frac{1}{2}\left(1+\frac{2m}{15}\right) = 7\frac{1}{2}+m \quad (\text{čtverečných } \textit{purušů})\,.$$

Uvedená metoda představovala geometrické řešení kvadratické rovnice

$$ax^2 = b\,.$$

Původní oltář s obsahem $7\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů* se skládal ze čtyř jednotkových čtverců (tělo sokola), dvou obdélníků 1 krát $1\frac{1}{5}$ (křídla) a jednoho obdélníku 1 krát $1\frac{1}{10}$ (ocas), jak je znázorněno na obr. 3.1. Při další konstrukci bylo potřeba každou stranu zvětšit x krát tak, aby obsah nového oltáře byl $7\frac{1}{2}+m$ čtverečných *purušů*, řešila se tedy rovnice

$$\begin{aligned} 2x\cdot 2x + 2x\left(x+\frac{x}{5}\right) + x\left(x+\frac{x}{10}\right) &= 7\frac{1}{2}+m,\\ \frac{15}{2}x^2 &= 7\frac{1}{2}+m\,,\\ x &= \sqrt{1+\frac{2m}{15}}\,. \end{aligned}$$

Podobné metody uvedli i Ápastamba a Kátjájana.

3.8 Obsahy

V *šulbasútrách* byla popsána i pravidla pro výpočet obsahu čtverce a obsahu rovnoramenného lichoběžníku. Autoři však znali i metody na výpočet obsahu obdélníku a trojúhelníku, protože obsah oltáře byl určován tak, že oltář byl rozdělen na elementární čtverce, trojúhelníky, obdélníky atd. Ápastamba uvedl:[61]

ApSS/iii.4
Jedna [délková], *jednotka* [např. 1 *puruša*, jako strana čtverce] *vytvoří jednu jednotku* [plochy – 1 čtverečný puruša].

ApSS/iii.6
Dvěma [délkovými jednotkami, které jsou stranami čtverce, vzniknou] *čtyři* [plošné jednotky], *třemi devět.*

ApSS/iii.7
Šňůra vytvoří [když se s ní konstruuje čtverec] *právě tolik řad* [malých čtverců], *kolik obsahuje jednotek.*

[61] Podle [BuA2], str. 335–336.

Ápastamba také počítal obsah *mahávédi* tak, že přeměnil oltář, tj. rovnoramenný lichoběžník, na rovnoplochý obdélník podobným způsobem, jako tomu bylo při transformaci obdélníku na lichoběžník,[62] jak je naznačeno na obrázku 3.16. Musel tedy vědět, jak vypočítat obsah obdélníku, přestože konkrétní pravidlo nezmiňoval.

Šulbasútry neobsahují obecná pravidla na výpočty obsahů elementárních útvarů – trojúhelníků, čtverců či obdélníků, výpočty byly provedeny vždy pro každý konkrétní případ.

3.9 Odmocniny

V pravidlech pro konstrukci oltářů se objevovaly odmocniny, které se nazývaly *karaní* (*karaṇī*),[63] konkrétně se v *šulbasútrách* vyskytovaly *dvikaraní* (*dvi-karaṇī*, tj. $\sqrt{2}$), *trikaraní* (*tri-karaṇī*, tj. $\sqrt{3}$), *trtíjakaraní* (*tṛtīya-karaṇī*, tj. $\sqrt{\frac{1}{3}}$), *saptamakaraní* (*saptama-karaṇī*, tj. $\sqrt{\frac{1}{7}}$), *aštádašakaraní* (*aṣṭādaśa-karaṇī*, tj. $\sqrt{18}$). Diagonála čtverce o straně a, tj. $a\sqrt{2}$, se nazývala *savišéša* (*sa-viśeṣa*).

Pozoruhodné je velmi přesné vyjádření $\sqrt{2}$, které používal Ápastamba:[64]

> **ApSS/i.6**
> *Zvětši míru* [ke které má být nalezena $\sqrt{2}$] *o její třetinu a ještě čtvrtinu* [té třetiny] *a zmenši o jednu svou čtyřiatřicetinu. To je savišéša.*

Pravidlu odpovídá matematické vyjádření:

$$\sqrt{2}\,a = a + \frac{a}{3} + \frac{a}{3 \cdot 4} - \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

odkud pro $a = 1$ dostáváme

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414215686\ldots \tag{3.1}$$

Porovnáme-li s přesnou hodnotou $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562\ldots$, má indická hodnota pět správných desetinných míst[65] a je jen o trochu horší než hodnota babylónská $\sqrt{2} \approx 1{,}414212963$ (viz [BBV]). Není však jasné, jak bylo toto vyjádření

[62] Viz ApSS/v.7, podle [BuA2], str. 341.

