2. POKUS O DŮKAZ VĚTY O MATEMATICKÉ INDUKCI

●

V matematice každou novou větu dokazujeme. Dokažme si větu o úplné indukci. Důkaz proveďme sporem. Nechť tedy platí I a II (viz str. 7) a předpokládejme, že T_n není správné pro všechna n. Mezi těmito n existuje jedno nejmenší, to označme n_0. Protože platí T_1, je $n_0 > 1$. Položme $k = n_0 - 1$, potom k je přirozené číslo menší než n_0, a tedy T_k platí. Podle II platí T_{k+1}, tj. T_{n_0}, to však je spor.

Zdálo by se, že se nám důkaz podařil. Ve skutečnosti jsme nedokázali vůbec nic, užili jsme totiž nedokázaného tvrzení, že mezi těmi přirozenými čísly n, pro která T_n neplatí, existuje nejmenší. Takové tvrzení by bylo správné, kdybychom věděli, že každá neprázdná množina*) přirozených čísel má nejmenší prvek. Jakkoliv se zdá tato věta očividná, je přece jen námi nedokázaná.

Snaha po logicky přesném vybudování matematiky vedla k tak zvané axiómatické metodě. Při ní vycházíme z několika málo základních vět — axiómů, které přijmeme bez důkazu a všechny další poučky z těchto základních axiómů (říká se též postulátů) odvozujeme logickou cestou. Na soustavu axiómů klademe dva zásadní požadavky. První je tzv. bezespornost. To znamená, že soustava axiómů musí být taková, aby se z ní nedala odvodit dvě tvrzení, z nichž jedno tvrdí logický opak druhého (např. první tvrzení: číslo 2 je sudé, druhé tvrzení: číslo 2 není sudé). Druhý požadavek spočívá zhruba v tom, že žádáme, aby axiómů bylo co nej-

*) Viz vysvětlivky na konci knihy.

méně. Přesněji, aby se žádný z axiómů nedal odvodit z ostatních. Jestliže tomu tak je, říkáme, že axiómy jsou nezávislé.

Je zcela přirozené, že chceme mít axiómů málo. Čím méně tvrzení přijmeme bez důkazu, tím spíše se vyhneme možnosti přijmout něco nesprávného. Hlavní důvod, proč se snažíme mít axiómů co nejméně, je však zcela jiný.

Představme si, že jsme některé poučky o dělitelnosti celých čísel odvodili z několika základních axiómů. Potom nebudeme musit znova dokazovat tyto poučky pro mnohočleny, postačí když se přesvědčíme, že pro mnohočleny jsou splněny ony základní axiómy*). Přitom ovšem nám záleží na tom, abychom nemusili ověřovat axiómů mnoho, ale právě naopak, aby axiómů bylo co nejméně.

Je-li však axiómů málo a chceme-li budovat teorii exaktně, nevyhneme se zpravidla tomu, že musíme dokázat některé samozřejmé věci. Ostatně to co je samozřejmé (vrátíme-li se k našemu příkladu o dělitelnosti) pro celá čísla, nemusí být samozřejmé pro mnohočleny.

Příkladů, kdy se neoprávněně užilo samozřejmého tvrzení, zná historie matematiky mnoho. Zmiňme se o jednom axiómu, který ve vývoji geometrie sehrál významnou roli.

První axiomatické vybudování geometrie pochází od starořeckého vědce Euklida (viz historickou poznámku na konci knihy). Mezi jeho postuláty byl jeden, který matematiky řádně potrápil. Byl to jeho pátý postulát, tzv. postulát o rovnoběžkách, který zní:**) Daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu rovnoběžku. Vznikla snaha tento axióm z ostatních axiómů***) dokázat a mnohokrát byl

*) Ve škole jste ovšem touto cestou nepostupovali, protože tento způsob výkladu by činil slabším žákům potíže.

**) Euklidův pátý postulát zněl původně jinak, to co následuje, je jeho ekvivalentní formulace.

***) Nemůžeme je zde uvádět.

předložen „důkaz“. Vždy se však ukázalo, že v „důkazu“ je buď chyba anebo (což je vlastně totéž), že bylo užito nějakého „samozřejmého“ tvrzení, které je s pátým postulátem rovnocenné.

A podobné chyby jsme se dopustili i my při důkazu věty o matematické indukci. Ale čeho smíme při důkazu užít? Abychom tuto otázku mohli zodpovědět, musíme si něco povědět o axiomatickém založení teorie přirozených čísel. Soustavu axiómů (která je bezesporná a jejíž axiómy jsou nezávislé), z nichž se dají odvodit*) všechny věty o přirozených číslech, předložil italský matematik G. Peano (viz historickou poznámku na konci knihy) a jedním z těchto axiomů, dokonce jedním z nejdůležitějších je i matematická indukce. Mluvíme proto o principu matematické (úplné) indukce a větu o matematické indukci na str. 7 přijímáme bez důkazu jako axióm.

Dokažme si nyní, že každá neprázdná množina M přirozených čísel má nejmenší prvek. Protože množina M je neprázdná, obsahuje nějaké přirozené číslo n. Vezměme v úvahu všechna přirozená čísla, která patří do M a která jsou nejvýše rovna n. Těch je nejvýše k, kde $k \leqq n$. Kdybychom měli dokázáno, že mezi k přirozenými čísly existuje jedno, které je nejmenší, bylo by vše hotovo. My si však dokážeme ještě o něco více. Mezi k reálnými čísly $a_1, a_2, \ldots, a_k$ existuje jedno, označme ho m, které je nejmenší, tj. takové, že platí $m \leqq a_1, m \leqq a_2, \ldots, m \leqq a_k$. Důkaz provedeme indukcí. Tvrzení je zřejmě správné pro $k = 1$ i pro $k = 2$. Uvažujme nyní čísla $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$. Podle indukčního předpokladu existuje mezi čísly $a_1, \ldots, a_k$ nejmenší, označme je m_1. Ze dvou čísel m_1 a a_{k+1} je jedno nejmenší, to označme m. Zřejmě m je i nejmenší z čísel $a_1, \ldots, a_{k+1}$. Důkaz je proveden.

*) Přitom je ovšem třeba nejen poučky dokazovat, ale i zavádět nové pojmy definicemi.

3. JINÉ FORMULACE

•

V jedné úřadovně státní banky měl pokladník k dispozici jen tříkorunové a pětadvacetikorunové bankovky. Měl velké obavy, že při výplatě některé částky bude musit shánět drobné. Říkal si: „To bude ostuda, naše úřadovna by přece měla mít drobné.“ Měl však štěstí, vždy se mu podařilo patřičnou částku vyplatit. Večer prohlížel, jaké částky během dne vyplácel a zjistil, že vyplácené částky byly vyjádřeny v celých korunách a byly větší než 48. A tak si položil otázku, zda to byla náhoda, že nemusil přiznat, že nemá drobné, nebo zda lze každý počet korun větší než 48 vyplatit jen s pomocí tříkorunových a pětadvacetikorunových bankovek. Udělal si následující tabulku:

Obnos v korunách	Počet tříkorun	Počet pětadvacetikorun
49	8	1
50	0	2
51	17	0
52	9	1
53	1	2
54	18	0
55	10	1

To je jasné, řekl si pokladník, každý obnos v celých korunách větší než 48 lze vyplatit použitím jen tříkorunových a pětadvacetikorunových bankovek. A na nás nyní je, abychom to dokázali.

Je-li n vyplácená částka, má platit rovnice

$$n = 3x + 25y, \tag{1}$$

ve které celá nezáporná čísla x a y označují počet tříkorun, resp. pětadvacetikorun. Abychom se mohli stručněji vyjadřovat, řekneme, že přirozené číslo n je příhodné, jestliže rovnice (1) má řešení x, y v celých nezáporných číslech.

Jde o to dokázat, že každé přirozené číslo n, které je větší než 48 je příhodné. Víme, že číslo 49 je příhodné. Dříve než provedeme závěr z n na $n + 1$, všimneme si pokladníkovy tabulky. K zvýšení vyplácené částky o 1 Kčs se nahradí buď 8 tříkorun jednou pětadvacetikorunou (ze 49 na 50, z 52 na 53, z 54 na 55) nebo se dvě pětadvacetikoruny nahradí 17 tříkorunami (z 50 na 51, z 53 na 54). Nyní jde o to, zda lze jeden z těchto postupů použít ke zvýšení vyplácené částky o 1 Kčs při libovolném přirozeném čísle $n \geqq 49$. Jinými slovy jde o to, zda rovnice

$$n + 1 = 3x + 25y$$

má vždy alespoň jedno řešení v celých nezáporných x a y, které dostaneme z celočíselného nezáporného řešení x_0, y_0 rovnice

$$n = 3x_0 + 25y_0$$

buď podle vzorců

$$x = x_0 - 8,$$
$$y = y_0 + 1,$$

(8 tříkorun nahradíme jednou pětadvacetikorunou) nebo podle vzorců

$$x = x_0 + 17,$$
$$y = y_0 - 2,$$

(dvě pětadvacetikoruny nahradíme sedmnácti tříkorunami).

