Matematická indukce

Výsledky cvičení

In: Rudolf Výborný (author): Matematická indukce. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1963. pp. 58–61.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404199

10. VÝSLEDKY K CVIČENÍM

●

1. Úvod

1. n^2. 2. $n(n+1)$. 3. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

4. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. 5. $\frac{n}{2n+1}$. 6. $\frac{n}{4n+1}$.

7. Pro $n = 1$ je $5^{n+1} + 6^{2n-1} = 31$; $5^{(n+1)+1} + 6^{2(n+1)-1} = 5(5^{n+1} + 6^{2n-1}) + 31 \cdot 6^{2n-1}$.

3. Jiné formulace

2. Pro $n = 1, 2$ a pro $n \geqq 4$. 4. Existence čísel s a $a_0, a_1, \ldots, a_s$: Pro $n = 1$ je $s = 0$ a $a_0 = 1$. Závěr z n na $n + 1$: $n + 1 = a_s 10^s + \ldots + a_0 + 1$. Je-li $a_0 + 1 < 10$ není co dokazovat, je-li $a_0 + 1 = 10$ jsou dvě možnosti: α) $a_i + 1 = 10$ pro $i = 0, 1, \ldots, s$; β) existuje $k \leqq s$ tak, že $a_i + 1 = 10$ pro $i < k$ a $a_k + 1 < 10$. V případě α) $n + 1 = 10^{s+1}$, v případě β) $n + 1 = a_s 10^s + a_{s-1} 10^{s-1} + \ldots + (a_k + 1) 10^k$. Existence je dokázána. Jednoznačnost podobně jako v příkl. 2. Viz ještě cvič. 19. 6. $137 = 2^7 + 2^3 + 1$, stručně 10001001. 13. a) $q(x) = x^4 - x^3 + x^2$, $r(x) = 5$; b) $q(x) = x$, $r(x) = 2x^3 - x$. 14. Nechť existují q_1, r_1 a q_2, r_2. Potom $r_1 - r_2 = d(q_2 - q_1)$. Kdyby $q_2 - q_1$ nebyl nulový polynom,

byl by v této rovnosti mnohočlen na pravé straně vyššího stupně než mnohočlen na levé straně. Je tedy $q_1 = q_2$ a tím i $r_1 = r_2$. **15**. $p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$. $r(x)$ je buď nula nebo mnohočlen nultého stupně. V každém případě je $r(x) = c$, kde c je číslo. Tedy $p(x) = = (x-a)\, q(x) + c$. Dosazením $x = a$ je $p(a) = c$, čili $p(x) = = (x - a)\, q(x) + p(a)$. **17**. α) 2, 3, -3. β) 1, -1, 2, 3, -3. γ) $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. **19**. $n = 10m + a_0$ a na m lze užít indukčního předpokladu $m = a_s 10^{s-1} + \ldots + a_1$. Dosazením za m do $n = 10\, m + a_0$ dostáváme tvrzení.

4. Příklady z algebry

2. $n = 1$ zřejmé. Označme $A_n = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, $B_n = = \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}$. Ze známé nerovnosti $2xy \leqq x^2 + y^2$ plyne $2a_{n+1}\, b_{n+1}\, A_n\, B_n \leqq b_{n+1}^2\, A_n^2 + a_{n+1}\, B_n^2$. Jest $(a_1 b_1 + \ldots + a_{n+1}\, b_{n+1})^2 = (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 + + 2a_{n+1}\, b_{n+1}(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) + a_{n+1}^2\, b_{n+1}^2 \leqq A_n^2 B_n^2 + + 2a_{n+1}\, b_{n+1}\, A_n B_n + a^2_{n+1}\, b^2_{n+1} \leqq A_n^2\, B_n^2 + b_{n+1}^2\, A_n^2 + + a_{n+1}^2\, B_n^2 + a_{n+1}^2\, b_{n+1}^2 = (A_n^2 + a_{n+1}^2)\,(B_n^2 + b_{n+1}^2)$.

3. $\dfrac{a_1}{g} + \dfrac{a_2}{g} + \ldots + \dfrac{a_n}{g} \geq n$ čili $\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq g$.