[63] Termín *karaní* lze vysvětlit jako „dělač“, resp. to, co něco udělá, vytvoří, tedy [strana čtverce dlouhá] $\sqrt{2}$ vytvoří [čtverec o velikosti plochy] 2, proto se $\sqrt{2}$ někdy nazývala „zdvojovač“. Původně však *karaní*, resp. *radždžu karaní* označovalo provazec, kterým se vyměřoval čtverec, viz [Th].

[64] Podle [BuA2], str. 329–330, stejné vyjádření je ve sloce BSS/ii.12.

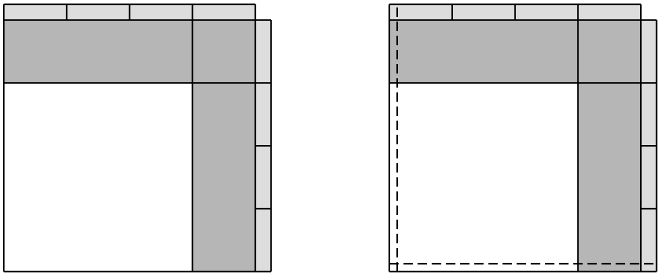
[65] Komentátor *šulbasúter* Ráma (Rāma) v polovině 15. století přidal k vzorci (3.1) ještě další dva členy $-\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 33 \cdot 34} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 34}$, a tím získal hodnotu se 7 správnými desetinnými místy, viz [Jo1].

odvozeno. Jeden z možných způsobů je popsán v [Dat] a opět využívá geometrické překládání ploch.[66]

Vezmou se dva jednotkové čtverce, které, sloučené dohromady, vytvoří čtverec, jehož strana má délku $\sqrt{2}$. Jeden z daných čtverců se rozdělí na tři stejné obdélníky, z nichž jeden se dělí ještě dál, na tři stejné čtverečky. Dva z těchto čtverečků se znovu rozdělí, každý na čtyři stejné pruhy (viz obr 3.23).

Obr. 3.23: Geometrické odvození $\sqrt{2}$ – dělení čtverců

Díly rozděleného čtverce se připojí k prvnímu čtverci, jak je znázorněno na obrázku 3.24. V pravém horním růžku však ještě kousek chybí, strany nového čtverce se proto musí o něco zmenšit.



Obr. 3.24: Geometrické odvození $\sqrt{2}$ – skládání čtverce

Strana nového čtverce má délku $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. Chceme ji zmenšit, abychom doplnili pravý horní růžek, tj. $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, tedy

$$2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot x = \left(\frac{1}{12}\right)^2 ,$$
$$x = \frac{1}{12 \cdot 34} .$$

Strana hledaného čtverce má tedy délku

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} .$$

Výsledek není přesný, protože levý dolní růžek může být oddělen jen jednou.

[66] Další možná odvození vztahu (3.1) je možno nalézt např. v [BeJ4], [SaTA], [Hen].

Podobné vyjádření i s možným odvozením existovalo i pro $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} = \frac{1\,351}{780} \approx 1{,}7320512\ldots$$

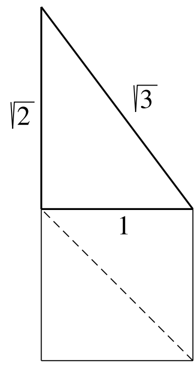
Porovnejme se správnou hodnotou $\sqrt{3} = 1{,}7230508\ldots$ a přesnějším odhadem, k němuž dospěl Archimédés:[67]

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780}, \qquad \text{tj.} \qquad 1{,}7320231\ldots < \sqrt{3} < 1{,}7320512\ldots$$

Ke konstrukci délky $\sqrt{3}$ Ápastamba uvedl:[68]

ApSS/ii.2
Míra [jednotka] *je šířka, dvi-karaní* [$\sqrt{2}$] *je délka. Provazec* [rovný] *přeponě je tri-karaní* [$\sqrt{3}$].

