9. ČÍSLICE OKOLO DESATINNEJ ČIARKY

Úlohy v tejto kapitole by sa dali principiálne vyriešiť tak, že by sme príslušné čísla vyrátali s dostatočnou presnosťou; pre 2 číslice za desatinnou čiarkou by spravidla (no nie vždy) stačila presnosť na jednu tisícinu. Praktické ťažkosti však znova nastávajú preto, že uvažované čísla sú príliš veľké. Ukážeme niektoré obraty, ktorými sa možno priamemu výpočtu vyhnúť. Keby sa niekomu nepáčili formulácie úloh, v ktorých ide o nekonečné (a teda vlastne nenapísateľné) desatinné rozvoje, môže si každú úlohu

„Určiť i miest pred desatinnou čiarkou a j miest za desatinnou čiarkou v čísle X“

preformulovať na úlohu

„Určiť číslo $\lfloor 10^j . X \rfloor$ MOD 10^{i+j}.“

Úloha 9.1. Určte dve číslice pred a dve číslice za desatinnou čiarkou čísla

$$A = \sqrt{3^{6^9} + 3^{9^6}}.$$

Riešenie. Zrejme platí

$$A > \sqrt{3^{6^9}} = \sqrt{3^{2^9 . 3^9}} = 3^{2^8 . 3^9}$$

a na druhej strane

$$(3^{2^8 . 3^9} + 0{,}01)^2 > 3^{2^9 . 3^9} + 0{,}02 . 3^{2^8 . 3^9} >$$

$$> 3^{6^9} + 3^{2^8 . 3^9 - 4} > 3^{6^9} + 3^{(2^8 - 4) . 3^9} > 3^{6^9} + 3^{3^3 . 3^9} =$$

$$= 3^{6^9} + 3^{9^6}.$$

Spolu teda máme

$$3^{2^8 . 3^9} < A < 3^{2^8 . 3^9} + 0{,}01.$$

Teda prvé dve číslice za desatinnou čiarkou čísla A sú nuly, a posledné číslice pred desatinnou čiarkou sú také ako posledné dve číslice čísla $3^{2^8 . 3^9}$. Ešte teda musíme určiť

$$3^{2^8 . 3^9} \text{ MOD } 100 = 3^{(2^8 . 3^9) \text{MOD } nsn(\varphi(25),\, \varphi(4))} \text{ MOD } 100 =$$

$$= 3^{2^8 . 3^9 \text{MOD } 20} \text{ MOD } 100 = 3^{(256 . 27^3) \text{MOD } 20} \text{ MOD } 100 =$$

$$= 3^{(16 . 3) \text{MOD } 20} \text{ MOD } 100 = 3^8 \text{ MOD } 100 = 61.$$

Teda hľadané číslice čísla A sú $\ldots 61{,}00 \ldots$ □

Určovanie väčšieho počtu číslic za desatinnou čiarkou by tento raz nerobilo problémy; skúste určiť napríklad tisíc týchto číslic. S kalkulačkou (alebo tabuľkami) však môžeme bez prílišnej námahy vyriešiť aj nasledujúcu úlohu.

Úloha 9.2. Zistite prvú nenulovú číslicu za desatinnou čiarkou čísla

$$A = \sqrt{3^{6^9} + 3^{9^6}}.$$

Riešenie. Označme x zlomkovú časť čísla A. Pretože $|A| = 3^{2^8 . 3^9}$ podľa predchádzajúcej úlohy, máme

$$(3^{2^8 . 3^9} + x)^2 = 3^{6^9} + 3^{9^6}$$

a po úprave

$$2 . 3^{2^8 . 3^9} . x + x^2 = 3^{9^6}.$$

Pretože $0 < x < 1$, dostávame odtiaľ

$$\frac{3^{9^6} - 1}{2 . 3^{2^8 . 3^9}} < x < \frac{3^{9^6}}{2 . 3^{2^8 . 3^9}}.$$

Logaritmus pravej strany je

$$(9^6 - 2^8 . 3^9) . \log 3 - \log 2 \doteq -2150\,579{,}984 =$$
$$= 0{,}016 - 2\,150\,580$$

V rámci danej presnosti je aj logaritmus ľavej strany, a teda aj $\log x$, rovnaký. Teda

$$x \doteq 1{,}04 . 10^{-2150580},$$

čiže prvá nenulová číslica za desatinnou čiarkou v čísle A je 1. □

Súčasne sme zistili aj počet núl medzi desatinnou čiarkou a prvou nenulovou číslicou; je ich 2 150 579. Poznamenajme, že log 3 a log 2 treba vziať dostatočne presne (napr. na 10 des. miest); číslo 1,04 vzniklo zaokrúhlením z 1,03 ..., ale trojka už nie je spoľahlivo určená.

