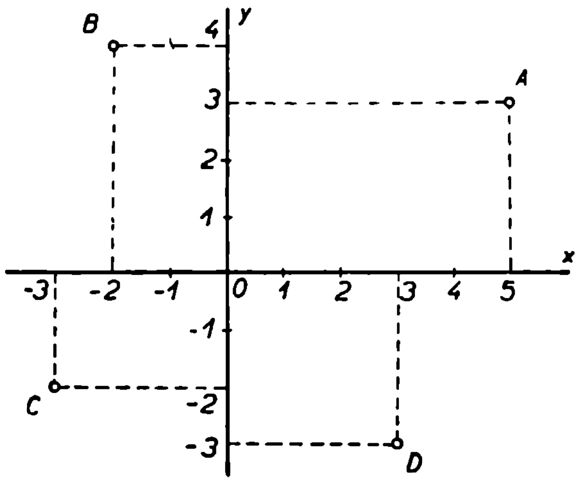
II. část

12. DEFINICE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ OBECNÉHO ÚHLU

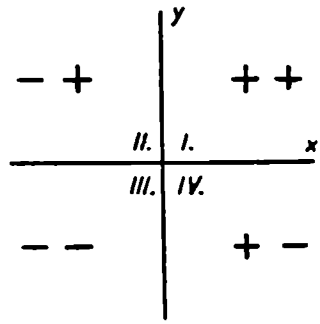
Definice a věty z goniometrie ostrého úhlu, t. j. úhlu otevřeného intervalu (0°, 90°), umožnily jen řešení pravoúhlých trojúhelníků. Mohli bychom jimi sice řešit i obecné trojúhelníky, na př. rozdělili bychom daný trojúhelník vhodně volenou výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, ale tato cesta je poněkud zdlouhavá a nevhodná.

Abychom našli výhodné methody pro *řešení obecných trojúhelníků*, všimneme si toho, že v daných trojúhelnících se mohou vyskytovat také tupé úhly. Dosavadní postup pak už udává další cestu: budeme muset nejprve nějakým způsobem definovat goniometrické funkce také pro tupé úhly, t. j. pro úhly otevřeného intervalu (90°, 180°). Hned si však tento úkol poněkud rozšíříme: raději podáme definice goniometrických funkcí pro úhly mezi 0° a 360° (tedy pro úhly uzavřeného intervalu ⟨0°, 360°⟩). Samozřejmě definice musí být takové, aby z nich při omezení na úhly otevřeného intervalu (0°, 90°) vyplynuly dřívější definice.

Poznámka. V dalším s výhodou užijeme *pravoúhlých souřadnic* v rovině. Zvolme v rovině dvě k sobě kolmé přímky x, y (obr. 47), kterým budeme říkat *souřadnicové osy*; osu x volme vodorovnou, osu y svislou. Každou z nich pokládejme za číselnou osu, t. j. znázorníme na nich čísla a to tak, aby společný průsečík os O (*počátek*) byl nulou na obou osách a dále tak, aby kladná čísla na ose x byla napravo od O a aby kladná čísla na ose y byla nad O. Je-li M libovolný bod v rovině, pak jím sestrojíme kolmice k osám x a y; tyto kolmice nám postupně na ose x a y určí čísla, jimž říkáme *pravoúhlé souřadnice bodu* M. Podrobněji: kolmice k ose x určí na ose x číslo, kterému říkáme x-souřadnice, kolmice k ose y určí na této ose y-souřadnici bodu M. Píšeme pak M (x; y) a říkáme,



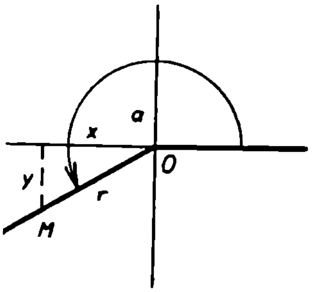
Obr. 47.



Obr. 48.

že bod M má souřadnice x a y (v tomto pořádku). Tak na př. na obr. 47 jsou zobrazeny body A (5; 3), B (—2; 4), C (—3; —2), D(3; —3). Podívejme se blíže na souřadnice jednotlivých bodů. Především je zřejmé, že každý bod osy x má y-souřadnici nulovou a každý bod osy y má opět x-souřadnici nulovou. Osy x a y dělí rovinu na čtyři části, *kvadranty*, které jsou v obr. 48 označeny číslicemi I$\div$IV. Všechny body téhož kvadrantu mají znaménka obou souřadnic pevná, a to v I. kvadrantu $++$, v II. $-+$, ve III. $--$, ve IV. $+-$, při čemž 1. (2.) znaménko je znamení x-(y-) souřadnice.

Chceme definovat goniometrické funkce pro úhly uzavřeného intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Proto si zvolme libovolný počátek O a souřadnicové osy x a y. Nanášejme nyní úhly α z našeho intervalu podle tohoto předpisu (obr. 49): Jejich společný vrchol je počátek O, jejich společné prvé rameno je kladná poloosa x (rozumíme tím tu část osy x, na níž jsou kladná čísla) a druhé rameno dostaneme otočením prvého ramene kolem počátku v kladném smyslu právě o úhel α (při čemž kladným smyslem otáčení rozumíme smysl otáčení, při kterém kladná poloosa x přejde v kladnou poloosu y). V obr. 49 je tak nanesen úhel $\alpha = 210°$. Zvolme si nyní na druhém rameni libovolný bod M (různý od počátku) o souřadnicích x, y. Abychom se mohli stručněji vyjádřit, budeme vzdálenosti $\overline{OM}$ (která je vždy kladná) bodu M od počátku O říkat průvodič r bodu M.



Obr. 49.

Nyní již můžeme definovat goniometrické funkce pro úhly α mezi 0° a 360°, t. j. pro úhly α z uzavřeného intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$.

Definice 12.1. Sinus úhlu α je poměr $y : r$;

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Definice 12.2. Kosinus úhlu α je poměr $x : r$;

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Definice 12.3. Tangens úhlu α je poměr $y : x$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Definice 12.4. Kotangens úhlu α je poměr $x : y$;

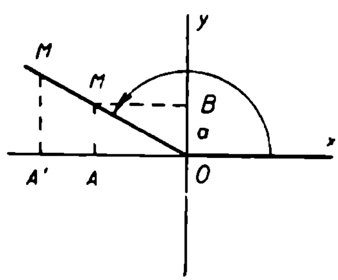
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Poznámka. Hned poznamenejme, že při definici tangenty předpokládáme, že x-souřadnice není nulová (protože $y : 0$ nemá žádný význam), t. j. předpokládáme, že úhel α není

90° ani 270°. Není tedy hodnota tangenty pro tyto úhly definována. Podobně předpokládáme, že v definici kotangenty není $y = 0$, t. j. že úhel α není 0°, 180°, 360°. Tedy kotangens není pro tyto úhly definován.

Ještě bychom mohli definovat *sekans* jako poměr $r : x$ $\left(\sec\alpha = \frac{r}{x}\right)$ a *kosekans* jako poměr $r : y$ $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}\right)$, ale těmito funkcemi se nebudeme zabývat.

Naše definice musíme poněkud doplnit; mohlo by se totiž podle nich zdát, že velikost sinu, kosinu atd. závisí nejen na velikosti úhlu α, nýbrž také na poloze bodu M na druhém rameni. Tomu však tak není. Je-li α = 0°, 90°, 180°, 270° a 360°, pak je okamžitě zřejmé, že žádná z definovaných funkcí nezávisí na volbě bodu M. Nechť je tedy dán úhel α různý od právě uvedených (v obr. 50 je volen tupý úhel); pak můžeme sestrojit pravoúhlý $\triangle MAO$ (nebo bychom mohli sestrojit $\triangle MBO$), jehož odvěsny jsou rovny souřadnicím x, y bodu M, jestliže ovšem u těchto souřadnic změníme případné záporné znaménko v kladné, a jehož přepona je rovna průvodiči r bodu M. Volíme-li na druhém rameni úhlu α další bod M' (obr. 50), pak — jak je zřejmé z podobných trojúhelníků MAO a $M'A'O$ — poměry vypočítané podle našich definic jsou skutečně jak pro bod M tak pro M' tytéž a tedy hodnoty nově definovaných goniometrických funkcí nezávisí na volbě bodu M.

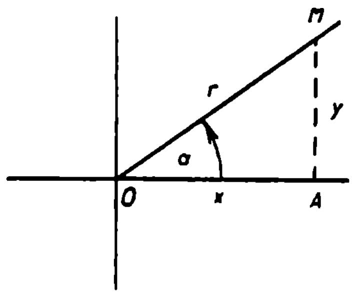


Obr. 50.

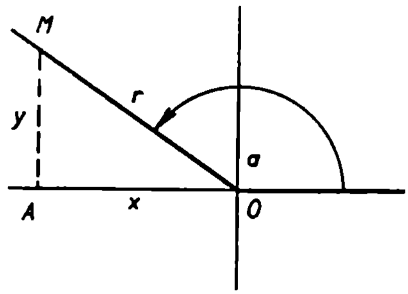
Nyní je třeba připojit další důležitý doplněk. Uvědomme si, že pro úhly otevřeného intervalu (0°, 90°) máme jednak staré definice goniometrických funkcí a jednak nové definice. Souhlasí tyto definice? Ano! Pro ostrý úhel α jsou totiž obě souřadnice x, y bodu M kladné a tedy v $\triangle MAO$ (obr.

51) je y-souřadnice přímo protější odvěsnou k úhlu α, x-souřadnice přilehlou odvěsnou a průvodič r přeponou. Pak na příklad definice 12.1 vlastně říká (pro ostrý úhel α) : sinus (ostrého) úhlu α je poměr protější odvěsny k přeponě, což je právě definice 7.1. Tím je ukázáno, že nová definice sinu, v případě, že se jedná o ostrý úhel, je táž jako dřívější. Podobně je tomu s ostatními funkcemi.

Pomocí našich definic 12.1 $\div$ 12.4 si snadno získáme přehled o hodnotách goniometrických funkcí; nejprve si všimneme jen znamének těchto hodnot.



Obr. 51.



Obr. 52.

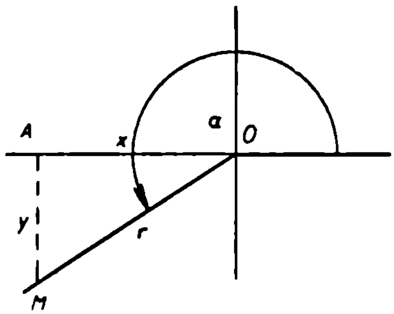
V *I. kvadrantu* (obr. 51), t. j. pro *ostré* úhly ($0° < \alpha < 90°$), jsou x-souřadnice i y-souřadnice bodu M kladné, a proto jsou hodnoty sinu, kosinu, tangenty a kotangenty kladné (jak ostatně víme z dřívějška). Podrobněji: $\sin\alpha = \overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = \overline{OA} : \overline{MO}$, $\operatorname{tg}\alpha = \overline{MA} : \overline{OA}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \overline{OA} : \overline{MA}$.

Ve *II. kvadrantu* (obr. 52), t. j. pro *tupé* úhly ($90° < \alpha < 180°$), je x-souřadnice bodu M záporná a y-souřadnice kladná, tedy hodnota sinu je kladná, hodnoty ostatních funkcí záporné. Podrobněji: $\sin\alpha = \overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = -\overline{OA} : \overline{MO}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\overline{MA} : \overline{OA}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\overline{OA} : \overline{MA}$ (je totiž $x = -\overline{OA}$, $y = \overline{MA}$, $r = \overline{MO}$).

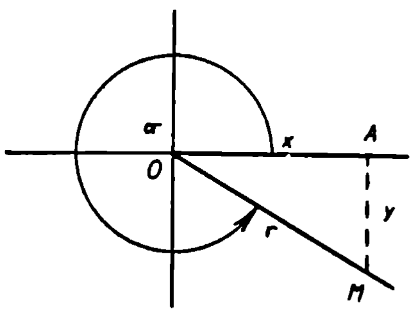
Ve *III. kvadrantu* (obr. 53), t. j. pro $180° < \alpha < 270°$

(úhel se nazývá *vypuklý*), jsou obě souřadnice bodu M záporné a tedy hodnoty sinu a kosinu jsou záporné, hodnoty tangenty a kotangenty kladné. Podrobněji: $\sin\alpha = -\overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = -\overline{OA} : \overline{MO}$, $\operatorname{tg}\alpha = \overline{MA} : \overline{OA}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \overline{OA} : \overline{MA}$ (neboť je $x = -\overline{OA}$, $y = -\overline{MA}$, $r = \overline{MO}$).

Ve *IV. kvadrantu* (obr. 54), tedy pro úhly $270° < \alpha < 360°$ (také v tomto případě se nazývá úhel *vypuklý*) je x-souřadnice bodu M kladná, y-souřadnice záporná. Z toho plyne, že hodnoty sinu, tangenty a kotangenty jsou záporné,



Obr. 53.



Obr. 54.

hodnota kosinu kladná. Podrobněji: $\sin\alpha = -\overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = \overline{OA} : \overline{MO}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\overline{MA} : \overline{OA}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\overline{OA} : \overline{MA}$ (neboť $x = \overline{OA}$, $y = -\overline{MA}$, $r = \overline{MO}$).

Náš dosavadní výsledek týkající se znamének hodnot funkcí úhlů v jednotlivých kvadrantech sestavíme do přehledné tabulky (obr. 55).

Všimneme si nyní přímo hodnot jednotlivých goniometrických funkcí. Přitom bude výhodné užít ke stanovení hodnot každé z funkcí vždy jiného trojúhelníka. Vodítkem nám bude postup užitý již dříve pro případ ostrých úhlů.

Při vyšetřování průběhu goniometrických funkcí ostrého úhlu jsme si zvolili kružnici k o středu O a poloměru $j = \overline{OA}$

(obr. 56). Pro určení hodnot sinu a kosinu jsme užili $\triangle\, OPQ$. pro určení tangenty $\triangle\, OAM$, pro určení kotangenty $\triangle\, OBN$. A platí (jak jsme dříve našli)

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}},\ \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{OA}},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \qquad (12.1)$$

Toto vyjádření bylo velice výhodné, neboť ve všech napsaných zlomcích je jmenovatel stále stejný (rovný poloměru j zvolené kružnice) a tedy při změně úhlu α udávala změna čitatele přímo změnu hodnot funkcí.

	sin	cos	tg	cotg
I.	+	+	+	+
II.	+	—	—	—
III.	—	—	+	+
IV.	—	+	—	—

Obr. 55.

Díváme-li se na určení hodnot goniometrických funkcí ostrého úhlu ve (12.1) s hlediska nových definic, můžeme říci, že k určení hodnot jsme vlastně užili souřadnic bodů P, M, N, ležících na druhém rameni daného úhlu α. Přesněji: k určení hodnot sinu a kosinu jsme užili souřadnic bodu P, který leží na kružnici k, k určení hodnoty tangenty jsme užili souřadnic bodu M, který leží na tečně m kružnice k v bodě A a k určení hodnoty kotangenty jsme užili souřadnic bodu N, který leží na tečně n kružnice k v bodě B.

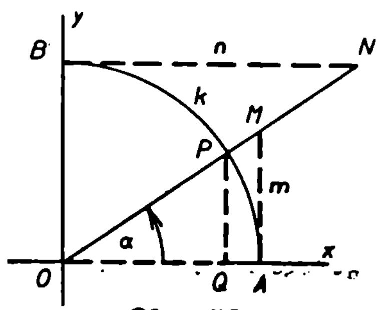
A právě uvedeného použijeme k vyšetření hodnot goniometrických funkcí úhlu v intervalu $\langle 0°, 360°\rangle$. Druhé rameno zvoleného úhlu α protíná vždy kružnici k; průsečík označíme P; jeho souřadnic užijeme k určení hodnot sinu a kosinu.

Dále přímka, na níž leží druhé rameno úhlu α, protíná tečnu m (sestrojenou ke kružnici k v bodě A) v průsečíku M a tečnu n (sestrojenou v bodě B) v průsečíku N. Ukážeme, že můžeme souřadnic bodu M použít k určení hodnot tangenty a souřadnic bodu N k určení hodnot kotangenty.

Poznámka. Samozřejmě, je-li úhel rovný 90° nebo 270°, je rameno úhlu α rovnoběžné s tečnou m, takže neexistuje průsečík M. To však nevadí, neboť pro uvedené dva úhly není kotangens definován. Podobně, je-li $\alpha = 0°$, 180°, 360°, neexistuje průsečík N, ale pro tyto úhly zase není kotangens definován.

Sledujme nyní průběh goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech a samozřejmě i pro jejich hraniční úhly 0°, 90°, 180°, 270°, 360°. Vždy vyznačíme interval, který probíhá úhel α.

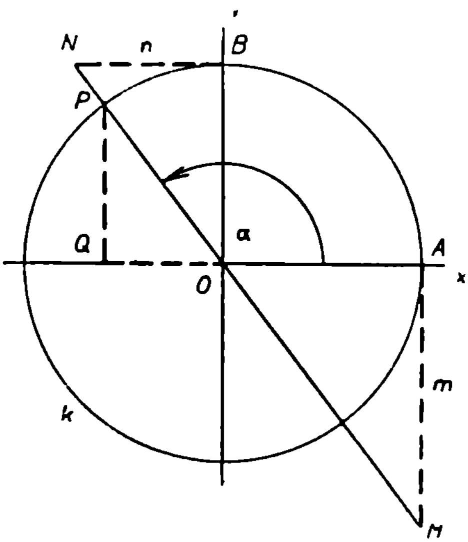
1. *Interval* $\langle 0°, 90° \rangle$ (obr. 56). Průběh funkcí v tomto intervalu vlastně známe. Jen je ještě třeba připojit jejich hodnoty pro 0° a 90°. Je-li $\alpha = 0°$, pak $P = M = Q = A$; jelikož souřadnice tohoto bodu jsou $x = \overline{OA}$, $y = 0$ a průvodič je $\overline{OA}$, dostaneme $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$. Je-li $\alpha = 90°$, pak $P = N = B$ a tedy $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{cotg} 90° = 0$. Jak víme, $\operatorname{cotg} 0°$ a $\operatorname{tg} 90°$ nejsou definovány a nebudeme se tedy přirozeně ptát po příslušných hodnotách. Všimneme si však toho, že klesá-li α k 0°, pak úsečka $\overline{BN}$ (je stále kladná a) roste nade všechny meze. Proto se zavádí znak $\operatorname{cotg} 0° = +\infty$ a říká se, že $\operatorname{cotg} 0°$ je plus nekonečno. Podobně, blíží-li se α úhlu 90°, pak kladná hodnota $\overline{AM}$ roste nade všechny meze, a proto zavádíme znak $\operatorname{tg} 90° = +\infty$. Hodnoty funkcí pro 0° a 90° jsou uvedeny také v tabulkách goniometrických funkcí.



Obr. 56.

2. *Interval* $\langle 90°, 180° \rangle$ (obr. 57). Nejdříve nechme hranice stranou. Víme, že platí podle definice (užíváme souřadnic bodu P) $\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$, $\cos\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}$. Z podobných trojúhelníků PQO a MAO však plyne $\overline{PQ} : \overline{OQ} = \overline{MA} : \overline{OA}$ a tedy $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}$; vidíme, že $\operatorname{tg}\alpha$ je vyjádřen souřadnicemi bodu M, neboť jeho x-souřadnice je $\overline{OA}$ a y-souřadnice je $-\overline{MA}$. Podobně je $\overline{OQ} : \overline{PQ} = \overline{NB} : \overline{OB}$ a tedy $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}$. Našli jsme

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}, \cos\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}, \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}, \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \tag{12.2}$$



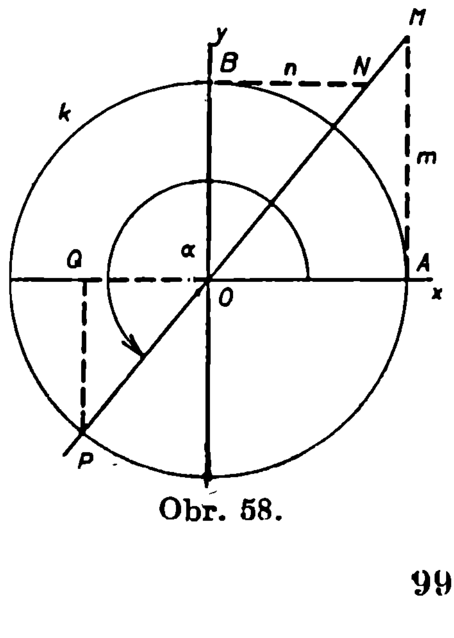
Obr. 57.

Nyní vypočteme hodnoty funkcí pro hranice. Hodnoty sinu, kosinu a kotangenty pro $\alpha = 90°$ již známe. Je-li $\alpha = 180°$, pak snadno vypočteme $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$. Sledujeme-li nyní podle odvozeného celkový průběh funkcí v intervalu $\langle 90°, 180° \rangle$, vidíme, že roste-li úhel α, pak hodnoty sinu klesají v uzavřeném intervalu $\langle 1, 0 \rangle$ a hodnoty kosinu klesají v uzavřeném intervalu $\langle 0, -1 \rangle$. Tangenta není sice pro $90°$ definovaná, ale klesá-li úhel k $90°$, pak úsečka $\overline{AM}$ roste nade všechny meze a tedy tangens klesá pod všechny (záporné) meze. Proto zavádíme další znak $\operatorname{tg} 90° = -\infty$. A vidíme, že roste-li úhel v intervalu $\langle 90°, 180° \rangle$, roste tangens v intervalu $(-\infty, 0\rangle$. (Často je výhodné rozšířit definici tangenty i na úhel 90° a říci: tangens 90° nabývá dvou hodnot $+\infty$, $-\infty$, my však od toho upustíme). Konečně pro kotangentu najdeme: roste-li úhel v intervalu $\langle 90°, 180° \rangle$, pak kotangens klesá v intervalu $\langle 0, -\infty)$, při čemž zase znak $\operatorname{cotg} 180° = -\infty$ vyjadřuje jen tu okolnost, že blíží-li se úhel α od 90° ke 180°, pak hodnoty kotangenty klesají pod všechny meze.

3. *Interval* $\langle 180°, 270° \rangle$ (obr. 58). Nejprve si všimneme jen otevřeného intervalu $(180°, 270°)$. Podle definice je $\sin\alpha = -\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$, $\cos\alpha = -\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}$. Dosadíme-li sem $\overline{PQ} : \overline{OQ} = \overline{MA} : \overline{OA}$ a $\overline{OQ} : \overline{PQ} = \overline{NB} : \overline{OB}$, dostaneme

$$\sin\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}, \cos\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \tag{12.3}$$

Pro hraniční úhly známe $\sin 180°$, $\cos 180°$, $\operatorname{tg} 180°$; vypočteme ještě $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\operatorname{cotg} 270° = 0$. Umluvíme-li se, že budeme značit $\operatorname{cotg} 180° = +\infty$, $\operatorname{tg} 270° = +\infty$ (z obdobných důvodů jako v předchozích případech), pak ze vzorců (12.3) snadno vyčteme: roste-li úhel α v uzavřeném intervalu $\langle 180°, 270° \rangle$, pak hodnoty sinu klesají v intervalu $\langle 0, -1 \rangle$, hodnoty kosinu rostou v intervalu $\langle -1, 0 \rangle$, hodnoty tangenty rostou v inter-

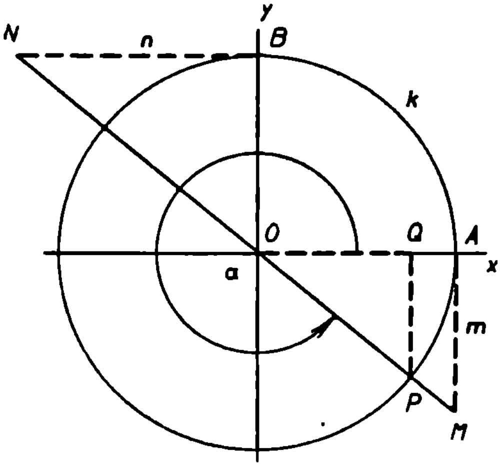


Obr. 58.

valu $\langle 0, +\infty)$, hodnoty kotangenty klesají v intervalu $(+\infty, 0\rangle$.

4. *Interval* $\langle 270°, 360°\rangle$ (obr. 59). Stejným způsobem jako v předchozích případech najdeme pro úhly mezi 270° a 360°:

$$\sin\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}},\ \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}},\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}},\ \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \tag{12.4}$$



Obr. 59.

