# 8. ÚLOHY S FAKTORIÁLMI

V týchto úlohách sa budú okrem iného vyskytovať faktoriály faktoriálov. Budeme ich značiť opakovaním výkričníka, bez pridávania zátvoriek. (Teda $n!!$ u nás znamená $(n!)!$.)

**Úloha 8.1.** Nájdite najväčšie prirodzené číslo $x$, pre ktoré platí

$$x!! < 10^{10^{10}}.$$

*Riešenie.* Platí

$$12!! < 10^9! < (10^9)^{10^9} = 10^{9\cdot 10^9} < 10^{10^{10}}.$$

Na druhej strane podľa Stirlingovho vzorca $n! > \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, a preto

$$13!! > (4.10^9)! > (10^9)^{4\cdot 10^9} = 10^{36\cdot 10^9} > 10^{10^{10}}.$$

Teda hľadané číslo je $x = 12$. □

**Úloha 8.2.** Nájdite najväčšie prirodzené číslo $x$, pre ktoré platí

$$x!! < 30^{20^{10}}.$$

*Riešenie.* Ukážme najprv, že pre $x = 15$ už platí opačná nerovnosť; na to stačí ukázať, že

$$\log(15!!) > 20^{10}.\log 30.$$

Pretože $\log 30 < 1{,}478$ a $20^{10} = 1{,}024\,.\,10^{13}$, stačí dokazovať

$$\log (15!!) > 1{,}024\,.\,1{,}478\,.\,10^{13}.$$

Platí však

$$15! > 1{,}3076\,.\,10^{12} \quad \text{a} \quad 1{,}024\,.\,1{,}478 < 1{,}514,$$

teda stačí dokazovať

$$\log (1{,}3076\,.\,10^{12}!) > 1{,}514\,.\,10^{13}.$$

Zo Stirlignovho vzorca vyplýva

$$\log n! > n\,.\log \frac{n}{e}$$

a preto

$$\log [(1{,}3076\,.\,10^{12})!] > 1{,}3076\,.\,10^{12}.\log \frac{1{,}3076\,.\,10^{12}}{e} >$$

$$> 1{,}3076\,.\,10^{12}\,.\,11{,}6821 > 1{,}52\,.\,10^{13} > 1{,}514\,.\,10^{13}.$$

Teda číslo $x = 15$ už úlohe nevyhovuje.
Pre $x = 14$ platí

$$14!! < 10^{11}! < (10^{11})^{10^{11}} = 10^{110\cdot 10^{10}} < 10^{2^{10}\cdot 10^{10}} =$$

$$= 10^{20^{10}} < 30^{30^{10}}.$$

Hľadané číslo teda je $x = 14$. □

Dôkaz nerovnosti $x < 15$ bol oveľa náročnejší než dôkaz nerovnosti $x \geqq 14$. Je dosť pravdepodobné, že pri samostatnom riešení úlohy by čitateľ najprv našiel nerovnosti $x < 16$, $x \geqq 14$ a k správnej nerovnosti pre číslo 15 by prišiel až po niekoľkých pokusoch. Neúspešné pokusy však nie je potrebné v definitívnom riešení uvádzať.

**Úloha 8.3.** Nájdite najväčšie prirodzené číslo $x$, pre ktoré platí

$$x!! < 10^{20^{30}}.$$

*Riešenie.* Platí $\log 34! > 38{,}47$, a teda $34! > 2{,}9 . 10^{38}$, Preto

$$34!! > \left(\frac{34!}{e}\right)^{34!} > (10^{38})^{2,9 . 10^{38}} > 10^{10^{40}} > 10^{8^{10} . 10^{30}} =$$

$$= 10^{2^{30} . 10^{30}} = 10^{20^{30}},$$

a teda $x < 34$. Na druhej strane $\log 33! < 36{,}94$, teda $33! < 10^{37}$, a preto

$$33!! < 33!^{33!} < (10^{37})^{10^{37}} < 10^{10^{9} . 10^{30}} < 10^{2^{30} . 10^{30}} =$$