Po této předběžné úvaze proveďme závěr z n na $n + 1$. Buď tedy n příhodné, tzn. existují celá nezáporná čísla x_0 a y_0 tak, že

$$n = 3x_0 + 25y_0$$

a nechť čísla

$$x = x_0 - 8,$$
$$y = y_0 + 1$$

nejsou*) celočíselné nezáporné řešení rovnice

$$n + 1 = 3x + 25y.$$

Protože x a y je zřejmě celočíselné řešení (stačí dosadit) a $y \geqq 1$, musí $x_0 - 8 < 0$, tj. $x_0 < 8$. Dokážeme nyní, že $x = x_0 + 17, y = y_0 - 2$ je celočíselné nezáporné řešení rovnice $n + 1 = 3x + 25y$. Protože to zřejmě je celočíselné řešení (stačí dosadit) a $x \geqq 17$, stačí dokázat, že $y \geqq 0$, čili $y_0 \geqq 2$. Protože $x_0 < 8$ a $n \geqq 49$ je

$$y_0 = \frac{n - 3x_0}{25} > \frac{49 - 24}{25} = 1.$$

Je tedy $n + 1$ příhodné, je-li $n > 48$ a příhodné. Z toho soudíme, že když 49 je příhodné, že i 50 je příhodné, když 50 je příhodné, tak i 51 atd. Každé přirozené číslo větší než 48 je příhodné.

V posledním příkladě jsme užili matematické indukce, ale v jiné formě než jsme vyslovili v čl. 1. Užili jsme vlastně této věty:

Věta 1. *Buď V_n tvrzení závislé na přirozeném čísle n a nechť platí*
I*. *V_n je správné pro $n = n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo,*
II*. *je-li $n \geqq n_0$ a V_n platí, potom platí i V_{n+1}.*

*) Kdyby byla, není co dokazovat.

Potom platí tvrzení V_n pro všechna přirozená $n \geqq n_0$.

Větu 1 si dokážeme z principu matematické indukce.

Důkaz. Označme znakem T_k tvrzení V_{k+n_0-1}. Zřejmě T_1 platí, neboť $T_1 = V_{n_0}$. Nechť tedy k je přirozené číslo a T_k platí, potom platí V_{k+n_0-1} (neboť $k + n_0 - 1 \geqq \geqq n_0$) a tedy podle předpokladu II* věty platí $V_{k+n_0} = = V_{k+n_0-1}$, tj. T_{k+1}. Podle principu matematické indukce platí T_k pro všechna přirozená k, to však znamená, že platí V_{k+n_0-1} pro všechna přirozená k, neboli V_n pro všechna přirozená $n \geqq n_0$.

Ukažme si ještě dva příklady na větu 1.

Příklad 1. Dokažte, že pro $n \geqq 5$ platí nerovnost

$$2^n > n^2. \tag{2}$$

Užijeme věty 1 ($n_0 = 5$). Nerovnost (2) platí pro $n = 5$ ($32 > 25$). Nechť tedy (2) platí pro přirozené $n \geqq 5$. Z (2) plyne

$$2^{n+1} > 2\,n^2 = n^2 + n^2. \tag{3}$$

Uvažme, že $n - 1 \geqq 4$ a tedy $n^2 - 2n + 1 \geqq 16$ a tedy $n^2 > 2n + 1$. Z toho a z nerovnosti (3) plyne

$$2^{n+1} > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2,$$

c. b. d.

Příklad 2. Věta. Jsou-li n a q přirozená čísla, potom existují celá nezáporná čísla m a r tak, že platí

$$n = mq + r \tag{4}$$

a

$$0 \leqq r < q. \tag{5}$$

Čísla m a r jsou čísly n a q jednoznačně stanovena.

Číslu r se říká nejmenší nezáporný zbytek při dělení čísla n číslem q.

Věta je vám dobře známa z národní školy a budete se možná ptát, proč ji dokazujeme. Uvědomte si však, že věta se vám vžila jen neustálým používáním a že jste si ji nikdy nedokázali.

Důkaz. Nejdříve dokážeme existenci čísel m a r metodou matematické indukce (podle věty 1). Je-li $n < q$, lze vzít $m = 0$ a $r = n$. Je-li $n = q$, lze položit $m = 1$, $r = 0$. Tvrzení je správné pro $n \leqq q$. Buď n přirozené číslo, $n \geqq q$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro n, tj. že platí (4) a (5). Máme dokázat, že existují celá nezáporná čísla m_1, r_1 tak, že $n + 1 = m_1 q + r_1$ a $0 \leqq r_1 < q$. Vyjdeme z rovnice (4); přičteme na obou stranách číslo 1, tím dostaneme

$$n + 1 = mq + r + 1. \tag{6}$$

Je-li $r + 1 < q$, můžeme položit $m = m_1$ a $r_1 = r + 1$ a důkaz je hotov, není-li $r + 1 < q$ je $r + 1 = q$ (neboť $r < q$). Potom však z rovnice (6) dostaneme

$$n + 1 = mq + q = (m + 1)\, q$$

a lze zřejmě vzít $m_1 = m + 1$ a $r_1 = 0$.

Existence je dokázána.

Nyní dokážeme jednoznačnost. Nechť tedy platí

$$n = m_1 q + r_1, \qquad 0 \leqq r_1 < q,$$

a

$$n = m_2 q + r_2, \qquad 0 \leqq r_2 < q.$$

Předpokládejme $m_1 > m_2$. Odečtením rovnic pro n dostaneme:

$$0 = (m_2 - m_1)\, q + r_2 - r_1$$

čili

$$(m_1 - m_2)\, q = r_2 - r_1. \tag{7}$$

Avšak $m_1 - m_2 \geqq 1$, tedy $(m_1 - m_2)\, q \geqq q$; naproti tomu je však $r_2 - r_1 \leqq r_2 < q$, a tedy

$$(m_1 - m_2)\, q \geqq q > r_2 - r_1,$$

a to je spor s rovnicí (7). Předpoklad $m_1 > m_2$ vedl ke sporu. Podobně se ukáže, že i předpoklad $m_2 < m_1$ vede ke sporu. Tedy neplatí ani $m_1 < m_2$ ani $m_2 < m_1$. To znamená, že platí $m_1 = m_2$.
Z rovnosti (7) pak plyne $r_2 = r_1$.

Cvičení

1. Dokažte, že pro $n > 2$ platí $2^n > 2n + 1$.

2*. Pro která n platí $3^n > n^3$?

3. Každý obnos větší než 7 haléřů lze zaplatit jen tříhaléřovými a pětihaléřovými mincemi.

4. ○ Ke každému přirozenému číslu n existuje celé nezáporné číslo s a celá čísla $a_0, a_1, \ldots, a_s$ tak, že

$$n = a_s . 10^s + a_{s-1}\, 10^{s-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0$$

a

$$\begin{array}{lll} 10 > & a_s & \geqq 1, \\ 10 > & a_{s-1} & \geqq 0, \\ 10 > & a_{s-2} & \geqq 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 > & a_0 & \geqq 0. \end{array}$$

Přitom čísla $s, a_0, \ldots, a_s$ jsou číslem n jednoznačně určena. Slovy: Každé přirozené číslo se dá napsat v desítkové soustavě právě jedním způsobem.

5. Ke každému přirozenému číslu n existuje celé nezáporné číslo s a čísla $a_0, \ldots, a_s$, která jsou buď 0 nebo 1 tak, že

$$n = a_s\, 2^s + a_{s-1}\, 2^{s-1} + a_1\, 2 + a_0.$$

(Vyjádření přirozeného čísla v dvojkové soustavě.)

6*. Číslo 137 vyjádřete ve dvojkové soustavě.

7. Dokažte větu. Jsou-li n a q přirozená čísla, $q = 2k$, potom existuje celé nezáporné číslo m a celé číslo r tak, že

$$n = mq + r$$

a

$$-k < r \leqq k.$$

(Návod. Můžete užít buď věty z příkladu 2, nebo provést důkaz indukcí podobně jako to bylo uděláno v příkladě 2.)

8. Dokažte. Každé přirozené liché číslo větší než 2 je tvaru $4k - 1$ nebo $4k + 1$, kde k je přirozené číslo. (Návod. Použijte věty z cvičení 7 pro $q = 4$.)

9. Dokažte: Každé prvočíslo*) větší než 4 je tvaru $6k - 1$ nebo $6k + 1$, kde k je přirozené číslo. (Návod. Použijte věty z cvičení 7 pro $q = 6$ a vyšetřujte různé možnosti pro r.)

10. Ukažte, že neplatí věta obrácená k větě z cvičení 9. (Návod. Položte $k = 4$.)

Nyní si vyslovíme, objasníme a dokážeme větu, která je s principem matematické indukce ekvivalentní. Jinými slovy: dokážeme ji z principu matematické indukce, a dále ukážeme, že z předpokladu, že tato věta platí, vyplývá platnost principu matematické indukce.

Věta 2. *Buď M množina přirozených čísel, která má tyto dvě vlastnosti:*

I′. $1 \in M$.