Pro hraniční úhel 270° známe již příslušné hodnoty. Pro úhel 360° vypočteme $\sin 360° = 0$, $\cos 360° = 1$ a $\operatorname{tg} 360° = 0$. Opět zavedeme znaky $\operatorname{tg} 270° = -\infty$ a $\operatorname{cotg} 360° = -\infty$. Pro průběh goniometrických funkcí v intervalu $\langle 270°, 360°\rangle$ jsme tedy našli: roste-li úhel v tomto intervalu, pak hodnoty sinu rostou v intervalu $\langle -1, 0\rangle$, hodnoty kosinu rostou v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, hodnoty tangenty rostou v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a hodnoty kotangenty klesají v intervalu $\langle 0, -\infty)$.

Místo abychom celkový výsledek vyslovili větou, raději jej shrneme do snadno srozumitelné tabulky (obr. 60).

Zdůrazněme však jinou důležitou vlastnost:

VĚTA 12.1. *Sinus a kosinus úhlu z intervalu* $\langle 0°, 360°\rangle$ *nabývají jen hodnot z intervalu* $\langle -1, 1\rangle$.

	I. $0^\circ \quad 90^\circ$	II. $90^\circ \quad 180^\circ$	III. $180^\circ \ldots 270^\circ$	IV. $270^\circ \quad 360^\circ$
sin	$0 \ldots 1$	$1 \ldots 0$	$0 \ldots -1$	$-1 \ldots 0$
cos	$1 \ldots 0$	$0 \ldots -1$	$-1 \ldots 0$	$0 \ldots 1$
tg	$0 \ldots +\infty$	$-\infty \ldots 0$	$0 \ldots +\infty$	$-\infty \ldots 0$
cotg	$+\infty \ldots 0$	$0 \ldots -\infty$	$+\infty \quad 0$	$0 \ldots -\infty$

Obr. 60.

Tangens a kotangens úhlu z téhož intervalu nabývají všech možných hodnot (z intervalu $(-\infty, +\infty)$).

Důkaz spočívá vlastně ve dvou krocích. Nejprve je totiž třeba dokázat: je-li úhel v daném intervalu, pak hodnoty funkcí mohou být jen v uvedených intervalech. To jsme však již vlastně dokázali právě předchozí úvahou. Dále je nutno dokázat: je-li dána některá hodnota zcela určité goniometrické funkce, a to v příslušném uvedeném intervalu, pak k ní existuje alespoň jeden úhel v intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$. Důkaz této části (který vyžaduje trochu více pozornosti než dosavadní důkazy) provedeme jen pro sinus. V případě ostatních goniometrických funkcí bychom postupovali obdobně. Nechť je tedy dáno libovolné číslo a; samozřejmě a může být buď rovno 0 nebo kladné nebo záporné, ale předpokládáme, že leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Ptáme se, zda existuje úhel α z intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ tak, že $\sin\alpha = a$. Existuje! Stačí na kružnici k, o které jsme mluvili vpředu, sestrojit příslušný bod P; jeho spojnice se středem O je už druhým ramenem hledaného úhlu α, jehož prvým ramenem je OA. Je-li $a = 0$, pak je okamžitě vidět, že jen $\alpha = 0^\circ$, 180°, 360° řeší úlohu. Je-li $a > 0$, pak ve vzdálenosti $a \,.\, \overline{OA}$ veďme rovnoběžku s osou x, a to tak, aby ležela v I. a II. kvadrantu. Její průsečíky s kružnicí k (jsou vždy dva, jenom v případě

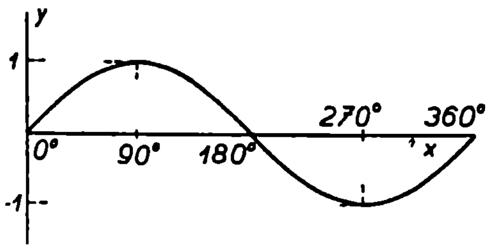
$a = 1$ je jeden) jsou hledané body P, neboť pro úhel $\alpha =$ $= \sphericalangle AOP$ najdeme $\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{a\,.\,\overline{OA}}{\overline{OP}} = a$ (je totiž $\overline{OP} =$ $= \overline{OA}$). Je-li $a < 0$, pak je $-a$ kladné; ve vzdálenosti $-a\,.\,\overline{OA}$ veďme zase rovnoběžku s osou x, ale tak, aby ležela ve III. a IV. kvadrantu. Její průsečíky s kružnicí jsou hledané body P, neboť pro úhel $\alpha = \sphericalangle AOP$ platí v tomto případě $\sin\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = -\frac{-a\,.\,\overline{OA}}{\overline{OP}} = a$. Vidíme, že ať si zvolíme jakékoliv a z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, vždy existuje nějaký úhel α tak, že $\sin\alpha = a$.

Poznámka. Dosavadními úvahami je vlastně ukázána cesta k řešení základních úloh: 1. k danému úhlu najít hodnotu předepsané goniometrické funkce, 2. k dané hodnotě goniometrické funkce najít příslušný úhel. Podrobné řešení však odsuneme do dalšího odstavce.

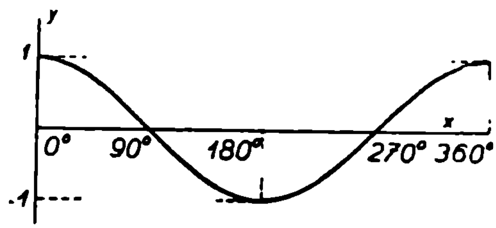
Dobrou pomůckou k poznání průběhu goniometrických funkcí (a hlavně k zapamatování výsledků uvedených v tabulkách v obr. 55, 60 a ve větě 12.1) je grafické znázornění jejich průběhu.

Postup znázornění je v podstatě týž, jakého jsme použili dříve. Stručně řečeno: v předchozím jsme znázornili průběh goniometrických funkcí jen v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, nyní znázorníme jejich průběh v širším intervalu $\langle 0°, 360°\rangle$. Zvolíme-li poloměr j kružnice rovný délkové jednotce, pak k znázornění hodnot sinu můžeme použít přímo úseček $\overline{PQ}$ z obr. 56÷59; podobně pro kosinus užijeme úseček $\overline{OQ}$, pro tangens $\overline{MA}$ a pro kotangens $\overline{NB}$. Přirozeně tyto úsečky nanášíme od číselné osy v kladném nebo v záporném smyslu osy y, když příslušná hodnota má znaménko kladné nebo záporné. V obr. 61 je zobrazen průběh sinu, v obr. 62 průběh kosinu, v obr. 63 průběh tangenty a v obr. 64 průběh kotangenty. Na grafu tangenty je dobře patrno, proč jsme na př. položili jednak $\operatorname{tg} 90° = +\infty$, jednak $\operatorname{tg} 90° = -\infty$. Obdobná poznámka platí ovšem i pro kotangentu.

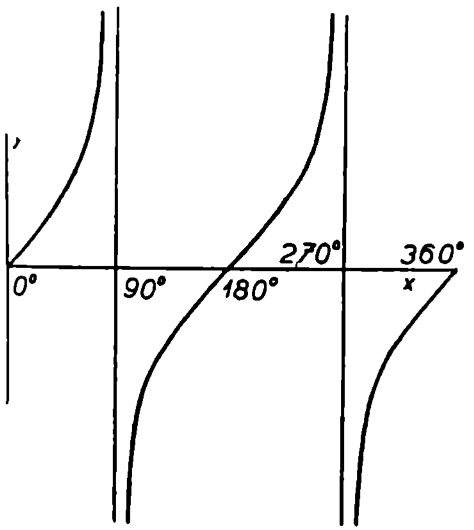
Po rozšíření původních definic goniometrických funkcí na úhly v uzavřeném intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$ se naskýtá otázka,



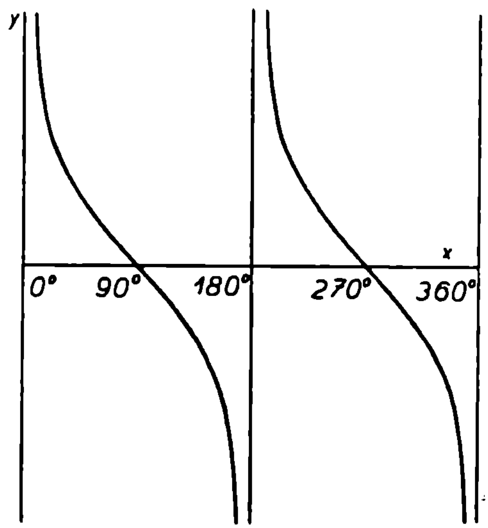
Obr. 61.



Obr. 62.



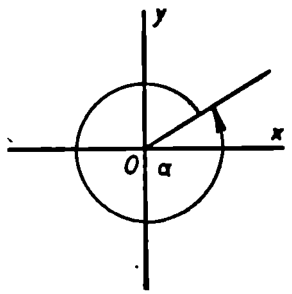
Obr. 63.



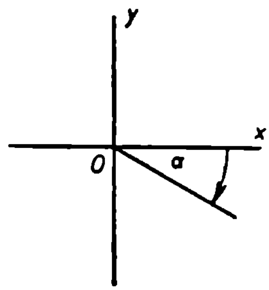
Obr. 64.

jak rozšířit jejich definici na libovolné kladné nebo záporné úhly. Rozšíření provedeme snadno. Zvolíme opět souřadnicové osy x, y. Daný úhel α naneseme tak, že za prvé rameno zvolíme kladnou poloosu x a druhé rameno sestrojíme otočením této poloosy o úhel α. Je-li úhel kladný, otáčíme v kladném smyslu, je-li záporný, pak v záporném smyslu (v obr. 65 je nanesen úhel $\alpha = 390°$, v obr. 66 úhel $\alpha = -45°$).

Zvolme zase na druhém rameni libovolný bod $M \neq O$ (znaménko $\neq$ čteme: „různý od“ nebo „nerovná se“). Jsou-li x, y jeho souřadnice a r průvodič, pak *goniometrické funkce libovolného úhlu daného* α *zavádíme opět definicemi*



Obr. 65.



Obr. 66.

12.1÷12.4; nebudeme je znovu uvádět. Takto definované goniometrické funkce označme souhrnně značkou f. Dokážeme pro ně důležitou větu:

VĚTA 12.2. Goniometrické funkce jsou periodické s periodou 360°, t. j.

$$f(\alpha + n \,.\, 360°) = f(\alpha), n \text{ celé číslo.} \qquad (12.5)$$

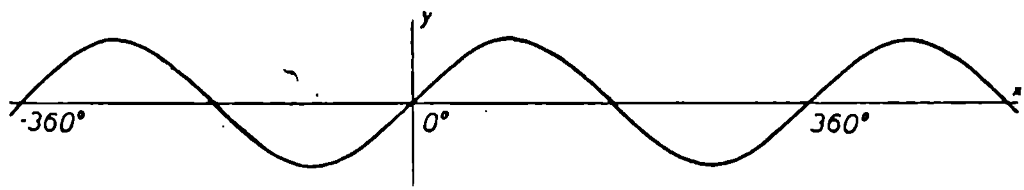
Důkaz. Říkáme, že funkce je periodická s periodou p, jestliže při změně proměnné o celistvý násobek p jsou hodnoty funkce stejné. A tomu v našem případě skutečně tak je, neboť polohy druhých ramen všech úhlů, které se liší o celistvý násobek 360°, splývají, tedy podle rozšířených definic goniometrických funkcí jsou jejich hodnoty tytéž, což právě je vyznačeno vzorcem (12.5).

Věta 12.2 vlastně říká, že stačí znát hodnoty goniometrických funkcí v libovolném intervalu šířky 360°, na př. tedy v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Je tedy na př. $\sin 760° = \sin(40° + 2.360°) = \sin 40°$, $\cos(-30°) = \cos(330° - 1.360°) =$

$= \cos 330°$, $\operatorname{tg}(-75°) = \operatorname{tg}(285° - 1.360°) = \operatorname{tg} 285°$, $\operatorname{cotg} 515° = \operatorname{cotg}(155° + 1.360°) = \operatorname{cotg} 155°$ atd.

Na základě věty 12.2 můžeme lehko zakreslit graf libovolné z goniometrických funkcí, a to v libovolném intervalu. Na obr. 67 je sestrojen jen grafický obraz sinu; příslušná křivka se nazývá *sinusoida.*

Poznámka. Uvedli jsme, že $\operatorname{tg}\alpha$ není definován pro $\alpha = 90°$ a $270°$. Je zřejmé, že $\operatorname{tg}\alpha$ není definován ani pro úhly $\alpha = 90° + k \,.\, 180°$, kde k je celé číslo. Podobně $\operatorname{cotg}\alpha$ není definován pro úhly $\alpha = k \,.\, 180°$, k celé číslo.



Obr. 67.

13. PODROBNĚJŠÍ VLASTNOSTI GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ OBECNÉHO ÚHLU

Prvá otázka, kterou si každý položí, je, zda mezi goniometrickými funkcemi obecného úhlu α platí obdobné vztahy, jaké jsme uvedli ve větách 11.2÷11.5 pro goniometrické funkce ostrého úhlu. Následující věta říká, že zmíněné vztahy platí beze změny.

VĚTA 13.1. Sinus, kosinus, tangens a kotangens obecného úhlu jsou vázány vztahy

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = 1, \tag{13.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{13.2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{13.3}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{13.4}$$

Důkaz. Uvažujme identitu $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$ platnou pro každé $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Dosadíme-li sem příslušné hodnoty podle definice 12.3 a 12.4, dostaneme právě vztah (13.1). Podobně vzorce (13.2) plynou z identit $\frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y}{x}$ (platící pro každé y a $x \neq 0, r \neq 0$) a $\frac{x}{r} : \frac{y}{r} = \frac{x}{y}$ (platící pro každé x a $y \neq 0$, $r \neq 0$). Další vztah (13.3) je důsledkem rovnice $x^2 + y^2 = r^2$, jež platí pro souřadnice x, y a průvodič r libovolného bodu M. Konečně rovnice (13.4) plynou z rovnice (13.3) dělením $\cos\alpha$, po případě $\sin\alpha$ (předpokládáme ovšem $\cos\alpha \neq 0$, po případě $\sin\alpha \neq 0$).

Poznámka. Protože vztah $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$ neplatí pro $x = 0$, $y = 0$, neplatí vztah (13.1) pro žádný úhel α, který je celistvým násobkem 90°, což je samozřejmé, neboť v tomto případě buď tangens nebo kotangens není definován. Podobně (13.2) a (13.4) neplatí pro ty úhly α, pro něž není $\mathrm{tg}\alpha$ nebo $\mathrm{cotg}\alpha$ definován.

Další věty se úzce přimykají k větě 12.2, jež udává předpis, jak se vyjádří hodnota libovolné goniometrické funkce obecného úhlu pomocí hodnoty téže funkce pro jakýsi jiný úhel, a to na př. z uzavřeného intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Učiníme totiž další důležitý krok a ukážeme, že dokonce také ještě goniometrické funkce tupého a vypuklého úhlu lze vyjádřit pomocí goniometrických funkcí ostrého úhlu.

Poznámka. Podotkněme výslovně, že pro jednoduchost vynecháme z našich úvah hodnoty funkcí celistvého násobku 90° (t. j. 0°, 90°, 180°, 270°, 360°), neboť tyto hodnoty již známe (obr. 60); lze však ukázat, že i pro ně platí vzorce, jež si v dalším odvodíme.

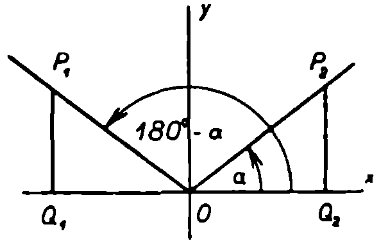
Mezi nejpotřebnější věty této skupiny vět náleží:

VĚTA 13.2. *Nechť $180° - \alpha$ je tupý úhel; pak platí tyto převodové vzorce*

$$\begin{aligned} &\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha, \\ &\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{cotg}(180° - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha. \end{aligned} \tag{13.5}$$

Důkaz (obr. 68). Jelikož úhel $180° - \alpha$ je podle předpokladu tupý, je α ostrý úhel. Naneseme oba úhly obvyklým způsobem; sestrojíme-li nyní pro úhel $180° - \alpha$ trojúhelník OP_1Q_1 a pro úhel α trojúhelník OP_2Q_2 tak, že

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_2}, \tag{13.6}$$



Obr. 68.

pak zřejmě trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 jsou shodné a tedy

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2},\ \overline{OQ_1} = \overline{OQ_2}. \tag{13.7}$$

Podle definice sinu je $\sin(180° - \alpha) = \overline{P_1Q_1} : \overline{OP_1}$, $\sin\alpha = \overline{P_2Q_2} : \overline{OP_2}$ a tedy podle (13.6) a (13.7) platí $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, což je prvý vzorec ve (13.5). Podobně je $\cos(180° - \alpha) = -\overline{OQ_1} : \overline{OP_1}$, $\cos\alpha = \overline{OQ_2} : \overline{OP_2}$, odtud podle (13.6) a (13.7) plyne již $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, což je druhý vzorec ve (13.5). Další dva vzorce odvodíme již pomocí prvých dvou a z (13.1) a (13.2). Podle nich je postupně

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

což dává třetí vzorec v (13.5). Konečně

$$\operatorname{cotg}(180° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(180° - \alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha,$$

a to je poslední rovnice ve (13.5).

Poznámka. Označíme-li daný tupý úhel β, t. j. položíme-li

$180° - \alpha = \beta$, pak $\alpha = 180° - \beta$; převodové rovnice (13.5) znějí takto:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin(180° - \beta), \cos\beta = -\cos(180° - \beta), \\ \mathrm{tg}\beta &= -\mathrm{tg}(180° - \beta), \mathrm{cotg}\beta = -\mathrm{cotg}(180° - \beta). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Prakticky se lépe převádí užitím těchto vzorců. Pro zapamatování vzorců (13.5) nebo (13.8) je dobré uvést slovní znění věty 13.2: Hodnota funkce tupého úhlu je rovna hodnotě téže funkce ostrého úhlu výplňkového, *opatřené znaménkem příslušné funkce ve II. kvadrantu* (porovnejte s 2. řádkem tabulky v obr. 55).

Příklad 13.1. Najděte hodnotu $\mathrm{tg}137°50'$.

Řešení. Nejprve podle vzorců (13.5): daný tupý úhel $137°50'$ můžeme napsat ve tvaru $180° - 42°10'$; je tedy ostrý úhel $\alpha = 42°10'$, a proto podle třetího vzorce (13.5) je $\mathrm{tg}137°50' = -\mathrm{tg}42°10'$. Nebo můžeme postupovat podle (13.8). Podle třetího vzorce je $\mathrm{tg}137°50' = -\mathrm{tg}(180° - 137°50') = -\mathrm{tg}42°10'$. Protože, jak najdeme z třímístných tabulek, $\mathrm{tg}42°10' = 0{,}906$, jest $\mathrm{tg}137°50' = -0{,}906$, jak jsme mohli zhruba přečíst přímo z obr. 63.

Každý tupý úhel můžeme však také psát ve tvaru $90° + \alpha$, kde α je ostrý úhel; i pro tento způsob vyjádření si odvodíme převodové vzorce.

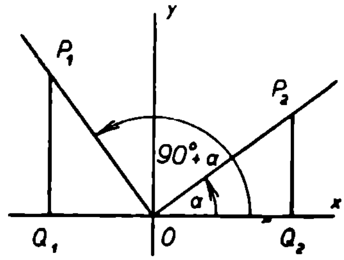
VĚTA 13.3. Nechť $90° + \alpha$ je tupý úhel; pak platí tyto převodové vzorce

$$\begin{aligned} \sin(90° + \alpha) &= \cos\alpha, \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha, \\ \mathrm{tg}(90° + \alpha) &= -\mathrm{cotg}\alpha, \mathrm{cotg}(90° + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Důkaz (obr. 69). Úhel $90° + \alpha$ je podle předpokladu tupý a tedy úhel α je ostrý. Sestrojme již známé trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 tak, aby $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$. Podle definice sinu je $\sin(90° + \alpha) = \overline{P_1Q_1} : \overline{OP_1}$, podle definice kosinu je $\cos\alpha = \overline{OQ_2} : \overline{OP_2}$. Jelikož však trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 jsou shodné, je $\overline{P_1Q_1} = \overline{OQ_2}$, a tedy $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$, což je prvá rovnice ve (13.9). Podobně najdeme jednak $\cos(90° + \alpha) = -\overline{OQ_1} : \overline{OP_1}$, jednak $\sin\alpha = \overline{P_2Q_2} : \overline{OP_2}$. Protože je $\overline{OQ_1} = \overline{P_2Q_2}$, je $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$, což je druhý vzorec ve (13.9). Konečně snadno již z (13.1) a (13.2) odvodíme

$$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = \frac{\sin(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha,$$

$$\operatorname{cotg}(90° + \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(90° + \alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{cotg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$



Obr. 69.

Poznámka. Také vzorce (13.9) lze přepsat na jiný tvar. Položíme-li $90° + \alpha = \beta$, pak $\alpha = \beta - 90°$; po dosazení do (13.9) dostaneme

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \cos(\beta - 90°), \cos\beta = -\sin(\beta - 90°), \\ \operatorname{tg}\beta &= -\operatorname{cotg}(\beta - 90°), \operatorname{cotg}\beta = -\operatorname{tg}(\beta - 90°). \end{aligned} \qquad (13.10)$$

Vyjádříme zase vzorce (13.9) [a (13.10)] slovy: hodnota funkce tupého úhlu je rovna hodnotě příslušné kofunkce úhlu zmenšeného o 90° opatřené znaménkem dané funkce ve II. kvadrantu.

Příklad 13.2. Najděte hodnotu $\cos 162°17'$.

Řešení. Protože $162°17' = 90° + 72°17'$, je podle (13.9) $\cos 162°17' = -\sin 72°17'$. Nebo jsme mohli užít (13.10). Našli bychom postupně: $\cos 162°17' = -\sin(162°17' - 90°) = -\sin 72°17'$. Z pětimístných tabulek najdeme $\sin 72°17' = 0{,}95258$ a tedy konečný výsledek je $\cos 162°17' = -0{,}95258$.

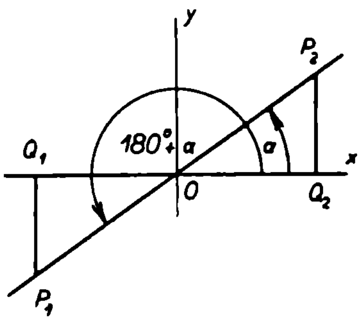
Odvodíme ještě další převodové vzorce pro vypuklé úhly.

Každý vypuklý úhel můžeme psát ve tvaru $180^\circ + \alpha$, kde α je buď ostrý nebo tupý úhel. Ukážeme, že platí:

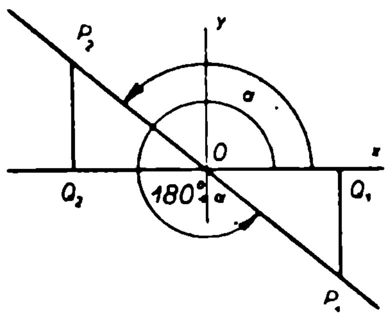
VĚTA 13.4. Nechť $180^\circ + \alpha$ je vypuklý úhel; pak

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha. \quad (13.11)$$

Důkaz. Musíme uvažovat dvě možnosti. Buď úhel α je ostrý nebo tupý; v prvém případě druhé rameno daného úhlu



Obr. 70.



Obr. 71.

je ve III. kvadrantu (obr. 70), v druhém případě ve IV. kvadrantu (obr. 71). V obou případech sestrojíme nám již známé shodné trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 tak, aby $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$. V prvém případě (obr. 70) je $\sin(180^\circ + \alpha) = -\dfrac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{OP_1}} = -\dfrac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{OP_2}} = -\sin\alpha$ a podobně $\cos(180^\circ + \alpha) = -\dfrac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_1}} = -\dfrac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_2}} = -\cos\alpha$. V druhém případě (obr. 71) je $\sin(180^\circ + \alpha) = -\dfrac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{OP_1}} = -\dfrac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{OP_2}} = -\sin\alpha$ a obdobně $\cos(180^\circ + \alpha) = \dfrac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_1}} = \dfrac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_2}} = -\cos\alpha$. Tedy v obou případech platí oba prvé vzorce (13.11). Platnost dalších dvou dokážeme již z prvých dvou a z (13.2) a (13.1). Jest $\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \dfrac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{cotg}(180^\circ + \alpha) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha)} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \mathrm{cotg}\alpha$.