Při této konstrukci se opět využívala Pýthagorova věta $1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$, jak je patrné na obrázku 3.25.



Obr. 3.25: Konstrukce $\sqrt{3}$

Ke konstrukci délky $\sqrt{\frac{1}{3}}$ uvedl Ápastamba toto pravidlo:[69]

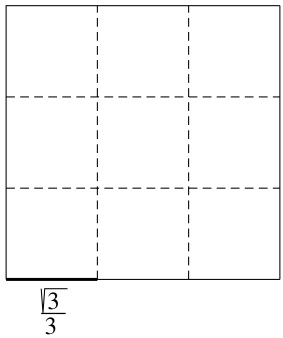
ApSS/ii.3
Tímto [$\sqrt{3}$] *je také objasněna trtíja-karaní* [$\sqrt{\frac{1}{3}}$]. *Ale* [čtverec nad $\sqrt{3}$] *je třeba rozdělit na 9 dílů.*

Sestrojil se čtverec o straně délky $\sqrt{3}$, který se rozdělil na devět stejných čtverečků (viz obr. 3.26). Strana malého čtverce měla délku $\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

[67] Není jasné, jakým způsobem Archimédés nerovnosti stanovil, využil je v exhaustivní metodě při odhadu pro $\pi = \frac{o}{d}$, viz [BeJ4], [BS].

[68] Podle [BuA2], str. 332, [Pl1], str. 21, podobně ve slokách BSS/i.10, BSS/i.11, KSS/ii.10, KSS/ii.11.

[69] Podle [BuA2], str. 332.

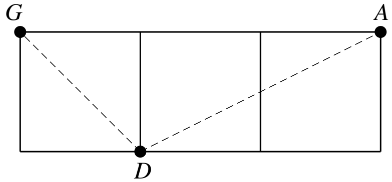


Obr. 3.26: Konstrukce $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

V pravidlech pro vyměřování správné polohy tří základních ohňových oltářů *gárhapatja*, *áhavaníja* a *dakšinágni* je možné nalézt i přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Polohu těchto oltářů definoval Baudhájana:[70]

BSS/i.67
Jednou třetinou délky [vzdálenosti mezi *gárhapatja* a *áhavaníja*] *nakresli tři čtverce těsně u sebe* [od západu k východu], *poloha gárhapatja je v severozápadním rohu západního čtverce, dakšinágni je v jeho jihovýchodním rohu a poloha áhavaníja je v severovýchodním rohu východního čtverce.*

Vzájemná poloha oltářů je uvedena na obrázku 3.27. Označíme-li vzdálenost $|GA| = a$, pak $|GD| = \frac{\sqrt{2}}{3}a$, $|AD| = \frac{\sqrt{5}}{3}a$.



Obr. 3.27: Vzájemná poloha oltářů *gárhapatja*, *áhavaníja* a *dakšinágni*

V *šulbasútrách* však nalezneme ještě další metody, jak správně umístit tyto oltáře, například Ápastamba uvedl:[71]

ApSS/iv.4
Vzdálenost mezi gárhapatja a áhavaníja rozděl na pět nebo šest dílů, přidej šestý nebo sedmý díl (BC), rozděl [provaz této délky] *na tři díly a v západní třetině udělej značku. Pak upevni oba konce v gárhapatja a áhavaníja, natáhni* [provaz za značku] *na jih a udělej znamení. To je, podle písma, místo dakšinágni.*

[70] Podle [Dat], str. 203, podobně i ApSS/iv.3.
[71] Podle [BuA2], str. 337, [Pl1], str. 24–25, podobně BSS/iii.3.

Podle uvedené metody můžeme vypočítat vzdálenosti oltářů $|GD| = \frac{2}{5}\,a$, $|AD| = \frac{4}{5}a$, resp. $|GD| = \frac{7}{18}\,a$, $|AD| = \frac{7}{9}a$.