*) Viz vysvětlující poznámku na konci knihy.

II'. *Jestliže* $n \in M$, *potom* $n + 1 \in M$.
Potom množina M *obsahuje všechna přirozená čísla.*

Objasněme si větu 2. Přirozená čísla si představme (např.) jako kaménky a množinu M jako sáček. Do tohoto sáčku nevidíme, víme však (podle I' a II'), že v něm je kamének znázorňující číslo 1 a jestliže ze sáčku vytáhneme kamének znázorňující číslo n, jsme si jisti, že v sáčku je rovněž kamének znázorňující číslo $n + 1$. Naše věta nám říká, že sáček obsahuje všechny kaménky.

Někdo by se mohl domnívat, že je zbytečné se zabývat větou 2, protože je rovnocenná s principem matematické indukce, a nic nového nám neříká. To by však byl omyl. Mnohdy je k důkazu některé matematické poučky výhodnější užít této věty než principu matematické indukce v původní formě. Jsou však ještě další důvody, proč formulovat větu 2, nemůžeme se však jimi v této elementární knížce zabývat. Uvidíme, že věta 2 se nám bude hodit později při důkazu věty 4.

Důkaz. Použijeme principu matematické indukce. Označme T_n toto tvrzení:

Množina M obsahuje číslo n.

Podle I' je T_1 správné. Z II' vyplývá, že z T_n plyne T_{n+1}. Tedy platí I. a II. z principu matematické indukce. Z toho usuzujeme, že T_n platí pro každé přirozené n, tj. M obsahuje všechna přirozená čísla c. b. d.

Předpokládejme nyní, že věta 2 platí a ukažme, že potom platí věta o matematické indukci. Ponechme označení z důkazu věty 2, tj. T_n je výrok: Množina M obsahuje číslo n. Předpokládejme I a II. Potom $1 \in M$ a dále, platí-li T_n, tj. $n \in M$, potom platí T_{n+1}, tj. $n + 1 \in M$. Čili platí I' a II'. Podle věty 2 obsahuje M všechna přirozená čísla, čili pro každé přirozené n platí $n \in M$, jinými slovy T_n platí pro všechna n.

Příklad 3. Věta. Každé přirozené číslo lze napsat jako $2k$ nebo $2k - 1$, kde k je přirozené číslo.

Důkaz. Do množiny M dejme ta přirozená čísla, která se dají zapsat ve tvaru $2k$ nebo $2k - 1$, kde k je přirozené číslo. Zřejmě $1 \in M$, neboť $1 = 2 . 1 - 1$. Nechť $n \in M$, potom $n = 2k$ nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, čili $n + 1 \in M$; v druhém případě $n + 1 = 2k$, čili $n + 1 \in M$. Podle věty 2 obsahuje M všechna přirozená čísla, c. b. d.

Podobně jako z principu úplné indukce jsme odvodili větu 1, lze z věty 2 snadno odvodit větu malinko obecnější.

Věta 3. *Buď M množina přirozených čísel, taková, že*
I. $k \in M$.
II. *Je-li $n \geqq k$ a $n \in M$, potom $n + 1 \in M$.*
Potom M obsahuje všechna přirozená čísla větší nebo rovná číslu k.

Platnost věty 3 je zřejmá, snadný formální důkaz přenechávám čtenáři. Podobně jako věta 2 byla jen jinou formulací principu úplné indukce, je věta 3 jen jinou formulací věty 1.

Než přistoupíme k další větě, probereme jeden příklad.

Příklad 4. Věta. Každé přirozené číslo $n \geqq 2$ je dělitelné nějakým prvočíslem.

Pokusme se větu dokázat úplnou indukcí (přesněji pomocí věty 1). Věta je správná pro $n = 2$, neboť 2 je prvočíslo. Tedy I* je správné. Buď tvrzení věty správné pro n a pokusme se je dokázat pro $n + 1$. Buď je $n + 1$ prvočíslo, potom není co dokazovat. Nebo je $n + 1$ číslo složené; $n + 1 = r . s$, kde $1 < r < n + 1$, $1 < s < n + 1$. Kdybychom mohli nyní užít indukčního předpokladu pro r nebo pro s, důkaz bychom snadno dokončili (rozmyslete si to!), ale to nemůžeme, neboť nevíme, zda r nebo s je rovno n. Dokonce můžeme s jistotou očekávat, že $r \neq n$ a $s \neq n$. Důkaz se nám tedy nepodařil, ale nyní jistě uznáme, že by se nám hodila tato věta.

Věta 4. *Buď T_n tvrzení závislé na čísle n a nechť*
I. *pro přirozené číslo r platí T_r.*
II. *z platnosti T_k pro všechna čísla k, $r \leq k < n$ vyplývá platnost T_n.*
Potom platí T_n pro všechna přirozená $n \geq r$.

Důkaz. Utvořme si množinu M takto. Číslo $n \in M$, jestliže T_k platí pro všechna přirozená k, $r \leq k < n$. Zřejmě $r + 1 \in M$. Dále z $n \in M$ plyne $n + 1 \in M$. Tedy podle věty 3 obsahuje M všechna přirozená čísla větší nebo rovná $r + 1$, tedy T_n platí pro všechna n, c. b. d.

Důkaz věty z příkladu 4 provedeme nyní pomocí věty 4. Buď T_n tvrzení: Číslo n je dělitelné nějakým prvočíslem. Zřejmě T_2 platí. Nechť platí T_k pro $2 \leqq k < n$, čili předpokládáme, že každé přirozené k, $2 \leqq k < n$ je dělitelné nějakým prvočíslem. Číslo n je buď prvočíslo nebo číslo složené. Je-li prvočíslo, není co dokazovat, je-li složené, je dělitelné nějakým přirozeným číslem s, menším než n. Číslo s je však dělitelné prvočíslem podle indukčního předpokladu, tedy i číslo n je dělitelné tímto prvočíslem. To však znamená, že T_n platí. Tedy podle věty 4 platí T_n pro všechna $n \geqq 2$, čili každé přirozené číslo n větší nebo rovné 2 je dělitelné nějakým prvočíslem.

V příkladě 2 jsme si vyslovili a dokázali větu o dělení čísel se zbytkem, o které jste se učili již na nižším stupni (ovšem bez důkazu). Podobně jako se dají dělit (se zbytkem) přirozená čísla lze dělit mnohočleny*).

Ukažme si nejdříve na číselném příkladě, jak se celý výpočet provádí a pak si teprve dokážeme příslušnou větu.

*) Viz vysvětlující poznámky na konci knihy.

Příklad 5. Má se nalézt částečný podíl a zbytek při dělení mnohočlenu $2x^3 - 6x^2 + 2x + 3$ mnohočlenem $x - 3$.

Výpočet provádíme takto. Podíl členů nejvyšších stupňů bude prvním členem částečného podílu ($2x^3 : x = 2x^2$), tímto členem znásobíme dělitele a odečteme od dělence. Výpočet zapisujeme takto:

$$\begin{array}{rrl}
(2x^3 & -\,6x^2 & +\,2x + 3) : (x - 3) = 2x^2 \\
-2x^3 & \mp\,6x^2 & \\
\hline
0 & 0 &
\end{array}$$

Sepíšeme další členy, celý postup opakujeme, až nakonec zbytek je menšího stupně než dělitel. Postup výpočtu je jasně patrný ze zápisu

$$\begin{array}{rrrl}
(2x^3 & -\,6x^2 & +\,2x + 3) & : (x - 3) = 2x^2 + 2 \\
-2x^3 & \mp\,6x^2 & & \\
\hline
0 & 0 & +\,2x + 3 & \\
 & & -\,2x \mp 6 & \\
\cline{3-3}
 & & 9 &
\end{array}$$

Částečný podíl je $2x^2 + 2$ a zbytek je 9.

Nyní přistupme k větě.

Příklad 6. Věta. Jsou-li $p(x)$ a $d(x)$ mnohočleny s reálnými koeficienty, $d(x) \not\equiv 0$, potom vždy existují mnohočleny $q(x)$ a $r(x)$ tak, že

$$p(x) = d(x)\, q(x) + r(x)$$

a přitom stupeň $r(x)$ je buď menší než stupeň mnohočlenu $d(x)$ nebo je $r(x) = 0$ pro všechna x.

Důkaz provedeme indukcí. Přitom budeme v podstatě dělit (avšak obecně) mnohočlen $p(x)$ mnohočlenem $d(x)$, provedeme však jen první krok dělení a místo dalšího dělení užijeme indukčního předpokladu. Ale teď již k věci.

Důkaz provedeme indukcí podle stupně mnohočlenu p. Nejdříve však musíme vyřídit případ $p(x) \equiv 0$ (neboť nulový mnohočlen nemá žádný stupeň). Všimneme si zvláštního případu $p(x)$ rovno nule. Zde lze položit $q(x) = 0$, $r(x) = 0$ a věta platí.