Poznámka. Je-li úhel α tupý, pak ovšem musíme výsledek dále upravit podle věty 13.3. Mohli bychom sice odvodit ještě vzorce, které by hodnoty funkcí úhlů ve IV. kvadrantu vyjadřovaly přímo hodnotami funkcí jistých úhlů v I. kvadrantu, to však již necháme stranou, neboť naše odvozené vzorce už umožňují výpočet hodnoty libovolné goniometrické funkce pro libovolný úhel α.

Příklad 13.3. Najděte hodnotu $\sin 295^\circ 20'$

Řešení. Pišme $295^\circ 20' = 180^\circ + 115^\circ 20'$, tedy podle (13.11) je $\sin 295^\circ 20' = \sin(180^\circ + 115^\circ 20') = -\sin 115^\circ 20'$. Úhel $115^\circ 20'$ je tupý, můžeme proto užít na př. vzorců (13.5): $\sin 115^\circ 20' = \sin 64^\circ 40'$. Tedy je $\sin 295^\circ 20' = -\sin 64^\circ 40' = -0{,}90383$.

Ze vzorců (13.11) lze vyčíst ještě důsledek, který doplňuje větu 12.2 :

VĚTA 13.5. **Funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou 180°, t. j.**

$$\mathrm{tg}(\alpha + n\,.\,180^\circ) = \mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{cotg}(\alpha + n\,.\,180^\circ) = \mathrm{cotg}\alpha,\quad n \text{ celé číslo.} \tag{13.12}$$

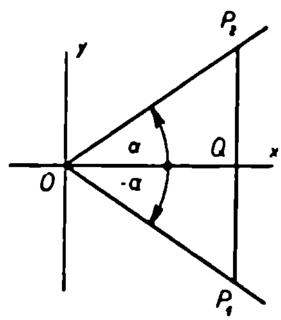
Důkaz. O obou funkcích víme již podle věty 12.2, že jsou periodické s periodou 360°; teď ukážeme, že jsou periodické s menší periodou 180°. Druhé dva vzorce ve (13.11) totiž říkají, že hodnoty tangenty nebo kotangenty tupého úhlu se vždy rovnají hodnotě téže funkce úhlu zmenšeného o 180°, t. j. ležícího v intervalu $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, ale z toho právě plyne naše tvrzení. Ostatně obr. 63 a obr. 64 názorně ukazují odvozenou vlastnost.

Ačkoliv máme již odvozeny všechny věty, které umožňují výpočet hodnot goniometrických funkcí libovolného úhlu pomocí hodnot funkcí úhlů z intervalu $\langle 0°, 90° \rangle$, připojíme k našim větám další větu platnou pro záporné úhly.

VĚTA 13.6. Pro funkce úhlu $-\alpha$ platí

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha,$$
$$\mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha. \qquad (13.13)$$

Důkaz (obr. 72). Naneseme si obvyklým způsobem úhel $-\alpha$ a mimo to sestrojíme také úhel α (v obr. 72 je narýsovaný úhel α ostrý). Jejich druhá ramena jsou souměrně položena podle osy x. K určení hodnot goniometrických funkcí úhlu $-\alpha$ (po případě α) užijeme souřadnic bodu P_1 (po případě P_2) zvoleného na jeho druhém rameni. Body P_1 a P_2 volíme tak, aby $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$. Zřejmě x-souřadnice obou bodů jsou tytéž, ale y-souřadnice se liší ve znaménku. To však pro určení hodnot goniometrických funkcí značí, že kosinus obou úhlů je týž (neboť $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha$), kdežto sinus, tangens a kotangens mají opačná znaménka (v jejich definičních rovnicích vystupuje totiž y-souřadnice).



Obr. 72.

Příklad 13.4. Vypočtěte $\mathrm{tg}(-45°)$.

Řešení. Podle (13.13) je $\mathrm{tg}(-45°) = -\mathrm{tg}45° = -1$. Bez použití právě dokázané věty jsme mohli dojít k témuž výsledku, ovšem zdlouhavější cestou. Podle (12.5), (13.11) a (13.8) je postupně $\mathrm{tg}(-45°) = \mathrm{tg}(360° - 45°) = \mathrm{tg}315° = \mathrm{tg}(180° + 135°) = \mathrm{tg}135° = \mathrm{tg}(180° - 45°) = -\mathrm{tg}45° = -1$.

Nakonec vyřešíme základní dvě úlohy.

ÚLOHA 13.1. Najděte hodnotu dané goniometrické funkce pro libovolný úhel.

Řešení. Podle věty 12.2 vyjádříme hledanou hodnotu funkce hodnotou téže funkce pro úhel z intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Potom užitím vhodné z vět 13.2 ÷ 13.5 vyjádříme nalezenou hodnotu goniometrické funkce úhlu z intervalu $\langle 0°, 90° \rangle$, kterou již vyhledáme z tabulek.

Příklad 13.5. Najděte cos 1000°.

Řešení. $\cos 1000° = \cos(720° + 280°) = \cos 280° =$ $= \cos(180° + 100°) = -\cos 100° = -\cos(90° + 10°) =$ $= \sin 10° = 0{,}985$ nebo jsme mohli počítat kratčeji: $\cos 1000° = \cos(1080° - 80°) = \cos(-80°) = \cos 80° =$ $= \sin 10°$

Dříve než přikročíme k řešení obrácené úlohy, uvědomíme si, že goniometrické funkce jsou periodické s periodou 360°; ptáme-li se po všech úhlech, pro něž daná goniometrická funkce má danou hodnotu (ovšem pro sinus a kosinus musí tato hodnota být vzata z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$), stačí najít všechny úhly polootevřeného intervalu $\langle 0°, 360°)$ (nepočítáme do něho tedy již hranici 360°), pro něž daná funkce nabývá dané hodnoty. Podle věty 12.1 takové úhly existují; nyní větu 12.1 ještě doplníme větou, která říká kolik takových úhlů existuje.

VĚTA 13.7. Ke každé hodnotě goniometrické funkce existují v intervalu $\langle 0°, 360°)$ dva úhly, pro které daná funkce má danou hodnotu.

Důkaz podáme jen pro sinus, a to tím, že navážeme na důkaz věty 12.1 a doplníme jej. Nechť je tedy dáno číslo a, kde $-1 \leq a \leq 1$. Zvolíme-li si libovolnou délku $\overline{OA}$, musíme nalézti vlastně všechny body P, jejichž vzdálenost od O by byla právě $\overline{OP} = \overline{OA}$ a jejichž y-souřadnice by byla $a \,.\, \overline{OA}$. Takové body jsou jen v průsečících kružnice o středu

O a poloměru $\overline{OA}$ s jakousi přímkou, o které jsme mluvili v důkazu věty 12.1, rovnoběžnou s osou x. Podstatné je, že takové průsečíky existují vždy dva (splývají jen pro $a = \pm 1$). Označíme-li je P_1, P_2, pak $\sphericalangle AOP_1$ a $\sphericalangle AOP_2$ jsou hledané úhly.

Poznámka. K důkazu jsme mohli použít také grafického znázornění goniometrických funkcí (obr. 61÷64). Je-li dána hodnota některé z nich, pak vedeme rovnoběžku s osou x tak, aby y-souřadnice bodů této přímky byly rovny dané hodnotě. Tato přímka protíná příslušný graf ve dvou bodech; úhly příslušné těmto bodům jsou hledané úhly.

Pro skutečné vyhledání úhlů je užitečná další věta.

VĚTA 13.8. Součet úhlů příslušných dané kladné hodnotě sinu je 180°; součet úhlů příslušných záporné hodnotě sinu je 540°; součet úhlů příslušných dané hodnotě kosinu je 360° a konečně rozdíl úhlů příslušných dané hodnotě tangenty nebo kotangenty je 180°.

Důkaz. Základní myšlenku důkazu ukážeme jen pro sinus. Nechť $0 < a \leqq 1$; vztahu $\sin\alpha = a$ vyhovuje jistě nějaký ostrý úhel α_1, který umíme snadno najít. Potom však úhel $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$ je další hledaný úhel, neboť podle (13.5) platí $\sin\alpha_1 = \sin(180° - \alpha_1)$. Pro oba úhly platí ovšem $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$. Hledáme-li úhly, které vyhovují vztahu $\sin\beta = -a$, pak najdeme nejprve úhly α_1, α_2, které vyhovují podmínce $\sin\alpha = a$. Protože jsme zvolili $\sin\alpha$ tak, že $\sin\beta = -\sin\alpha$, musí podle (13.11) být $\beta = 180° + \alpha$ a tedy $\beta_1 = 180° + \alpha_1$ a $\beta_2 = 180° + \alpha_2 = 360° - \alpha_1$. Je pak skutečně $\beta_1 + \beta_2 = 540°$. Podobně by se postupovalo v ostatních případech.

ÚLOHA 13.2. K dané hodnotě goniometrické funkce najděte příslušný úhel.

Řešení je naznačeno v předchozí větě. Znaménko hodnoty dané funkce říká, do kterého intervalu náleží hledané úhly.

Vyhledáme nejprve úhly, pro něž daná funkce má hodnotu rovnou původní hodnotě, u níž jsme případné záporné znaménko změnili v kladné. Pak užijeme známých převodových vzorců k výpočtu hledaných úhlů.

Příklad 13.6. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\sin\alpha = 0{,}5$, b) $\sin\beta = -0{,}5$.

Řešení. a) Úlohu řeší ostrý a tupý úhel; hledaný ostrý úhel je zřejmě $\alpha_1 = 30°$, tedy druhý úhel je $\alpha_2 = 180° - 30° = 150°$. b) Úlohu řeší úhly, jejichž druhá ramena jsou ve III. a IV. kvadrantu. Protože už známe úhly α_1, α_2, které vyhovují vztahu $\sin\alpha = -\sin\beta = 0{,}5$, musí $\beta_1 = 180° + \alpha_1 = 210°$, $\beta_2 = 180° + \alpha_2 = 330°$.

Příklad 13.7. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\cos\alpha = 0{,}35293$, b) $\cos\beta = -0{,}35293$.

Řešení. a) Úlohu řeší ostrý úhel a vypuklý úhel z intervalu $(270°, 360°)$. Především je totiž $\alpha_1 = 69°20'$; protože platí $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, je $\alpha_2' = -69°20'$, což však není úhel v našem intervalu. Stačí k němu přičíst 360° a tedy $\alpha_2 = 360° - 69°20' = 290°40'$ je druhý hledaný úhel. b) Úlohu řeší jednak tupý úhel, jednak vypuklý úhel z intervalu $(180°, 270°)$. Jelikož je $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, je $\beta_1 = 180° - \alpha_1 = 110°40'$ a dále protože $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$, je $\beta_2 = 180° + \alpha_1 = 249°20'$ (nebo jsme mohli pomocí α_2 najít: $\beta_2' = 180° - \alpha_2 = -110°40'$, který sice neleží v našem intervalu, ale $\beta_2' + 360°$ již v našem intervalu leží, je to β_2).

Příklad 13.8. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}27994$, b) $\operatorname{tg}\beta = -1{,}27994$.

Řešení pro tangentu a kotangentu je snadné. Podle věty 13.5, je-li α_1 řešením, pak také $\alpha_2 = \alpha_1 + 180°$ je řešením. a) Úlohu řeší $\alpha_1 = 52°$, tedy $\alpha_2 = 52° + 180° = 232°$ je také řešení. b) Protože je $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha$, jsou hledané úhly $\beta_1 = 180° - \alpha_1 = 180° - 52° = 128°$ a $\beta_2 = 180° + \beta_1 = 308°$.

Příklad 13.9. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\text{cotg}\alpha = 0{,}85713$, b) $\text{cotg}\beta = -0{,}85713$.

Řešení. a) Snadno najdeme $\alpha_1 = 49°24'$, tedy druhým řešením musí být $\alpha_2 = 180° + 49°24' = 229°24'$. b) Ze vztahu $\text{cotg}\beta = -\text{cotg}\alpha$ plyne $\beta_1 = 180° - \alpha_1 = 180° - 49°24' = 130°36'$ a dále $\beta_2 = \beta_1 + 180° = 130°36' + 180° = 310°36'$.

Cvičení.

13.1. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li a) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, b) $\text{tg}\alpha = 1{,}5$.

13.2. Ve kterém intervalu leží úhel, jehož a) sinus a kosinus mají postupně znaménka $+\ -$, b) kosinus a tangens mají znaménka $-\ +$, c) sinus a kotangens mají znaménka $+\ -$?.

13.3. Najděte hodnoty a) $\sin 130°$, b) $\cos 109°20'$, c) $\text{tg} 108°27'$, d) $\text{cotg} 151°13'$, e) $\sin 212°53'$, f) $\cos 314°15'$, g) $\text{tg} 250°50'$, h) $\text{cotg} 300°$.

13.4. Určete a) $\sin 515°$, b) $\cos 600°$, c) $\text{tg} 410°50'$, d) $\text{cotg} 405°$.

13.5. Určete a) $\sin(-30°)$, b) $\cos(-45°)$, c) $\text{tg}(-60°)$.

V intervalu $\langle 0°, 360°)$ najděte úhly, pro které je

13.6. a) $\sin\alpha = 0{,}65324$, b) $\sin\alpha = -0{,}72621$.

13.7. a) $\cos\alpha = 0{,}57765$, b) $\cos\alpha = -0{,}87211$.

13.8. a) $\text{tg}\alpha = 0{,}91099$, b) $\text{tg}\alpha = -1{,}35142$.

13.9. a) $\text{cotg}\alpha = 1{,}25$, b) $\text{cotg}\alpha = -0{,}8$.

14. SOUČTOVÉ (A ROZDÍLOVÉ) VĚTY PRO GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Hned na začátku podotkněme, že při řešení trojúhelníků bychom se mohli docela dobře obejít bez znalosti vět tohoto odstavce; přesto si je odvodíme, neboť v některých případech jsou velice užitečné. O jaké věty se vlastně jedná? Stručně řečeno, jsou to věty, které udávají řešení této úlohy:

Jsou známy hodnoty goniometrických funkcí dvou úhlů α a β; je třeba určit hodnoty goniometrických funkcí úhlů $\alpha + \beta$ nebo $\alpha - \beta$.

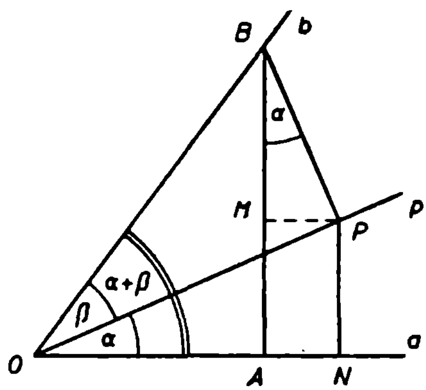
Základem je věta:

Věta 14.1. Nechť α, β jsou dva libovolné úhly, pak platí

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Důkaz je poněkud delší; rozložíme jej na několik částí.

a) Předpokládejme nejprve $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, $\alpha + \beta < 90°$. Sestrojíme si styčné úhly $\alpha = \sphericalangle\, ap$, $\beta = \sphericalangle\, pb$ (obr. 73); na rameni b zvolíme libovolný bod $B \neq O$, spustíme z něho jednak kolmici BA na rameno a, jednak kolmici BP na rameno p. Spusťme ještě z P kolmici PM na AB a kolmici PN na rameno a. Především z pravoúhlého $\triangle\, OAB$ plyne



Obr. 73.

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}; \tag{14.2}$$

dále z pravoúhlého $\triangle\, OPN$ najdeme

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PN}}{\overline{OP}}, \quad \cos\alpha = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}. \tag{14.3}$$

Ale $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ můžeme také vyjádřit z pravoúhlého $\triangle\, MPB$, neboť v něm úhel při vrcholu B je právě α (jest totiž $BP \perp OP$, $BA \perp ON$ a tedy $\sphericalangle\, PBM = \sphericalangle\, PON = \alpha$), takže je také

$$\sin\alpha = \frac{\overline{MP}}{\overline{BP}}, \quad \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{BP}}; \tag{14.4}$$

konečně z pravoúhlého $\triangle\, OPB$ dostaneme

$$\sin\beta = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}}, \quad \cos\beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}. \tag{14.5}$$

Pro úsečku $\overline{AB}$ platí $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$; protože však je $\overline{AM} = \overline{PN}$, můžeme tuto rovnost přepsat na $\overline{AB} = \overline{PN} + \overline{MB}$. Vydělením $\overline{OB}$ dostaneme $\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{OB}}$; dosaďme sem za $\overline{PN}$ ze (14.3) a $\overline{MB}$ ze (14.4); najdeme

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \sin\alpha + \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \cos\alpha;$$

po dosazení z (14.2) a (14.5) už dostaneme prvý dokazovaný vzorec.

Vyjděme nyní ze vztahu $\overline{OA} = \overline{ON} - \overline{NA}$; jelikož $\overline{NA} = \overline{MP}$, dostáváme $\overline{OA} = \overline{ON} - \overline{MP}$. Dělme opět tuto rovnici $\overline{OB}$; najdeme $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{MP}}{\overline{OB}}$, kam dosadíme za $\overline{ON}$ ze (14.3) a za $\overline{MP}$ ze (14.4). Výsledek dosazení je

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \cos\alpha - \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \sin\alpha,$$

odkud již po dosazení ze (14.2) a (14.5) plyne druhý dokazovaný vzorec.

b) Zatím jsme vzorce (14.1) dokázali jen pro takové ostré úhly, jejichž součet byl menší než 90°. Předpokládejme nyní, že zase je $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, ale $\alpha + \beta > 90°$ Položme v tomto případě $\alpha_1 = 90° - \alpha$, $\beta_1 = 90° - \beta$. Zřejmě pro α_1 a β_1 platí předpoklady uvedené v části a), t. j. $0° < \alpha_1 < 90°$, $0° < \beta_1 < 90°$, $\alpha_1 + \beta_1 < 90°$ (jak plyne z toho, že $\alpha_1 + \beta_1 = 180° - (\alpha + \beta)$ a $\alpha + \beta > 90°$). Tedy je podle dokázaného

$$\sin(\alpha_1 + \beta_1) = \sin\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_1 \sin\beta_1,$$

t. j. $\sin[180° - (\alpha + \beta)] = \sin(90° - \alpha)\cos(90° - \beta) + \cos(90° - \alpha)\sin(90° - \beta)$, a to lze podle (13.5), (8.3) a (8.4) přepsat na

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta,$$

což už je, až na pořadí členů, prvá rovnice ve (14.1). Úplně obdobně platí

$$\cos(\alpha_1 + \beta_1) = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 - \sin\alpha_1 \sin\beta_1,$$

t. j.

$$\cos[180° - (\alpha + \beta)] = \cos(90° - \alpha) \cos(90° - \beta) - \\ - \sin(90° - \alpha) \sin(90° - \beta).$$

Tento vztah můžeme opět užitím (13.5), (8.3) a (8.4) přepsat na

$$-\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta,$$

z čehož už násobením -1 dostaneme druhou rovnici (14.1).

c) Platnost vzorců (14.1) je tedy dosud dokázána pro libovolné dva ostré úhly. Připomeňme, že oba vzorce platí také v případě, kdy alespoň jeden z úhlů α, β je roven 0°, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Učiňme nyní další krok. Za předpokladu, že (14.1) platí pro libovolné dva úhly α, β, dokážeme, že platí také pro případ, kdy k jednomu z nich, na př. k úhlu α, přičteme 90°; položme tedy $\alpha_1 = \alpha + 90°$, tedy $\alpha = \alpha_1 - 90°$. Podle předpokladu je

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

t. j.

$$\sin[(\alpha_1 - 90°) + \beta] = \sin(\alpha_1 - 90°) \cos\beta + \\ + \cos(\alpha_1 - 90°) \sin\beta.$$

Podle (13.13) jest však $\sin[(\alpha_1 - 90°) + \beta] = \sin[(\alpha_1 + \beta) - - 90°] = - \sin[90° - (\alpha_1 + \beta)]$, $\sin(\alpha_1 - 90°) = = - \sin(90° - \alpha_1)$ a $\cos(\alpha_1 - 90°) = \cos(90° - \alpha_1)$; po dosazení do předcházející rovnice dostáváme

$$-\sin[90° - (\alpha_1 + \beta)] = -\sin(90° - \alpha_1) \cos\beta + \\ + \cos(90° - \alpha_1) \sin\beta.$$

Užitím (8.3) a (8.4) (těchto vzorců můžeme skutečně užít, neboť se dá lehko dokázat, že platí pro libovolné úhly a ne jen pro ostré úhly) a současným násobením -1 najdeme

$$\cos(\alpha_1 + \beta) = \cos\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_1 \sin\beta,$$

tedy druhou rovnici (14.1) pro úhly $\alpha_1 = \alpha + 90°$, β. Podobně odvodíme postupně

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$
$$\cos[(\alpha_1 - 90°) + \beta] = \cos(\alpha_1 - 90°) \cos\beta - \\ - \sin(\alpha_1 - 90°) \sin\beta,$$
$$\cos[90° - (\alpha_1 + \beta)] = \cos(90° - \alpha_1) \cos\beta + \sin(90° - \alpha_1) \cdot \\ \cdot \sin\beta,$$
$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin\alpha_1 \cos\beta + \cos\alpha_1 \sin\beta.$$

Tím jsou však rovnice (14.1) dokázány pro libovolné kladné úhly, neboť každý úhel větší nebo rovný 90° dostaneme z úhlu z intervalu ⟨0°, 90°) postupným přičítáním 90°. Pro úhly intervalu ⟨0°, 90°) vzorce (14.1) platí, jak je dokázáno v částech a) a b), tedy platí pro všechny kladné úhly, jak jsme právě dokázali v c).

d) Zbývá provést důkaz platnosti vzorců (14.1) pro záporné úhly. Každý záporný úhel dostaneme však z kladného úhlu odečtením nějakého násobku 360°. Ale goniometrické funkce jsou periodické, jejich hodnoty se zmíněným odečtením nezmění, a proto vzorce (14.1) platí pro zcela libovolné úhly. Tím je tvrzení věty 14.1 dokázáno.

VĚTA 14.2. Pro dva libovolné úhly α, β platí

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Důkaz. Je to vlastně šest vztahů. V každém řádku platí současně buď horní nebo dolní znaménka. Říká se jim někdy *součtové* (*rozdílové*) *věty*. Důkaz platnosti prvých dvou vzorců pro horní znaménka je podán větou 14.1. Podle téže věty však můžeme za úhel β zvolit libovolný úhel. Zvolme úhel $-\beta$; dosazením do (14.1) dostaneme

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta),$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta).$$

Dosadíme-li sem však podle (13.13) $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, pak hned dosaneme prvé dva vzorce pro dolní znaménka.

Dále je

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}.$$

Dělme čitatel i jmenovatel součinem $\cos\alpha \cos\beta$; najdeme

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

což je právě vzorec ve třetím řádku pro horní znaménka. Připomeňme, že přirozeně předpokládáme, že jak $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, tak i $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ jsou skutečně definovány, t. j. že ani α, β, ale ani $\alpha + \beta$ nedají se psát ve tvaru $90° + n \,.\, 180°$ (tedy vzorec na př. neplatí, když je $\alpha = 30°$ a současně $\beta = 60°$). Úplně obdobně bychom dokázali platnost posledního vzorce pro dolní znaménka.

Příklad 14.1. Vypočtěte $\sin(\alpha - \beta)$, je-li $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ a víte-li, že α i β leží v intervalu $\langle 90°, 180° \rangle$.

Řešení. Z daných hodnot a podle podmínek najdeme $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Dosadíme nyní prostě do vzorce $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$, dostaneme $\sin(\alpha - \beta) = \frac{12}{13} \cdot -\frac{3}{5} - (-\frac{5}{13}) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$.

VĚTA 14.3. J e s t

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{14.7}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Důkaz. Stačí do vzorců (14.6) pro $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ položit $\alpha = \beta$.

Příklad 14.2. Vyjádřete $\sin 3\alpha$ funkcí $\sin\alpha$.

Řešení. Úhel 3α pišme ve tvaru $2\alpha + \alpha$. Pak je postupně $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha = (2\sin\alpha\,.$ $.\,\cos\alpha) \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \sin\alpha = \sin\alpha(3 \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$ $= 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$.

Poznámka. Užitím vzorců (14.7) můžeme zjednodušit výrazy, ve kterých se vyskytují goniometrické funkce. Tak na př. v úloze 9.1 jsme našli pro plošný obsah pravoúhlého trojúhelníka $p = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$; po dosazení ze (14.7) zjednodušíme na $p = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$. Podobně vzorec $p = b^2 \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha$ z úlohy 9.8 lze upravit na $p = \frac{1}{2}b^2 \sin\alpha$ a stejně vzorec $p =$ $= r^2 \sin\dfrac{2R}{n} \cos\dfrac{2R}{n}$ z úlohy 9.10 na $p = \frac{1}{2}r^2 \sin\dfrac{4R}{n}$, jak jsme ostatně našli přímo v úloze 9.10 jiným způsobem.