Úloha 9.3. Zistite štyri číslice pred a štyri číslice za desatinnou čiarkou čísla

$$B = \sqrt[9]{5^{6^7} + 6^{7^5}}.$$

Riešenie. Napíšme B v tvare $5^{2^7 . 3^5} + x$.
Pretože $\left(5^{2^7 . 3^5}\right)^9 = 5^{6^7}$, platí $x > 0$. Na druhej strane

$$\left(5^{2^7 . 3^5} + x\right)^9 = 5^{6^7} + 6^{7^5},$$

$$5^{6^7} + 9 . \left(5^{2^7 . 3^5}\right)^8 . x < 5^{6^7} + 6^{7^5},$$

$$x < \frac{6^{7^5}}{9 . \left(5^{2^7 . 3^5}\right)^8} .$$

Ale

$$\frac{6^{7^5}}{9 . \left(5^{2^7 . 3^5}\right)^8} < \frac{25^{7^5}}{5^{2^{10} . 3^5}} = 25^{7^5 - 2^9 . 3^5} < 25^{7^5 - 7^3 . 7^2 . 4} =$$
$$= 25^{-3 . 7^5} < 10^{-4},$$

teda hľadané číslice za desatinnou čiarkou sú nuly. Pre číslice pred desatinnou čiarkou musíme určiť $u = \lfloor B \rfloor \text{ MOD } 10^4$, kde $\lfloor B \rfloor = 5^{2^7 \cdot 3^5}$. Zrejme $\lfloor B \rfloor \text{ MOD } 5^4 = 0$ a ďalej

$$\lfloor B \rfloor \text{ MOD } 2^4 = 5^{2^7 \cdot 3^5} \text{ MOD } 16 =$$

$$= (5^4 \text{ MOD } 16)^{2^5 \cdot 3^5} \text{ MOD } 16 = 1.$$

Teda platí $u = 625k$ pre nejaké celé číslo k, $0 \leqq k < 16$, a súčasne $u \equiv 1 \pmod{16}$, teda $625k \equiv 1 \pmod{16}$, $k \equiv 1 \pmod{16}$, a teda $k = 1$. Potom $u = 625$. Preto hľadané číslice čísla B sú $\ldots 0625{,}0000\ldots$ $\square$

Úloha 9.4. Určte tri číslice pred a tri číslice za desatinnou čiarkou čísla

$$C = \sqrt[3]{8^{666} + 4^{666}}.$$

Riešenie. Platí

$$2^{666} = \sqrt[3]{8^{666}} < C < \sqrt[3]{8^{666} + 3 \cdot 4^{666} + 3 \cdot 2^{666} + 1} =$$
$$= 2^{666} + 1,$$

a preto $\lfloor C \rfloor = 2^{666}$. Označme x zlomkovú časť čísla C. Platí

$$(2^{666} + x)^3 = 8^{666} + 4^{666},$$

$$8^{666} + 3x \cdot 4^{666} + 3x^2 \cdot 2^{666} + x^3 = 8^{666} + 4^{666},$$

$$3x \cdot 4^{666} + 3x^2 \cdot 2^{666} + x^3 = 4^{666}.$$

Odtiaľ s využitím $0 < x < 1$ dostávame

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4^{666} - 3 \cdot 2^{666} - 1}{4^{666}} < x < \frac{1}{3}.$$