Nechť tedy $p(x)$ je stupně n, $d(x)$ stupně m a

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0, \; a_n \neq 0,$$
$$d(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0, \; b_m \neq 0.$$

Věta platí, je-li $n < m$, neboť v tom případě lze zvolit $q(x) = 0$, $r(x) = p(x)$. Věta rovněž platí pro $n = m$, neboť v tom případě mnohočlen

$$p(x) - \frac{a_n}{b_m} d(x) \qquad (b_m \neq 0)$$

je buď nulový nebo stupně nižšího než m. Lze tedy položit

$q(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$ a $r(x) = p(x) - \dfrac{a_n}{b_m} d(x)$. (Povšimněte si, že nyní jsme postupovali jako v příkladě 5.) Víme tedy, že věta platí pro všechny polynomy stupně 1, 2, ..., m. Předpokládejme nyní, že věta platí pro všechny polynomy stupně k, kde $m \leqq k < n$ a dokažme její platnost i pro polynomy stupně n. Vezměme mnohočlen

$$p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} d(x).$$

(Postupujeme opět jako v příkladě 5. Od dělence $p(x)$ odčítáme dělitele $d(x)$ znásobeného podílem členů nejvyšších stupňů $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.) To je mnohočlen stupně nižšího než n (nemusí být stupně $n - 1$, protože se mohou, podobně jako v příkladě 5, zrušit i některé další členy, nejenom členy nejvyšších stupňů). Podle indukčního předpokladu existují mnohočleny $\bar{q}(x)$ a $\bar{r}(x)$ tak, že

$$p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} d(x) = d(x)\,\bar{q}(x) + \bar{r}(x) \tag{8}$$

a přitom stupeň $\bar{r}(x)$ je buď menší než stupeň $d(x)$ nebo je $\bar{r}(x) \equiv 0$.
Úpravou rovnice (8) dostaneme

$$p(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \bar{q}(x)\right) d(x) + \bar{r}(x).$$

Nyní je zřejmé: položíme-li

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \bar{q}(x),\; r(x) = \bar{r}(x)$$

je pro tyto mnohočleny splněno tvrzení věty, c. b. d.

Poznámka. Podiskutujme chvíli opět s naším odpůrcem, kterému z počátku není jasné, v čem tkví hlavní význam věty. Pokusíme se mu vysvětlit, že význam věty spočívá v tom, že zaručuje existenci polynomů $q(x)$ a $r(x)$ a on nám hned namítne: Proč by takové polynomy neměly existovat? Trpělivě mu vysvětlíme, že by se měl spíše ptát: Proč by měly existovat? Neboť pro mnohočleny pouze s celočíselnými koeficienty obdobná věta neplatí jak ukazuje následující příklad $p(x) = x + 1$, $d(x) = 5$. Kdyby totiž existovaly polynomy q a r tak, že

$$x + 1 = 5\,q(x) + r(x),$$

a $r(x)$ byl stupně 0 nebo $r(x) \equiv 0$, musel by zřejmě $q(x)$ být stupně prvního $q(x) = a\,x + b$, kde a a b jsou celá čísla. Potom by však $5\,a = 1$ (koeficienty u x si musí být rovny); to však je spor.

Poznámka. Podobně jako v příkladě 2 se dokázalo, že čísla q a r jsou určena jednoznačně, lze dokázat, že polynomy $p(x)$ a $r(x)$ z příkladu 6 jsou jednoznačně určeny polynomy $q(x)$ a $d(x)$ (viz k tomu cvič. 4).

Cvičení

11. Rozmyslete si, že větu 4 lze vyslovit tímto ekvivalentním způsobem: *Buď M množina přirozených čísel taková, že*
I. *přirozené číslo r patří do M,*
II. *jestliže pro všechna přirozená k, $r \leqq k < n$ platí $k \in M$, potom $n \in M$.*
Potom M obsahuje všechna přirozená čísla $n \geqq r$.
12. Každé přirozené číslo je součinem konečného počtu prvočísel. (Návod. Užijte věty 4 a postupujte obdobně jako v příkladě 4.)
13*. Najděte částečný podíl a zbytek při dělení mnohočlenu $p(x)$ mnohočlenem $d(x)$ pro
a) $p(x) = x^5 + x^2 + 5$, $\quad d(x) = x + 1$;
b) $p(x) = x^5 + 2x^3$, $\quad d(x) = x^4 + 1$.
14. ○ Dokažte. Polynomy $q(x)$ a $r(x)$ z příkladu 6 jsou jednoznačně určeny polynomy $p(x)$ a $d(x)$.
15. ○ Je-li a reálné číslo a $p(x)$ polynom s reálnými koeficienty, potom existuje polynom $q(x)$ tak, že platí
$$p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a).$$
(Návod: Užijte příkladu 6 pro $d(x) = x - a$.)
16. Číslo a nazýváme nulovým bodem polynomu $p(x)$ (nebo též řešením algebraické rovnice $p(x) = 0$), jestliže $p(a) = 0$. Dokažte: je-li číslo a nulovým bodem polynomu $p(x)$, potom $p(x)$ je dělitelný dvojčlenem $x - a$. (Návod: Užijte cv. 15.)

17*. Víte-li, že polynom $p(x)$ má nulový bod a, určete všechna řešení rovnice $p(x) = 0$ pro

α) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18, \qquad a = -3;$

β) $p(x) = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18, \qquad a = 2;$

γ) $p(x) = x^3 + 1, \qquad a = -1.$

18. Dokažte úplnou indukcí pro $x \neq 2k\pi$ rovnosti

α) $$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

β) $$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

19. ○ Dokažte znovu (použitím věty 4 a věty z příkladu 2) cvič. 4. (Návod: Vezměte $q = 10$ a užijte indukčního předpokladu pro m.)

4. PŘÍKLADY Z ALGEBRY

●

Protože čtenáři je již princip úplné indukce běžný, nebudu v tomto článku podrobně rozvádět všechny detaily a budu postupovat rychleji.

Příklad 1. V matematice se často používá této tzv. Bernoulliho nerovnosti

$$(1 + x)^n \geqq 1 + n\,x, \qquad (1)$$

která platí pro všechna reálná $x \geqq -1$ a každé přirozené n.

Čtenář znalý tzv. binomické poučky si Bernoulliho nerovnost snadno zapamatuje. Pravá strana této nerovnosti jsou prvé dva členy součtu, který dostaneme výpočtem levé strany podle binomické poučky. Její důkaz provedeme takto: Pro $n = 1$ platí zřejmě rovnost. Nechť tedy (1) platí. Dokážeme, že platí $(1 + x)^{n+1} \geqq 1 + (n + 1)\,x$. Buď je $1 + x = 0$ nebo je $1 + x > 0$. V obou případech smíme násobit nerovnost (1) číslem $1 + x$ a tato nerovnost zůstane správná. Tak dostaneme

$$(1 + x)^{n+1} \geqq (1 + n\,x)\,(1 + x) = 1 + (n + 1)\,x + \\ + n\,x^2 \geqq 1 + (n + 1)\,x.$$

Příklad 2. Je-li $0 < a < b$, potom $0 < a^n < b^n$.

Důkaz. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmě správné. Nerovnost $0 < a^n < b^n$ znásobíme kladným číslem a. Dostaneme $0 < a^{n+1} < a\,b^n$. Nerovnost $a < b$ znásobíme kladným číslem b^n. Dostaneme $a b^n < b^{n+1}$. Celkem tedy máme $0 < a^{n+1} < ab^n < b^{n+1}$, c. b. d.

Příklad 3. Pro reálná kladná čísla $a, b, a \neq b$, platí

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n. \tag{2}$$

Důkaz indukcí. Nerovnost (2) platí zřejmě pro $n = 2$. Předpokládejme $a \neq b$, $a, b > 0$ a dále to, že (2) platí. Znásobme (2) číslem $a + b$ a dostaneme

$$(a + b)^{n+1} < 2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b). \tag{3}$$

Nyní stačí dokázat nerovnost

$$2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b) < 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}). \tag{4}$$

neboť potom

$$(a + b)^{n+1} < 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}),$$

a to je nerovnost (2) s $n + 1$ místo s n.

Nerovnost (4) je však ekvivalentní s nerovnostmi

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(a^{n+1} + b^{n+1}) + 2^{n-1}(ab^n + ba^n) &< \\ &< 2^n(a^{n+1} + b^{n+1}), \\ ab^n + ba^n &< a^{n+1} + b^{n+1}, \\ 0 &< (a^n - b^n)(a - b). \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je však správná, neboť činitelé na pravé straně jsou buď oba kladní, nebo oba záporní. Tedy platí (4), c. b. d.

Příklad 4. Věta. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladná čísla $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, potom $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n$.