Podobnou konstrukci popisovali i jiní autoři, mírně se však lišila délka provazu a místo, v němž se provaz držel, odtud pak dostáváme i další vyjádření vzdálenosti oltářů $|GD| = \frac{8}{21}\,a$, $|AD| = \frac{16}{21}a$ a $|GD| = \frac{12}{25}\,a$, $|AD| = \frac{18}{25}a$. Z těchto vztahů lze odvodit nepříliš přesné aproximace $\sqrt{2}$ a $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{2} \approx \frac{6}{5} = 1{,}2\,, \qquad \sqrt{2} \approx \frac{7}{6} = 1{,}166\ldots,$$
$$\sqrt{2} \approx \frac{8}{7} = 1{,}142\ldots, \qquad \sqrt{2} \approx \frac{36}{25} = 1{,}44\,,$$

$$\sqrt{5} \approx \frac{12}{5} = 2{,}4\,, \qquad \sqrt{5} \approx \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots,$$
$$\sqrt{5} \approx \frac{16}{7} = 2{,}285\ldots, \qquad \sqrt{5} \approx \frac{54}{25} = 2{,}16\,.$$

3.10 Zlomky

Při konstrukcích oltářů byly potřebné zlomky, které byly v *šulbasútrách* nazývány *amša* (*aṃśa*) nebo *bhága* (*bhāga*), neboli část, resp. díl. Občas byl zlomek označen jako *kalá* (*kalā*), což je termín, kterým byl v textu *Rgvédy* označen zlomek $\frac{1}{16}$. K pojmenování kmenných zlomků[72] se užívaly základní číslovky ve spojení se slovem *bhága* nebo *amša*, např. *paňčadašabhága* (*pañcadaśa-bhāga*, tj. patnáct dílů)[73] vyjadřovalo jednu patnáctinu ($\frac{1}{15}$) nebo řadové číslovky *paňčamabhága* (*pañcama-bhāga*, tj. pátý díl),[74] neboli jedna pětina ($\frac{1}{5}$). Později se slovo *bhága* vynechávalo, *šaštha* (*ṣaṣṭha*, tj šestý) znamenalo jednu šestinu ($\frac{1}{6}$). Počítání se zlomky je podrobněji pojednáno v 7. kapitole.

V *šulbasútrách* se však nepoužívaly jen kmenné zlomky, počítalo se i se zlomky s čitatelem větším než jedna, používala se také smíšená čísla. Zlomky $\frac{3}{8}$ nebo $\frac{2}{7}$ se nazývaly *tri aštama* (*tri aṣṭama*, tj. tři osmé) nebo *dvi saptama* (*dvi saptama*, tj. dva sedmé).[75]

Autoři *šulbasúter* zlomky nejen znali, ale dokázali s nimi i počítat, například Baudhájana uvedl,[76] že je potřeba $187\frac{1}{2}$ čtvercových cihel o straně $\frac{1}{5}$ *puruši* k vystavění oltáře s obsahem $7\frac{1}{2}$ čtverečných *purušů*, tj.

$$7\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\right) = \frac{15}{2}\cdot 25 = 187\frac{1}{2}\,.$$

[72] Kmenný zlomek, je zlomek s čitatelem rovným jedné.
[73] Viz ApSS/x.3, KSS/v.4, podle [BuA2], str. 360, [Dat], str. 212.
[74] Viz ApSS/x.2, KSS/v.6, podle [BuA2], str. 360, [Dat], str. 212.
[75] Viz ApSS/xix.2, ApSS/xix.6, podle [BuA2], str. 381, 382.
[76] Podle [Dat], str. 214.

Ápastamba počítal obsah čtverce:[77]

ApSS/iii.8
Šňůra o $1\frac{1}{2}$ *puruši vytvoří* $2\frac{1}{4}$ [čtverečných *purušů*], *taková o* $2\frac{1}{2}$ *puruši* $6\frac{1}{4}$ [čtverečných *purušů*].

ApSS/iii.10
Polovinou strany [daného čtverce] *se vytvoří čtvrtina* [původního] *čtverce, protože* [čtverec nad] *polovinou vyplní čtvrtinu* [čtverce nad] *šňůrou dvojnásobné délky, třetí díl* [strany] *devátý díl* [čtverce].