Druhý činiteľ ľavej strany je však blízky k 1 (nám stačí, že je medzi 0,999 a 1), a preto hľadané číslice za desatinnou čiarkou sú trojky. Pre určenie číslic pred desatinnou čiarkou určíme 2^{666} MOD 1000. Najprv počítajme modulo 125; platí $\varphi(125) = 100$, a preto

$$2^{666} \equiv 2^{66} = (2^7)^9 . 2^3 \equiv 3^9 . 2^3 = 54^3 \equiv (50 + 4)^3 \equiv$$

$$\equiv 3 . 50 . 4^2 + 4^3 = 2464 \equiv 89 \pmod{125}.$$

Preto $2^{666} = 89 + k . 125$ pre nejaké prirodzené číslo k. Pritom ale $2^{666} \equiv 0 \pmod 8$, teda

$$89 + k . 125 \equiv 0 \pmod 8.$$

Odtiaľ máme $1 + 5k \equiv 0 \pmod 8$, a teda $k \equiv 3 \pmod 8$. Potom platí $2^{666} = 89 + (3 + 8n) . 125$ pre nejaké prirodzené číslo n, a teda $2^{666} \equiv 89 + 375 = 464 \pmod{1000}$.
Preto hľadané číslice čísla C sú ...464,333... □

Úloha 9.5. Nájdite dve číslice pred a dve číslice za desatinnou čiarkou čísla

$$D = \sqrt{9^{603} + 9^{306}}.$$

Riešenie. Položme $D = 3^{603} + x$. Pretože $D^2 > 9^{603}$, platí $x > 0$. Ďalej platí

$$(3^{603} + x)^2 = 9^{603} + 9^{306},$$

$$9^{603} + 2x . 3^{603} + x^2 = 9^{603} + 3^{612},$$

$$2x . 3^{603} + x^2 = 3^{612},$$

$$x = \frac{3^9 - x^2 . 3^{-603}}{2}.$$

Odtiaľ (a z $x > 0$) dostávame $x < \frac{3^9}{2}$, a potom aj $x > \frac{3^9}{2} - \frac{3^{-585}}{8}$.

Preto hľadané číslice za desatinnou čiarkou sú 49. Pre číslice pred desatinnou čiarkou uvážme, že platí

$$\lfloor x \rfloor \text{ MOD } 100 = \left\lfloor \frac{3^9}{2} \right\rfloor \text{ MOD } 100 = \left\lfloor \frac{27^3}{2} \right\rfloor \text{ MOD } 100 =$$

$$= \left\lfloor \frac{19\,683}{2} \right\rfloor \text{ MOD } 100 = 41,$$

$$3^{603} \text{ MOD } 100 = 3^{603 \text{ MOD } 40} \text{ MOD } 100 =$$

$$= 3^3 \text{ MOD } 100 = 27,$$

$(\lfloor x \rfloor + 3^{603})$ MOD $100 = 68$, a preto hľadané číslice čísla D sú $\ldots 68{,}49 \ldots$ □

Úloha 9.6. Určte dve číslice pred a štyri číslice za desatinnou čiarkou čísla

$$E = \sqrt[4]{7^{700} + 7^{600}}.$$

Riešenie. Položme $E = 7^{175} + x$; zrejme $x > 0$. Ďalej platí

$$(7^{175} + x)^4 = 7^{700} + 7^{600},$$

$$7^{700} + 4x \,.\, 7^{525} + 6x^2 \,.\, 7^{350} + 4x^3 \,.\, 7^{175} + x^4 =$$

$$= 7^{700} + 7^{600},$$

$$x = \frac{7^{600} - 6x^2 \,.\, 7^{350} - 4x^3 \,.\, 7^{175} - x^4}{4 \,.\, 7^{525}}.$$

Odtiaľ (a z podmienky $x > 0$) dostávame $x < \frac{7^{75}}{4}$ a potom $x > \frac{7^{75}}{4} - 0{,}0001$.

Platí 7^{75} MOD $4 = 3$, teda zlomková časť čísla $\frac{7^{75}}{4}$ začína 75, a zlomková časť čísla x (a teda aj E) začína číslicami 7499. Pre určenie číslic pred desatinnou čiarkou určíme $\lfloor x \rfloor$ MOD 100, na čo najprv potrebujeme

$$7^{75} \text{ MOD } 400 = 7^{4.18+3} \text{ MOD } 400 =$$
$$= ((7^4 \text{ MOD } 400)^{18} . 7^3) \text{ MOD } 400 =$$
$$= (1^{18} . 7^3) \text{ MOD } 400 = 343.$$

Potom

$$\lfloor x \rfloor \text{ MOD } 100 = \left\lfloor \frac{7^{75}}{4} \right\rfloor \text{ MOD } 100 = \left\lfloor \frac{7^{75} \text{ MOD } 400}{4} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor \frac{343}{4} \right\rfloor = 85\,.$$