Důkaz. Věta je správná pro $n = 1$ (platí rovnost). Nechť tedy platí pro přirozené číslo n. Uvažujeme $n + 1$ kladných čísel $x_1, \ldots, x_{n+1}$ takových, že $x_1 x_2 \ldots x_{n+1} = 1$. Mů-

žeme předpokládat $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n+1}$ (v případě potřeby čísla x_i přečíslujeme). Označme
$y_1 = x_1 x_{n+1}, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$. Čísla y_i $(i = 1, \ldots, n)$ jsou kladná, platí $y_1 \ldots y_n = 1$, tedy podle indukčního předpokladu $y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geqq n$, čili $x_1 x_{n+1} + x_2 + \ldots + x_n \geqq n$. Tuto nerovnost nyní upravme ekvivalentními úpravami

$$x_1 x_{n+1} + x_2 + \ldots + x_n \geqq n,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \geqq n + 1 - 1 + x_1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1}.$$

Avšak

$$(1 - x_1)(x_{n+1} - 1) = x_1 + x_{n+1} - 1 - x_1 x_{n+1},$$

tedy

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \geqq n + 1 + (1 - x_1)(x_{n+1} - 1). \qquad (5)$$

Dokážeme-li $1 - x_1 \geqq 0$, $x_{n+1} - 1 \geqq 0$ čili $x_1 \leqq 1$, $x_{n+1} \geqq 1$; bude závěr z n na $n + 1$ dokončen, neboť součin na pravé straně nerovnosti (5) bude nezáporné číslo. Důkaz nerovnosti $x_1 \leqq 1$ provedeme sporem. Nechť $x_1 > 1$, potom $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \geqq x_1{}^{n+1} > 1$, a to je spor s předpokladem $x_1 x_2 \ldots x_{n+1} = 1$. Podobně se dokáže, že $x_{n+1} \geqq 1$. Věta je dokázána.

Cvičení

1. Věta. Pro dvojmoc součtu $x_1 + \ldots + x_n$ $(n \geqq 2)$ platí $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \ldots + x_2 x_n + \ldots + x_{n-1} x_n)$.
2. ○ Věta. Pro reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

platí vždy nerovnost $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqq$
$\leqq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b^2_n)$.

3. ○ Jsou-li $a_1, \ldots, a_n$ nezáporná čísla, potom čísla

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{a} \quad g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

nazýváme po řadě aritmetickým průměrem čísel $a_1, \ldots, a_n$ a geometrickým průměrem čísel $a_1 \ldots a_n$. Dokažte nerovnost

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

(Návod. Je-li $g = 0$, je věc jasná, pro $g > 0$ položte

$x_1 = \dfrac{a_1}{g}, x_2 = \dfrac{a_2}{g}, \ldots, x_n = \dfrac{a_n}{g}$ a použijte příkladu 4.)

4. ○ V nerovnosti z příkladu 4 nastává rovnost (jestliže ovšem $x_1 \ldots x_n = 1, x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$) jen pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Dokažte!
5. ○ V nerovnosti z cvičení 3 nastává rovnost jen v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Dokažte!
6. ○ Dokažte tvrzení cvičení 3 přímo indukcí. (Návod. Vyjádřete n ve tvaru $n = 2^k - s$, nejdříve dokažte pro $s = 0$ indukcí podle k.)
7. Mezi všemi obdélníky, které mají daný obvod s, existuje jeden, který má největší plošný obsah. Obdélník největšího obsahu je čtverec. (Návod. Užijte nerovnosti z cvičení 3 pro $n = 2$.)
8. Mezi všemi obdélníky daného plošného obsahu P existuje jeden (je to opět čtverec), který má nejmenší obvod.

9*. Ze všech obdélníků vepsaných do kružnice poloměru $r = 3\sqrt{2}$ najděte ten, který má největší obsah.

10. Z cvičení 3 a 5 odvoďte: Součin *n* kladných čísel, jejichž součet se nemění, je největší tehdy, jsou-li si všechna čísla rovna.

11. ○ Mezi všemi válci vepsanými do koule poloměru $\sqrt{6}$ najděte ten, který má největší objem.

12. ○ Do daného kužele vepište válec největšího objemu.

5. UŽITÍ INDUKCE V GEOMETRII

•

Matematická indukce se v geometrii nejvíce používá k důkazům tvrzení o n bodech, n přímkách, k důkazu vět o n–úhelnících, n–stěnech a podobně. Nejlépe celou věc osvětlí příklady.

Příklad 1. Je-li $n \geqq 2$, potom n různých přímek ležících v jedné rovině a procházejících jedním bodem dělí rovinu na $2n$ dutých úhlů.

Důkaz. Dvě různoběžky dělí rovinu na čtyři duté úhly. Nechť tedy n přímek jdoucích jedním bodem dělí rovinu na $2n$ částí. Vezměme $n + 1$ ní přímku jdoucí průsečíkem n předchozích přímek. Tato přímka rozdělí dva z těchto dutých úhlů opět na dvě části, tedy celkem $n + 1$ přímek jdoucích jedním bodem rozdělí rovinu na $2n + 2 = 2(n + 1)$ dutých úhlů, c. b. d.

Příklad 2. Určit součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníka.

Trojúhelník má součet vnitřních úhlů $180° = 2R$. Čtyřúhelník rozdělíme úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka je roven celkovému součtu vnitřních úhlů obou trojúhelníků, tj. $2 . 2R = 4R$. To nás vede k domněnce, že součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníka je $2(n - 2)R$. Tuto hypotézu dokažme nyní indukcí. Víme již, že je správná pro $n = 3$ a 4. Nechť tedy platí pro konvexní n–úhelníky a uvažujme konvexní $n + 1$–úhleník o vrcholech $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.

Úhlopříčka $A_1 A_3$ rozdělí tento $n + 1$–úhelník na trojúhelník $A_1 A_2 A_3$ a n–úhelník $A_1 A_3 A_4 \ldots A_{n+1}$ (kreslete si obrázek!). Součet vnitřních úhlů $n + 1$–úhelníka bude roven součtu vnitřních úhlů trojúhelníka $A_1 A_2 A_3$ a n–úhelníka $A_1 A_3 \ldots A_{n+1}$, tj. $2\,R + 2\,(n - 2)R = 2\,(n - 1)\,R = 2\,(n + 1 - 2)\,R$ c. b. d.

Poznámka. Pro konvexní n–úhelník lze větu o součtu vnitřních úhlů dokázat i jinak (jak? dokažte!); příklad 3 nám posloužil hlavně jako úvod k dalšímu příkladu, o němž dokážeme, že součet vnitřních úhlů libovolného (tedy i nekonvexního) n–úhelníka je $2\,(n - 2)\,R$. Nejdříve si však musíme říci, co je to mnohoúhelník (nekonvexní).

Mějme v rovině dáno n bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v určitém pořadí. (Zvolte si určité n, např. $n = 7$ a kreslete si ke všemu obrázky.) V dalším vždy pořadí bodů bude patrné ze zápisu. Množinu všech bodů, které leží na úsečkách $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, \ldots, A_{n-1} A_n$ nazýváme lomenou čarou, body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jejími vrcholy. Tuto lomenou čáru budeme označovat $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n}$. Za sousední pokládáme vrcholy, které za sebou následují v pořadí, tedy např. vrcholy $A_1 A_2, A_4 A_5$ atp. jsou sousední. Za sousední úsečky považujeme úsečky $A_{k-1} A_k$ a $A_k A_{k+1}$ pro $k = 2, \ldots, n - 1$. Nepatří-li žádný bod lomené čáry do dvou úseček s jedinou výjimkou společného vrcholu dvou sousedních úseček, nazýváme lomenou čáru jednoduchou. Jinými slovy: lomená čára je jednoduchá, jestliže sama sebe neprotíná.

Jestliže úsečka $A_n A_1$ nemá s jednoduchou lomenou čarou $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n}$ žádný společný vnitřní bod, nazýváme lomenou čáru $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n A_1}$ jednoduchou uzavřenou lomenou čarou. U uzavřené lomené čáry považujeme i body A_n a A_1 za sousední. Dá se dokázat*), že jednoduchá uza-

*) Zde to nebudeme provádět.

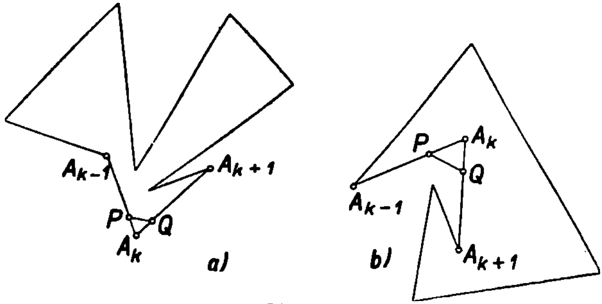
vřená lomená čára rozdělí rovinu na dvě části tak, že každé dva body ležící v téže části lze spojit lomenou čarou, která celá v této části leží. Každá lomená čára spojující dva body ležící v různých částech nutně původní jednoduchou uzavřenou lomenou čáru protne. Pouze jedna z těchto částí obsahuje nějakou přímku roviny. Tu nazveme vnějškem lomené čáry $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n A_1}$. Druhá je vnitřek. Nyní definujeme:

Všechny body, které leží buď ve vnitřku (budeme též někdy říkat, že leží uvnitř) jednoduché uzavřené lomené čáry nebo na ní, tvoří n–úhelník. n–úhelník vytvořený lomenou čarou $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n A_1}$ budeme označovat $P(A_1, \ldots, A_n)$. Místo n–úhelník budeme též někdy říkat mnohoúhelník. Úsečky $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, …, $A_n A_1$ se nazývají strany n–úhelníka.