Tato pravidla dokládají, že védští učenci zvládali umocňování zlomků:

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}, \qquad \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}.$$

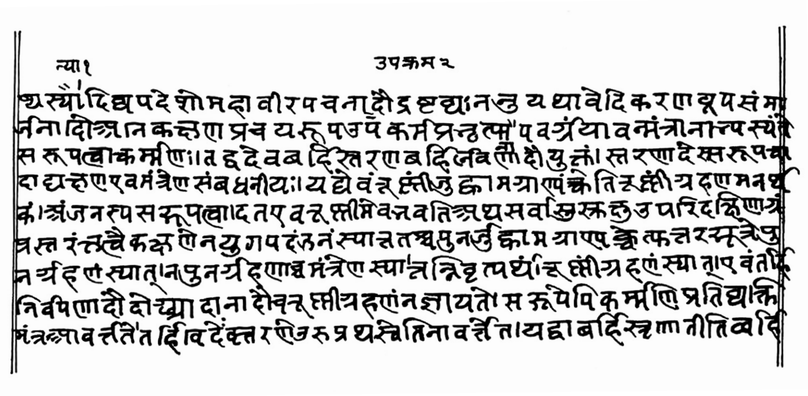
I když některé z uvedených metod jsou pracné nebo nejsou příliš přesné, pravidla obsažená v *šulbasútrách* prokazují slušné znalosti matematiky indických učenců už v prvním tisíciletí před naším letopočtem. Sami Indové však chápali *šulbasútry* spíše jako náboženské než matematické texty, v pozdějších matematických dílech už podobné konstrukce popisovány nebyly.

Přístup starých indických učenců ke geometrii v *šulbasútrách* byl jiný než v ostatních zemích. Geometrie sloužila náboženství, proto pohled na geometrické konstrukce byl podřízen přísným pravidlům pro obětní obřady. Ve starém Egyptě a Mezopotámii se problémy na výpočet obvodů a obsahů používaly v praktickém životě, určovala se například velikost pozemku nebo délka jeho hranice, k tomu často stačily jen výpočty přibližné. Obětní rituály naopak vyžadovaly přesné konstrukce nejen co do tvaru a velikosti, ale i umístění a orientace. Transformace rovnoplochých útvarů byly oblíbené v Řecku, ve starém Egyptě a Mezopotámii se nevyskytovaly. Na rozdíl od Mezopotámie a Řecka se v *šulbasútrách* neobjevují konstrukce pravidelných n-úhelníků.

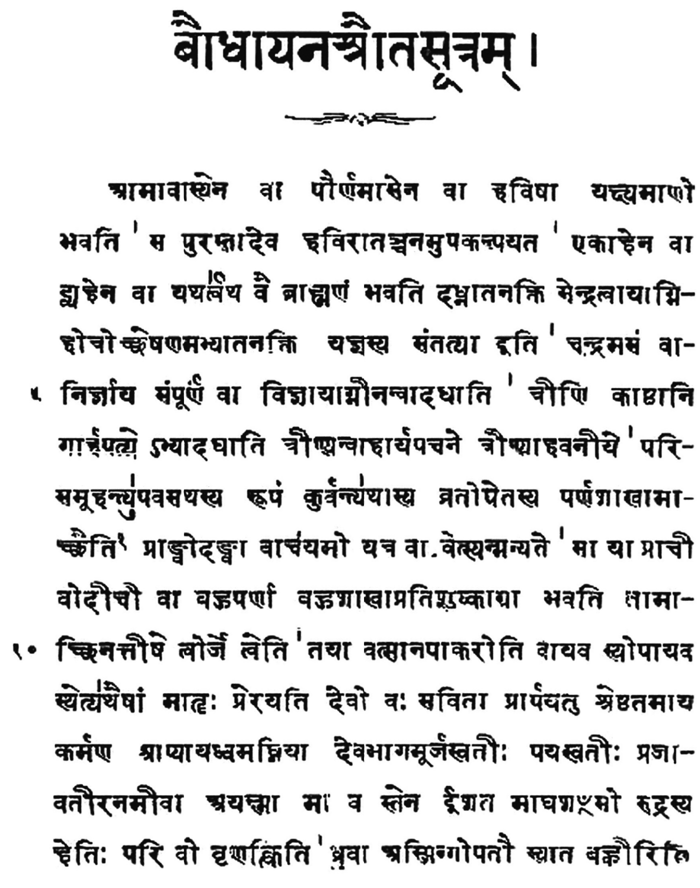
Zatímco v egyptských a mezopotámských textech najdeme většinou návody, jak „vypočítat", v indických *šulbasútrách* je popsáno, jak „zkonstruovat". I když ke stanovení potřebných délek stran bylo nutné znát základní vztahy a souvislosti, například mezi délkou strany a obsahem, důraz byl kladen na konstrukci. Konstrukce pomocí provazu a bambusové tyče připomínají některé Eukleidovy konstrukce popsané v *Základech* (viz [Eu]). V *šulbasútrách* však chybí definice a pravidla jsou uvedena bez odvozování a důkazů.