Vzorce (14.7) udávají, jak se vypočtou funkce dvojnásobného úhlu ze známých funkcí daného úhlu. Odvodíme ještě obrácené vzorce:

VĚTA 14.4. Platí

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \tag{14.8}$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$$

Důkaz. Vyjdeme z rovnic

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1, \quad \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \cos\alpha,$$

z nichž prvá je rovnicí (13.3) napsanou pro úhel $\frac{1}{2}\alpha$ a druhá je druhou rovnicí (14.7) napsanou také pro úhel $\frac{1}{2}\alpha$. Sečtením obou rovnic dostaneme $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha$ a odečtením druhé rovnice od první $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$. Z těchto rovnic již snadno odvodíme prvé dvě rovnice ve (14.8). Třetí vzorec dostaneme, vydělíme-li prvou rovnici (14.8) druhou rovnicí.

Příklad 14.3. Vypočtěte funkce úhlu $\frac{1}{2}\alpha$, je-li $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Řešení. Podle vzorců (14.8) najdeme $\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Omezíme-li se na úhly α z intervalu $\langle 0°, 360°\rangle$, pak (vzhledem k tomu, že bylo dáno $\cos\alpha > 0$) mohou nastat jen tyto dva případy: a) buď je $0° < \alpha < 90°$ a tedy $\sin\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ a $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$, b) nebo je $270° < \alpha < 360°$, pak je $135° < \frac{1}{2}\alpha < 180°$ a tedy $\sin\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{2}$.

Užitím věty 14.2 lehko odvodíme další velice užitečnou větu:

VĚTA 14.5. Pro libovolné dva úhly α, β platí vzorce

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).
\end{aligned} \tag{14.9}$$

Důkaz. Jsou-li α, β dva libovolné úhly, pak jistě existují další dva úhly γ a δ tak, že

$$\alpha = \gamma + \delta,\ \beta = \gamma - \delta. \tag{14.10}$$

Skutečně: napsané rovnice jsou vlastně rovnicemi pro neznámé úhly γ a δ. Sečtením obou rovnic najdeme $\alpha + \beta = 2\gamma$, odečtením $\alpha - \beta = 2\delta$, tedy

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \delta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \tag{14.11}$$

Vyjádříme nyní $\sin\alpha = \sin(\gamma + \delta)$ a $\sin\beta = \sin(\gamma - \delta)$ podle (14.6). Jest

$$\sin\alpha = \sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta,$$
$$\sin\beta = \sin(\gamma - \delta) = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta.$$

Sečtením a odečtením těchto rovnic dostaneme

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\gamma\cos\delta,$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\gamma\sin\delta.$$

Dosadíme-li sem za γ a δ ze (14.11), dostaneme právě prvé dvě rovnice (14.9). Obdobně je

$$\cos\alpha = \cos(\gamma + \delta) = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta,$$
$$\cos\beta = \cos(\gamma - \delta) = \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta.$$

Jejich sečtením a odečtením najdeme

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\gamma\cos\delta,$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\gamma\sin\delta.$$

Také sem dosadíme ještě za γ a δ ze (14.11); dostaneme zbývající dvě rovnice ve (14.9).

Poznámka. Význam vzorců (14.9) spočívá právě v tom, že součet (rozdíl) funkcí je vyjádřen součinem funkcí. Můžeme jich tedy s výhodou užít při úpravě daných výrazů na výrazy vhodné pro logaritmování.

Příklad 14.4. Vyjádřete součet $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ ve tvaru součinu za předpokladu, že α, β, γ jsou úhly trojúhelníka (tedy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$).

Řešení. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin[180° - (\alpha + \beta)] = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$. Pro prvé dva sčítance užijeme prvého vzorce (14.9), třetího sčítance upravíme podle prvého vzorce (14.7). Tedy $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\,[\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)]$. Nyní však platí $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos[90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)] = \cos\frac{1}{2}\gamma$ a dále [podle (14.9)] $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta$. Tedy výsledek je

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Cvičení.

14.1. Vypočtěte $\cos(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha - \beta)$, je-li $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$ a víte-li, že α i β leží v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$.

14.2. Určete $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$ a $\mathrm{tg}(\alpha - \beta)$, je-li $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{2}$.

14.3. Vypočtěte užitím součtových vět hodnoty goniometrických funkcí pro úhel 15° (uvažte, že $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$).

14.4. Najděte hodnotu $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$, $\mathrm{cotg}\,2\alpha$, je-li $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{20}{21}$ a leží-li α v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$.

14.5. Vyjádřete a) $\cos 3\alpha$, b) $\sin 4\alpha$ funkcemi $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

14.6. Najděte hodnoty goniometrických funkcí úhlu $\frac{1}{2}\alpha$, jestliže znáte $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ (úhel α je v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$).

14.7. Zjednodušte výrazy a) $\sin\alpha + \cos\alpha$, b) $\sin\alpha - \cos\alpha$ [užijte vztahu $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$].

14.8. Zjednodušte $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}$.

14.9. Nechť α, β, γ jsou úhly trojúhelníka; vyjádřete součinem a) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma$, b) $\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha + \mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\beta + \mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\gamma$.

15. ZÁKLADNÍ VĚTY PRO ŘEŠENÍ OBECNÝCH TROJÚHELNÍKŮ

Při řešení trojúhelníků budeme z vět odvozených v goniometrii obecného úhlu potřebovat věty týkající se úhlů intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$. Uvedeme jednoduchý důsledek těchto vět, platný pro úhly trojúhelníka.

VĚTA 15.1. Pro úhly α, β, γ trojúhelníka platí

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta),\ \cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta),\ \mathrm{tg}\,\gamma = -\mathrm{tg}(\alpha + \beta),$$
$$\mathrm{cotg}\,\gamma = -\mathrm{cotg}(\alpha + \beta), \tag{15.1}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \\ = \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta). \qquad (15.2)$$

Důkaz plyne okamžitě z toho, že pro úhly α, β, γ trojúhelníka platí rovnice $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

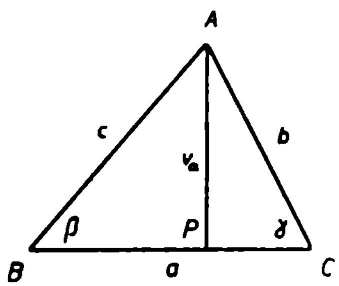
Poznámka. Mimo uvedené vzorce platí ještě další vzorce téhož typu, které dostaneme z (15.1) a (15.2) tak zvanou *cyklickou záměnou* prvků; rozumíme tím záměnu, při které místo α píšeme β, místo β píšeme γ a konečně místo γ píšeme α. Z takto získaných vzorců obdržíme opět nové další cyklickou záměnou.

Mezi stranami a úhly obecného trojúhelníka platí řada vztahů, z nichž některé nejdůležitější odvodíme. Nejprve dokážeme:

VĚTA 15.2 (SINOVÁ VĚTA). Strany trojúhelníka jsou úměrny sinům protějších úhlů, t. j.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \qquad (15.3)$$

Důkaz. V $\triangle\ ABC$ spusťme s vrcholu A výšku v_a na protější stranu a; pata výšky nechť je P. Nutno rozeznávat tři případy:



Obr. 74.

a) Jsou-li úhly β a γ ostré (obr. 74), pak P leží mezi body B a C. Dostaneme pravoúhlý $\triangle\ ABP$ s úhlem β při vrcholu B a pravoúhlý $\triangle\ ACP$ s úhlem γ při vrcholu C. Z $\triangle\ ABP$ najdeme pro výšku

$$v_a = c\sin\beta. \qquad (15.4)$$

Tutéž výšku v_a vyjádříme ještě užitím $\triangle\ ACP$; nyní jest

$$v_a = b\sin\gamma. \qquad (15.5)$$

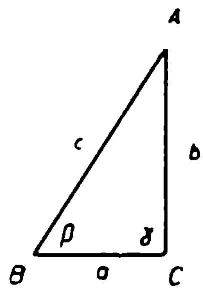
Z rovnic (15.4) a (15.5) plyne však okamžitě rovnice

$$b\sin\gamma = c\sin\beta, \qquad (15.6)$$

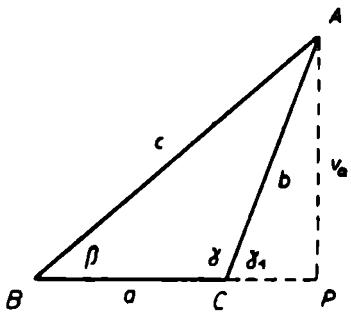
t. j. úměra

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma. \qquad (15.7)$$

b) Nejsou-li oba úhly β a γ ostré, pak jeden z nich, můžeme předpokládat, že je to právě γ, je buď pravý nebo tupý. Nechť γ je pravý (obr. 75), pak z $\triangle ABC$ dostaneme $b = c\sin\beta$, což však je jen zvláštním případem vztahu (15.6), neboť pro pravý úhel γ platí $\sin\gamma = 1$. Tedy i v tomto případě platí (15.7).



Obr. 75.



Obr. 76.

c) Nechť γ je tupý (obr. 76); pak bod P leží na přímce BC vně úsečky $\overline{BC}$. Dostaneme opět pravoúhlý $\triangle ABP$ s úhlem β při vrcholu B a pravoúhlý $\triangle ACP$ tentokráte s úhlem $\gamma_1 = 180° - \gamma$ při vrcholu C. Vyjádříme opět výšku v_a dvojím způsobem. Dostaneme jednak (15.4) (z $\triangle ABC$) a jednak $v_a = b\sin\gamma_1 = b\sin(180° - \gamma) = b\sin\gamma$, tedy opět (15.5). To však značí, že také v tomto případě platí úměra (15.7).

Kdybychom tutéž úvahu provedli pro výšky v_c a v_b, našli bychom

$$\begin{aligned} a : b &= \sin\alpha : \sin\beta, \\ a : c &= \sin\alpha : \sin\gamma. \end{aligned} \qquad (15.8)$$

Úměry (15.7) a (15.8) se obyčejně zapisují ve tvaru jediné postupné úměry (15.3). Tím je sinová věta dokázána.

Odvodíme si nyní další větu:

VĚTA 15.3 (KOSINOVÁ VĚTA). Čtverec strany trojúhelníka je roven součtu čtverců zbývajících dvou stran, zmenšenému o dvojnásobný součin těchto stran vynásobený kosinem úhlu jimi sevřeného:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad (15.9)$$

Důkaz provedeme opět ve třech krocích.

a) Nechť úhly β a γ jsou ostré (obr. 74). Pak z $\triangle\, ACP$ dostaneme $v_a{}^2 = b^2 - \overline{PC}^2$; podobně z $\triangle\, ABP$ určíme $v_a{}^2 = c^2 - \overline{BP}^2 = c^2 - (a - \overline{PC})^2$. Je tedy $b^2 - \overline{PC}^2 = c^2 - (a - \overline{PC})^2$. Odtud již snadno nalezneme $c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,.\,\overline{PC}$. Dosadíme-li sem však $\overline{PC} = b\cos\gamma$, jak plyne z pravoúhlého $\triangle\, ACP$, pak dostaneme ihned dokazovaný vzorec (15.9).

b) Nechť γ je pravý (obr. 75); daný $\triangle\, ABC$ je pravoúhlý s přeponou c. Podle Pythagorovy věty je $c^2 = a^2 + b^2$. To však říká, že i v tomto případě platí (15.9), neboť pro $\gamma = 90°$ jest $\cos\gamma = 0$.

c) Nechť γ je tupý úhel (obr. 76). Obdobným způsobem jako v případě a) najdeme $c^2 = a^2 + b^2 + 2a\,.\,\overline{PC}$. Dosadíme-li sem $\overline{PC} = b\cos\gamma_1 = b\,.\,\cos(180° - \gamma) = -\,b\cos\gamma$, dostaneme zase (15.9). Tím je platnost vzorce (15.9) dokázána pro všechny případy. Úplně obdobně bychom dokázali ještě další dva vzorce

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta; \end{aligned} \qquad (15.10)$$

tím je dokázána platnost věty.

Poznámka. Kosinové větě se někdy říká také *Carnotova* (čteme karnotova) *věta* nebo *rozšířená věta Pythagorova*, vzhledem k tomu, že věta Pythagorova je jejím zvláštním případem. Připomeňme, že ze tří vzorců (15.9) a (15.10) stačí si zapamatovat jediný; zbývající dva plynou z něho cyklickou záměnou elementů: nyní tím rozumíme, že zaměníme nejen úhly podle schematu $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, $\gamma \to \alpha$, nýbrž současně i strany podle obdobného schematu $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$.

Pro řešení obecných trojúhelníků úplně vystačí základní věty sinová a kosinová. Přesto k nim připojíme ještě některé další věty, které řešení trojúhelníků v mnohých případech ulehčují.

VĚTA 15.4 (TANGENTOVÁ VĚTA). *Součet dvou stran v trojúhelníku má se k jejich rozdílu jako tangenta polovičního součtu protějších úhlů k tangentě jejich polovičního rozdílu:*

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \qquad (15.11)$$

Důkaz. K odvození užijeme sinové věty. Z prvního vzorce (15.8) plyne $a = d \sin\alpha$, $b = d \sin\alpha$ (kde d je jakýsi koeficient různý od nuly) a odtud $a + b = d(\sin\alpha + \sin\beta)$, $a - b = d(\sin\alpha - \sin\beta)$. Vydělením obou rovnic najdeme

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}. \qquad (15.12)$$

Pravou stranu této rovnice však snadno upravíme

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} =$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} : \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

a tedy

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Dosadíme-li tento výsledek do (15.12), dostáváme přímo (15.11). Tím je však tangentová věta dokázána; další dva vzorce dostaneme z (15.11) známou cyklickou záměnou.

Poznámka. Věta tangentová se často označuje jako *Neperova* (Napierova) *úměra* nebo věta.

VĚTA 15.5 (1. a 2. MOLLWEIDŮV VZOREC). *Pro strany a úhly obecného trojúhelníka platí*

$$(a + b) : c = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(a - b) : c = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\tfrac{1}{2}\gamma. \qquad (15.13)$$

Důkaz obou vzorců založíme opět na sinové větě. Z postupné úměry (15.3) plyne $a = d \sin\alpha$, $b = d \sin\beta$, $c = d \sin\gamma$ a tedy $a + b = d(\sin\alpha + \sin\beta)$, $c = d \sin\gamma$. Vydělením obou rovnic najdeme

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}. \qquad (15.14)$$

Pravou stranu této rovnice upravíme [užijeme při tom druhého vzorce v (15.2)] na

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma} =$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma}$$

a tedy

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

což dosazeno do (15.14) dává 1. Mollweidův vzorec v (15.13). Úplně obdobně dokážeme 2. vzorec vycházejíce z úměry

$$(a - b) : c = (\sin\alpha - \sin\beta) : \sin\gamma.$$

Ke každému ze vzorců (15.13) existují ovšem ještě další dva, které z nich dostaneme cyklickou záměnou elementů.

Poznámka. Uvedené vzorce jsou známy také pod jménem *Cagnoliho* (čteme kaňoliho) *rovnice.*

VĚTA 15.6. Pro poloviční úhly trojúhelníka platí

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}},$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}, \qquad (15.15)$$

(a další vzorce pro úhly $\frac{1}{2}\beta$ a $\frac{1}{2}\gamma$, které dostaneme z těchto cyklickou záměnou), při čemž $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Důkaz. Vyjděme z kosinové věty (15.9) napsané pro stranu a, t. j. z rovnice $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$. Z toho

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu $\cos\alpha$ do (14.8), dostaneme hledané vzorce. Naznačené provedeme nyní podrobně: vypočítáme nejprve jednak $1 - \cos\alpha$, jednak $1 + \cos\alpha$. Najdeme $1 - \cos\alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}$, $1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$. Pišme, jak obvykle, pro poloviční obvod trojúhelníka s, t. j. položme $a + b + c = 2s$; pak je $b + c - a = 2(s - a)$, $a - b + c = 2(s - b)$, $a + b - c = 2(s - c)$ a tedy

$$1 - \cos\alpha = \frac{2s(s - a)}{bc}, \quad 1 + \cos\alpha = \frac{2(s - b)(s - c)}{bc}.$$

Další je již zřejmé, stačí totiž nalezené hodnoty dosadit do (14.8) a dostaneme okamžitě vzorce (15.15). Odmocniny jsou ovšem opatřeny znaménkem $+$, neboť $\frac{1}{2}\alpha$ je jistě v intervalu $(0°, 90°)$, tedy $\sin\frac{1}{2}\alpha > 0$, $\cos\frac{1}{2}\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha > 0$.

Nakonec připojme ještě několik vět, ve kterých uvedeme jak se vypočítávají některé další prvky trojúhelníka, a to plošný obsah p, poloměr ϱ kružnice vepsané a poloměr r kružnice opsané, ze základních prvků.

VĚTA 15.7. Pro plošný obsah p trojúhelníka platí vzorce

$$p = \tfrac{1}{2}ab \sin\gamma, \qquad (15.16)$$

$$p = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}, \qquad (15.17)$$

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\textit{Heronův vzorec}). \qquad (15.18)$$

Důkaz. Nejprve ukážeme platnost vzorce (15.16). Jak víme, pro plošný obsah trojúhelníka platí známý vzorec $p = \frac{1}{2}av_a$ (obr. 74). Pro výšku v_a však z $\triangle ACP$ najdeme $v_a = b \sin\gamma$, což dosazeno do předchozího vzorce dává $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$, jak je uvedeno v (15.16). Samozřejmě s tímto vzorcem platí ještě další dva, které dostaneme z tohoto cyklickou záměnou prvků: $p = \frac{1}{2}bc \sin\alpha$, $p = \frac{1}{2}ac \sin\beta$. Další vztah (15.17) dostaneme již z (15.16) vhodnou úpravou užitím sinové věty. Z úměry $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ totiž určíme $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$, kam ještě můžeme dosadit [dle vzorce obdobného k (15.1)] $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$, tedy $b = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}$; po dosazení do (15.16) dostaneme právě (15.17). Další dva vztahy tohoto tvaru $p = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin(\alpha + \gamma)}$, $p = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$, plynou již z prvého cyklickou záměnou. Třetí vzorec (15.18) se dokazuje obvykle v planimetrii. Můžeme jej však okamžitě odvodit z (15.16). Jest totiž podle vzorců obdobných k (15.15),

$$\sin\gamma = 2 \sin\tfrac{1}{2}\gamma \cos\tfrac{1}{2}\gamma = 2 \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} =$$

$$= \frac{2}{ab} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ a tedy}$$

$$p = \tfrac{1}{2}ab \sin\gamma = \tfrac{1}{2}ab \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

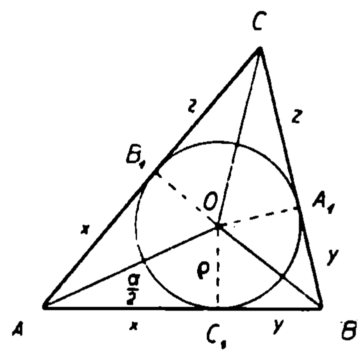
VĚTA 15.8. Pro poloměr ϱ kružnice trojúhelníku vepsané platí

$$\varrho = \frac{p}{s}, \tag{15.19}$$

$$\varrho = (s - a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha, \tag{15.20}$$

$$\varrho = \frac{a \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}. \tag{15.21}$$

Důkaz. Prvý z těchto vzorců náleží do planimetrie a uvádíme jej pro úplnost. Odvodíme jej takto (obr. 77). Plošný obsah $\triangle ABC$ je rovný součtu plošných obsahů $\triangle ABO$, $\triangle BCO$ a $\triangle CAO$, t. j. $p = \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho + \frac{1}{2}c\varrho = \frac{1}{2}(a + b + c)\varrho = s\varrho$; odtud již plyne (15.19). Abychom odvodili další vztah (15.20), označme dotykové body kružnice vepsané na stranách a, b, c postupně A_1, B_1, C_1 (obr. 77). Pro úseky x, y, z, které tyto body určí na stranách a, b, c, platí zřejmě $x + y + z = s$ a tedy na př. $x = s - (y + z) = s - a$; podobně $y = s - b$, $z = s - c$. Dále již snadno z pravoúhlého $\triangle AOC_1$ najdeme $\varrho = x\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = (s - a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ a to je právě vztah (15.20). Další dva obdobné vztahy $\varrho = (s - b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ a $\varrho = (s - c)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$ odvodíme z tohoto cyklickou záměnou (nebo přímo z $\triangle OBC_1$ a $\triangle OCA_1$). Poznamenejme, že (15.20) jsme mohli odvodit také z (15.15), (15.18) a (15.19). Konečně třetí relaci (15.21) odvodíme z (15.20), a to takto: jest



Obr. 77.

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \frac{a}{s-a} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \frac{a}{s-a} \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Dosaďme tento výsledek do (15.20). Postupně najdeme

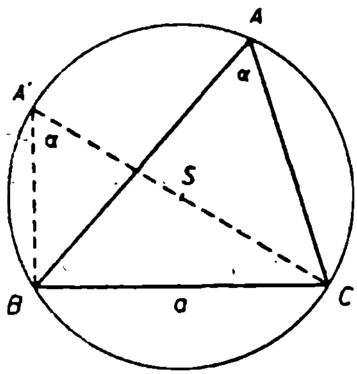
$$\varrho = (s-a)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = (s-a)\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = (s-a)\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{a}{s-a}$$

$\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{a\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$, jak jsme chtěli ukázat. Ovšem se vzorcem (15.21) platí ještě dva obdobné, jež dostaneme cyklickou záměnou prvků.

VĚTA 15.9. Pro poloměr r kružnice trojúhelníku opsané platí

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}, \tag{15.22}$$

$$r = \frac{abc}{4p}. \tag{15.23}$$



Obr. 78.

Důkaz. Spojme bod C se středem S kružnice opsané; tato spojnice má s kružnicí mimo C ještě další společný bod, označme jej A'. a) Je-li úhel α ostrý (obr. 78), pak je bod $A' \neq B$; body A', B, C určují pravoúhlý $\triangle A'BC$, jehož úhel při vrcholu A je právě α. Z tohoto trojúhelníka najdeme

$\overline{A'C} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$; protože však $\overline{A'C} = 2r$, našli jsme $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, odkud již plyne (15.22). b) Je-li α pravý, pak pro poloměr r okamžitě najdeme $r = \frac{1}{2}a$. Tedy zase platí (15.22), neboť pro $\alpha = 90°$ je $\sin\alpha = 1$. c) Je-li α tupý úhel, pak v $\triangle BCA'$ je úhel při vrcholu A' rovný $\alpha_1 = 180° - \alpha$. Pro $\overline{A'C} = 2r$ tedy najdeme $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha_1} = \dfrac{a}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, z čehož je patrno, že i v tomto případě platí (15.22). Ke vzorci (15.22) existují ještě další dva obdobné, které z tohoto plynou cyklickou záměnou. Další vztah (15.23) odvodíme okamžitě z (15.22), kam dosadíme za $\sin\alpha$ ze vzorce $p = \frac{1}{2}bc$. $\sin\alpha$; jest totiž $\sin\alpha = \frac{2p}{bc}$ a tedy $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{bc}{2p} = \frac{abc}{4p}$.

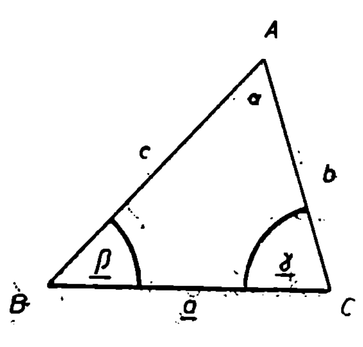
16. ŘEŠENÍ OBECNÝCH TROJÚHELNÍKŮ

Vět předchozího odstavce použijeme nyní k řešení obecných trojúhelníků. Především přihlédneme k nejdůležitějším základním úlohám, kdy trojúhelník je určen třemi nezávislými základními prvky. Jak je známo z plamimetrie, jsou jen čtyři případy určení trojúhelníka základními prvky: 1. stranou a dvěma úhly, 2. dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným, 3. třemi stranami a 4. dvěma stranami a úhlem ležícím proti větší z nich. Řešit takto určené trojúhelníky bude pro nás znamenat vypočítat zbývající hlavní prvky; kromě toho vždy připojíme výpočet plošného obsahu trojúhelníka.