Zaveďme ještě pro bod A_1 označení A_{n+1} a pro bod A_n označení A_0. Při tomto označení přísluší ke každému vrcholu*) A_k $(k = 1, \ldots, n)$ n–úhelníka dva sousední vrcholy A_{k-1} a A_{k+1}. Mnohoúhelníky, pro něž je některý úhel $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ přímý, vyloučíme v dalším z našich úvah.

Nyní vždy existují dva body P, Q na polopřímkách $A_k A_{k-1}$ a $A_k A_{k+1}$ tak, že žádný vnitřní bod R úsečky PQ neleží na lomené čáře $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n A_1}$. (K tomu stačí zvolit body P, Q dosti blízko k A_k.) Jsou dvě možnosti, buď trojúhelník PA_kQ je částí n–úhelníka $P(A_1, \ldots, A_n)$, nebo není. V prvém případě prohlásíme dutý úhel $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ za vnitřní úhel n–úhelníka $P(A_1, \ldots, A_n)$, v druhém případě prohlásíme za vnitřní úhel mnohoúhelníka $P(A_1, \ldots, A_n)$ vypuklý úhel $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ (viz. obr. 1 a, b).

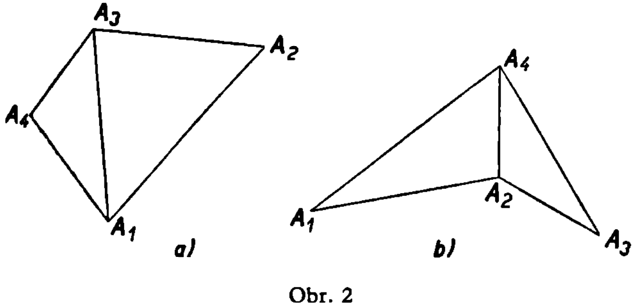
*) Vrchol n-úhelníka definujeme jako vrchol příslušné lomené čáry.



Obr. 1

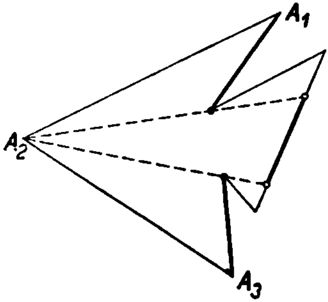
Příklad 3. Součet vnitřních úhlů libovolného n-úhelníka je $2\,(n-2)$ R.

Důkaz provedeme opět matematickou indukcí. Ověření platnosti věty pro $n = 3$ je očividné. Rovněž pro čtyřúhelník $P(A_1, A_2, A_3, A_4)$ lze větu snadno dokázat. Alespoň jedna z úhlopříček rozdělí totiž tento čtyřúhleník na dva trojúhelníky (obr. 2). Potíž nastane při závěru z n na $n + 1$. Tentokrát totiž nevíme, zda úhlopříčka $A_1\,A_3$ oddělí z $n + 1$- úhelníka $P(A_1, \ldots, A_{n+1})$ trojúhelník, neboť

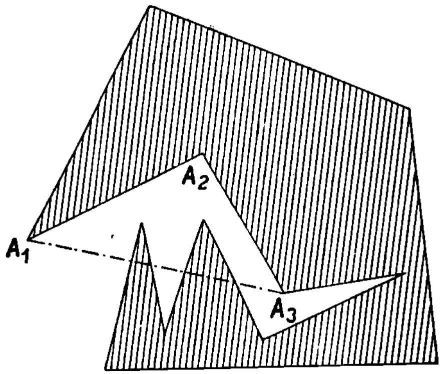


Obr. 2

úsečka $A_1 A_3$ může ležet (ovšem vyjma krajní body) ve vnějšku uvažovaného n-úhelníka nebo může i vícekráte lomenou čáru $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n A_{n+1} A_1}$ protnout (obr. 3). Důkaz proto povedeme takto: Vezmeme $n \geqq 4$ a budeme předpokládat, že součet vnitřních úhlů libovolného k-úhelníka, kde $k < n$, je roven $2\,(k-2)$ R. Vezmeme vnitřní úhel $A_1 A_2 A_3$ n-úhelníka $P\,(A_1, \ldots, A_n)$. Uvažujme nyní polopřímku p s počátečním bodem A_2, která leží uvnitř vnitřního úhlu $A_1 A_2 A_3$. Tato polopřímka protne lomenou čáru $\overline{A_3 \ldots A_n A_1}$, buď X ten průsečík (průsečíků může být více), který je nejblíže bo-



Obr. 4



Obr. 3

du A_2, tj. takový, že celá úsečka A_2X leží v $P(A_1, \ldots, A_n)$. Množinu všech takových bodů X označme $\mathbf{X}$. Jsou dvě možnosti:

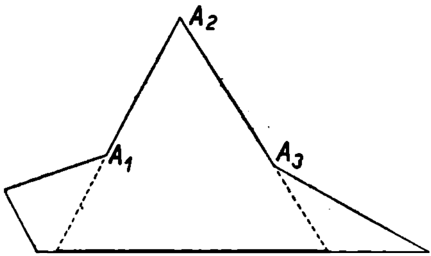
1. Množina $\mathbf{X}$ obsahuje nějaký vrchol A_k mnohoúhelníka $P(A_1, \ldots, A_n)$ (obr. 4).
2. Množina $\mathbf{X}$ neobsahuje žádný vrchol mnohoúhelníka $P(A_1, \ldots, A_n)$ (obr. 5).

1. Úhlopříčka A_kA_2 rozdělí mnohoúhelník $P(A_1, \ldots, A_n)$ na dva mnohoúhelníky. Má-li jeden z těchto mnohoúhelníků k vrcholů, má druhý $n - k + 2$ vrcholů*) (body A_k a A_2 je třeba počítat do obou s-úhelníků). Přitom součet vnitřních úhlů těchto mnohoúhelníků je roven součtu vnitřních úhlů mnohoúhelníka $P(A_1, \ldots, A_n)$. Podle indukčního předpokladu je tento součet

$$2(k-2)\,\mathrm{R} + 2(n - k + 2 - 2)\,\mathrm{R} = 2(n - 2)\,\mathrm{R}.$$

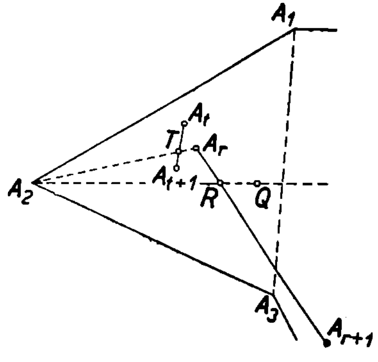
Zbývá vyšetřit druhou možnost.

2. V tomto případě můžeme zřejmě předpokládat, že $\measuredangle A_1A_2A_3$ je dutý. Nejdříve dokážeme, že trojúhelník $\triangle A_1A_2A_3$ je částí $P(A_1, \ldots, A_n)$. Předpokládejme opak; pak existuje bod Q, Q non $\in P(A_1, \ldots, A_n)$,



Obr. 5

*) Je třeba vzít v úvahu, že úhel při vrcholu A_k může být v některém z těchto mnohoúhelníků přímý.



Obr. 6

$Q \in \triangle\ A_1 A_2 A_3$ (viz obr. 6). Označme R ten z průsečíků polopřímky $A_2 Q$ s čarou $\overline{A_3 A_4 \dots A_n A_1}$, který je nejblíže bodu A_2. Takový bod existuje, neboť vzhledem k tomu, že Q non $\in P(A_1, \dots, A_n)$, $Q \in \triangle\ A_1 A_2 A_3$ polopřímka $A_2 Q$ protíná čáru $\overline{A_3 A_4 \dots A_n A_1}$. Zřejmě $R \in \triangle\ A_1 A_2 A_3$. Bod R leží na některé straně $P(A_1, \dots, A_n)$; budiž to strana $A_r A_{r+1}$. Alespoň jeden z bodů $A_r A_{r+1}$ leží v úhlu $A_1 A_2 A_3$; v opačném případě by úsečka $A_r A_{r+1}$ proťala čáru $A_1 A_2 A_3$, a to není možné. Nechť tedy např. bod A_r leží v úhlu $A_1 A_2 A_3$ (viz obr. 6). Podle předpokladu A_r non $\in \mathbf{X}$. Tedy na úsečce $A_2 A_r$ leží nějaký bod $\mathrm{T} \in \mathbf{X}$. Opakujeme dále úvahu pro bod R nyní pro bod T. Po konečném počtu kroků dospějeme k vrcholu, který není „zastíněn" žádnou stranou a patří do $\mathbf{X}$ — spor. Je tedy $\triangle\ A_1 A_2 A_3$ částí $P(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$, a tedy součet vnitřních úhlů tohoto mnohoúhelníka je roven součtu vnitřních úhlů $\triangle\ A_1 A_2 A_3$ a mnohoúhelníka $P(A_1, A_3, \dots, A_n)$, tj. $2\,\mathrm{R} + 2(n-3)\,\mathrm{R} = 2(n-2)\,\mathrm{R}$.