Otázkou zůstává, proč byly náboženské rituály svázány s geometrií. Je možné, že geometrické útvary symbolizovaly vesmírné objekty, kruh nebesa, čtverec Zemi atd. (viz [Pl1]). Není však jasné, zda geometrické poučky vznikly k přesnému vyjádření v rituálu nebo naopak už existující geometrická pravidla byla začleněna do náboženských praktik.

[77] Podle [BuA2], str. 336.



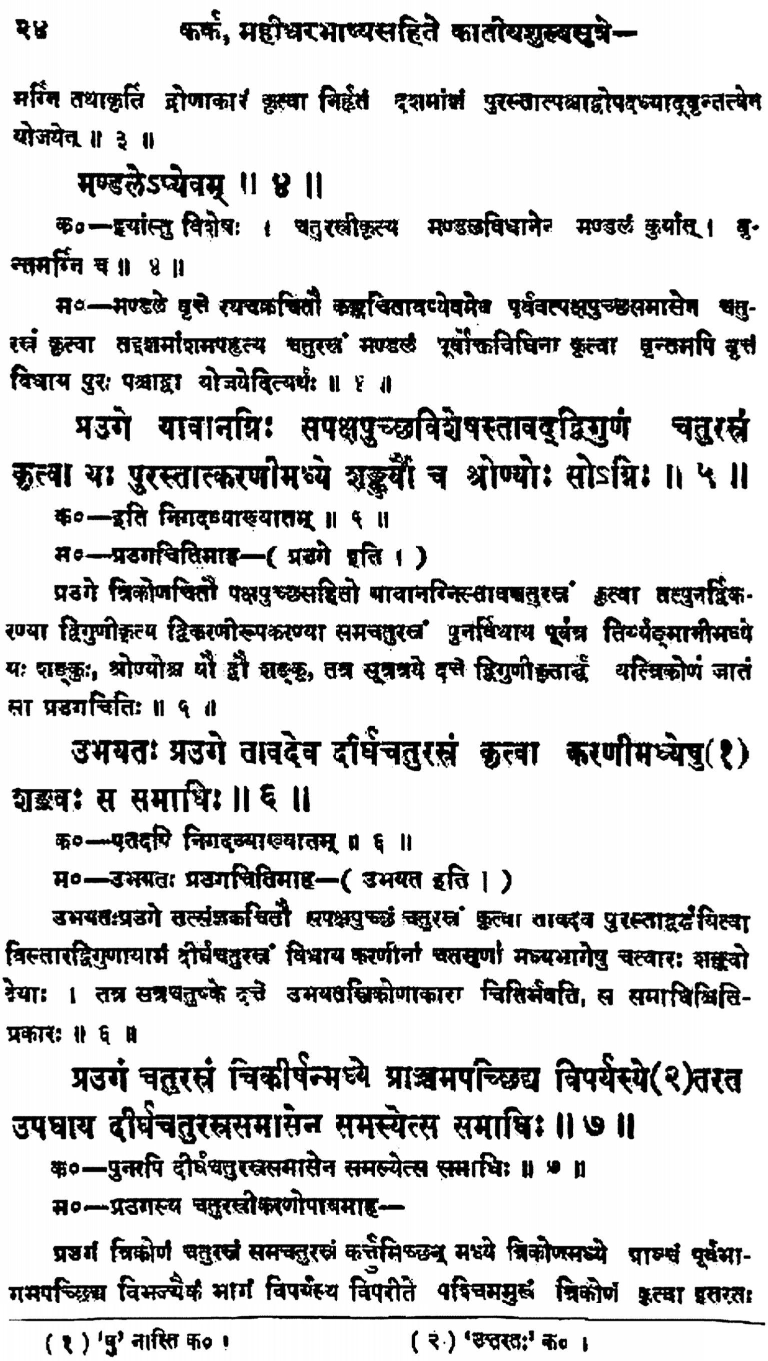
Obr. 3.28: Ukázka textu Mánavovy *šulbasútry*[78]



बौधायनश्रौतसूत्रम् ।

Obr. 3.29: Ukázka textu Baudhájanovy *šulbasútry*[79]

[78] Převzato z [Man].
[79] Převzato z [Cal].



