Matematické hlavolamy a základy teorie grup

5. kapitola. Orientace

In: Jiří Tůma (author): Matematické hlavolamy a základy teorie grup. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 173–244.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404172

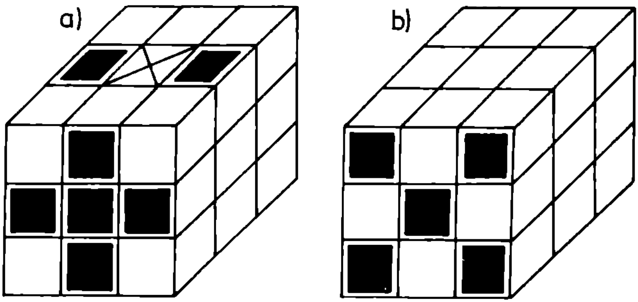
Pátá kapitola

ORIENTACE

5.1. Rubikova krychle, zbývající neřešitelné pozice. Ve třetí kapitole jsme už odhalili řadu neřešitelných pozic na krychli, každá pozice s lichou polohovou permutací je neřešitelná. Mezi pozicemi se sudou polohovou permutací je stále ještě dost neřešitelných. Jejich neřešitelnost je způsobena orientacemi jednotlivých prvků, ne už polohou. V tomto odstavci se naučíme poznávat všechny zbývající neřešitelné pozice.

Tak jako jsme v předchozích dvou kapitolách zcela zanedbávali orientace a zkoumali pouze polohu pohyblivých prvků, budeme nyní studovat jenom orientace a polohy si nebudeme všímat. Pro větší názornost si k tomuto účelu krychli nově obarvíme. A protože budeme zkoumat zvlášť orientace hranových kostiček a zvlášť rohových, budeme používat dvě různá obarvení. Na obrázku 5.1.a je obarvení pro hranové prvky. Každá hranová kostička má jednu plošku bílou a druhou černou. Různé kostičky jsou obarvené stejně, nemůžeme je proto nijak rozlišit. Ať je kterákoliv z nich kdekoliv, je na správném místě. Můžeme rozlišovat pouze jejich orientace. U rohových prvků nemůžeme ani to, všechny jsou celé bílé.

Obarvení 5.1.b budeme používat při studiu orientací rohových prvků. Tady má každý rohový prvek jednu plošku černou a dvě bílé, opět nemůžeme rozlišovat jejich polohy, pouze orientace. Hranové prvky jsou celé bílé, vůbec na nich nezáleží. Obě pozice na obrázku 5.1.



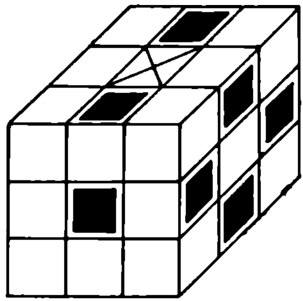
Obr. 5.1

budeme považovat za správné a popíšeme všechny pozice, které z nich můžeme dostat nějakým postupem.

Jednodušší to je u hranových prvků, začneme tedy obrázkem 5.1.a. Takto obarvená krychle má dvě protilehlé vrstvy černé (podle barvy středového prvku), další dvě bílé, a zbývajícím dvěma budeme říkat černobílé. V libovolné pozici můžeme o každém hranovém prvku rozhodnout, má-li správnou orientaci nebo ne: pokud leží v černé vrstvě, musí být v příslušné stěně černá ploška, leží-li v bílé vrstvě, musí tam být bílou ploškou. Na obrázku 5.1.a jsou všechny prvky správně orientované.

Kolik špatně orientovaných prvků můžeme nějakým postupem z pozice 5.1.a dostat? Napřed zjistíme, jak se změní počet špatně orientovaných prvků, uděláme-li v nějaké pozici jeden tah. K obrázku 5.1.a si přibereme ještě obrázek 5.2., na kterém jsou naopak všechny prvky se špatnou orientací.

Otočíme nyní v obou pozicích černou vrstvou. V pozici 5.1.a zůstanou všechny prvky i nadále se správnou orientací, v pozici 5.2. budou mít stále orientaci špatnou. Otočení černou vrstvou tedy nemění orientaci žádného prvku. Otočíme-li černou vrstvou v libovolné pozici,



