1. ÚVOD

V této knížce se velmi často setkáme s přirozenými čísly. Jsou to čísla

$$1, 2, 3, \ldots .$$

Znalost počítání s přirozenými čísly (právě tak jako základní poznatky o dělitelnosti) budeme předpokládat. Čtenáře zajímajícího se o soustavné vybudování teorie přirozených čísel od úplného začátku musíme odkázat na knížku Bedřicha Pospíšila „Nekonečno v matematice" [1]*).

V matematice se setkáváme s tvrzeními**), která závisejí na přirozeném čísle. Takovými tvrzeními jsou např.:

1. Pro přirozené číslo n je číslo $2n+1$ číslo liché.
2. Pro přirozené číslo n je číslo $2n+1$ číslo sudé.
3. Je-li n přirozené číslo, není $5n^2+1$ úplný čtverec (tj. neexistuje přirozené číslo k tak, že $5n^2+1 = k^2$).
4. Součet čtverců dvou po sobě následujících přirozených čísel zmenšený o jednu je dělitelný čtyřmi.
5. Pro přirozené číslo n platí vzorec

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

*) Viz též [2] a [3] v seznamu literatury na konci knihy.

**) Zde užíváme slova tvrzení v poněkud jiném smyslu, než jste zvyklí ze školy u matematické věty, která má předpoklady a tvrzení. Pro nás v této knížce bude tvrzením nějaká (gramatická) věta. Viz k tomu příklady 1—5.

Abychom nemusili vždy opakovat, že písmeno n (resp. k) označuje přirozené číslo, umluvíme se, že písmeno n (resp. k) bude v této knížce vždy označovat přirozené číslo. Pak můžeme např. první tvrzení kratčeji vyslovit: Číslo $2n + 1$ je liché. A podobně u dalších tvrzení.

První tvrzení je zřejmě pravdivé pro každé n, druhé je zřejmě nepravdivé. Ale jak je to s dalšími? Vezměme třetí tvrzení a dosazujme postupně za $n = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} 5.1^2 + 1 &= 6, \\ 5.2^2 + 1 &= 21, \\ 5.4^2 + 1 &= 81 = 9^2. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro $n = 4$ je $5n^2 + 1 = 81$, tj. je to úplný čtverec, tvrzení 3 tedy není správné. Mohli bychom si sice položit otázku, pro která n je číslo $5n^2 + 1$ úplný čtverec, ale to by nás odvedlo od našeho tématu, a proto se spokojíme s tím, že tvrzení 3 neplatí pro všechna n.

Vyšetřujme nyní čtvrté tvrzení a opět postupně dosazujme za n přirozená čísla:

$$\begin{aligned} 2^2 + 1^2 - 1 &= 4, \\ 3^2 + 2^2 - 1 &= 12, \\ 4^2 + 3^2 - 1 &= 24, \\ 5^2 + 4^2 - 1 &= 40, \\ 6^2 + 5^2 - 1 &= 60, \\ 7^2 + 6^2 - 1 &= 84, \\ 8^2 + 7^2 - 1 &= 112, \\ 9^2 + 8^2 - 1 &= 144, \\ 10^2 + 9^2 - 1 &= 180. \end{aligned}$$

Vidíme, že tvrzení je správné pro prvních deset přirozených čísel. Můžeme z toho usoudit, že platí pro všechna přirozená čísla? Pochopitelně, že nikoli. To bychom si počínali jako člověk, který desetkrát za sebou potká na cestě do práce svého přítele N a potom tvrdí: „Po celý život každý den ráno budu potkávat na cestě do práce svého přítele N.“ Máme sice právo se domnívat, že tvrzení 4 platí, ale chceme-li zaručit jeho platnost, musíme je dokázat. Jak provést důkaz?