Ďalej určíme

$$7^{175} \text{ MOD } 100 = ((7^4 \text{ MOD } 100)^{43} . 7^3) \text{ MOD } 100 =$$
$$= 343 \text{ MOD } 100 = 43.$$

Preto $\lfloor E \rfloor$ MOD $100 = (85 + 43)$ MOD $100 = 28$, a hľadané číslice čísla E sú ...28,7499... □

Úloha 9.7. Určte 7 číslic pred a 7 číslic za desatinnou čiarkou v čísle

$$F = \sqrt[7]{7^{700} + 7^{600}}.$$

Riešenie. Označme $u = 7.(F - 7^{100})$; potom $F = 7^{100} + \frac{u}{7}$.

Pretože $(7^{100})^7 < F^7 < \left(7^{100} + \frac{1}{7}\right)^7$, platí $0 < u < 1$.

Určíme u presnejšie. Platí

$$\left(7^{100} + \frac{u}{7}\right)^7 < 7^{700} + u.7^{600} + 7^{500}.$$

Posledný člen na pravej strane je totiž väčší než súčet zvyšných členov z binomického vzorca, t. j.

$$\binom{7}{2}.7^{500}.\left(\frac{u}{7}\right)^2 + \binom{7}{3}.7^{400}.\left(\frac{u}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{u}{7}\right)^7$$

(dal by sa ešte zmenšiť). Preto platí

$$7^{700} + u.7^{600} + 7^{500} > 7^{700} + 7^{600},$$

$$u > \frac{7^{600} - 7^{500}}{7^{600}} = 1 - 7^{-100}.$$

Z toho pre F vyplýva

$$7^{100} + 7^{-1} - 7^{-101} < F < 7^{100} + 7^{-1}$$

a odtiaľ (a z toho, že $\frac{1}{7}$ nemá v desatinnom rozvoji na 8. mieste nulu) zasa plynie, že F má hľadané číslice rovnaké ako číslo $7^{100} + \frac{1}{7}$. Pre číslice pred desatinnou čiarkou počítajme modulo 10^7:

$$7^{100} = (7^4)^{25} = (2400 + 1)^{25} \equiv \binom{25}{2}.2400^2 + \binom{25}{1}.$$
$$.2400 + 1 = 25.12.2400^2 + 25.2400 + 1 =$$
$$= 12.12\,000^2 + 60\,000 + 1 \equiv$$
$$\equiv 8\,000\,000 + 60\,000 + 1 = 8\,060\,001 \pmod{10^7}.$$

(Vynechané členy v rozvoji $(2400 + 1)^{25}$ boli násobkami 10^8.) Číslice za desatinnou čiarkou ľahko získame delením. Teda hľadané číslice čísla F sú $\ldots 8\,060\,001$, $142\,857\,1\ldots$ □

Úloha 9.8. Určte dve číslice pred a dve číslice za desatinnou čiarkou v čísle

$$A = (2 + \sqrt{3})^{1000}.$$

Riešenie. Budeme uvažovať postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ danú predpisom

$$a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n.$$

(Jej členy sú celé čísla a platí $A \doteq a_{1000}$.)
Čísla $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

preto postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ vyhovuje rekurentnému predpisu

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

Tento predpis spolu s rovnosťami

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 4$$

danú postupnosť jednoznačne určuje. Teraz určíme a_{1000} MOD 100 tak, že budeme počítať čísla $b_n = a_n$ MOD 100. Pritom zrejme $b_0 = 2$, $b_1 = 4$ a

$$b_{n+2} = (4b_{n+1} - b_n) \text{ MOD } 100$$

pre všetky n. Členy postupnosti b_n budeme počítať až dovtedy, kým nezistíme opakovanie.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b_n	2	4	14	52	94	24	2	84	34	52	74	44