Poznámka. Za každou úlohou jsou uvedeny dva řešené příklady, z nichž prvý je počítán jen užitím goniometrických tabulek, kdežto druhý logaritmicky.

ÚLOHA 16.1. Řešte trojúhelník, který je určen stranou a a úhly β, γ.

Řešení (obr. 79; dané prvky jsou podtrženy). Hledáme tedy α, b, c, p. Především můžeme okamžitě vypočítat α. Jest $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$. Dále určíme strany sinovou větou; v úměrách $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ a $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ známe totiž vždy tři prvky, takže čtvrtý můžeme vypočítat. Jest



Obr. 79.

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \; c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Plošný obsah p určíme podle (15.17), t. j. $p = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} =$

$= \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}$, anebo také užitím již jedné vypočtené strany podle (15.16), tedy na př. $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$.

Je vždy důležité ještě uvést, jak smíme zadat dané prvky, aby skutečně existoval (a to jediný) trojúhelník z daných prvků; v našem případě platí pro dané prvky jediná samozřejmá podmínka: musí být $\beta + \gamma < 180°$.

Příklad 16.1. Řešte trojúhelník, je-li $a = 52$ cm, $\beta = 63°14'$, $\gamma = 57°43'$

Řešení. Jelikož je $\beta + \gamma = 63°14' + 57°43' = 120°57' <$ $< 180°$, je danými prvky trojúhelník skutečně určen.

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$; $\alpha = 180° - 120°57' = 59°3'$,

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}; \; b = \frac{52 \text{ cm} \,.\, \sin 63°14'}{\sin 59°3'} = \frac{52 \,.\, 0{,}893 \text{ cm}}{0{,}857} \doteq 54{,}2 \text{ cm},$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}; \; c = \frac{52 \text{ cm} \,.\, \sin 57°43'}{\sin 59°3'} = \frac{52 \,.\, 0{,}845 \text{ cm}}{0{,}857} \doteq 51{,}3 \text{ cm},$$

$p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$; $p = \frac{1}{2}52 \text{ cm} \,.\, 54{,}2 \text{ cm} \,.\, \sin 57°43' = \frac{1}{2}\, 52 \,.\, 54{,}2$ $.\, 0{,}845 \text{ cm}^2 \doteq 1190{,}8 \text{ cm}^2$.

Příklad 16.2. Řešte trojúhelník, je-li $a = 135{,}3$ m, $\beta =$ $= 48°50'32''$, $\gamma = 107°16'17''$

Řešení. Jest $\beta + \gamma = 156°6'49'' < 180°$ a tedy trojúhelník je danými prvky určen. Pro jednoduchost vynecháme při výpočtu označení m.

$\alpha = 180° - (\beta - \gamma)$; $\alpha = 180° - 156°6'49'' = 23°53'11''$.

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha};$$

$$\log b = \log a + \log\sin\beta - \log\sin\alpha,$$

$$\begin{array}{rl} \log b = & 2{,}13130 \\ & 9{,}87674 - 10 \\ & 10 \quad - \; 9{,}60737 \\ \hline & 2{,}40067 \end{array} \qquad b = 251{,}58 \text{ m},$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \cos(\gamma - 90°)}{\sin\alpha};$$

$$\log c = \log a + \log\cos(\gamma - 90°) - \log\sin\alpha,$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 2{,}13130 \\ & 9{,}97996 - 10 \\ & 10 \quad - \; 9{,}60737 \\ \hline & 2{,}50389 \end{array} \qquad c = 319{,}07 \text{ m},$$

$$p = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{a^2 \sin\beta \cos(\gamma - 90°)}{2 \sin\alpha};$$

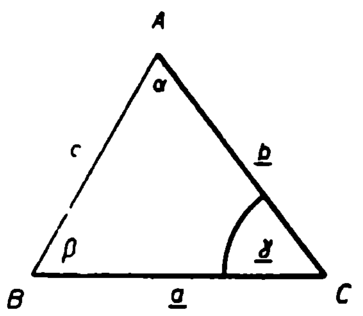
$$\log p = 2 \log a + \log\sin\beta + \log\cos(\gamma - 90°) - \log 2 - \log\sin\alpha,$$

$$\begin{array}{rl} \log p = & 4{,}26260 \\ & 9{,}87674 - 10 \\ & 9{,}97996 - 10 \\ & \qquad - \; 0{,}30103 \\ & 10 \quad - \; 9{,}60737 \\ \hline & 4{,}21090 \end{array} \qquad \ldots\; p = 16252 \text{ m}^2.$$

Je velice užitečné nakonec se přesvědčit o správnosti výpočtu. Můžeme to učinit na př. tak, že na základě vypočtených prvků určíme prvky dané. V našem případě užijeme třeba 2. Mollweidova vzorce $a = (b + c) \dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\gamma - \beta)}$; $a = 570{,}65 \cdot \dfrac{\sin 11°56'35''}{\cos 29°12'53''}$; snadno se přesvědčíme, že najdeme právě $a = 135{,}3$.

ÚLOHA 16.2: Řešte trojúhelník, který je určen dvěma stranami a, b a úhlem γ jimi sevřeným.

Řešení (obr. 80). Hledáme prvky α, β, c, p. Podle kosinové věty najdeme pro stranu c výraz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Další výpočet je již zřejmý. Známe totiž nyní všechny strany a jeden úhel; můžeme tedy zbývající úhly vypočítat ze sinové věty; pro $\sin\alpha$ a $\sin\beta$ platí $\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$, $\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$ $\left(\text{anebo také } \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}\right)$. Při výpočtu úhlů α a β z těchto vztahů je si třeba uvědomit, že jestliže na př. úhel α vyhovuje podmínce $\sin\alpha = m$ $\left(\text{kde } m = \frac{a\sin\gamma}{c}\right)$, pak téže podmínce vyhovuje úhel $\alpha_1 = 180° - \alpha$. Který z úhlů α, α_1 je skutečným řešením naší (jednoznačné) úlohy? K rozhodnutí této otázky použijeme známých vět z planimetrie: v trojúhelníku proti větší straně leží větší úhel (a obráceně: proti většímu úhlu leží větší strana), proti stejně velikým stranám leží stejně veliké úhly (a obráceně: proti stejně velikým úhlům leží stejně veliké strany). Konečně pro výpočet plošného obsahu užijeme vzorce $p = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Poznamenejme nakonec, že v tomto případě jsou dané prvky podrobeny jediné samozřejmé podmínce, musí totiž být $\gamma < 180°$.



Obr. 80.

Chceme-li úlohu řešit logaritmicky, pak je udaný postup nevýhodný, neboť při výpočtu strany a musíme sčítat a odčítat. Začněme raději s výpočtem úhlů α, β. Užijeme tangentové věty $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, ze které najdeme $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; tím určíme

$\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. K výsledku připojíme nám známý součet $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Máme tedy dvě rovnice pro α, β. Jejich sečtením dostaneme α, odečtením β. V trojúhelníku tedy již známe všechny základní prvky s výjimkou strany c, kterou určíme sinovou větou, na př. ze vztahu $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$. Plošný obsah počítáme jako dříve ze vzorce $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$.

Příklad 16.3. Řešte trojúhelník, je-li $a = 5{,}5$ cm, $b = 5{,}2$ cm, $\gamma \doteq 48°30'$.

Řešení. Užijeme při tom na př. čtyřmístných goniometrických tabulek. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$; $c^2 = 5{,}5^2 + 5{,}2^2 - 2 \cdot 5{,}5 \cdot 5{,}2 \cdot \cos 48°30' = 30{,}25 + 27{,}04 - 2 \cdot 5{,}5 \cdot 5{,}2 \cdot 0{,}6626 \doteq 19{,}39$, $c \doteq 4{,}403$,

$$\sin\alpha = \frac{a \sin\gamma}{c}; \qquad \sin\alpha = \frac{5{,}5 \cdot \sin 48°30'}{4{,}403} = \frac{5{,}5 \cdot 0{,}7490}{4{,}403} \doteq$$
$$\doteq 0{,}9356,$$

tedy α je buď $69°20'$ nebo $180° - 69°20'$

$$\sin\beta = \frac{b \sin\gamma}{c}; \qquad \sin\beta = \frac{5{,}2 \cdot \sin 48°30'}{4{,}403} = \frac{5{,}2 \cdot 0{,}7490}{4{,}403} \doteq$$
$$\doteq 0{,}8845,$$

odtud β je buď $62°11'$ nebo $180° - 62°11'$

Vzhledem k tomu, že pro strany v našem případě platí $a > b > c$, musí být také $\alpha > \beta > \gamma$. Snadno určíme, že tedy musí být $\alpha = 69°20'$, $\beta = 62°11'$ jak ostatně potvrzuje také součet $\alpha + \beta + \gamma = 69°20' + 62°11' + 48°30' = 180°1'$; chyba $1'$ vznikla zkracováním během výpočtu. $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$; $p = \frac{1}{2} \cdot 5{,}5 \cdot 5{,}2 \cdot \sin 48°30' = \frac{1}{2}$ 5,5 5,2 . . 0,749 $\doteq 10{,}71$.

Hledané prvky jsou tedy: $c \doteq 4{,}4$ cm, $\alpha = 69°20'$, $\beta = 62°10'$, $p \doteq 10{,}71$ cm².

Příklad 16.4. Řešte trojúhelník, je-li $a = 36{,}32$, $b = 27{,}15$, $\gamma = 51°23'40''$

Řešení. Budeme řešit logaritmicky; vypočteme nejprve úhly α, β užitím tangentové věty. Za tím účelem najdeme předem potřebné výrazy:

$a - b = 36{,}32 - 27{,}15 = 9{,}17$, $a + b = 36{,}32 + 27{,}15 =$
$= 63{,}47$,

$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma = 90° - 25°41'50'' = 64°18'10''$

Z tangentové věty plyne $\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \dfrac{a-b}{a+b}\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$;

odtud

$\log\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \log(a - b) + \log\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \log(a + b)$,

$\log\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \log 9{,}17 + \log\mathrm{tg}64°18'10'' - \log 63{,}47 =$

$$
\begin{array}{lll}
= 0{,}96237 & & \\
\;\;10{,}31766 - 10 & & \\
\qquad\quad - \;\; 1{,}80257 & & \\
\hline
\;\;9{,}47746 - 10 & & \\
\qquad 714 & & 16°42' \\
\hline
\qquad\;\; 32 & \ldots & \quad 42'' \\
\hline
\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & & 16°42'42''.
\end{array}
$$

Z rovnic $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 64°18'10''$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 16°42'42''$ dostaneme sečtením $\alpha = 81°52''$, odečtením $\beta = 47°35'28''$

Stranu c určíme sinovou větou

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha};$$

$\log c = \log a + \log\sin\gamma - \log\sin\alpha$,

$\log c = \log 36{,}32 + \log\sin 51°23'40'' - \log\sin 81°52'' =$

$$
\begin{array}{l}
= 1{,}56015 \\
\;\;9{,}89291 - 10 \\
10 \qquad - \;\; 9{,}99462 \\
\hline
\;\;1{,}45844 \\
\qquad 834 \ldots c = 28{,}737.
\end{array}
$$

(Zkouška užitím vztahu $c = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$ dává $c = 28{,}735$).

Konečně pro plošný obsah p najdeme:

$$p = \tfrac{1}{2}ab \sin\gamma; \log p = \log a + \log b + \log\sin\gamma - \log 2,$$

$$\begin{array}{rl} \log p = & 1{,}56015 \\ & 1{,}43377 \\ & 9{,}89291 - 10 \\ & \quad - \ 0{,}30103 \\ \hline & 2{,}58580 \qquad\qquad p = 385{,}3. \end{array}$$

Hledané prvky jsou tedy:

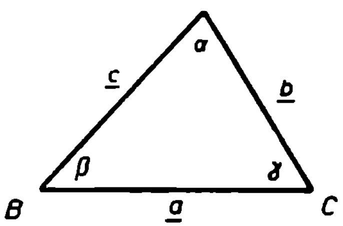
$\alpha = 81°52''$, $\beta = 47°35'28''$, $c \doteq 28{,}74$, $p \doteq 385{,}3$.

ÚLOHA 16.3. Řešte trojúhelník, který je určen třemi stranami a, b, c.

Řešení (obr. 81). Hledáme úhly α, β, γ a plošný obsah p. Z kosinové věty pro úhly najdeme okamžitě

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Obr. 81.

Plošný obsah určíme podle Heronova vzorce. Dané prvky nemůžeme dát zcela libovolně, musí vyhovovat známé podmínce, aby součet kterýchkoliv dvou z nich byl větší než zbývající třetí strana.

Jsou-li daná čísla více než dvojciferná, pak je výpočet tímto způsobem nevhodný. Raději použijeme vzorců (15.15) pro funkce polovičních úhlů trojúhelníka, jež se zvláště hodí k logaritmickému řešení dané úlohy. Obvykle se používá tangenty polovičních úhlů:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Počítáme-li všechny tři úhly, pak určení jejich součtu je současně dobrou zkouškou správnosti výpočtu. Plošný obsah najdeme jako dříve opět podle Heronova vzorce.

Příklad 16.5. Řešte trojúhelník, je-li $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

Řešení. Jelikož pro největší stranu platí $c < a + b$, je danými stranami trojúhelník určen.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos\alpha = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 . 14 . 15} =$$

$$= \frac{196 + 225 - 169}{2 . 14 . 15} = \frac{252}{420} = 0{,}6, \ \alpha \doteq 53°8',$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos\beta = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 . 13 . 15} =$$

$$= \frac{169 + 225 - 196}{2 . 13 . 15} = \frac{198}{390} = \frac{33}{65} \doteq 0{,}50769, \ \beta \doteq 59°29',$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \cos\gamma = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 . 13 . 14} =$$

$$= \frac{169 + 196 - 225}{2 . 13 . 14} = \frac{140}{364} = \frac{5}{13} \doteq 0{,}38462, \ \gamma \doteq 67°23'.$$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma = 53°8' + 59°29' + 67°23'' = 180°$ (není však nutné, aby při zkoušce součet byl právě 180°, vždyť zaokrouhluje na minuty).

Abychom mohli určit plošný obsah, najdeme nejdříve $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 21$, $s - a = 8$, $s - b = 7$, $s - c = 6$. Pak je $p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$; $p = \sqrt{21 . 8 . 7 . 6} = \sqrt{3^2 . 4^2 . 7^2} = 3 . 4 . 7 = 84$.

Příklad 16.6. Řešte trojúhelník, je-li $a = 25{,}47$, $b = 19{,}53$, $c = 17{,}85$.

Řešení. Dané strany určují skutečně trojúhelník, neboť pro největší stranu platí $a < b + c$. Budeme řešit logaritmicky;

užijeme s výhodou vzorců pro poloviční úhly. K tomu účelu vypočteme nejdříve výrazy $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$; $s = \frac{1}{2}(25{,}47 + 19{,}53 + 17{,}85) = 31{,}425$, $s - a = 5{,}955$, $s - b = 11{,}895$, $s - c = 13{,}575$. Dále vyhledáme jejich logaritmy:

$$\log s = 1{,}49727, \log(s-a) = 0{,}77488,$$
$$\log(s-b) = 1{,}07537, \log(s - c) = 1{,}13274.$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}[\log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a)],$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(1{,}07537 + 1{,}13274 - 1{,}49727 - 0{,}77488) = \tfrac{1}{2}\,.\,-0{,}06404 = -0{,}03202 = 9{,}96798 - 10,$$

$\frac{1}{2}\alpha = 42°53'23''$.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}};$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-c) - \log s - \log(s-b)],$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}(0{,}77488 + 1{,}13274 - 1{,}49727 - 1{,}07537) = \tfrac{1}{2}\,.\,-0{,}66502 = -0{,}33251 = 9{,}66749 - 10,$$

$\frac{1}{2}\beta = 24°56'25''$.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}};$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-b) - \log s - \log(s-c)],$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(0{,}77488 + 1{,}07537 - 1{,}49727 - 1{,}13274) = \tfrac{1}{2}\,.\,-0{,}77976 = -0{,}38988 = 9{,}61012 - 10,$$

$\frac{1}{2}\gamma = 22°10'13''$.

Hledané úhly jsou tedy

$$\alpha = 85°46'46'', \beta = 49°52'50'', \gamma = 44°20'26''$$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma = 85°46'46'' + 49°52'50'' + 44°20'26'' = 180°2''$; chyba $2''$ vznikla tím, že během výpočtu jsme vlastně při logaritmování a vyhledávání úhlů z daných logaritmů zaokrouhlovali.

Konečně určíme ještě plošný obsah podle Heronova vzorce:

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$
$$\log p = \tfrac{1}{2}[\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c)],$$
$$\log p = \tfrac{1}{2}(1{,}49727 + 0{,}77488 + 1{,}07537 + 1{,}13274) =$$
$$= \tfrac{1}{2} \,.\, 4{,}48026 = 2{,}24013$$
$$005 \ldots 173{,}83.$$

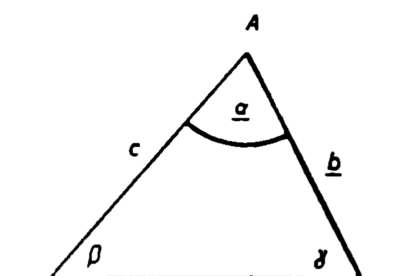
Plošný obsah je tedy $p = 173{,}83$.

Poznámka. Kdybychom chtěli poněkud zkrátit celý počet, pak bychom mohli s výhodou použít vzorců (15.19) a (15.20). Je totiž zřejmě $\varrho = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ a pak již podle (15.20) dostáváme jednoduché vyjádření

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\varrho}{s-b}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Stačí tedy najít nejprve $\log \varrho$ a pak již $\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ atd. vypočteme poměrně rychle. Také plošný obsah p pak vypočteme snadno; podle (15.19) je $p = \varrho s$.

Úloha 16.4. Řešte trojúhelník, který je určen dvěma stranami a úhlem proti větší z nich.



Obr. 82.

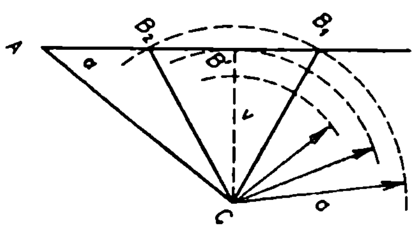
Řešení (obr. 82). Dané strany označme a, b a předpokládejme, že $a > b$, pak daný úhel musíme označit α. Hledáme prvky β, γ, c, p. Nejdříve určíme úhel β užitím sinové věty.

Jest $\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$. Odtud již najdeme β. Dále je $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Stranu c dostaneme zase užitím sinové věty, ať již ve tvaru $c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$ nebo $c = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$. Konečně pro plošný obsah p užijeme vzorce $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$.

Je třeba zmínit se o výpočtu úhlu β. Z planimetrie je totiž známo, že existuje jediný trojúhelník určený danými prvky. Podmínkou $\sin\beta = m \left(\text{kde } m = \dfrac{b \sin\alpha}{a}\right)$ jsou však určeny dva různé (je totiž $m < 1$, neboť $\dfrac{b}{a} < 1$ a $\sin\alpha \leqq 1$) úhly z intervalu $(0°, 180°)$. Jeden z nich je ostrý, označme jej β (vyhledáme jej z tabulek), kdežto druhý β_1 je tupý: $\beta_1 = 180° - \beta$. Který z nich vyhovuje naší úloze? Ostrý úhel β! Je-li totiž v trojúhelníku nějaký úhel tupý, pak jistě leží tento úhel proti největší straně; podle předpokladu však strana b je menší než a, tedy nemůže proti b ležet tupý úhel. Dodejme ještě, že dané prvky můžeme zadat libovolně, ovšem musí být $\alpha < 180°$.

Místo úlohy 16.4 bývá často položena obecnější úloha: řešte trojúhelník, který je určen dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich. Provedeme rozbor. Dané strany označme a, b a daný úhel α. Jsou myslitelny tři případy: buď je $a > b$, nebo $a = b$, nebo $a < b$. Prvý případ je vlastně probrán úlohou 16.4. Druhý případ vyšetříme snadno. Je-li totiž $a = b$, pak musí být $\alpha = \beta$; jedná se tedy o rovnoramenný trojúhelník, který už umíme dál řešit. Pro úhel α platí nyní omezení $\alpha < 90°$.

Zbývá třetí případ, kdy $a < b$. Z planimetrie je známo, že v tomto případě, kdy je dán úhel proti menší straně, úloha buď 1. nemá řešení, nebo 2. má právě jedno, nebo 3. právě dvě řešení. V posledních dvou případech musí ovšem být daný úhel $\alpha < 90°$. Připomeňme krátce, jak se postupuje při planimetrickém řešení této úlohy (obr. 83). Sestrojíme úhel α o vrcholu A a na jedno rameno naneseme od vrcholu A stranu b, tím dostaneme vrchol C. Nyní opíšeme kružnici o středu C a poloměru a, který je podle předpokladu menší než b. Tato kružnice buď 1. nemá s druhým ramenem žádný bod společný a tedy neexistuje žádný trojúhelník, který by vyhovoval dané úloze, nebo 2. dotýká se druhého ramene úhlu α v bodě B', pak jediný pravoúhlý $\triangle AB'C$ řeší úlohu, nebo konečně 3. protíná druhé rameno úhlu α ve dvou různých bodech B_1 a B_2 a tedy v tomto případě existují právě dva trojúhelníky AB_1C a AB_2C, které řeší úlohu.


Obr. 83.

Naším úkolem je rozhodnout, jak *jen početně* z daných prvků $a < b$, α poznáme, který z těchto tří případů 1. $\div$ 3. nastane. Nechť vzdálenost bodu C od druhého ramene je v (obr. 83), potom $v = b \sin\alpha$ (jak plyne z pravoúhlého $\triangle AB'C$). Zřejmě nastane-li 1. případ, pak $a < v$, t. j. $a < b \sin\alpha$, nastane-li 2. případ, pak $a = v$, t. j. $a = b \sin\alpha$, konečně nastane-li 3. případ, pak $a > v$, t. j. $a > b \sin\alpha$. Důležité je, že platí také obráceně (a to je hledaný výsledek): jestliže $a < b \sin\alpha$, pak nastane 1. případ (neboť potom $\dfrac{b \sin\alpha}{a} > 1$ a tedy neexistuje žádný úhel β, pro který by $\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$, neboť hodnota sinu nemůže být větší než 1). Jestliže $a = b \sin\alpha$, pak nastane 2. případ (existuje jediný úhel $\beta = 90°$ tak, že $\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$, neboť potom $\dfrac{b \sin\alpha}{a} = 1$ a tedy $\sin\beta = 1$). Jestliže $a > b \sin\alpha$, pak nastává 3. případ (neboť potom existují ostrý úhel β_1 a tupý úhel $\beta_2 = 180° -$

$-\beta_1$ tak, že $\sin\beta_1 = \sin\beta_2 = \frac{b\sin\alpha}{a}$). Jak ve 2., tak ve 3. případě musí být daný úhel α ostrý, neboť v obou případech podle předpokladu $a < b$ musí být také $\alpha < \beta$ a to by při $\alpha \geqq 90°$ nebylo možné.

Příklad 16.7. Řešte trojúhelník, je-li $a = 150$, $b = 100$, $\gamma = 50°$.

Řešení. Je dán úhel proti větší straně a tedy existuje jediné řešení.

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\ \sin\beta = \frac{100\,.\,\sin 50°}{150} = \frac{100\,.\,0{,}76604}{150} =$$

$$= 0{,}51069,\ \beta = 30°43',$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma = 180° - (50° + 30°43') = 99°17',$$

$$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\alpha};\ c = \frac{100\,.\,\sin 99°17'}{\sin 30°43'} = \frac{100\,.\,\cos 9°17'}{\sin 30°43'} =$$

$$= \frac{100\,.\,0{,}98690}{0{,}51069} = 193{,}2.$$

(Zkouška: $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha};\ c = \frac{150\,.\,\sin 99°17'}{\sin 50°} = \frac{150\,.\,0{,}98690}{0{,}76604} =$
$= 193{,}2$).

$p = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;\ p = \frac{1}{2}\,150\,.\,100\ \ \sin 99°17' = \frac{1}{2}\,150\ \ 100$
$0{,}98690 = 7401{,}75.$

Příklad 16.8. Řešte trojúhelník, je-li $a = 172{,}4$, $b = 236{,}7$, $\alpha = 37°46'20''$

Řešení. Je dán úhel proti menší z daných stran a je tedy třeba nejprve porovnat a a $b\,.\,\sin\alpha$, abychom mohli rozhodnout, zda vůbec existuje řešení: $b\sin\alpha = 236{,}7$ $\sin 37°46'20'' \doteq 236{,}7\,.\,0{,}61 \doteq 144$. Protože $a > b\sin\alpha$ (neboť $172{,}4 > 144$), existují dvě řešení.