4. Nejsou-li si všechna x_i rovna, platí v (5) ostrá nerovnost.

5. Je-li $g = 0$ musí zřejmě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Je-li $g > 0$, je $\dfrac{a_1}{g} + \dfrac{a_2}{g} + \ldots + \dfrac{a_n}{g} = n$ a $\dfrac{a_1}{g} \cdot \dfrac{a_2}{g} \ldots \dfrac{a_n}{g} = 1$, z toho $\dfrac{a_1}{g} = \dfrac{a_2}{g} = \ldots = \dfrac{a_n}{g} = 1$, čili všechna a_i jsou stejná.

6. $s = 0$: pro $k = 1$ zřejmé; $2^k\, x = a_1 + \ldots + a_{2k}$,

$2^k y = a_{2k+1} + \ldots + a_{2^k+1}$, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x.y}$;

$s \neq 0$: doplníme počet členů na 2^k,

$(2^k - s)\, a = a_1 + \ldots + a_{2^k - s}$, $g = \sqrt[2^k - s]{a_1 \ldots a_{2^k - s}}$,

$\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k - s} + sa}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_{2^k - s} a^s}$, z toho plyne $a \geq g$.

9. Čtverec o straně 6. **11.** Označme x poloměr podstavy, y výšku. Potom $y = 2\sqrt{6 - x^2}$. $V = 2\pi x^2 \sqrt{6 - x^2}$. Objem bude největší, když bude největší $z = \frac{x^4}{4}(6 - x^2) = \frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2}(6 - x^2)$. Součin tří čísel $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^2}{2}$ a $6 - x^2$, které mají součet 6, bude největší, jestliže $\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} = 6 - x^2$, z toho $x^2 = 4$, $x = 2$.

12. Buď v výška kužele, r poloměr základny, x poloměr podstavy válce, y výška válce. Z podobnosti trojúhelníků plyne $y = \frac{v}{r}(r - x)$. Objem $V = \frac{\pi v}{r} x^2 (r - x)$. Součin tří čísel $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2}$, $r - x$ (jejichž součet je r) bude největší, jestliže $\frac{x}{2} = \frac{x}{2} = r - x$, čili $x = \frac{2}{3} r$.

5. Indukce v geometrii

2. Nechť n rovin dělí prostor na $n(n-1)+2$ částí. $n+1$-ní rovinu označme π. Rovina π protíná každou z předchozích rovin v přímce a tyto přímky rozdělují π na $2n$ dutých úhlů (příklad 1). Každý z těchto dutých úhlů rozděluje jednu z částí prostoru, na které prvních n rovin dělí prostor, na dvě části. Celkem tedy $n+1$ rovin dělí prostor na $n(n-1)+2+2n=n(n+1)+2$ částí. **4.** Postupujte jako v příkladě 5 a stáhněte úsečku 11 (resp. 22) na bod. **5.** Mějme na přímce $n+1$ úseček $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$. Podle indukčního předpokladu existuje bod, který leží ve všech úsečkách $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Společnou část úseček $u_1, u_2, \ldots, u_n$ označme u. u je buď bod nebo úsečka. Předpokládejme nyní, že u nemá společný bod s u_{n+1}. Potom existuje bod A, který leží mezi u a u_{n+1}. Avšak každá z úseček $u_1, u_2, \ldots, u_n$ obsahuje u a nějaký bod z u_{n+1}, musí tedy obsahovat bod A, tj. A patří do u. Tento spor dokazuje, že u_{n+1} má společný bod s u a tento bod je společný bod všech úseček $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$.

7. Dvojitá indukce

1. Utvořme množinu přirozených čísel M takto: Číslo t patří do M, jestliže $t=k+n$ a $T_{k,n}$ neplatí. Předpokládejme, že M je neprázdná—odvodíme spor. Buď t_0 nejmenší prvek z M, pak existují k_0 a n_0 tak, že $t_0=k_0+n_0$ a T_{k_0,n_0} neplatí. Je $k_0>1, n_0>1$. Je-li nyní $r \leqq k_0$ a $s \leqq n_0$ a alespoň v jedné z těchto nerovností platí ostrá nerovnost je $r+s<t_0$, tedy $T_{r,s}$ platí (podle definice čísla t_0). Podle II platí T_{k_0,n_0} — spor.