Předpokládejme, že číslo $n^2 + (n + 1)^2 - 1$ *je dělitelné čtyřmi* (to je, jak víme, splněno pro $n = 1, \ldots, 9$), *a zkusme potom dokázat, že* $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 - 1$ *je dělitelné čtyřmi.* Podaří-li se to, usoudíme, že tvrzení 4 je správné pro všechna přirozená n; neboť naše tvrzení platí pro $n = 1, \ldots, 9$; ale platí-li pro 9, platí i pro 10, platí-li pro 10, platí i pro 11 atd. Zbývá tedy dokázat, že z dělitelnosti čísla $n^2 + (n + 1)^2 - 1$ čtyřmi vyplývá dělitelnost čtyřmi čísla $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 - 1$. Zřejmě je

$$A_n = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 - 1 = n^2 + (n + 1)^2 - 1 + 4n + 4.$$

A_n je součtem dvou čísel $n^2 + (n + 1)^2 - 1$ a $4n + 4$, z nichž každé je dělitelné čtyřmi [první podle předpokladu a druhé proto, že $4n + 4 = 4(n + 1)$]; je tedy samo dělitelno čtyřmi.

Všimněme si, že při důkazu bylo nepodstatné to, že jsme ověřili platnost vyšetřovaného tvrzení pro prvých deset přirozených čísel; stačilo si všimnout, že tvrzení je správné pro $n = 1$ a potom dokázat větu vytištěnou kurzívou.

Metodě důkazu, které jsme použili, se říká důkaz matematickou indukcí (často se užívá též termínu úplná indukce). Spočívá na této větě:

Matematická indukce. *Jestliže* T_n *je tvrzení závislé na přirozeném čísle na*

I. T_n *platí pro* $n = 1$ *a*

II. *z platnosti T_n vyplývá platnost T_{n+1},**) *potom T_n platí pro všechna přirozená n.*

Důkaz matematickou indukcí sestává tedy ze dvou kroků. Z ověření platnosti tvrzení pro $n = 1$ a z důkazu věty II. Druhé části (důkazu věty II) se často říká závěr z n na $n + 1$. Důkazem věty o matematické indukci se budeme zabývat v příštím článku. Nyní užijeme matematické indukce na několika příkladech a ukážeme si důležitost obou částí I i II.

Příklad 1. Dokažme správnost tvrzení 5 na str. 5 pro všechna n. Označme

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Máme dokázat platnost vzorce

$$s_n = \frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

pro všechna n. Užijme matematické indukce. Vzorec (1) platí pro $n = 1$, neboť

$$s_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}.$$

Nechť (1) platí pro přirozené číslo n. Máme dokázat vzorec

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}. \qquad (2)$$

*) Užíváme úmluvy, že písmenem n označujeme přirozené číslo. Přesněji bychom II. měli vyslovit takto: je-li n libovolné přirozené číslo a T_n platí, potom platí i T_{n+1}.

Zřejmě je

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Úpravou máme

$$s_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

To však je již vzorec (2). Důkaz je hotov.

Příklad 2. Označme $t_n = 1 + 2 + \ldots + n$ a dokažme

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3}$$

Vzorec je zřejmě správný pro $n = 1$. Předpokládejme (3) a vypočtěme t_{n+1}:

$$t_{n+1} = t_n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

To je vzorec (3), kde místo n je dosazeno $n + 1$, a právě to jsme měli dokázat.

Příklad 3. Určeme vzorec pro součet

$$r_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Vzorec pro r_n se pokusíme uhádnout tím, že vypočteme r_n pro několik prvních n. Potom užijeme úplné indukce. Máme

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= 9 = 3^2, \\ r_3 &= 36 = 6^2, \\ r_4 &= 100 = 10^2, \\ r_5 &= 225 = 15^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Z toho usuzujeme, že r_n je asi úplný čtverec, tj. $r_n = k^2$. V jakém vztahu je číslo k k číslu n? Prohlížíme-li pozorně vzorce (4), vidíme, že čísla na pravých stranách jsou součty indexů u předcházejících čísel r_n. Skutečně

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3, \\ 1 + 2 + 3 &= 6, \\ 1 + 2 + 3 + 4 &= 10, \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15. \end{aligned}$$

To nás vede k domněnce, že $k = 1 + 2 + \ldots + n$, tedy (podle příkladu 2) $k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, takže $r_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Dokažme to úplnou indukcí. Domněnka je správná pro $n = 1$ (dokonce pro $n = 1, 2, \ldots, 5$). Vypočtěme r_{n+1}. Zřejmě je

$$r_{n+1} = r_n + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Důkaz je hotov.