$\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$ | $\log\sin\beta = \log b + \log\sin\alpha - \log a,$

$\log\sin\beta = \log 236{,}7 + \log\sin 37°46'20'' - \log 172{,}4 =$

$= 2{,}37420$
$\;\;\; 9{,}78712 - 10$
$\;\;\; - 2{,}23654$

$\beta_1 = 57°14'43'',$ $\qquad 9{,}92478 - 10 \;\ldots\; 57°14'43''$

$\beta_2 = 180° - \beta_1; \beta_2 = 180° - 57°14'43'' = 122°45'17''.$

1. *řešení* (užijeme β_1):

$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1); \gamma_1 = 180° - (37°46'20'' + 57°14'43'') = = 180° - 95°1'3'' = 84°58'57'',$

$c_1 = \dfrac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$ | $\log c_1 = \log a + \log\sin\gamma_1 - \log\sin\alpha,$

$\log c_1 = \log 172{,}4 + \log\sin 84°58'57'' - \log\sin 37°46'20'' =$

$= 2{,}23654$
$\;\;\; 9{,}99833 - 10$
$\;\;\; 10 - 9{,}78712$

$c_1 = 280{,}38,$ $\qquad 2{,}44775 \qquad 280{,}38$

(Zkouška $c_1 = \dfrac{b\sin\gamma_1}{\sin\beta_1}$ vede k témuž výsledku).

$p_1 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma_1; \log p_1 = \log 0{,}5 + \log a + \log b + \log\sin\gamma_1,$

$\log p_1 = \log 0{,}5 + \log 172{,}4 + \log 236{,}7 + \log\sin 84°58'57'' = 0{,}69897 - 1 + 2{,}23654 + 2{,}37420 + 9{,}99833 - 10 = 4{,}30804 \ldots 20325$

$p_1 = 20325.$

2. *řešení* (užijeme β_2):

$\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2); \gamma_2 = 180° - (37°46'20'' + 122°45'17'') = = 19°28'23'',$

$c_2 = \dfrac{a\sin\gamma_2}{\sin\alpha}$ | $\log c_2 = \log a + \log\sin\gamma_2 - \log\sin\alpha,$

$\log c_2 = \log 172{,}4 + \log\sin 19°28'23'' - \log\sin 37°46'20'' =$

$$
\begin{array}{lll}
 & = 2{,}23654 & \\
 & \ 9{,}52292 - 10 & \\
 & \ 10 \qquad - \ 9{,}78712 & \\
\hline
c_2 = 93{,}83, & \ 1{,}97234 & 93{,}83
\end{array}
$$

(Zkouška $c_2 = \dfrac{b \sin\gamma_2}{\sin\beta}$ vede k témuž výsledku).

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \tfrac{1}{2}ab \sin\gamma_2; \log p_2 = \log 0{,}5 + \log a + \log b + \log\sin\gamma_2,\\
&\log p_2 = \log 0{,}5 + \log 172{,}4 + \log 236{,}7 +\\
&\quad + \log\sin 19°28'23'' = 0{,}69897 - 1 +\\
&\quad + 2{,}23654 + 2{,}37420 + 9{,}52292 - 10 =\\
p_2 &= 6801{,}9. \qquad = 3{,}83263 \ldots 6801{,}9
\end{aligned}
$$

K základním úlohám 16.1 ÷ 16.4 je ovšem možno připojit celou řadu dalších úloh, kdy trojúhelník je určen jinými prvky než základními. Uveďme alespoň jednu takovou úlohu.

ÚLOHA 16.5. Řešte trojúhelník, který je určen plošným obsahem p a úhly β, γ.

Řešení. Pro plošný obsah p platí [dle (15.17)]

$p = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta + \gamma)}$; odtud najdeme $a = \sqrt{\dfrac{2p\sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}$. Dále již postupujeme podle úlohy 16.1.

Příklad 16.9. Řešte trojúhelník, je li $p = 100$, $\beta = 35°$, $\gamma = 105°$.

Řešení. Ze vzorce (15.17) vypočteme $a = \sqrt{\dfrac{2p\sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}$.

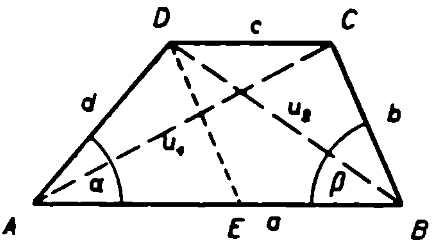
$$
\begin{aligned}
\log a &= \tfrac{1}{2}(\log 2 + \log p + \log\sin(\beta + \gamma) - \log\sin\beta -\\
&\quad - \log\sin\gamma),\\
\log a &= \tfrac{1}{2}(0{,}30103 + 9{,}80807 - 10 - 9{,}75859 + 10 -\\
&\quad - 9{,}98494 + 10) = \tfrac{1}{2} \cdot 2{,}36557 \doteq 1{,}18278.\\
a &= 15{,}233.
\end{aligned}
$$

Užitím sinové věty najdeme ještě $b = 13{,}592$, $c = 22{,}890$.

Čtyřúhelníky a vůbec *mnohoúhelníky* řešíme užitím vhodných trojúhelníků, sestrojených z daných prvků. Ukázku této methody podáme v další úloze.

ÚLOHA 16.6. Určete úhlopříčky lichoběžníka, jsou-li dány jeho strany.

Řešení (obr. 84). Nechť v lichoběžníku $ABCD$ základny jsou $\overline{AB} = a$, $\overline{DC} = c$, ramena $\overline{BC} = b$, $\overline{AD} = d$ a nechť $a > c$. Vrcholem D veďme DE rovnoběžně s BC. V trojúhelníku AED známe strany $\overline{AE} = a - c$, $\overline{ED} = b$, $\overline{AD} = d$, můžeme tedy podle úlohy 16.3 určit jeho úhly $\alpha = \sphericalangle DAB$ a $\beta = \sphericalangle AED$. Úhlopříčky u_1 a u_2 pak již najdeme z trojúhelníků ABC a ABD, ve kterých známe dvě strany a úhel jimi sevřený; vyhledáme je tedy podle úlohy 16.2. Připomeňme, že nikoliv každé čtyři úsečky a, b, c, d určí lichoběžník. Nutně musí $b + d > a - c$ a buď $b - d < a - c$ (je-li $b \geqq d$), nebo $d - b < a - c$ (je-li $d \geqq b$), jak plyne z určenosti $\triangle AED$.



Obr. 84.

Příklad 16.10. Určete úhlopříčky lichoběžníka, jehož základny jsou 10, 3 a ramena 6, 3.

Řešení (obr. 84). Položme $a = 10$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 6$; podmínka $b + d > a - c$ je splněna $(9 > 7)$, současně platí $d - b < a - c$ $(3 < 7)$, a proto lichoběžník z daných prvků existuje. $\triangle AED$ má strany $a' = \overline{DE} = b = 3$, $b' = \overline{AD} = d = 6$, $c' = \overline{AE} = a - c = 7$. Počítejme tangenty polovičních úhlů. Jest $s' = \frac{1}{2}(a' + b' + c') = 8$, $s' - a' = 5$, $s' - b' = 2$, $s' - c' = 1$.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s' - b')(s' - c')}{s'(s' - a')}} = \tfrac{1}{10}\sqrt{5}; \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = 9{,}349485 - 10,\ \tfrac{1}{2}\alpha = 12°36'16'',$$

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s' - a')(s' - c')}{s'(s' - b')}} = \frac{1}{4}\sqrt{5}; \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta =$
$= 9{,}747425 - 10,\ \frac{1}{2}\beta = 29°12'21''$

(Zkouška: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s' - a')(s' - b')}{s'(s' - c')}} = \frac{1}{2}\sqrt{5};$
$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = 10{,}048455 - 10,\ \frac{1}{2}\gamma = 48°11'23''$.)

Dále užijeme dvakráte kosinové věty. Jsou-li u_1, u_2 úhlopříčky, pak $u_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ a $u_2^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$. Po dosazení našich hodnot najdeme $u_1 \doteq 8{,}8$, $u_2 \doteq 5{,}2$. Chceme-li výsledek stanovit přesněji, pak přímý výpočet podle kosinové věty je poněkud nevhodný. Užijeme této příležitosti, abychom ukázali, jak se dá vzorec $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ upravit k logaritmování. Podle (14.6) položíme $\cos\gamma = -1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\gamma$. Dostaneme postupně $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\gamma) = (a + b)^2 - 4ab\cos^2\frac{1}{2}\gamma = (a + b + m)(a + b - m)$, kde $m = 2\sqrt{ab}\ .$ $.\ \cos\frac{1}{2}\gamma$.

V našem případě tedy

$u_1 = \sqrt{(a + b + m)(a + b - m)};\ m = 2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\beta =$
$= 2\sqrt{10\ .\ 3}\cos 29°12'21''$,

$\log m = \log 2 + \log\cos 29°12'21'' + \frac{1}{2}\log 30 = 0{,}98054;\ m =$
$= 9{,}5618.$

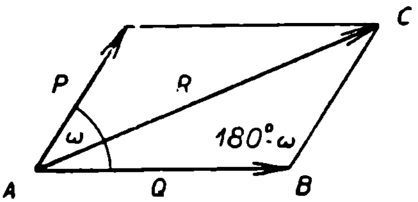
$u_1 = \sqrt{22{,}5618\ .\ 3{,}4382};\ \log u_1 = \frac{1}{2}(\log 22{,}5618 + \log 3{,}4382) =$
$u_1 = 8{,}8074.$ $\qquad = 0{,}94485$

Úplně obdobně najdeme $u_2 = 5{,}2389$.

Konečně uveďme ještě jednu praktickou úlohu (z mechaniky).

Úloha 16.7. Najděte výslednici R dvou sil P, Q, které působí na hmotný bod, jestliže jejich úhel je ω.

Řešení. (Porovnejte s úlohou 9.14.) Najít výslednici R znamená určit její směr, smysl a velikost. V mechanice se ukazuje, že tyto hodnoty lze graficky najít z t. zv. *rovnoběžníka sil* (obr. 85). Tohoto rovnoběžníka užijeme jednak k početnímu vyjádření směru výslednice R (t. j. k výpočtu úhlů výslednice R se silami P, Q), jednak k výpočtu její velikosti. Zmíněné prvky určíme na př. z $\triangle ABC$, jehož strany AB a BC mají délky rovné velikostem sil P, Q a svírají úhel $180^\circ - \omega$. Jedná se tedy v podstatě o řešení trojúhelníka daného dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným; řešíme podle úlohy 16.2. Přirozeně stále předpokládáme, že ani jedna z daných sil P, Q není nulová a že úhel ω není 0° ani 180°, neboť pak by se nejednalo o rovnoběžník.



Obr. 85.

Poznámka. Odvodíme si vzorec, jehož se v mechanice často používá pro určení velikosti výslednice R. Z $\triangle ABC$ plyne $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \,.\, \cos(180^\circ - \omega)$; dosadíme-li sem $\cos(180^\circ - \omega) = -\cos\omega$, vidíme, že platí:

Jestliže síly P, Q svírají úhel ω, pak pro velikost výslednice R platí

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\omega.$$

Příklad 16.11. Dány jsou síly $P = 84{,}5$ kg, $Q = 47{,}8$ kg, jež svírají úhel $\omega = 56^\circ 40'$. Jak veliká je výslednice R a jaké úhly svírá výslednice se silami P, Q?

Řešení (obr. 85). Jedná se o řešení $\triangle ABC$, pro který je $a = 84{,}5$, $c = 47{,}8$, $\beta = 180^\circ - \omega = 123^\circ 20'$. Hledáme α, γ, b.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{a-c}{a+c}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma);$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \log(a - c) + \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \log(a + c),$$

$$\begin{aligned}\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) &= \log 36{,}7 + \log\operatorname{tg} 28^\circ 20' - \log 132{,}3 = \\ &= 1{,}56467 + 9{,}73175 - 10 - 2{,}12156 = \\ &= 9{,}17486 - 10,\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 8^\circ 30' 25'',$$

α, γ určíme z rovnic $\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 8°30'25''$, $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 28°20'$;
$\alpha = 36°50'25''$, $\gamma = 19°49'35''$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}; \; b = \frac{84{,}5 . \sin 56°40'}{\sin 36°50'25''};$$

$$\begin{aligned} \log b &= \log 84{,}5 + \log\sin 56°40' - \log\sin 36°50'25'' = \\ &= 1{,}92686 + 9{,}92194 - 10 - 9{,}77785 + 10 = \\ &= 2{,}07095, \end{aligned}$$

$b = 117{,}75.$

Výslednice $R = 117{,}75$ kg svírá s P úhel $\gamma = 19°49'35''$ a s Q úhel $\alpha = 36°50'25''$.

Cvičení.

Vypočtěte zbývající z prvků α, β, γ, a, b, c, p trojúhelníka ABC, je-li dáno:

16.1. a) $a = 5$ cm, $\beta = 48°$, $\gamma = 59°$, b) $b = 123{,}5$ mm, $\alpha = 115°18'$, $\gamma = 37°32'$.

16.2. a) $a = 75$ mm, $b = 60$ mm, $\gamma = 28°45'$, b) $a = 213{,}5$ mm, $c = 172{,}5$ mm, $\beta = 118°40'25''$.

16.3. a) $a = 8{,}5$ cm, $b = 7{,}2$ cm, $c = 6{,}8$ cm, b) $a = 93{,}8$ cm, $b = 65{,}3$ cm, $c = 72{,}9$ cm.

16.4. a) $a = 65$ mm, $b = 46$ mm, $\alpha = 42°30'$, b) $b = 456{,}5$ mm, $c = 632{,}4$ mm, $\gamma = 62°15'45''$.

16.5. a) $b = 17{,}5$ cm, $c = 26{,}3$ cm, $\beta = 33°20'$, b) $a = 66{,}8$ cm, $b = 102{,}6$ cm, $\alpha = 42°30'$.

16.6. Vypočtěte poloměr kružnice vepsané a opsané $\triangle ABC$, je-li $a = 8$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$; narýsujte $\triangle ABC$ a přesvědčte se o správnosti výpočtu změřením příslušných délek.

16.7. Řešte trojúhelník, je-li plošný obsah $p = 750$ cm^2, $\alpha = 107°50'$, $\beta = 42°45'$.

16.8. Vypočtěte délky úhlopříček u_1, u_2 rovnoběžníka určeného stranami $a = 48{,}3$ mm, $b = 32{,}7$ mm, které svírají úhel $\alpha = 126°30'$.

16.9. V lichoběžníku je dána větší základna $a = 56{,}3$ cm, jeho výška $v = 20$ cm a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 48°$ ramen se základnou; najděte délku druhé základny, ramen a úhlopříček.

16.10. Síly $P = 350$ kg a $Q = 420$ kg působící na hmotný bod svírají úhel $\omega = 112°30'$. Najděte jejich výslednici.

16.11. Sílu $R = 200$ kg rozložte na dvě složky P, Q, z nichž prvá svírá s R úhel $\alpha = 45°$ a druhá úhel $\beta = 60°$.

16.12. Síla $R = 50$ kg je rozložena na dvě složky, z nichž prvá je $P = 45$ kg, druhá $Q = 30$ kg. Najděte úhly těchto složek s danou silou.

Zvláště rozsáhlé uplatnění nachází rovinná trigonometrie v t. zv. *nižší geodesii*, do které spadá několik úzce příbuzných oborů, z nichž nejběžnější je *praktická geometrie* (zeměměřictví), jež se zabývá měřením, výpočtem a zobrazováním menších částí zemského povrchu (pokud je lze pokládat za rovinné).

Z těchto úkolů praktické geometrie nás bude zajímat jen výpočet, lépe řečeno: řešení některých nejzákladnějších trigonometrických úloh, jež se v praktické geometrii vyskytují.

Poznámka. Bude ovšem na místě zmínit se alespoň o tom, jak praktická geometrie získává potřebná data k výpočtu, t. j. geometricky řečeno, prvky potřebné k řešení úlohy. V podstatě se jedná o *stanovení délek* a *úhlů*. K přesnému měření délek se užívá v zeměměřictví *měřických pásem* a *latí*; k přímému měření úhlů slouží různé *úhloměrné stroje*, z nichž nejpřesnější jsou *theodolity*; některé jejich druhy (na př. *universální stroje*) slouží ke stanovení nejen vodorovných, nýbrž i svislých úhlů.*)

V trigonometrických úlohách praktické geometrie se jedná v podstatě vždy o určení vzdálenosti dvou bodů A, B, kterou nelze zjistit přímým měřením. Jednoduché typy těchto úloh patří k nám již známým úlohám o trojúhelnících. Především jsou to úlohy o měření výšek.

ÚLOHA 17.1. Nechť na svislé přímce AB je bod B přístupný; má se určit výška $\overline{AB}$.

Řešení (obr. 86a). Na vodorovné rovině jdoucí bodem B si zvolíme vhodně libovolný další bod M. Změříme vzdálenost

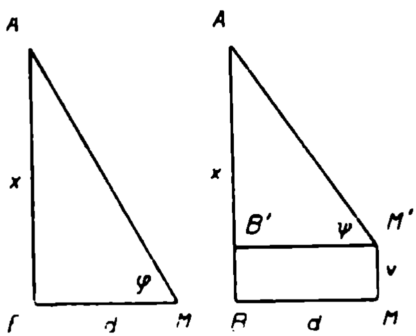
*) O základech praktické geometrie, o pomůckách a strojích, jichž se v zeměměřictví užívá ke stanovení délek a o methodách měření podrobně jedná knížka Pavla Potužáka: *Praktická geometrie I., II.*, Cesta k vědění, sv. 30 (1945) a sv. 49 (1948) (Praha, JČMF).

$d = \overline{BM}$ a úhel $\varphi = \sphericalangle AMB$. Pro $x = \overline{AB}$ pak platí (viz úloha 5.4)

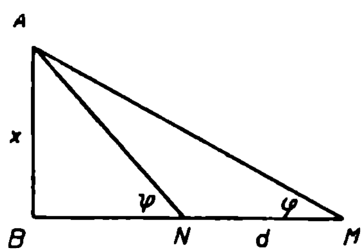
$$x = d \operatorname{tg} \varphi. \tag{17.1}$$

Při praktickém měření úhlů používáme ovšem úhloměrného přístroje o výšce $\overline{M'M}$ (obr. 86b· výškou stroje rozumíme výšku vodorovné osy svislého dělícího kruhu, na kterém měříme svislé úhly). Ve skutečnosti měříme tedy úhel $\psi = \sphericalangle AM'B'$ Pro vzdálenost $x = \overline{AB}$ tedy najdeme (jest totiž $\overline{M'M} = \overline{B'B}$ a $\overline{B'M'} = \overline{BM}$)

$$x = \overline{AB'} + \overline{B'B} = d \operatorname{tg} \psi + v. \tag{17.2}$$



a) Obr. 86. b)



Obr. 87.

Častější případ je však podán v další úloze.

Úloha 17.2. Nechť na svislé přímce AB je bod B nepřístupný; jest určit výšku $\overline{AB}$.

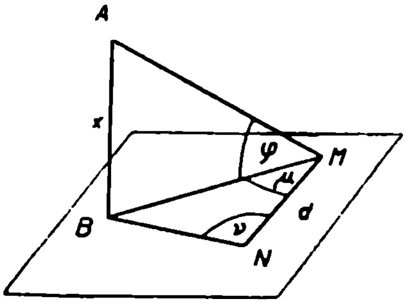
Řešení. Na vodorovné rovině procházející bodem B si zvolíme dva libovolné různé body M, N ($\overline{MN} = d$). Je možné dvojí: buď body M, N, B a) leží v přímce, nebo b) neleží v přímce.

V případě a) (pořadí uvedených bodů na přímce nechť je právě B, N, M — obr. 87) změříme úhly $\varphi = \sphericalangle AMB$ a $\psi = \sphericalangle ANB$; z $\triangle AMN$ podle sinové věty [$\overline{AN} : \overline{NM} =$

$= \sin\varphi : \sin(\psi - \varphi)]$ najdeme $\overline{AN} = \dfrac{d \sin\varphi}{\sin(\psi - \varphi)}$, a protože dále z pravoúhlého $\triangle ABN$ je $x = \overline{AN} \sin\psi$ (dle věty 7.2), dostaneme pro hledanou výšku

$$x = \frac{d \sin\varphi \sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)}. \tag{17.3}$$

V případě b) (obr. 88) opět určíme úhel $\varphi = \sphericalangle AMB$, ale pak změříme úhly $\mu = \sphericalangle BMN$ a $\nu = \sphericalangle BNM$. Z $\triangle BMN$ plyne podle sinové věty $\overline{BM} : d = \sin\nu : \sin(\mu + \nu)$ a tedy $\overline{BM} = \dfrac{d \,.\, \sin\nu}{\sin(\mu+\nu)}$. Výšku x vyjádříme z pravoúhlého $\triangle ABM$; dostaneme $x = \overline{BM} \,.\, \mathrm{tg}\varphi$ (podle úlohy 5.4) a tedy



Obr. 88.

$$x = \frac{d \sin\nu \,\mathrm{tg}\varphi}{\sin(\mu + \nu)}. \tag{17.4}$$

Při skutečném měření svislých úhlů φ, ψ je samozřejmě zase třeba počítat s výškou úhloměrného stroje; tím se však již nebudeme podrobně zabývat.

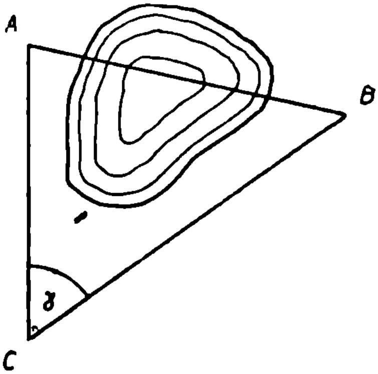
Další skupina úloh se týká případu, kdy přímka AB je vodorovná.

Úloha 17.3. Nechť body A, B jsou přístupné; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$.

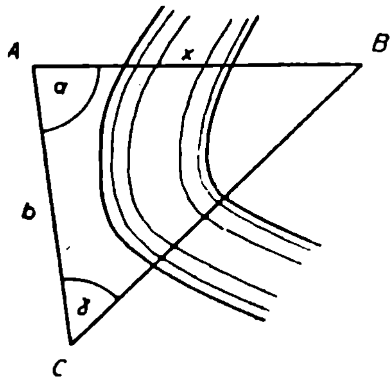
Řešení (obr. 89). Zvolme si na vodorovné rovině jdoucí body A, B další bod C tak, abychom mohli změřit vzdálenosti $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ a úhel $\gamma = \sphericalangle ACB$. Hledanou vzdálenost $x = \overline{AB}$ již určíme podle úlohy 16.2.

ÚLOHA 17.4. Nechť bod A je přístupný, bod B nepřístupný; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$.

Řešení (obr. 90). Zvolíme si jako dříve další bod C tak, abychom mohli změřit vzdálenost $b = \overline{AC}$; dále změříme úhly $\alpha = \sphericalangle BAC$ a $\gamma = \sphericalangle ACB$ (tedy předpokládáme, že bod B je jak z bodu A tak z bodu C viditelný). Ze sinové věty plyne



Obr. 89.



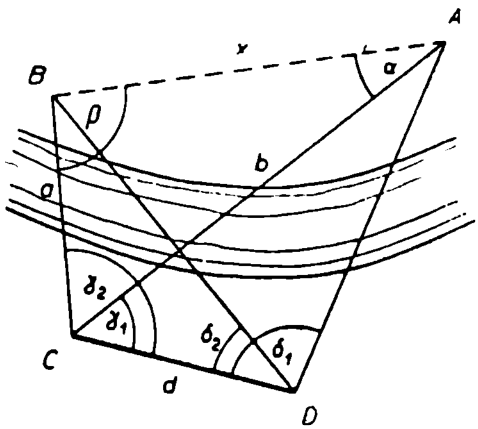
Obr. 90.

$$x = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}. \tag{17.5}$$

Poznámka. Tato úloha se v praktické geometrii vyskytuje velice často. Obvykle se totiž hledá ještě vzdálenost $\overline{CB}$. Úloha tedy zní: jest dána pevná vzdálenost (*základna*) $b = \overline{AC}$; máme určit vzdálenost třetího bodu B od koncových bodů A, C základny, jsou-li ještě změřeny úhly $\alpha = \sphericalangle BAC$ a $\gamma = \sphericalangle BCA$ v daných bodech. Říkáme pak, že bod B byl určen *protínáním vpřed*.

ÚLOHA 17.5. Nechť body A, B jsou nepřístupné; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$.