$$= 10^{20^{30}},$$

a teda $x \geqq 33$. Preto $x = 33$. □

**Úloha 8.4.** Zistite, na koľko núl končí číslo 1988!.

*Riešenie.* Exponent prvočísla 5 v rozklade čísla 1988! je

$$\left[\frac{1988}{5}\right] + \left[\frac{1988}{25}\right] + \left[\frac{1988}{125}\right] + \left[\frac{1988}{625}\right] =$$

$$= 397 + 79 + 15 + 3 = 494,$$

exponent prvočísla 2 je väčší (napríklad preto, že $\left[\frac{1988}{2}\right] > 494$). Preto 1988! je deliteľný číslom $10^{494}$, no nie $10^{495}$, a teda končí (v dekadickom zápise) 494 nulami. □

**Úloha 8.5.** Nádite najmenšie prirodzené číslo $x$ také, že

$$10^{10^{10}} | x!.$$

*Riešenie.* Pre $x$ musí platiť $2^{10^{10}} | x!$ a $5^{10^{10}} | x!$; využívajme najprv druhú podmienku. Exponent prvočísla 5 v čísle $x!$ je

$$\left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{25}\right] + \left[\frac{x}{125}\right] + \ldots < \frac{x}{5} + \frac{x}{25} + \frac{x}{125} + \\ + \ldots = \frac{x}{4},$$

a preto $\frac{x}{4} > 10^{10}$, teda $x > 4.10^{10}$. Označme $y = 4.10^{10}$ a počítajme exponent prvočísla 5 v rozklade čísla $y!$. Dostaneme ho ako súčet pätnástich čísel, z ktorých prvé je $\left[\frac{y}{5}\right] = 8.10^9$, a každé ďalšie vznikne z predchádzajúceho celočíselným delením piatimi. (Počet čísel nemusíme dopredu určovať; jednoducho ich prestaneme tvoriť, keď by začali vychádzať nuly.) Tento exponent vyjde 9999999997. Exponent prvočísla 5 v čísle $x!$ má byť o 3 väčší, čiže $x > y$, a v rozklade čísla

$$\frac{x!}{y!} = (y + 1).(y + 2). \ldots .(x - 1).x$$

sa musí prvočíslo 5 nachádzať s exponentom (aspoň) 3. Prvé tri činitele napravo deliteľné piatimi sú $y + 5$, $y + 10$, $y + 15$ (a pritom $25 \nmid (y + 5)$, $25 \nmid (y + 10)$, teda naozaj potrebujeme tři činitele). Preto musí byť $x \geqq y + 15 = 4.10^{10} + 15$. Pre $x = 4.10^{10} + 15$ je $5^{10^{10}} | x!$, a zrejme aj $2^{10^{10}} | x!$ (napríklad preto, že platí

$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \geq 10^{10}\big)$, a teda aj $10^{10^{10}} | x!$. Teda hľadané číslo je $x = 4.10^{10} + 15 = 40\,000\,000\,015$. □

**Úloha 8.6.** Nájdite posledné tri číslice čísla 1000! pred jeho koncovými nulami.

*Riešenie.* Najprv určíme počet núl na konci 1000!. Týchto núl je

$$\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{625} \right\rfloor = 249.$$

Preto našou úlohou je vlastne určiť číslo $x = \frac{1000!}{10^{249}}$ MOD 1000. Využijeme pritom rozklad $1000 = 2^3.5^3 = 8.125$, určíme najprv čísla $x$ MOD 8, $x$ MOD 125 a z nich potom $x$.

Pretože $2^{252} | 1000!$, zrejme platí $x$ MOD $8 = 0$. Na určovanie $x$ MOD 125 určíme najprv číslo $\frac{1000!}{5^{249}}$ MOD 125.