Obr. 5.2

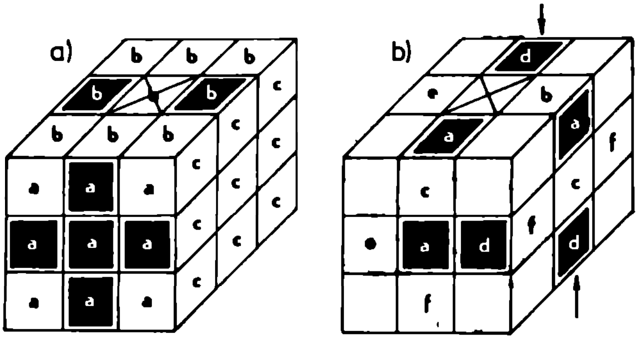
počet špatně orientovaných prvků se nikdy nezmění. Zcela stejně se ukáže, že ani otočení bílou vrstvou nezmění počet špatně orientovaných prvků. Prvky, které jsou dobře orientované, zůstanou se správnou orientací i nadále, prvky se špatnou orientací zůstanou po tomto otočení špatně orientované.

Jiné je to s černobílou vrstvou. Otočíme-li touto vrstvou v pozici 5.1.a, budou mít prvky v černobílé vrstvě v nové pozici stejné orientace, jako mají prvky v horní vrstvě v pozici 5.2. — všechny budou špatně orientované. Otočíme-li naopak černobílou vrstvou v pozici 5.2. (o 90°), budou mít v nové pozici všechny prvky stejnou orientaci jako prvky v horní vrstvě v pozici 5.1.a, tentokrát budou dobře orientované. To znamená, že po otočení černobílou vrstvou se změní orientace každého prvku v této vrstvě. Ty, co byly původně dobře, budou nyní špatně orientované, a ty, co byly špatně, budou naopak orientované dobře.

Pokud jsou tedy všechny prvky v černobílé vrstvě se správnou orientací, po jejím otočení budou špatně orientované. Počet špatně orientovaných prvků se tak zvětší o čtyři. Pokud jsou tři dobře orientované a jeden špatně, budou po otočení tři špatně a jeden dobře orientovaný, počet špatně orientovaných prvků se v tomto případě zvětší o dva. Jsou-li dva dobře a dva špatně orientované, bude tomu tak i po otočení, počet špatně orientovaných se tedy nezmění. V případě tří špatně orientovaných a jednoho dobře se počet špatně orientovaných zmenší o dva, a konečně v případě všech čtyř prvků se špatnou orientací se zmenší dokonce o čtyři. Ve všech případech se tak počet špatně orientovaných prvků změní, zvětší, zůstane stejný nebo zmenší, o sudé číslo.

Otočení libovolnou vrstvou tedy počet špatně orientovaných prvků buď nezmění, nebo změní o sudé číslo. Začínáme-li v pozici 5.1.a, ve které je 0 špatně orientovaných prvků, změní se tento počet každým tahem vždy zase na sudé číslo. V každé pozici, kterou dostaneme nějakým postupem z 5.1.a, musí být počet špatně orientovaných prvků proto sudý, nikdy lichý.

A co to má všechno společného s normální Rubikovou krychlí? Velice mnoho. Pojmenujeme si prostě jednotlivé vrstvy a plošky černá a bílá tak, aby to odpovídalo obrázku 5.1.a. Na normální krychli zvolíme libovolné dvě protilehlé vrstvy — třeba *a* a *d* — a budeme jim říkat černé (nebo ještě raději dominantní, aby se to nepletlo se skutečnými barvami) a jinou dvojici protilehlých vrstev, třeba *c* a *f*, a těm budeme říkat bílé (nebo recesívní). Všem malým ploškám na hranových kostičkách označeným *a* nebo *d* budeme rovněž říkat dominantní a ploškám *c* a *f* pak recesívní. Žádný hranový prvek nemůže mít současně obě malé plošky dominantní nebo současně recesívní, protože žádné dvě sousední vrstvy nejsou dominantní nebo recesívní. Některé prvky — ty, co mají jednu plošku označenou *b* nebo *c* — mají pojmenovanou zatím pouze jednu plošku. Té druhé budeme říkat dominantní nebo recesívní tak, aby každý prvek



Obr. 5.3

měl vždy jednu plošku recesívní a jednu dominantní — obrázek 5.3.a.

Tím jsme si jednotlivé plošky označili stejně jako na obrázku 5.1.a, a můžeme tak o každém hranovém prvku rozhodnout, má-li správnou nebo špatnou orientaci. Na obrázku 5.3.b má např. prvek *ac* špatnou orientaci, protože je recesívní ploškou v dominantní vrstvě. Rovněž prvek *ab* má špatnou orientaci, dominantní ploška je v recesívní vrstvě. Prvek *df* má orientaci správnou. Oba prvky označené šipkami mají orientaci špatnou. Je-li nějaký prvek, dejme tomu *ac*, na správném místě, pak má podle naší definice správnou orientaci, jestliže leží dominantní ploškou, tj. *a*, v dominantní stěně, tj. také *a*. To souhlasí s tím, jak má být orientovaný v základní pozici. Naše definice správné orientace nějakého prvku, který je na správném místě, odpovídá přesně tomu, jak má být orientovaný v základní pozici.