Řešení (obr. 91). Úlohu zřejmě nemůžeme řešit jen pomocí trojúhelníka, nutno vzít v úvahu čtyřúhelník. Zvolíme si tedy (ovšem ve vodorovné rovině procházející body A, B) dva různé přístupné body C, D, aby s A, B tvořily čtyřúhelník, a to tak, aby z nich byly body A, B viditelné; změříme jednak základnu $d = \overline{CD}$ a jednak úhly $\gamma_1 = \sphericalangle ACD$, $\gamma_2 = \sphericalangle BCD$, $\delta_1 = \sphericalangle ADC$, $\delta_2 = \sphericalangle BDC$. To však znamená, že každý z trojúhelníků ACD a BCD je určen stranou a dvěma přilehlými úhly. Můžeme tedy užitím sinové věty z $\triangle BCD$ určit stranu $a = \overline{BC}$; stejným způsobem z $\triangle ACD$



Obr. 91.

najdeme stranu $b = \overline{AC}$. Pak v $\triangle ABC$ známe dvě strany a, b a úhel $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ při vrcholu C a určíme tedy již lehko zbývající stranu, t. j. hledanou vzdálenost $x = \overline{AB}$.

Chceme-li celý postup vypsat vzorci, dostáváme

$$a = \frac{d \sin\delta_2}{\sin(\gamma_2 + \delta_2)}, \quad b = \frac{d \sin\delta_1}{\sin(\gamma_1 + \delta_1)}. \tag{17.6}$$

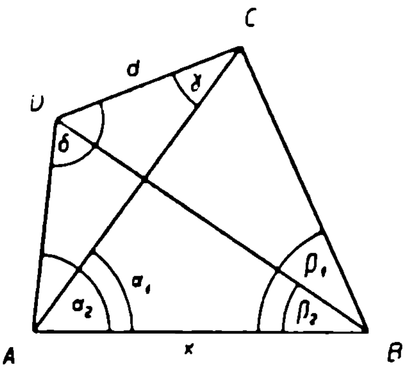
Označíme-li $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, pak z tangentové věty psané ve tvaru $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ vypočteme $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Jelikož však $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, můžeme určit α i β. Pro stranu x tedy dostaneme

$$x = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \left(= \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta} \right). \tag{17.7}$$

Poznámka. Mohli jsme ovšem místo a, b najít $\overline{AD}$ a $\overline{BD}$ a x určit z $\triangle\, ABD$; tento způsob výpočtu může sloužit jako zkouška správnosti prvého řešení.

ÚLOHA 17.6 (HANSENOVA ÚLOHA). Nechť body A, B jsou přístupné; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$, známe-li vzdálenost $d = \overline{CD}$ dvou nepřístupných bodů C, D viditelných z bodů A, B.

Řešení (obr. 92). Samozřejmě předpokládáme, že body A, B, C, D tvoří čtyřúhelník. Poněvadž body C, D jsou z A i B viditelné, můžeme stanovit úhly $\alpha_1 = \sphericalangle\, BAC$, $\alpha_2 = \sphericalangle\, BAD$, $\beta_1 = \sphericalangle\, ABC$, $\beta_2 = \sphericalangle\, ABD$. Kdybychom ještě znali úhel $\delta = \sphericalangle\, ADC$ (nebo $\gamma = \sphericalangle\, ACD$), pak bychom z $\triangle\, ACD$ našli $\overline{AC} = \dfrac{d \sin\delta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}$ (neboť $\sphericalangle\, CAD = \alpha_2 - \alpha_1$) a tedy pro $x = \overline{AB}$ by z $\triangle\, ABC$ plynulo $x = \dfrac{\overline{AC} \,.\, \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin\beta_1}$, t. j. hledaná délka by byla



Obr. 92.

$$x = \frac{d \sin\delta \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \tag{17.8}$$

Zbývá jen najít úhel δ. Především platí

$$\gamma + \delta = 180° - (\alpha_2 - \alpha_1); \tag{17.9}$$

dále jest (podle sinové věty z $\triangle\, ACD$) $\sin\gamma : \sin\delta = \overline{AD} : \overline{AC}$.

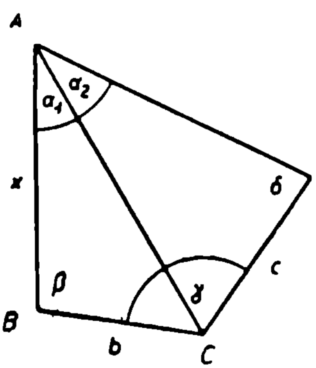
Z $\triangle\, ABD$ najdeme $\overline{AD} = \dfrac{x \sin\beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}$, podobně z $\triangle\, ABC$ plyne $\overline{AC} = \dfrac{x \sin\beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}$; obóje dosazeno do předchozího poměru dává

$$\sin\gamma : \sin\delta = k, \tag{17.10}$$

kde $k = \dfrac{\sin\beta_2 \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha_2 + \beta_2)}$ je známé číslo. Ze dvou rovnic (17.9) a (17.10) však už úhly γ a δ určíme jednoduchým obratem. Pišme totiž (17.10) ve tvaru $\sin\gamma : \sin\delta = k : 1$; pak z této úměry (podle známé věty o úměrách) plyne úměra $(\sin\gamma - \sin\delta) : (\sin\gamma + \sin\delta) = (k - 1) : (k + 1)$, což není nic jiného než vhodně upravená předchozí úměra; upravíme-li levou stranu poslední úměry podle (14.9), dostaneme $2\sin\frac{1}{2}(\gamma - \delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma + \delta) : 2\sin\frac{1}{2}(\gamma + \delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = (k - 1) : (k + 1)$, t. j. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = \dfrac{k - 1}{k + 1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma + \delta)$. V této rovnici však pravou stranu známe, a proto můžeme odtud vypočítat úhel $\frac{1}{2}(\gamma - \delta)$; řekněme, že najdeme $\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = \sigma$. Pak pro úhly γ a δ máme jednak tento vztah a jednak vztah (17.9). Z nich už snadno vypočteme úhel δ potřebný k určení x podle vzorce (17.8).

Úloha 17.7 (Snellova úloha). Je dána poloha tří bodů B, C, D (t. j. známe strany $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ a úhel $\gamma = \sphericalangle BCD$). Jest určit polohu bodu A, z něhož jsou body B, C, D viditelné (t. j. jest určit jeho vzdálenosti od nich).

Řešení (obr. 93). Předpokládejme opět, že body A, B, C, D tvoří čtyřúhelník. Poněvadž body B, C, D jsou z bodu A viditelné, můžeme určit úhly $\alpha_1 = \sphericalangle BAC$ a $\alpha_2 = \sphericalangle CAD$. Hledejme na př. vzdálenost $x = \overline{AB}$. Kdybychom znali úhel $\beta = \sphericalangle ABC$, pak bychom z $\triangle ABC$ našli pro hledanou vzdálenost



Obr. 93.

$$x = \frac{b \sin(\alpha_1 + \beta)}{\sin\alpha_1}. \tag{17.11}$$

Je tedy třeba ještě určit úhel β. Za tím účelem vyjádříme dvojím způsobem $\overline{AC}$. Z $\triangle ABC$ najdeme $\overline{AC} = \dfrac{b \sin\beta}{\sin\alpha_1}$, podobně z $\triangle ACD$ dostaneme $\overline{AC} = \dfrac{c \sin\delta}{\sin\alpha_2}$. Z toho již plyne $\dfrac{b \sin\beta}{\sin\alpha_1} = \dfrac{c \sin\delta}{\sin\alpha_2}$, což můžeme napsat ve tvaru $\sin\beta : \sin\delta = k$, kde $k = \dfrac{c \sin\alpha_1}{b \sin\alpha_2}$ je známé číslo. Tím jsme našli jednu podmínku pro úhly β a δ; druhá podmínka je vyjádřená rovnicí (jak plyne ze čtyřúhelníka $ABCD$) $\beta + \delta = 360° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)$. Z nalezených dvou podmínek však už umíme — methodou uvedenou v předchozí úloze — nalézt β a δ. Tím je úloha řešena, neboť pak pro x platí (17.11) a další vzdálenosti $\overline{AC}$ a $\overline{AD}$ již snadno vypočteme z $\triangle ABC$ a $\triangle ACD$.

Poznámka 1. Tomuto způsobu určení polohy bodu A se v zeměměřictví říká *protínání zpětné*. Při zpětném protínání se totiž měří úhly v hledaném bodě, kdežto při protínání vpřed v daných bodech (porovnejte s poznámkou za úlohou 17.4).

Poznámka 2. V praktické geometrii se určuje poloha libovolného bodu vzhledem k t. zv. *trigonometrické síti*; je to soustava vhodně volených pevných bodů (zvaných *trigonometrické* nebo také *triangulační body*), které lze spojit sítí trojúhelníků. Vycházejíce ze změřené pevné základny, můžeme postupným měřením úhlů (*triangulací*) vypočítat strany všech trojúhelníků trigonometrické sítě. Základní síť (jejíž strany u nás jsou přibližně 25 km dlouhé) se zjemňuje vkládáním nových trigonometrických bodů, až se dojde k t. zv. *katastrální trigonometrické síti*, jejíž trojúhelníky mají délku stran asi 2 km. Teprve tato síť slouží praktickým geometrům k podrobnému měření. Základní methody pro určení polohy bodu vyměřovaného objektu vzhledem k této síti jsou právě protínání vpřed a protínání zpětné (spolu s *kombinovaným protínáním*, při kterém se měří úhly jak v daných pevných bodech, tak ve vyměřovaných — hledaných — bodech).

Cvičení.

17.1. Jest určit výšku měřické (triangulační) věže, jejíž střed B základny je přístupný, jestliže theodolitem výšky $v = 1{,}25$ m, postaveným ve vzdálenosti $d = 14{,}5$ m od osy věže (na vodorovné rovině jdoucí bodem B), byl zaměřen její vrchol A pod úhlem $\psi = 43°30'$ (obr. 86b).

17.2. Určete výšku továrního komínu; hrot A jeho hromosvodu byl zaměřen ze dvou bodů M, N (jejichž spojnice je vodorovná a prochází středem B kruhové základny komína) pod úhly $\psi = 57°15'$ a $\varphi = 46°10'$ (při čemž body M a N leží na téže straně komínu); vzdálenost bodů M a N je $d = 13$ m (obr. 87).

17.3. Jaká je výška antenního stožáru (vysílací stanice), jehož pata je nepřístupná? Na vodorovné rovině jdoucí patou B jsou zvoleny body M, N ve vzdálenosti $d = 50$ m od sebe tak, že $\mu = \sphericalangle BMN = 38°25'12''$, $\nu = \sphericalangle BNM = 43°40'30''$; dále byl zaměřen z bodu M hrot A stožáru pod úhlem $\varphi = 47°56'24''$ (obr. 88).

17.4. Jaká je nepřístupná vzdálenost dvou přístupných míst (bodů) A, B, jestliže byly změřeny jejich vzdálenosti $\overline{AC} = 123{,}5$ m, $\overline{BC} = 163{,}7$ m od dalšího bodu C a změřen úhel $\gamma = \sphericalangle ACB = 67°42'12''$ (obr. 89)?

17.5. Určete vzdálenost dvou bodů A, B v terénu, z nichž B je nepřístupný, jestliže byla změřena vzdálenost $\overline{AC} = 35$ m dalšího bodu C od bodu A a určeny úhly $\sphericalangle CAB = 117°45'30''$, $\sphericalangle ACB = 43°50'24''$ (obr. 90).

17.6. Vypočtěte vzdálenost dvou nepřístupných bodů A, B, jestliže byla změřena základna $\overline{CD} = 100$ m a určeny úhly $\sphericalangle ACD = 47°25'$, $\sphericalangle BCD = 105°50'$, $\sphericalangle ADC = 115°46'$, $\sphericalangle BDC = 63°25'$ (obr. 91).

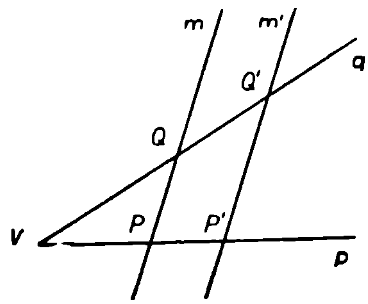
17.7. Najděte vzdálenost dvou nepřístupných bodů A, B, jestliže byla změřena základna $\overline{CD} = 160$ m (přitom však úsečka $\overline{CD}$ protíná úsečku $\overline{AB}$ — zakreslete si obrázek) a jsou-li úhly $\sphericalangle ACD = 42°15'$, $\sphericalangle BCD = 50°12'$, $\sphericalangle ADC = 37°55'$, $\sphericalangle BDC = 63°29'$.

17.8. Vyhledejte vzdálenost dvou přístupných bodů A, B, znáte-li základnu $\overline{CD} = 1863{,}5$ m a úhly $\sphericalangle BAC = 25°28'36''$, $\sphericalangle BAD = 139°6'50''$, $\sphericalangle ABC = 132°32'20''$, $\sphericalangle ABD = 31°50'42''$ (obr. 92).

17.9. Najděte vzdálenost trigonometrického bodu A od tří trigonometrických bodů B, C, D, je-li $\overline{BC} = 2100{,}5$ m, $\overline{CD} = 1875$ m, $\sphericalangle BCD = 114°22'45''$, $\sphericalangle BAC = 75°50'12''$, $\sphericalangle CAD = 49°43'30''$ (obr. 93).

18. DODATEK: DŮKAZY VĚT O PODOBNOSTI TROJÚHELNÍKŮ

Při důkazech se budeme opírat o jednu větu z planimetrie, jež jedná o čtyřech přímkách p, q, m, m' (obr. 94), z nichž dvě (označené p, q) jsou různoběžné a druhé dvě (přímky m, m') neprocházejí průsečíkem V přímek p, q a nejsou ani s jednou z nich rovnoběžné. Tedy m, m' protínají přímky p, q v bodech P, Q, P', Q', při čemž žádný z těchto bodů nesplývá s V. Zmíněné větě se říká *věta o úměrnosti úseček* a zní takto:



Obr. 94.

VĚTA 18.1. Jsou-li přímky m, m' rovnoběžné, pak úseky $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ a $\overline{VP'}$, $\overline{VQ'}$, jež tyto rovnoběžky vytínají na různoběžkách p, q, jsou úměrné, t. j. platí

$$\overline{VP} : \overline{VQ} = \overline{VP'} : \overline{VQ'}. \qquad (18.1)$$

Poznámka. Větu přejímáme bez důkazu z planimetrie, kde se často uvádí v jednodušším znění: rovnoběžky vytínají na různoběžkách úseky úměrné.

Dokážeme, že platí i obrácená věta:

VĚTA 18.2. Jestliže pro úseky $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ a $\overline{VP'}$, $\overline{VQ'}$, které dvě přímky m, m' vytínají na různoběžkách p, q, platí úměra (18.1), t. j.

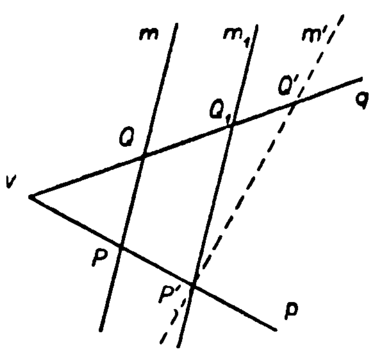
$$\overline{VP} : \overline{VQ} = \overline{VP'} : \overline{VQ'}, \qquad (18.2)$$

pak přímky m, m' jsou rovnoběžné.

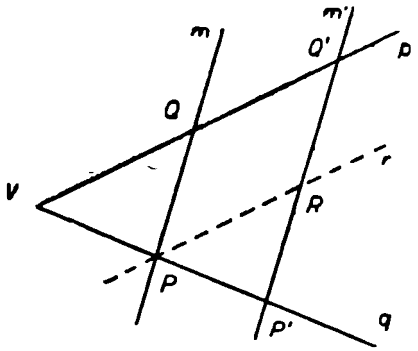
Důkaz. Zase se jedná o čtyři přímky p, q, m, m'; teď však předpokládáme, že pro úseky $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ atd. platí úměra (18.2) a chceme dokázat, že přímky m, m' jsou rovnoběžné. Veďme bodem P' (obr. 95) přímku m_1 rovnoběžnou s m. Ta protne přímku q v bodě Q_1. Různoběžky p, q jsou proťaty dvěma rovnoběžkami m a m_1, můžeme tedy užít věty 18.1; podle ní platí úměra

$$\overline{VP} : \overline{VQ} = \overline{VP'} \quad \overline{VQ_1}. \tag{18.3}$$

Úměry (18.2) a (18.3) mají však prvé tři členy stejné, tedy i čtvrté členy se musí sobě rovnat, t. j. $\overline{VQ'} = \overline{VQ_1}$, a proto $Q' = Q_1$. To však říká, že přímka m' je totožná s m_1 (neboť má s přímkou m_1 dva body P' a Q_1 společné) a tedy je skutečně $m' \parallel m$, jak jsme měli dokázat.



Obr. 95.



Obr. 96.

Nyní již lehko dokážeme větu:

VĚTA 18.3. Jestliže přímky m, m' jsou rovnoběžné, pak úseky vyťaté těmito rovnoběžkami na přímkách p, q jsou úměrné úsekům vyťatým přímkami p, q na rovnoběžkách m, m', t. j. platí úměry

$$\overline{VP} : \overline{VP'} = \overline{PQ} : \overline{P'Q'}, \ \overline{VQ} : \overline{VQ'} = \overline{PQ} : \overline{P'Q'}. \tag{18.4}$$

Důkaz. Veďme bodem P rovnoběžku r s přímkou p (obr. 96). Ta protíná m' v bodě R. Z rovnoběžníka $PRQ'Q$ plyne

$$\overline{RQ'} = \overline{PQ}. \tag{18.5}$$

Uvažujme nyní různoběžky q, m' proťaté rovnoběžkami p, r; můžeme užít věty 18.1 (máme teď však jiné označení), podle které tedy platí $\overline{P'V} : \overline{P'P} = \overline{P'Q'} : \overline{P'R}$, t. j.

$\overline{VP'} : \overline{PP'} = \overline{P'Q'} : \overline{P'R}$. Tuto úměru můžeme upravit na úměru $\overline{VP'} : (\overline{VP'} - \overline{PP'}) = \overline{P'Q'} : (\overline{P'Q'} - \overline{P'R})$ (užili jsme při tom věty, že z úměry dostaneme zase úměru, když druhý člen dané úměry nahradíme rozdílem prvého a druhého členu a současně čtvrtý člen nahradíme rozdílem třetího a čtvrtého). Protože $\overline{VP'} - \overline{PP'} = \overline{VP}$ a $\overline{P'Q'} - \overline{P'R} = \overline{RQ'} = \overline{PQ}$ [podle (18.5)], můžeme poslední úměru přepsat na $\overline{VP'}\ \overline{VP} = \overline{P'Q'} : \overline{PQ}$; dostaneme tedy (po výměně druhého členu s prvním a současné výměně čtvrtého členu s třetím) právě prvou úměru v (18.4). Druhá úměra plyne již z první a z (18.1) (psané ve tvaru $\overline{VP} : \overline{VP'} = \overline{VQ} : \overline{VQ'}$). Úměry (18.4) se často nahrazují jedinou postupnou úměrou

$$\overline{VP} : \overline{VQ} : \overline{PQ} = \overline{VP'}\ \overline{VQ'} : \overline{P'Q'}. \tag{18.6}$$

Nyní, když jsme si odvodili pomocné věty o úměrnosti úseček, snadno dokážeme věty 2.2 a 2.3 o podobnosti trojúhelníků. Především dokážeme větu (porovnejte s větami 2.2):

VĚTA 18.4. Nechť $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ a $\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{B'C'}$ jsou odpovídající si strany podobných trojúhelníků ABC a $A'B'C'$; pak pro ně platí úměra

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B'C'} \tag{18.7}$$

Důkaz (obr. 97). Protože trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, jsou podle definice podobnosti jejich odpovídající úhly stejně veliké. Naneseme-li na ramena úhlu BAC úsečky $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ a $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$, a to tak, že $\overline{AB''}$ naneseme od vrcholu A na rameno AB a podobně $\overline{AC''}$ od A na rameno AC, pak $\triangle\, AB''C''$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou shodné. Dále je přímka $B''C''$ rovnoběžná s BC, neboť $\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, AB''C''$ a různoběžky AB a AC jsou tedy proťaty dvěma rovnoběžkami BC a $B''C''$; můžeme použít věty 18.3, tedy platí úměra

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AB''} : \overline{AC''} : \overline{B''C''}.$$

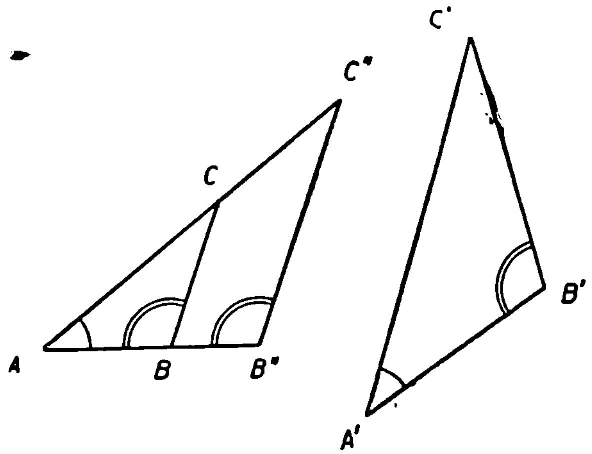
Jelikož však $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ a $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$, plyne odtud dále

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B'C'},$$

což však je právě vztah (18.7), který jsme chtěli dokázat.

Zbývá ještě dokázat větu (porovnejte s větami 2.3):

VĚTA 18.5. Jestliže pro strany $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ a $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$, $\overline{B'C'}$ trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ platí



Obr. 97.

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B'C'}, \tag{18.8}$$

pak trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné.

Důkaz (obr. 97). Máme dány trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ a předpokládáme, že pro jejich strany platí postupná úměra (18.8). Naneseme na rameno AB úhlu BAC od vrcholu A úsečku $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, podobně na AC od A úsečku $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. Protože podle předpokladu (18.8) je $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}$, je také $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AB''} : \overline{AC''}$; můžeme tedy použít věty 18.2, podle níž jsou pak přímky BC a $B''C''$ rovnoběžné. To však znamená, že podle věty 18.3 [přesněji řečeno pode úměry (18.6)] platí

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AB''} : \overline{AC''} : \overline{B''C''}.$$

Protože jsme zvolili $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ a $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$, říká poslední úměra, že platí

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B''C''}.$$

Porovnáme-li nalezenou úměru s (18.8), vidíme, že obě postupné úměry se shodují v prvých pěti členech, musí tedy i poslední členy být sobě rovné, t. j. musí platit $\overline{B'C'} = \overline{B''C''}$. To však říká (vzhledem k tomu, že jsme již volili $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ a $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$, že odpovídající si strany $\triangle\, AB''C''$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou stejně veliké. Z toho však již plyne naše tvrzení, neboť $\triangle\, AB''C''$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou shodné a je tedy postupně $\sphericalangle\, BAC = \sphericalangle\, B''AC'' = \sphericalangle\, B'A'C'$, $\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, AB''C'' = \sphericalangle\, A'B'C'$, což říká, že odpovídající si úhly v $\triangle\, ABC$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou stejně veliké, t. j. oba trojúhelníky jsou podobné, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Pro podobnost trojúhelníků se v planimetrii odvozují ještě další věty, ale my jsme potřebovali dokázat jen věty 2.2 a 2.3, neboť jen těchto vět jsme používali při zavedení goniometrických funkcí.

19. ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ ZE CVIČENÍ

Poznámka. Výsledky jsou uváděny jen zaokrouhleně na přiměřený počet desetinných míst.

1.

1.1. 24°35′48″. **1.2.** $c = 21{,}45$. **1.3.** 20.

2.

2.1. Jsou (položíme-li $\alpha' = \gamma_1$, $\beta' = \alpha_1$, pak $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$). **2.2.** Nejsou. **2.3.** $b' = 7{,}5\ cm$, $c' = 10\ cm$. **2.4.** Je (neboť $7{,}8 : 4{,}2 : 9 = 13 : 7 : 15$).

3.

3.1. Jsou (neboť $\beta = \varphi$). **3.2.** $a' = 25\,cm$, $b' = 60\,cm$. **3.3.** Jsou (neboť $2{,}7 : 12 = 13{,}5 : 60$).

4.