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
b_n	2	64	54	52	54	64	2	44	74	52	34	84

n	24	25	26	27	28	29	30	31
b_n	2	24	94	52	14	4	2	4

Vidíme teda, že platí

$$b_{30} = b_0, \quad b_{31} = b_1 .$$

Pretože každý člen postupnosti $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ je určený dvoma predchádzajúcimi členmi, matematickou indukciou dostávame

$$b_{n+30} = b_n,$$

a potom aj $b_n = b_{n \text{ MOD } 30}$ pre každé prirodzené číslo n. Špeciálne, pre $n = 1000$ máme a_{1000} MOD $100 = b_{1000} = b_{10} = 74$. Ďalej platí

$$a_{1000} - 0{,}01 < a_{1000} - (2 - \sqrt{3})^{1000} = A < a_{1000} .$$

Preto hľadané číslice čísla A sú ...73, 99... □

Najnamáhavejšou časťou riešenia predošlej úlohy bolo doplnenie tabuľky hodnôt b_n. Numerická chyba by znehodnotila celý ďalší výpočet. Preto by bolo dobré mať nejaké prostriedky na kontrolu. Jedna z možností je, aby sme počítali úplne rovnakým spôsobom a_{1000} MOD 25, a_{1000} MOD 4, a potom pomocou nich číslo b_{1000} overili. Výhoda by tiež bola v tom, že namiesto periódy 30 by sme dostali periódy 15 a 2, teda stačilo by počítať menší počet členov. (Nové výpočty by mohli byť použité aj samostatne na výpočet čísla b_{1000}, a nielen na skúšku správnosti pôvodného výpočtu.) Iná možnosť úspory v počte počítaných členov b_n bola všimnúť si, že pre $n \geq 2$ platí

$$b_{n-2} = (4b_{n-1} - b_n) \text{ MOD } 100.$$

Pretože platí $b_{14} = b_{16}$, vychádza odtiaľ $b_{15+k} = b_{15-k}$ pre $0 \leqq k \leqq 15$, teda členy b_{17} až b_{30} sa dali doplniť bez počítania. Obe metódy možno použiť súčasne, ak definujeme (nezmeneným vzorcom) a_n pro všetky celé n a vypočítame čísla $c_n = a_n$ MOD 25 pre $n = -1$ až 8. Pretože vyjde $c_{-1} = c_1$, $c_8 = c_7$, platí $c_{-n} = c_n$, $c_{15-n} = c_n$ pre všetky n, z čeho odvodíme $c_{1000} = c_5 = 24$.

Úloha 9.9. Zistite dve číslice pred a dve číslice za desatinnou čiarkou v čísle

$$B = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^{100}.$$

Riešenie. Platí

$$B = ((\sqrt{6} + \sqrt{2})^2)^{50} = (8 + 4\sqrt{3})^{50}.$$

Položme

$$a_n = (8 + 4\sqrt{3})^n + (8 - 4\sqrt{3})^n$$

a skúmajme postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.
Pretože $8 + 4\sqrt{3}$, $8 - 4\sqrt{3}$ sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 16x + 16 = 0,$$

vyhovuje postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ rekurentnému predpisu

$$a_{n+2} = 16a_{n+1} - 16a_n.$$

Ďalej vieme $a_0 = 2$, $a_1 = 16$. Znova označme $b_n = a_n$ MOD 100 a počítajme členy postupnosti $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ až pokiaľ nezistíme opakovanie:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b_n	2	16	24	28	64	76	92	56	24	88	24	76

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
b_n	32	96	24	48	84	76	72	36	24	8	44	76

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32
b_n	12	76	24	68	4	76	52	16	24

Vidíme teda

$$b_{31} = b_1\,, \qquad b_{32} = b_2\,,$$

a preto pre všetky $n \geqq 1$ platí

$$b_{n+30} = b_n.$$

Špeciálne $b_{50} = b_{20} = 24$, a preto

$$B + \left(8 - 4\sqrt{3}\right)^{50} \equiv 24 \pmod{100}.$$

Výpočtom na kalkulačke zistíme

$$\left(8 - 4\sqrt{3}\right)^{50} \doteq 32{,}0348$$

(stačí nám zistiť $32{,}03 < \left(8 - 4\sqrt{3}\right)^{50} < 32{,}04$), a potom už ľahko zistíme, že hľadané číslice čísla B sú ...91, 96... □

Predložené riešenie úlohy 9.9 je samostatné, nezávislé od riešenia predchádzajúcej úlohy 9.8. S využitím tohto riešenia sme si mohli značnú časť výpočtov ušetriť. Platí totiž

$$B = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^{100} = \left(8 + 4\sqrt{3}\right)^{50} = 4^{50}.\left(2 + \sqrt{3}\right)^{50}$$

a z riešenia úlohy 9.8 vieme

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)^{50} + \left(2 - \sqrt{3}\right)^{50} \equiv 74 \pmod{100}.$$