Příklad 4. n přímek v rovině rozdělí tuto rovinu na části, které lze vybarvit černou a bílou barvou tak, že dvě sousední části (tj. takové, které se dotýkají podél úsečky*) jsou různě vybarveny.

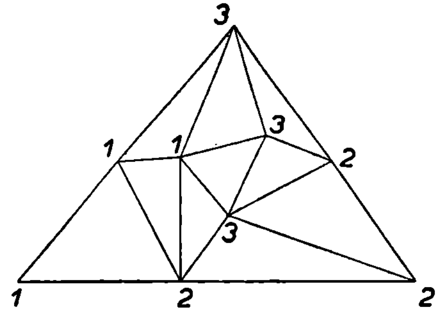
Tvrzení je správné pro jednu přímku; jednu polorovinu vybarvíme bíle a druhou černě. Nechť tvrzení je správné pro n přímek, uvažujme rovinu rozdělenou $n + 1$-ní přímkami. Odstraňme jednu přímku a proveďme správné vybarvení (to lze podle indukčního předpokladu). $n + 1$-ní přímka rozdělí rovinu na dvě poloroviny; v prvé z nich nechme původní vybarvení a v druhé polorovině vyměňme všade bílou barvu za černou a naopak. Tím docílíme správného vybarvení i pro rovinu rozdělenou $n + 1$ přímkami.

Poznámka. Příklad 4 je velmi speciálním případem jedné věty, která hovoří o vybarvení rovinných map. Jde o to, s kolika barvami vystačíme při vybarvování rovinných „map", jestliže sousední „státy" mají být vybarveny různými barvami. Podařilo se dokázat, že vždy lze vystačit s pěti barvami, ale dosud nebyl nalezen příklad takové mapy, kde by se nevystačilo pouze se čtyřmi. Otázka, zda stačí čtyři barvy, je dodnes otevřený problém.

Příklad 5. V rovině buď dán trojúhelník, jehož vrcholy jsou očíslovány čísly 1, 2, 3. Tento trojúhelník je rozdělen na menší trojúhelníky tak, že každé dva z těchto menších trojúhelníků buď nemají společný bod, nebo mají společný vrchol, nebo mají společnou stranu (celou). Všechny vrcholy trojúhelníků rozkladu jsou očíslovány čísly 1, 2, 3, přičemž vrcholy ležící na některé straně původního trojúhelníka jsou očíslovány některým z čísel, kterým jsou označeny krajní body této strany (obr. 7).

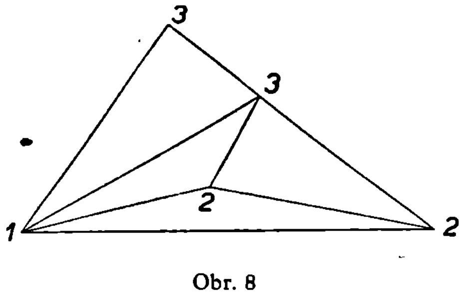
Má se dokázat, že alespoň jeden z malých trojúhelníků je rovněž očíslován čísly 1, 2, 3.

*) resp. polopřímky resp. přímky.



Obr. 7

Důkaz provedeme indukcí podle počtu n malých trojúhelníků. Pro $n = 1, 2$ je tvrzení správné (nakreslete si obrázek). Předpokládejme, že tvrzení je již správné pro všechny rozklady na menší počet trojúhelníků nežli n a uvažujme rozklad na n trojúhelníků. Jsou-li všechny trojúhelníky rozkladu očíslovány různými čísly, není co dokazovat. V opačném případě existuje trojúhelník, jehož dva vrcholy mají táž čísla. např. 3, 3. Strana 3 3 je stranou buď dvou (obr. 7) (jestliže strana leží uvnitř základního trojúhelníka) nebo jednoho trojúhelníka (obr. 8) (jestliže strana



Obr. 8

leží na straně základního trojúhelníka). Stáhneme nyní stranu 3 3 na bod. Tím odstraníme z rozkladu buď dva (v prvém případě) nebo jeden (v druhém případě) trojúhelník, vždy však snížíme počet trojúhelníků rozkladu. Podle indukčního předpokladu existuje nyní trojúhelník, který je očíslován různými čísly. Tedy takový trojúhelník existoval i v rozkladu na n trojúhelníků, c. b. d.

Poznámka. Probraný příklad je velmi zvláštní případ tzv. Spernerovy věty.

Cvičení

1. n rovin procházejících jednou přímkou dělí prostor na $2n$ částí.
2. ○ Dokažte, že n rovin jdoucích jedním bodem, z nichž žádné tři nemají společnou přímku dělí prostor na $n(n-1)+2$ částí.
3. Dokažte, že rovinnou „mapu“, která je tvořena kružnicemi lze vybarvit bílou a černou barvou tak, že každé dva sousední „státy“ jsou různě vybarveny.
4. ○ Úsečka, jejíž koncové body jsou označeny čísly 1, 2 je rozdělena na několik menších úseček tak, že koncové body těchto úseček jsou číslovány čísly 1, 2. Dokažte, že existuje úsečka rozkladu, která je očíslována různými čísly.
5. ○ Na přímce leží n úseček, z nichž každé dvě mají společný bod. Potom existuje bod, který leží ve všech těchto úsečkách.

6. DEFINICE INDUKCÍ

●

Matematické indukce lze užít také k definicím. Tak např. abychom definovali těžnici a těžiště n-úhelníka, postačí, definujeme-li tyto pojmy pro trojúhelník, a určíme*), co rozumíme těžištěm a těžnicemi $n + 1$-úhelníka $P(A_1, \ldots, A_{n+1})$ na základě těžnic a těžišť n-úhelníků $P(A_1, \ldots, A_n)$, $P(A_2, \ldots, A_{n+1})$, $P(A_3, A_n, A_{n+1}, A_1)$ atd. Podobně k tomu, abychom pro každé přirozené n definovali symbol a^n (tj. n-tou mocninu čísla a), postačí, definujeme-li $a^1 = a$ a $a^{n+1} = a \, . \, a^n$. Přitom zpravidla musíme věty o pojmech zavedených indukcí dokazovat pomocí principu úplné indukce.

Příklad 1. Mějme dvě čísla a, d. Položme $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$. Tím je pro každé n definováno číslo a_n. O číslech $a_1, a_2, a_3, \ldots$, takto definovaných, říkáme, že tvoří aritmetickou posloupnost. Dokažme nyní, že platí $a_n = a + (n - 1)\, d$. Pro $n = 1$ to platí. Nechť dokazovaný vzorec platí pro n. Potom $a_{n+1} = a + (n - 1)\, d + d =$ $= a + (n + 1 - 1)\, d$, c. b. d.

Poznámka. Definice indukcí lze užít též v této formě: Věc, kterou zavádíme definicí, definujeme pro $n = 1$ a potom ji definujeme pro přirozené číslo n za předpokladu, že již byla definována pro všechna přirozená $k < n$.

Definici indukcí se též někdy říká rekurentní definice.

*) Zde to neprovádíme.

Cvičení

1. Definujte geometrickou posloupnost indukcí.
2. Dokažte vzorec pro n-tý člen geometrické posloupnosti.
3. Je-li $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ a $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ (podle závěrečné poznámky tohoto článku je a_n definováno pro všechna n) potom $a_n = 2^{n-1} + 1$.
4. Dokažte, že $A_n = \cos n\vartheta$, jestliže $A_1 = \cos\vartheta$, $A_2 = \cos 2\vartheta$ a pro každé $k > 2$ je $A_k = 2A_{k-1}\cos\vartheta - A_{k-2}$.
5. Definice symbolu $n!$ (čti n faktoriál). Pro $n = 1$ je $1! = 1$, $(n+1)! = n!\,.\,(n+1)$. Vypočtěte $3!$, $4!$, $5!$.

7. DVOJITÁ INDUKCE

●

Někdy je třeba dokázat nějaké tvrzení $T_{k,n}$ závislé na dvou přirozených číslech k a n. Například takovým tvrzením $T_{k,n}$ může být věta z příkladu 2 čl. 3: Ke každým dvěpřirozeným číslům n a k existují celá čísla m a r tak, že platí

$$n = mk + r$$

a

$$0 \leqq r < k.$$

Důkaz této věty lze vést tak, že se dokáže, že $T_{k,1}$ platí pro každé k a z toho, že $T_{k,n}$ platí pro každé k se odvodí, že platí $T_{k,n+1}$ pro každé k.*) Tak lze mnohdy postupovat při důkazu tvrzení $T_{k,n}$, někdy však je potřebné provádět indukci podle obou čísel k i n.