Příklad 3 je do jisté míry pro použití indukce typický. Věta o matematické indukci nám nic neříká o tom, jak objevit novou poučku či vzorec. Nový poznatek (v našem případě vzorec pro součet $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$) zjistíme zpravidla pokusy (které nemusí být ihned úspěšné) a matematické indukce užijeme pouze k důkazu.

Toho, kdo by se domníval, že není třeba používat úplné indukce a že postačí přesvědčit se o platnosti nějakého tvrzení T_n závislého na čísle n pro dostatečně velký počet přirozených čísel, snad přesvědčí o nesprávnosti tohoto názoru následující příklady.

Příklad 4. Rozkládejme mnohočlen $x^n - 1$ pro různá n. Dostaneme

$$\begin{aligned} x - 1 &= x - 1, \\ x^2 - 1 &= (x-1)(x+1), \\ x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1), \\ x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1), \\ x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1). \end{aligned}$$

Při tom tvoříme jen takové rozklady, v nichž koeficienty jednotlivých činitelů jsou celá čísla. Zdálo by se, že koeficienty jednotlivých činitelů rozkladu jsou buď $+1$, nebo -1. To však není pravda. Těžko bychom to zjistili postupným dosazováním za n a rozkladem, protože teprve pro $n = 105$ má mnohočlen $x^n - 1$ v rozkladu činitele, jehož koeficient je -2.

Příklad 5. Zvolme přirozené číslo $k > 1$ a vyšetřujme nerovnost

$$\frac{kn + \frac{1}{2}}{kn - \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{k^k} \tag{5}$$

a její zvláštní případ pro $k = 5$,

$$\frac{5n + \frac{1}{2}}{5n - \frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{5^5}. \tag{6}$$

Kdybychom postupně dosazovali za n čísla od 1 do 500, zjistili bychom, že nerovnost (6) je správná. Neplatí však pro všechna n. Skutečně, podle obvyklých pravidel pro počítání s nerovnostmi ($5n - \frac{1}{2} > 0$) dostaneme

$$3125 > 5n - \tfrac{1}{2}$$

čili $n < 625{,}1$.

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností (6). Tedy k tomu, abychom postupným dosazováním zjistili, že nerovnost (6) neplatí pro všechna n, museli bychom dosazovat přirozená čísla až do čísla 626. To by jistě byla veliká práce a přitom zbytečná. Podobně bychom zjistili, že nerovnost (5) je splněna pro všechna $n < k^{k-1} + \frac{1}{2k}$. Je-li k dost velké (např. $k = 100$), je číslo na pravé straně poslední nerovnosti nesmírně veliké (např. pro $k = 100$ je to číslo o 199 cifrách před desetinnou čárkou), mohli bychom celý život postupně dosazovat přirozená čísla od 1 počínaje a nabýt úplně chybného přesvědčení, že nerovnost platí pro všechna n.

Příklad 5 je zajímavý ještě v jednom směru. Mysleme si, že nějaký náš „odpůrce" stále ještě věří, že není nutné užívat matematické indukce, ale že stačí ověřit jeho platnost pro dosti velký počet přirozených čísel. Tohoto „odpůrce" „porazíme" takto: Zeptáme se ho, pro kolik přirozených čísel tedy stačí provést zkoušku. On řekne třeba pro tisíc. My se jen pousmějeme a ukážeme mu následující příklad vyvracející jeho tvrzení. Nerovnost (5) je při $k = 6$ splněna pro všechna $n < 6^5 + \frac{1}{12} = 7776{,}08\dot{3}$. To znamená, že prvních tisíc zkoušek nestačí, neboť nerovnost (5) je správná pro prvních tisíc přirozených čísel, ale neplatí pro všechna n. A tu třeba náš odpůrce namítne: Číslo tisíc bylo malé, já sám takové číslo neznám, ale možná, že existuje. My mu však neumožníme čestný ústup z bojiště, nýbrž ho porazíme na hlavu tím, že ukážeme, že ať si zvolí jakkoli velké přirozené číslo N, vždy najdeme k tak, že nerovnost (5) bude splněna pro všechna $n < N$, ale nebude splněna pro vůbec všechna n. K tomu zřejmě stačí zvolit k tak, aby $k^{k-1} + \frac{1}{2k} > N$, a to je vždy možné.