V první části odstavce jsme ukázali, že nějakým postupem můžeme ze základní pozice 5.1.a, a tedy také z 5.3.a, dostat pouze pozice se sudým počtem špatně orientovaných prvků. Tím jsme ukázali následující *pravidlo o orientacích hranových prvků.*

Všechny pozice na Rubikově krychli, ve kterých je lichý počet špatně orientovaných hranových prvků, jsou neřešitelné.

Pozice na obrázku 1.14.a je tedy opravdu neřešitelná, má pouze jeden špatně orientovaný prvek.

Dokážeme pravidlo o orientacích hranových prvků ještě jednou, poněkud jiným způsobem. Nejprve ohodnotíme obě možné orientace hranového prvku čísly. Budeme říkat, že špatně orientovaný prvek má orientaci 1 a dobře orientovaný prvek orientaci 0. Počet špatně orientovaných hranových prvků se potom rovná součtu orientací všech těchto prvků.

Změníme-li orientaci nějakého hranového prvku ze správné na špatnou, změní se její hodnota z 0 (správná) na 1 (špatná). Znamená to vlastně, že jsme k orientaci tohoto prvku přičetli číslo 1. Rádi bychom si představili také opačnou změnu orientace — ze špatné na správnou — jako přičtení 1. Špatná orientace 1 se tentokrát změní na dobrou 0. Naše přičítání čísla 1 musí mít proto vlastnost $1 + 1 = 0$. Není to obyčejné sčítání čísel, a dříve než budeme pokračovat v jiném důkazu pravidla o orientacích hranových prvků, zastavíme se u tohoto sčítání podrobněji.

Grupa $\mathbf{Z}_2$. Hranový prvek může mít dvě orientace — správnou 0 a špatnou 1. Na množině $\{0, 1\}$ budeme definovat skládání tak, aby mělo stejné vlastnosti jako právě zjištěné vlastnosti orientace hranových prvků. A protože má toto skládání blízko ke sčítání, budeme je místo běžného symbolu $\circ$ označovat $\oplus$. Definujeme $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ a $1 \oplus 1 = 0$.

Dokážeme teď, že množina $\{0, 1\}$ spolu s operací $\oplus$ je komutativní grupa. Budeme ji označovat $\mathbf{Z}_2$.

Abychom ukázali, že $\boldsymbol{Z}_2$ je opravdu grupa, musíme ověřit axiómy grupy. Pvek 0 je zřejmě neutrální prvek. Ten je inverzní sám k sobě. Také prvek 1 je inverzní sám k sobě, neboť $1 \oplus 1 = 0$. Ke každému prvku $\boldsymbol{Z}_2$ tedy existuje inverzní prvek. Dále musíme ukázat rovnost $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ pro libovolnou trojici prvků $x, y, z \in \{0, 1\}$. Každý si snadno ověří sám, že obě strany se rovnají 0, pokud je mezi x, y, z sudý počet prvků 1, a že se obě strany rovnají 1, pokud je mezi x, y, z lichý počet prvků 1. Množina $\boldsymbol{Z}_2$ spolu s operací $\oplus$ je tedy opravdu grupa. Navíc je to grupa komutativní, operace $\oplus$ má vlastnost $x \oplus y = y \oplus x$ pro každé dva prvky x, y.

Cvičení 5.1. Dokažte, že složení sudého počtu prvků 1 v grupě $\boldsymbol{Z}_2$ se rovná 0 a složení lichého počtu prvků 1 se rovná 1.

Cvičení 5.2. a) Dokažte, že grupa $\boldsymbol{Z}_2$ je izomorfní grupě $\boldsymbol{T}$, kterou tvoří prvky $\{1, -1\}$ spolu s operací násobení.

b) Dokažte, že každá grupa, která má dva prvky, je izomorfní grupě $\boldsymbol{Z}_2$.