Ve cvičeních 9 a 11 čl. 1 se tvrdí, že součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný číslem $2 = 2!$ součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný číslem $6 = 3!$. To nás vede k domněnce, že součin k po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný číslem $k!$

Příklad 1. Pro každé přirozené n a k je číslo $A_{k,n} = n(n+1)\ldots(n+k-1)$ dělitelné $k!$. Tvrzení je správné pro $n = 1$ a každé k. Uvažujme nyní součin

$$A_{k,n+1} = (n+1)\ldots(n+k) = n(n+1)\ldots(n+k-1) + k(n+1)\ldots(n+k-1) = A_{k,n} + k A_{k-1,n+1}. \quad (1)$$

S předpokladem, že $A_{k,n}$ je pro každé k dělitelné $k!$ nevy-

*) Proveďte sami.

stačíme, neboť v rovnici (1) se na pravé straně vyskytuje člen $A_{k-1, n+1}$ s indexem $n + 1$. Snadno se nahlédne, že ani indukce podle k pro každé n nám nepomůže. K důkazu užijeme této věty:

Věta 5. *Buď $T_{k,n}$ tvrzení závislé na dvou přirozených číslech takové, že*

I. α) *$T_{1,n}$ platí pro každé n,*

β) *$T_{k,1}$ platí pro každé k,*

II. *jsou-li k, n přirozená čísla $k > 1, n > 1$, potom z platnosti $T_{r,s}$ pro čísla r, s, $r \leqq k$, $s \leqq n$ a taková, že v alespoň jedné z těchto nerovností platí ostrá nerovnost, vyplývá platnost $T_{k,n}$.*

Potom $T_{k,n}$ platí pro všechna přirozená n, k.

Pomocí této věty lze snadno dokončit důkaz. Skutečně $A_{1,n}$ je vždy dělitelné číslem $1!$ a $A_{k,1} = k!$ je pro každé k dělitelné číslem $k!$ Dále pro $A_{k,n}$ platí $(k > 1, n > 1)$ (je to vlastně rovnice (1) s n místo $n + 1$)

$$A_{k,n} = A_{k,n-1} + k\,A_{k-1,n}. \qquad (2)$$

Učiníme-li nyní indukční předpoklad II je $A_{k,n-1}$ dělitelné číslem $k!$ a $A_{k-1,n}$ dělitelné číslem $(k-1)!$ a $kA_{k-1,n}$ tedy číslem $k!$ Oba sčítanci na pravé straně rovnosti (2) jsou dělitelní číslem $k!$, tedy i $A_{k,n}$ je dělitelné číslem $k!$.

Cvičení

1. ○ Dokažte větu 5.
2. Dokažte úplnou indukcí binomickou poučku

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

3. Dokažte tzv. polynomickou poučku

$$(a_1 + \dots + a_k)^n =$$

$$= \sum_{\substack{s_1 + s_2 + \dots + s_k = n \\ s_i \geqq 0}} \begin{bmatrix} n \\ s_1, \dots, s_k \end{bmatrix} a_1^{s_1} \dots a^{s_k},$$

kde

$$\begin{bmatrix} n \\ s_1, \dots, s_k \end{bmatrix} = \frac{n!}{s_1!\, s_2! \dots s_k!}.$$

4. Vypočtěte $\left(x + 1 + \frac{2}{x}\right)^3$.

8. HISTORICKÉ POZNÁMKY

●

O osobě Euklidově není mnoho známo. Víme, že žil okolo roku 300 před naším letopočtem v Alexandrii, kde v této době bylo vědecké středisko s ohromnou knihovnou. Euklid shrnul tehdejší geometrické poznatky v jednotný logicky ucelený systém. Vycházel při tom z několika základních pojmů (bod, přímka, atd.), které definoval a z několika základních nedokazovaných tvrzení, které rozdělil do dvou skupin (axiómy a postuláty). Pro nás je rozdíl mezi nimi nepodstatný.

Systém axiómů, postulátů, definic a pouček z Euklidových základů se vývojem zdokonaloval, rozrůstal a časem se ustálil pro něj název euklidovská geometrie. Ta je dodnes náplní „školní" geometrie. Logické základy euklidovské geometrie byly podrobeny kritice a revisi v 19. století. Byly vytvořeny dokonalejší soustavy axiómů, na základě kterých lze vybudovat euklidovskou geometrii tak, že jsou uspokojeny všechny požadavky zvýšené přesnosti a logické správnosti, jak je klade moderní matematika.

G. Peano, italský matematik, žil v letech 1858—1932. Od roku 1890 byl profesorem university v Turině. Zabýval se formálně logickými základy matematiky, např. axiomatikou geometrie, axiomatickým založením přirozených čísel atp. Dosáhl však významných objevů i v jiných odvětvích matematiky.

9. VYSVĚTLIVKY

•

1. Prvočísla Přirozené číslo m je dělitelné přirozeným číslem r, jestliže existuje přirozené číslo s tak, že $m = r.s$. Tak např. číslo ($m =$) 18 je dělitelné číslem ($r =$) 3, neboť $18 = 3.6$ ($s = 6$). Jestliže přirozené číslo m je dělitelné přirozeným číslem r, říkáme, že číslo r je dělitelem čísla m. Každé přirozené číslo m je zřejmě dělitelné číslem 1 i číslem m. Tito dělitelé čísla m se nazývají samozřejmí dělitelé. Přirozené číslo větší než jedna, které má pouze samozřejmé dělitele, se nazývá prvočíslo. Jinými slovy: Přirozené číslo $p > 1$ je prvočíslem, jestliže není dělitelné žádným přirozeným číslem r takovým, že $1 < r < p$.

Často se vyšetřuje dělitelnost v oboru celých čísel (má to své výhody), potom např. i číslo -2 je prvočíslo a každé celé číslo m má čtyři samozřejmé dělitele, totiž čísla $1, -1$, m a $-m$. V této knížce se však důsledně zabýváme jen dělitelností přirozených čísel.

2. Množiny. V matematice pro souhrn nějakých věcí zavádíme zvláštní název množina. Množiny zde značíme velkými a tučnými latinskými písmeny. Uveďme si několik příkladů množin:

množina všech reálných čísel . . . . $\mathbf{M}_1$
množina sudých čísel . . . . $\mathbf{M}_2$
množina všech domů na Václavském náměstí v Praze $\mathbf{M}_3$
množina všech čtenářů této knížky . . . . $\mathbf{M}_4$

množina těch, kterým se tato knížka bude líbit . . . M_5
množina těch, kterým se tato knížka nebude líbit . . M_6

Patří-li nějaká věc x do množiny M, říkáme, že x je prvek množiny M (nebo též, že x patří do M) a označujeme to $x \in M$. Neplatí-li to, píšeme x non $\in M$. Tak např.: $3 \in M_1$, 3 non $\in M_2$, čtenář této knížky $\in M_4$. Je účelné zavésti tzv. množinu prázdnou, tak budeme nazývat množinu, která nemá žádný prvek. Účelnost pojmu prázdné množiny jasně vysvitne, jakmile si uvědomíme, že množiny M_4, M_5, M_6 nemusí obsahovat žádný prvek. Může se stát, že nikdo tuto knihu nebude číst (M_4 bude prázdná), rovněž je myslitelné, že se nikomu nebude líbit (M_5 bude prázdná), je však možné, že se bude všem líbit (M_6 bude prázdná). Autor je nezvratně přesvědčen, že množina M_4 nebude prázdná, nevěří příliš v prázdnotu množiny M_6, ale doufá, že i M_5 bude neprázdná (tj. nebude prázdná).

3. Funkce a mnohočleny. Ze školy znáte některé jednoduché funkce např. funkci lineární a nepřímou úměrnost apod. Funkce je pravidlo, které každému x patřícímu do jisté dané množiny M přiřazuje právě jedno číslo y. Množina M se nazývá definiční obor funkce. Funkce zpravidla označujeme malými latinskými písmeny f, g, h, p apod. Číslo přiřazené funkcí f prvku x označujeme často $f(x)$. Dvě funkce f a g považujeme za stejné (sobě rovné), jestliže mají stejný definiční obor a přiřazují každému $x \in M$ tutéž hodnotu $f(x) = g(x)$.

Tak např. rovnicemi $p(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 5x^4 + 1$ jsou (pro všechna reálná x) definovány funkce p, g, h. Tyto funkce jsou zvláštním případem tzv. mnohočlenů. Obecně definujeme: Funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

kde n je přirozené číslo, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná (resp. racionální) čísla, se nazývá mnohočlen s reálnými (resp. racionálními) koeficienty. Číslům a_i se říká koeficienty. Stručně budeme říkat mnohočlen. Místo mnohočlen užívá se též slova polynom. Je-li $a_n \neq 0$ říkáme, že mnohočlen f je n-tého stupně; tak např. p je stupně prvního, g je stupně druhého a h stupně čtvrtého. Pozor. Číslo různé od nuly lze tedy považovat za mnohočlen stupně nultého, avšak číslo 0 (přesněji mnohočlen, který každému x přiřazuje hodnotu 0) nemá žádný stupeň.

Dva mnohočleny f a g jsou si rovny, jestliže přiřazují témuž x tutéž hodnotu $f(x) = g(x)$ (definiční obor je u všech mnohočlenů stejný, je to množina, všech reálných čísel). Dá se ukázat (důkaz zde neprovedeme), že potom oba mnohočleny mají tytéž koeficienty.