Ak túto kongruenciu vynásobíme číslom 4^{50}, dostaneme

$$B + 4^{50}.\left(2 - \sqrt{3}\right)^{50} \equiv 4^{50}.74 \pmod{100}$$

a odtiaľ po úprave

$$B + \left(8 - 4\sqrt{3}\right)^{50} \equiv 24 \pmod{100}.$$

Úloha 9.10. Zistite tri číslice pred a tri číslice za desatinnou čiarkou v čísle

$$C = \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^{1000}.$$

Riešenie. Označme

$$A = \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^{1000} + \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)^{1000}.$$

Podľa binomickej vety platí

$$A = 2 . \sum_{k=0}^{500} \binom{1000}{2k} . 2^{500-k} . 5^{k},$$

teda A je celé číslo. Určme A MOD 1000.
Na to najprv zistime, ktoré členy sumy vpravo sú násobkami 500. Zrejme sú také všetky členy pre $3 \leqq k \leqq \leqq 498$; na to stačí uvážiť priamo vypísané exponenty čísel 2, 5 v tomto výraze. Avšak aj členy pre $k = 1, 2, 499$ sú násobkami 500, pretože príslušné binomické koeficienty sú násobkami 250. Preto platí

$$A \equiv 2 . (2^{500} + 5^{500}) \pmod{1000}.$$

Aby sme určili A MOD 1000, využijeme rozklad $1000 = 8 . 125$ (a nesúdeliteľnosť čísel 8, 125). Pri počítaní modulo 8 dostávame

$$A \equiv 2 . (2^{500} + 5^{500}) \equiv 2 . 25^{250} \equiv 2 . 1^{250} = 2 \pmod{8}.$$

Pri počítaní modulo 125 s využitím Eulerovej vety dostávame

$$A \equiv 2 . (2^{500} + 5^{500}) \equiv 2^{501} \equiv 2^{501 \text{ MOD } 100} = \\ = 2 \pmod{125}.$$

Teda platí $8|(A-2)$, $125|(A-2)$, a teda aj $1000|(A-$
$-2)$, t. j. A MOD $1000 = 2$.
Teraz využijeme rovnosť

$$C = A - (\sqrt{2} - \sqrt{5})^{1000}$$

a odhad $0 < |\sqrt{2} - \sqrt{5}|^{1000} < |2{,}3 - 1{,}4|^{1000} < 0{,}001$.
Preto hľadané číslice čísla C sú $\ldots 001{,}999 \ldots$ □

Úloha 9.11. Určiť dve číslice pred a dve číslice za desatinnou čiarkou čísla

$$D = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^{1000}.$$

Riešenie. Platí $D = (8 + 2\sqrt{15})^{500}$. Uvažujme postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ danú predpisom

$$a_n = (8 + 2\sqrt{15})^n + (8 - 2\sqrt{15})^n.$$

Pretože čísla $8 + 2\sqrt{15}$, $8 - 2\sqrt{15}$ sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 = 16x - 4,$$

vyhovuje postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ rekurentnému predpisu

$$a_{n+2} = 16a_{n+1} - 4a_n.$$

Tento predpis spolu s rovnosťami

$$a_0 = 2, \qquad a_1 = 16$$

jednoznačne určuje postupnosť $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

Aby sme určili a_{500} MOD 100, počítajme čísla $b_n =$
$= a_n$ MOD 100, až kým nezistíme opakovanie. Členy postupnosti $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ budeme počítať podľa rekurentného predpisu

$$b_{n+2} = (16b_{n+1} - 4b_n) \text{ MOD } 100.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b_n	2	16	48	04	72	36	88	64	72	96	48	84

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
b_n	52	96	28	64	12	36	28	04	52	16	48

Platí teda $b_{21} = b_1$, $b_{22} = b_2$, a preto pre všetky $n \geqq 1$ platí $b_{20+n} = b_n$. Preto $b_{500} = b_{20+24.20} = b_{20} = 52$. Teda platí

$$D + \left(8 - 2\sqrt{15}\right)^{500} \equiv 52 \pmod{100}.$$

Ďalej odhadneme

$$0 < \left(8 - 2\sqrt{15}\right)^{500} < (8 - 2.3{,}8)^{500} = 0{,}4^{500} < 0{,}01.$$

Teda hľadané číslice čísla D sú $\ldots 51{,}99\ldots$ □