Pritom budeme využívať vzorec

$$(5k + 1).(5k + 2).(5k + 3).(5k + 4) \equiv$$
$$\equiv 24 \pmod{125}$$

pre každé $k \in \mathbb{Z}$ (ktorý sa ľahko overí roznásobením ľavej strany). Zostávajúce čísla deliteľné piatimi krátime s päťkami v menovateli. Postupne dostávame (počítame modulo 125):

$$\frac{1000!}{5^{249}} \equiv 24^{200}.\frac{200!}{5^{49}} \equiv 24^{200}.24^{40}.\frac{40!}{5^{9}} \equiv$$

$$\equiv 24^{200}.24^{40}.24^{8}.\frac{8!}{5^{1}} = 24^{248}.24.6.7.8 =$$

$$= 24^{250} . 14 = (25 - 1)^{250} . 14 \equiv (-1)^{250} . 14 =$$
$$= 14 \pmod{125}.$$

Znova počítajme modulo 125.
Platí

$$x \equiv \frac{1000!}{10^{249}} \equiv 2^{300} . \frac{1000!}{10^{249}} = 2^{51} . \frac{1000!}{5^{249}} \equiv 2^{51} . 14 =$$
$$= 2^{50} . 28 \equiv 24^{5} . 28 = (25 - 1)^{5} . 28 \equiv -1 . 28 \equiv$$
$$\equiv 97 \pmod{125}.$$

Teda $x = 97 + 125y$ pre nejaké celé číslo $y$; pritom $0 \leqq y \leqq 7$, pretože $0 \leqq x \leqq 999$. Vieme však $x \text{ MOD } 8 = 0$, a preto

$$97 + 125y \equiv 0 \pmod{8},$$
$$5y \equiv -1 \pmod{8},$$
$$y \equiv 3 \pmod{8}.$$

Teda $y = 3$, a potom $x = 97 + 3 . 125 = 472$. Posledné trojčíslie čísla 1000! pred jeho koncovými nulami teda je 472. □

**Úloha 8.7.** Určte zvyšok pri delení čísla 1000! číslom 1009.

*Riešenie*. 1009 je prvočíslo, a preto podľa Wilsonovej vety

$$1008! \equiv -1 \pmod{1009}.$$

Odtiaľ postupne dostávame

$$1000! . \prod_{i=1}^{8} (1000 + i) \equiv -1 \pmod{1009},$$

$$1000!.\prod_{i=1}^{8}(i-9) \equiv -1 \pmod{1009},$$

$$1000!.40320 \equiv -1 \pmod{1009},$$

$$1000!.(-40) \equiv -1 \pmod{1009},$$

$$1000!.(-9080) \equiv -227 \pmod{1009},$$

$$1000! \equiv 782 \pmod{1009}.$$

Teda hľadaný zvyšok je 782. □

**Úloha 8.8.** **Určte zvyšok pri delení čísla 1000! číslom 1007.**

*Riešenie.* Platí $1007 = 19.53 | 1000!$, teda hľadaný zvyšok je 0. □

**Úloha 8.9.** **Nech $x$, $y$ sú kladné reálne čísla také, že**

$$x^{x^{x^{x}}} = 3!!!\,,\ y^{y^{y^{y^{y}}}} = 3!!!!\,.$$

**Zistite, ktoré z čísel $x$, $y$ je väčšie.**

*Riešenie.* Zrejme $x > 1$, $y > 1$. Označme $A = x^{x^{x^{x}}}$, $B = y^{y^{y^{y}}}$, $C = y^{B}$. Najprv ukážeme $y < 3$. Skutočne,

$$C = 3!!!! = 720!! < 720^{720}! < (720^{720})^{720^{720}} =$$
$$= 720^{720^{721}} < 729^{729^{721}} = 3^{6\cdot 3^{6\cdot 721}} < 3^{3^{6\cdot 721+2}} <$$
$$< 3^{3^{3^{8}}} < 3^{3^{3^{3^{2}}}}.$$

Teraz stačí uvážiť, že umocňovanie je pre argumenty väčšie než 1 monotónna operácia. Teraz ukážeme sporom $y > x$. Keby bolo $y \leq x$, tak $B \leq A$ a potom

$$A! = C = y^B \leqq y^A < 3^A < \left(\frac{A}{\mathrm{e}}\right)^A < A!,$$

a to je spor. (Využili sme zrejmú nerovnosť $A \geqq 9$ a Stirlingov vzorec.) $\square$