4.1. Sestrojí se pravoúhlý trojúhelník na př. o odvěsnách 1 *cm* a 10 *cm*; úhel proti straně 1 *cm* je hledaný. **4.2.** 2,8 *cm*. **4.3.** 1 *m*.

5.

5.1. Měřením a) 0,47, b) 2,54, v tabulkách a) 0,46631, b) 2,53865. **5.2.** $\text{tg}\beta = \overline{AC} : \overline{BC} = b : a$. **5.3.** $\text{tg}\alpha = 4$, $\text{tg}\beta = \frac{1}{4}$. **5.4.** $\text{tg}\alpha = \frac{12}{5}$. $\text{tg}\beta = \frac{5}{12}$. **5.5.** Úhel α na př. leží při vrcholu A v pravoúhlém $\triangle ABC$, kde a) $a = 5{,}7\,cm$, $b = 10\,cm$, b) $a = 2{,}5\,cm$, $b = 1\,cm$. **5.6.** a) 0,75355, b) 6,31375, c) 0,27419, d) 1,22758, e) 0,44036, f) 1,97397. **5.7.** a) $\alpha = 18°$, b) $\beta = 66°$, c) $\gamma = 29°10'$, d) $\delta = 48°30'$, e) $\varphi = 33°22'$, f) $\psi = 53°8'$, g) $\lambda = 30°58'$, h) $\mu = 66°2'$. **5.8.** 11°19′. **5.9.** 33°41′. **5.10.** 4°17′. **5.11.** 56°19′. **5.12.** 58°. **5.13.** $a = 11{,}2\,cm$. **5.14.** $q = 6{,}5\,cm$. **5.15.** $a = 2{,}5\,cm$.

6.

6.1. Měřením a) 1,4, b) 0,47, v tabulkách a) 1,40195, b) 0,46631. **6.2.** $\text{cotg}\varphi = \overline{PS} : \overline{QS}$, $\text{cotg}\psi = \overline{QS} : \overline{PS}$. **6.3.** $\frac{12}{7}$. **6.4.** a) 2, b) 0,8, c) $\dfrac{1}{0{,}353} \doteq 2{,}83$. **6.5.** a) $\frac{15}{8}$, b) $\frac{2}{7}$, c) $\dfrac{1}{0{,}417} \doteq 2{,}4$. **6.6.** Úhel ω leží při vrcholu P v pravoúhlém $\triangle PQS$, jehož odvěsny $\overline{PS}$ a $\overline{QS}$ na př. jsou a) 3 *cm*, 4 *cm*, b) 9 *cm*, 4 *cm*, c) 16,53 *cm*, 10 *cm*. **6.7.** a) 2,47509, b) 0,24933, c) 2,41421, d) 0,17333, e) 1,14700, f) 0,96457. **6.8.** a) $\alpha = 18°$, b) $\beta = 67°$, c) $\lambda = 19°47'$, d) $\mu = 45°22'$, e) $\varphi = 33°41'$, f) $\psi = 68°12'$. **6.9.** 0,7. **6.10.** 18°26′. **6.11.** 39°48′. **6.12.** $\overline{RT} = 9{,}3\,cm$. **6.13.** 19,9.

7.

7.1. Měřením a) 0,34, b) 0,97, v tabulkách a) 0,34202, b) 0,97437. **7.2.** $\dfrac{b}{c}$. **7.3.** $\overline{MQ} : \overline{MV}$. **7.4.** $\frac{5}{7}$. **7.5.** Úhel α je na př. při vrcholu A pravoúhlého $\triangle ABC$, pro který a) $a = 3\,cm$, $c = 5\,cm$, b) $a = 65{,}3\,mm$, $c = 100\,mm$. **7.6.** a) 0,22495, b) 0,92718, c) 0,38537, d) 0,98986, e) 0,54147, f) 0,72417. **7.7.** a) $\alpha = 13°$, b) $\beta = 68°$, c) $\gamma = 17°27'$, d) $\delta = 48°35'$, e) $\varphi = 22°29'$, f) $\psi = 20°55'$. **7.8.** 40°32′. **7.9.** 6°54′. **7.10.** 10,3 *cm*. **7.11.** 26,7 *cm*. **7.12.** 5,395 *m*. **7.13.** 29,98 $cm \doteq 30\,cm$.

8.

8.1. a) Polovina úhlu 30°, měřením 0,26, v tabulkách 0,25882, b) středový úhel příslušející straně pravidelného pětiúhelníka, měřením 0,95, v tabulkách 0,95106. **8.2.** $\cos\lambda = \frac{\overline{LK}}{\overline{LM}}$, $\cos\mu = \frac{\overline{KM}}{\overline{LM}}$. **8.3.** 0,8. **8.4.** α je úhel při vrcholu A pravoúhlého $\triangle ABC$, kde na př. a) $b = 3\,cm$, $c = 5\,cm$, b) $b = 34{,}5\,mm$, $c = 100\,mm$. **8.5.** a) 0,97437, b) 0,54464, c) 0,71121, d) 0,13629, e) 0,94447, f) 0,34038. **8.6.** a) $\alpha = 38°$, b) $\beta = 81°$, c) $\xi = 18°12'$, d) $\eta = 66°25'$, e) $\zeta = 63°33'$, f) $\omega = 36°52'$. **8.7.** 0,353. **8.8.** 69°5'. **8.9.** 49°28'. **8.10.** 5,95 *cm*. **8.11.** 9,5 *cm*. **8.12.** 78,3 *cm*. **8.13.** 8,65 *cm*.

9.

9.1. a) $\beta = 68°30'$, $a = 36{,}65\,cm$, $b = 93\,cm$, $p = 1705\,cm^2$, b) $\beta = 32°30'$, $a = 15\,cm$, $b = 9{,}55\,cm$, $p = 71{,}8\,cm^2$, c) $\alpha = 70°$, $a = 12\,cm$, $b = 4{,}4\,cm$, $p = 26{,}33\,cm^2$. **9.2.** a) $\beta = 54°30'$, $b = 72{,}5\,cm$, $c = 89\,cm$, $p = 1874\,cm^2$, b) $\beta = 73°20'$, $b = 33{,}8\,mm$, $c = 117{,}9\,mm$, $p = 1912\,mm^2$, c) $\alpha = 40°48'$, $a = 78{,}5\,mm$, $c = 120{,}2\,mm$, $p = 3573\,mm^2$, d) $\beta = 18°5'$, $a = 19{,}3\,cm$, $b = 20{,}3\,cm$, $p = 60{,}8\,cm^2$. **9.3.** a) $\alpha = 40°7'$, $b = 34{,}4\,mm$, $p = 4991\,mm^2$, b) $\alpha = 41°40'$, $a = 5{,}5\,cm$, $p = 17{,}1\,cm^2$. **9.4.** a) $\alpha = 60°1'$, $c = 15\,cm$, $p = 48{,}75\,cm^2$, b) $\alpha = 66°56'$, $c = 70{,}9\,cm$, $p = 907{,}7\,cm^2$. **9.5.** a) $a = 3{,}2\,cm$, $b = 5{,}1\,cm$, $c = 6\,cm$, b) $a = 10{,}3\,cm$, $b = 41{,}3\,cm$, $c = 42{,}6\,cm$. **9.6.** a) $\alpha = 67°42'$, $b = 18{,}7\,cm$, $c = 49{,}3\,cm$, b) $\alpha = 45°35'$, $a = 214{,}3\,mm$, $c = 300\,mm$. **9.7.** a) $a = 6{,}3\,cm$, $b = 7{,}5\,cm$, b) $a = 2{,}52\,dm$, $b = 0{,}79\,dm$. **9.8.** a) $b = 6{,}3\,cm$, $\alpha = 40°37'$, b) $a = 4\,dm$, $\alpha = 17°45'$. **9.9.** a) $b = 10{,}9\,cm$, $p = 31{,}4\,cm^2$, b) $b = 41{,}7\,mm$, $p = 726{,}2\,mm^2$. **9.10.** a) $a = 34{,}4\,mm$, $p = 715{,}9\,mm^2$, b) $a = 11{,}15\,cm$, $p = 85{,}39\,cm^2$. **9.11.** $\alpha = 110°14'$, $p = 2767{,}1\,mm^2$. **9.12.** $\alpha = 36°52'$, $b = 15{,}8\,cm$, $p = 75\,cm^2$. **9.13.** $\alpha = 75°58'$, $a = 104{,}6\,mm$, $p = 3505{,}9\,mm^2$. **9.14.** 16,455 cm^2. **9.15.** 123°38'. **9.16.** 71,9 *mm*, 28,6 *mm*. **9.17.** 54°32'. **9.18.** 602,4 mm^2. **9.19.** 69,7 *mm*. **9.20.** a) $a = 7{,}64\,cm$, $\varrho = 5{,}26\,cm$, $p = 100{,}45\,cm^2$, b) $a = 6{,}18\,cm$, $\varrho = 9{,}51\,cm$, $p = 293{,}9\,cm^2$. **9.21.** a) $r = 5{,}76\,cm$, $\varrho = 5{,}19\,cm$, $p = 80{,}85\,cm^2$, b) $r = 5{,}88\,cm$, $\varrho = 5{,}43\,cm$, $p = 97{,}78\,cm^2$. **9.22.** a) $a = 14{,}53\,cm$, $r = 12{,}36\,cm$, $p = 363{,}27\,cm^2$, b) $a = 3{,}66\,cm$, $r = 4{,}22\,cm$, $p = 48{,}68\,cm^2$. **9.23.** a) $a = 7{,}62\,cm$, $r = 6{,}48\,cm$, $\varrho = 5{,}25\,cm$, b) $a = 4{,}55\,cm$, $r = 5{,}95\,cm$, $\varrho = 5{,}49\,cm$. **9.24.** 30,44 *cm*. **9.25.** 50,04 *cm*. **9.26.** 38°38'. **9.27.** 3,2 *cm*. **9.28.** a) 54°44', b) 70°32'. **9.29.** $R = 80$ kg, $\omega = 36°27'$. **9.30.** $P_1 = 88{,}566\,kg$, $P_2 = 46{,}433\,kg$. **9.31.** $P_1 = 297{,}65\,kg$, $P_2 = 113{,}91\,kg$. **9.32.** a) 6268 *mm*, b) 6726,5 *mm*. **9.33.** 64 *t*. **9.34.** 18370 m^3. **9.35.** 133,9 m^2.

10.

10.1. a) 9,82761 — 10, 9,86936 — 10, 9,95825 — 10, 10,04175 — 10, b) 9,96878 — 10, 9,56343 — 10, 10,40534 — 10, 9,59466 — 10, c) 9,72732 — 10, 9,92719 — 10, 9,80013 — 10, 10,19987 — 10, d) 9,97583

— 10, 9,51129 — 10, 10,46454 — 10, 9,53546 — 10. **10.2.** a) 33°25′, b) 72°36′, c) 11°20′, d) 46°27′40″, e) 25°7′47″. **10.3.** a) 37°48′, b) 58°22′, c) 71°18″, d) 31°2′43″. **10.4.** a) 27°36′, b) 78°21′, c) 23°18′, d) 58°23′, e) 37°55′32″, f) 54°32′48″, g) 79°34′22″. **10.5.** a) 31°13′, b) 78°13′, c) 68°13′, d) 28°18′10″, e) 47°47′14″, f) 39°24′32″.

11.

11.1. a) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{5}{12}$, b) $\frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{n}$, $\frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$, $\frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{m}$. **11.2.** a) $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, b) $\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}$, $\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}$, $\frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}}$. **11.3.** a) $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\sin\varphi = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, b) $\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}$, $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}$, $\cos\psi = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$.

13.

13.1. a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{4}{3}$ nebo $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = +\frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg}\alpha = +\frac{4}{3}$, b) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ nebo $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. **13.2.** a) (90°, 180°), b) (180°, 270°), c) (270°, 360°). **13.3.** a) 0,76604, b) — 0,32557, c) — 2,99743, d) — 1,82026, e) — 0,54293, f) 0,69779, g) 2,87700, h) — 0,57735. **13.4.** a) 0,42262, b) — 0,5, c) 1,22758, d) 1. **13.5.** a) — 0,5, b) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711$, c) $-\sqrt{3} = -0{,}86603$. **13.6.** a) $\alpha_1 = 40°47'$, $\alpha_2 = 139°13'$, b) $\alpha_1 = 226°34'$, $\alpha_2 = 313°26'$. **13.7.** a) $\alpha_1 = 54°43'$, $\alpha_2 = 305°17'$, b) $\alpha_1 = 150°42'$, $\alpha_2 = 209°18'$. **13.8.** a) $\alpha_1 = 42°20'$, $\alpha_2 = 222°20'$, b) $\alpha_1 = 126°30'$, $\alpha_2 = 306°30'$. **13.9.** a) $\alpha_1 = 38°40'$, $\alpha_2 = 218°40'$, b) $\alpha_1 = 128°40'$, $\alpha_2 = 308°40'$.

14.

14.1. $-\frac{69}{221}$, $\frac{219}{221}$. **14.2.** 3, $\frac{1}{3}$. **14.3.** $\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \doteq 0{,}2588192$, $\cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \doteq 0{,}9659258$, $\operatorname{tg} 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \doteq 0{,}2679492$.
14.4. $\frac{840}{841}$, $\frac{41}{841}$, $\frac{840}{41}$, $\frac{41}{840}$. **14.5.** a) $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, b) $4\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$. **14.6.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{\frac{5}{3}}$. **14.7.** a) $\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$, b) $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45°)$. **14.8.** $-\operatorname{cotg}\alpha$. **14.9.** a) $\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\gamma$, b) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta\,\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$.

16.

16.1. a) $\alpha = 73°$, $b = 3{,}9\ cm$, $c = 4{,}5\ cm$, $p = 16{,}6\ cm^2$, b) $\beta = 27°10'$, $a = 244{,}6\ mm$, $c = 164{,}8\ mm$, $p = 92\ cm^2$. **16.2.** a) $c = 36{,}5\ mm$, $\alpha = 99°4'$, $\beta = 52°11'$, $p = 1082{,}2\ mm^2$, b) $b = 332{,}7\ mm$, $\alpha = 34°16'$, $\gamma = 27°3'35''$, $p = 16156\ mm^2$. **16.3.** a) $\alpha = 74°42'22''$, $\beta = 54°47'28''$, $\gamma = 50°30'14''$ (tedy chyba 4″), $p = 23{,}6\ cm^2$, b) $\alpha = 85°18'4''$, $\beta = 43°56'$, $\gamma = 50°45'56''$, $p = 2372{,}2\ cm^2$. **16.4.** a) $\beta = 28°33'44''$, $\gamma = 108°56'16''$, $c = 91\ mm$, $p = 1414{,}1\ mm^2$, b) $\alpha = 78°1'41''$, $\beta = 39°42'34''$, $a = 699\ mm$, $p = 1412{,}1\ cm^2$. **16.5.** a) 1. *řešení*: $\gamma_1 = 55°40'20''$, $\alpha_1 = 90°59'40''$, $a_1 = 31{,}8\ cm$, $p_1 = 230{,}09\ cm^2$, 2. *řešení*: $\gamma_2 = 124°19'40''$, $\alpha_2 = 26°20'20''$, $a_2 = 14{,}13$ cm, $p_2 = 102{,}1\ cm^2$, b) neexistuje (neboť $a = 66{,}8 < 69{,}3 = b \sin\alpha$). **16.6.** $r = 4{,}14\ cm$, $\varrho = 1{,}93\ cm$. **16.7.** $a = 65{,}44\ cm$, $b = 46{,}67$ cm, $c = 33{,}77\ cm$. **16.8.** 72,7 *mm*, 39 *mm*. **16.9.** $b = 26{,}75\ cm$, $r_1 = 23{,}09\ cm$, $r_2 = 26{,}91\ cm$, $u_1 = 43{,}20\ cm$, $u_2 = 49{,}02\ cm$. **16.10.** $R = 431{,}7$ kg, $\sphericalangle PR = 63°59'52''$, $\sphericalangle QR = 48°30'8''$. **16.11.** $P = 179{,}3\ kg$, $Q = 146{,}4\ kg$. **16.12.** $\sphericalangle RP = 36°20'10''$, $\sphericalangle RQ = 62°43'12''$.

17.

17.1. 15 *m*. **17.2.** 41 *m*. **17.3.** 38,6 *m*. **17.4.** 163,4 *m*. **17.5.** 76,8 *m*. **17.6.** 412,9 *m*. **17.7.** 189 *m*. **17.8.** 412,1 *m*. **17.9.** $\overline{AB} = 1330{,}7\ m$, $\overline{AC} = 1983{,}1\ m$, $\overline{AD} = 2389{,}5\ m$.

20. VZORCE ROVINNÉ TRIGONOMETRIE

Poznámka. V tomto přehledu jsou uvedeny jen nejpotřebnější vzorce. Vzorce uvedené v závorkách nebyly v textu odvozovány. Místo „trigonometrická funkce“ budeme stručně říkat „funkce“.

A. GONIOMETRIE

1. *Definiční vzorce goniometrických funkcí:*

a) ostrého úhlu (obr. 98):

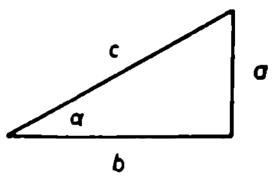
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a},\ \sec\alpha = \frac{c}{b},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a};$$

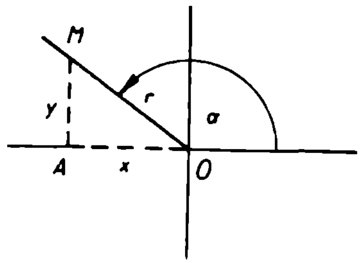
b) obecného úhlu (obr. 99):

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y},\ \sec\alpha = \frac{r}{x},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y}.$$



Obr. 98.



Obr. 99.

2. *Základní vztahy mezi funkcemi:*

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = 1,\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

3. *Vyjádření funkce jinou funkcí:*

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha},\quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha}},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,\alpha},$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, \quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}, \quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

4. *Hodnoty funkcí pro* 0°, 30°, 45°, 60°, 90°:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

5. *Hodnoty funkcí pro* 0°, 90°, 180°, 270°, 360°:

	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tg	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
cotg	$+\infty$	0	$\mp\infty$	0	$-\infty$

6. *Znaménka hodnot funkcí v jednotlivých kvadrantech*:

	I.	II.	III.	IV.
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
cotg	+	—	+	—

7. *Vztahy mezi funkcemi*

a) (doplňkových) úhlů α a $90° - \alpha$:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha;$$

b) úhlů α a $90° + \alpha$:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(90° + \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(90° + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$$

c) (výplňkových) úhlů α a $180° - \alpha$:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(180° - \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha;$$

d) úhlů α a $180° + \alpha$:

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha.$$
$$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha. \quad \mathrm{cotg}(180° + \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha;$$

e) úhlů α a $270° - \alpha$:

$$(\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(270° - \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(270° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha);$$

f) úhlů α a $270° + \alpha$:

$$(\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(270° + \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(270° + \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(270° + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha);$$

g) úhlů α a $-\alpha$:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha, \quad \mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha;$$

8. *Periodičnost goniometrických funkcí:*

$$\sin(n\,.\,360^\circ + \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(n\,.\,360^\circ + \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(n\,.\,180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha, \quad \mathrm{cotg}(n\,.\,180^\circ + \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha,$$

n celé číslo;

9. *Funkce součtu a rozdílu úhlů α, β:*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},$$
$$\left(\mathrm{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{cotg}\alpha\,\mathrm{cotg}\beta \mp 1}{\mathrm{cotg}\beta \pm \mathrm{cotg}\alpha}\right).$$

10. *Funkce dvojnásobného úhlu 2α vyjádřené funkcemi úhlu α:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \left(\mathrm{cotg}2\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{cotg}\alpha}\right).$$

11. *Další vztahy mezi funkcemi úhlů 2α a α* (plynoucí ze vzorce $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$):

$$(\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$
$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha).$$

12. *Funkce úhlu α vyjádřené funkcemi polovičního úhlu $\frac{1}{2}\alpha$* (důsledek vzorců 10):

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos\alpha = \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}, \quad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2\,\mathrm{cotg}\frac{1}{2}\alpha}.$$

13. *Další vztahy mezi funkcemi úhlů α a $\frac{1}{2}\alpha$* (důsledek vzorců 11):

$$\cos\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - 1, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

14. *Funkce polovičního úhlu $\frac{1}{2}\alpha$ vyjádřené funkcemi úhlu α:*

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right).$$

15. *Funkce úhlu α vyjádřené funkcemi úhlu 2α* (důsledek vzorců 14):

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}}.$$

16. *Součet a rozdíl funkcí úhlů α a β vyjádřený součinem nebo podílem funkcí:*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\left(\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\right.$$
$$\left.\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\right).$$

17. *Součet funkcí tří úhlů α, β, γ, je-li $\alpha+\beta+\gamma = 180°$:*

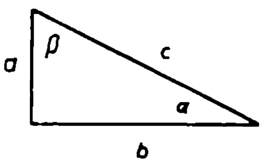
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma + 1),$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

B. TRIGONOMETRIE

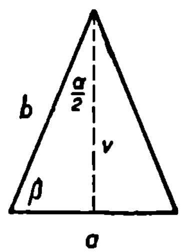
α) *Pravoúhlý trojúhelník* (obr. 100):

$$a = c \sin\alpha, a = c \cos\beta, a = b \operatorname{tg}\alpha, a = b \operatorname{cotg}\beta, a = \sqrt{c^2 - b^2},$$
$$b = c \cos\alpha, b = c \sin\beta, b = a \operatorname{cotg}\alpha, b = a \operatorname{tg}\beta, b = \sqrt{c^2 - a^2},$$
$$c = \frac{a}{\sin\alpha}, c = \frac{a}{\cos\beta}, c = \frac{b}{\cos\alpha}, c = \frac{b}{\sin\beta}, c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

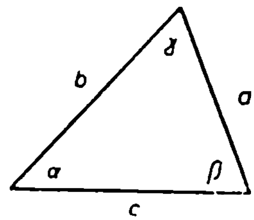
$$p = \tfrac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha, p = \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\alpha, p = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{cotg}\alpha,$$
$$p = \tfrac{1}{4}c^2 \sin 2\beta, p = \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{cotg}\beta, p = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta.$$



Obr. 100.



Obr. 101.



Obr. 102.

β) *Rovnoramenný trojúhelník* (obr. 101):

$$a = 2b \sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad a = 2b \cos\beta,$$

$$b = \frac{a}{2 \sin\frac{1}{2}\alpha}, \quad b = \frac{a}{2 \cos\beta},$$

$$v = \tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha, v = \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}\beta, v = b \cos\tfrac{1}{2}\alpha, v = b \sin\beta,$$
$$p = \tfrac{1}{4}a^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha, p = \tfrac{1}{4}a^2 \operatorname{tg}\beta, p = \tfrac{1}{2}b^2 \sin\alpha, p = \tfrac{1}{2}b^2 \sin 2\beta.$$

γ) *Obecný trojúhelník* (obr. 102):

1. *Sinová věta*:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

2. *Kosinová* (Carnotova) *věta*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

3. *Tangentová* (Neperova) *věta*:

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$
$$(b + c) : (b - c) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$
$$(c + a) : (c - a) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha).$$

4. *Mollweidovy vzorce* (Cagnoliho rovnice):

$$(a + b) : c = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(a - b) : c = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) : \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(b + c) : a = \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) : \sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$(b - c) : a = \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) : \cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$(c + a) : b = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \sin\tfrac{1}{2}\beta,$$
$$(c - a) : b = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \cos\tfrac{1}{2}\beta.$$

5. *Vzorce pro poloviční úhly trojúhelníka*:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$
$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

6. *Výšky trojúhelníka*:

$$v_a = b \sin\gamma,\quad v_a = c \sin\beta,$$
$$v_b = c \sin\alpha,\quad v_b = a \sin\gamma,$$
$$v_c = a \sin\beta,\quad v_c = b \sin\alpha.$$

7. *Poloměr ϱ kružnice trojúhelníku vepsané*:

$$\varrho = \frac{p}{s},$$

$$\varrho = (s-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha,\ \varrho = (s-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta,\ \varrho = (s-c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(\varrho = s \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma),$$
$$\varrho = \frac{a \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)},\ \varrho = \frac{b \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)},\ \varrho = \frac{c \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$
$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

8. *Poloměr r kružnice trojúhelníku opsané:*

$$r = \frac{abc}{4p},$$

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha},\ r = \frac{b}{2\sin\beta},\ r = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

9. *Plošný obsah p trojúhelníka*:

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \text{(Heronův vzorec)},$$
$$p = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma,\ p = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta,\ p = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

$$p = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)},\ p = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)},\ p = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$