Abychom dovršili naše vítězství nad naším odpůrcem, poznamenáme ještě, že nakonec je i pohodlnější provést důkaz indukcí než provádět velký počet zkoušek a že celý spor jsme s ním vedli jen proto, abychom ukázali, že jeho stanovisko je zásadně nesprávné.

Ukázali jsme si, že při použití matematické indukce bychom se mohli dopustit hrubé chyby, kdybychom nedokázali bod II. Nelze však při důkazu vynechat ani bod I. O tom nás poučí následující příklady, v nichž „dokážeme"*) (tím, že zapomeneme ověřit I) zřejmě nesprávné tvrzení.

Příklad 6. Číslo $2n + 1$ je sudé. Předpokládejme, že $a_n = 2n + 1$ je sudé. Vezměme číslo $a_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2$. To je sudé, neboť je součtem dvou sudých čísel, čísla 2 a čísla $2n + 1$ (poslední číslo je sudé podle indukčního předpokladu). Důkaz je hotov.

Nikdo by se asi nedopustil omylu z příkladu 6 u tak jednoduchého tvrzení. Ale situace může být složitější.

Příklad 7. Číslo $2^{3n} + 3^{4n}$ je dělitelné číslem 73.

Proveďme závěr z n na $n + 1$:

$$2^{3(n+1)} + 3^{4(n+1)} = 8(2^{3n} + 3^{4n}) + 73 . 3^{4n}. \tag{7}$$

To je součet dvou čísel, z nichž každé je dělitelné číslem 73 (první podle indukčního předpokladu). Věta je dokázána.

Ve skutečnosti je pravý opak správný. Číslo $2^{3n} + 3^{4n}$ pro žádné přirozené n není dělitelné 73. To si dokážeme, tentokrát již bez chyb, matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ je $2^{3n} + 3^{4n} = 89$ a toto číslo není dělitelné 73. Tvrzení je správné pro $n = 1$. Učiňme závěr z n na $n + 1$. Předpokládejme, že $2^{3n} + 3^{4n}$ není dělitelné číslem 73 a vyšetřme číslo $2^{3(n+1)} + 3^{4(n+1)}$). To podle rovnice (7) je součtem dvou čísel, z nichž prvé podle indukčního před-

*) Pochopitelně nesprávně.

pokladu není dělitelné číslem 73 a druhé zřejmě číslem 73 dělitelné je. Tedy toto číslo $2^{3(n+1)} + 3^{4(n+1)}$ nemůže být dělitelné 73, c. b. d.

Cvičení

Vypočtěte (vzorec dokažte matematickou indukcí).

1*. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1$.
2*. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$.
3*. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.
4*. $1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + \ldots + \ldots + n(n + 1)$.
5*. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}$.
6*. $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

7. O Dokažte, že pro každé n je číslo $5^{n+1} + 6^{2n-1}$ dělitelné číslem 31.
8. Dokažte: Součet třetích mocnin tří po sobě následujících přirozených čísel je dělitelný 9. (Postup je obdobný důkazu tvrzení 4 str. 5.)
9. Součin dvou po sobě následujících přirozených čísel je dělitelný dvěma.
10. Na základě cvičení 9 dokažte znovu, avšak bez použití matematické indukce, že součet čtverců dvou po sobě následujících přirozených čísel zmenšený o jednu je dělitelný čtyřmi. (Návod: $n^2 + (n + 1)^2 - 1 = 2n(n + 1)$.)
11. Součin tří po sobě následujících přirozených čísel je dělitelný šesti.

12. Dokažte α) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \ldots + (-1)^{n-1} n^2 =$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$$

β) $1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 =$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$