२४ कर्क, महीधरभाष्यसहिते कात्यायनशुल्बसूत्रे—

मग्निं तथाकृतिं द्रोणाकारं कृत्वा निर्हृतं दशमांशं पुरस्तात्पश्चाद्वोपदध्याद्वृन्ततत्वेन योजयेत् ॥ ३ ॥

मण्डलेऽप्येवम् ॥ ४ ॥

क०—इयांस्तु विशेषः । चतुरस्रीकृत्य मण्डलविधानेन मण्डलं कुर्यात् । वृन्तमग्निं च ॥ ४ ॥

म०—मण्डले वृत्ते रथचक्रचितौ कङ्कचितावप्येवमेव पूर्ववत्पक्षपुच्छसमासेन चतुरस्रं कृत्वा तद्दशमांशमपहृत्य चतुरस्रं मण्डलं पूर्वोक्तविधिना कृत्वा वृन्तमपि वृत्तं विधाय पुरः पश्चाद्वा योजयेदित्यर्थः ॥ ४ ॥

प्रउगे यावानग्निः सपक्षपुच्छविशेषस्तावद्द्विगुणं चतुरस्रं कृत्वा यः पुरस्तात्करणीमध्ये शङ्कुर्यौ च श्रोण्योः सोऽग्निः ॥ ५ ॥

क०—इति निगदव्याख्यातम् ॥ ५ ॥

म०—प्रउगचितिमाह—(प्रउगे इति ।)

प्रउगे त्रिकोणचितौ पक्षपुच्छसहितो यावानग्निस्तावच्चतुरस्रं कृत्वा तत्पुनर्द्विकरण्या द्विगुणीकृत्य द्विकरणीरूपकरण्या समचतुरस्रं पुनर्विधाय पूर्वत्र तिर्यङ्मानीमध्ये यः शङ्कुः, श्रोण्योश्च यौ द्वौ शङ्कू, तत्र सूत्रत्रये दत्ते द्विगुणीकृतार्द्धं यस्त्रिकोणं जातं सा प्रउगचितिः ॥ ५ ॥

उभयतः प्रउगे तावदेव दीर्घचतुरस्रं कृत्वा करणीमध्येषु(१) शङ्कवः स समाधिः ॥ ६ ॥

क०—एतदपि निगदव्याख्यातम् ॥ ६ ॥

म०—उभयतः प्रउगचितिमाह—(उभयत इति ।)

उभयतःप्रउगे तत्संज्ञकचितौ सपक्षपुच्छं चतुरस्रं कृत्वा तावदेव पुरस्तादूर्ध्वं चित्वा विस्तारद्विगुणायामं दीर्घचतुरस्रं विधाय करणीनां चतसृणां मध्यभागेषु चत्वारः शङ्कवो ज्ञेयाः । तत्र सूत्रचतुष्के दत्ते उभयतस्त्रिकोणाकारा चितिर्भवति, स समाधिश्चितिप्रकारः ॥ ६ ॥

प्रउगं चतुरस्रं चिकीर्षन्मध्ये प्राञ्चमपच्छिद्य विपर्यस्ये(२)तरत उपधाय दीर्घचतुरस्रसमासेन समस्येत्स समाधिः ॥ ७ ॥

क०—पुनरपि दीर्घचतुरस्रसमासेन समस्येत्स समाधिः ॥ ७ ॥

म०—प्रउगस्य चतुरस्रीकरणोपायमाह—

प्रउगं त्रिकोणं चतुरस्रं समचतुरस्रं कर्त्तुमिच्छन् मध्ये त्रिकोणमध्ये प्राञ्चं पूर्वभागमपच्छिद्य विभज्यैकं भागं विपर्यस्य विपरीतं पश्चिममुखं त्रिकोणं कृत्वा इतरतः

(१) 'षु' नास्ति क० । (२) 'स्येतरतः' क० ।

Obr. 3.30: Ukázka textu Kátjájanovy *šulbasútry*[80]

80 Převzato z [Ne].