Vraťme se zpět k Rubikově krychli. Možné orientace 0 a 1 hranových prvků budeme nadále považovat za prvky grupy $\boldsymbol{Z}_2$. Změnit orientaci hranového prvku znamená přičíst k její hodnotě prvek 1 v grupě $\boldsymbol{Z}_2$. Správná orientace 0 se tak změní na špatnou $0 \oplus 1 = 1$, a špatná 1 přejde na správnou $1 \oplus 1 = 0$. Grupa $\boldsymbol{Z}_2$ má tedy přesně ty vlastnosti, které mají možné orientace hranových prvků, a budeme jí proto říkat také *grupa orientací hranových prvků.*

Už dříve jsme ukázali, že jedině otočení černobílou vrstvou mění počet špatně orientovaných prvků. Tento počet se rovná součtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}$, kde x_i jsou orientace jednotlivých hranových prvků. Můžeme předpokládat, že třeba x_1, x_2, x_3 a x_4 jsou orientace prvků ležících v černobílé vrstvě, kterou otáčíme. Protože otočení černobílou vrstvou mění orientaci každého prvku v této vrstvě, bude se počet špatně orientovaných prvků po tomto otočení rovnat součtu $(x_1 \oplus 1) + (x_2 \oplus 1) + (x_3 \oplus 1) + (x_4 \oplus 1) + x_5 + \ldots + x_{12}$. Pokud byl v původní pozici sudý počet špatně orientovaných prvků, byl mezi orientacemi $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ sudý počet jednotek. Ve výrazu $(x_1 \oplus 1) + (x_2 \oplus 1) + (x_3 \oplus 1) + (x_4 \oplus 1) + x_5 + \ldots + x_{12}$ se potom také vyskytuje sudý počet jednotek, přidali jsme čtyři. Abychom dostali skutečný počet špatně orientovaných prvků v nové pozici, musíme provést součty v závorkách (v grupě $\boldsymbol{Z}_2$). Je-li některá z orientací x_1, x_2, x_3 a x_4 rovná 1, dostáváme $x_i \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0$. Sečtením takové dvojice potom zmizí dvě jednotky v novém výrazu, zůstane jich proto zase sudý počet. A protože v základní pozici mají všechny hranové prvky orientaci 0, můžeme dostat nějakým postupem zase jenom pozice se sudým součtem, tj. se sudým počtem špatně orientovaných hranových prvků. Tím jsme znovu dokázali pravidlo o orientacích hranových prvků.

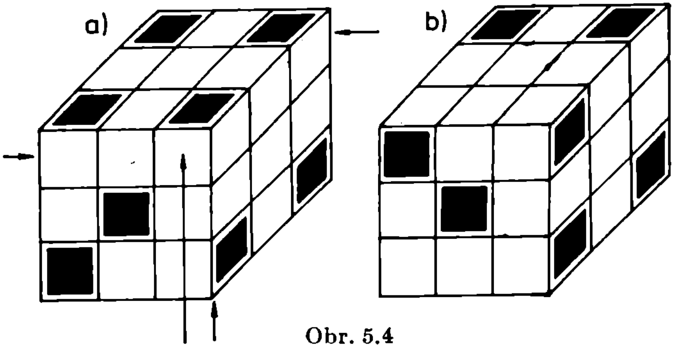
Uděláme ještě jeden malý krůček navíc. Pro řešitelnost pozice není důležitý konkrétní počet špatně orientovaných hranových prvků, ale pouze jeho parita — sudost či lichost. Orientace jednotlivých prvků jsou prvky grupy $\boldsymbol{Z}_2$, zkusme proto ve výrazu $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}$ sčítat nikoliv jako v grupě celých čísel s operací sčítání, jak jsme to dělali dosud, nýbrž opět v grupě $\boldsymbol{Z}_2$. Zajímá nás vlastně složení $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{12}$.

Podle cvičení 5.1. je tento součet rovný 0, je-li mezi orientacemi $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ sudý počet jednotek, a je rovný 1, je-li tento počet lichý. Tím jsme každé pozici na Rubikově krychli přiřadili jeden ze dvou prvků grupy Z_2 — součet orientací všech hranových prvků v Z_2. Pozice se sudým počtem špatně orientovaných hranových prvků mají tento součet rovný 0 a ty s lichým počtem pak 1. Pravidlo o orientacích hranových prvků můžeme vyjádřit také takto:

> Je-li součet orientací hranových prvků v nějaké pozici na Rubikově krychli rovný 1 v grupě Z_2, pak je tato pozice neřešitelná.

Druhý a poněkud abstraktnější z obou přístupů k orientacím hranových prvků nyní použijeme také na orientace rohových prvků. Tentokrát budeme používat krychli obarvenou podle obrázku 5.1.b, připomeňme si, že středový prvek a všechny plošky na rohových kostičkách v zadní stěně jsou také černé. Takto obarvená krychle má dvě vrstvy černé a čtyři bílé (podle středových prvků). Každý rohový prvek může být na libovolném místě orientovaný třemi různými způsoby. Na obrázku 5.1.b jsou všechny se správnou orientací — černé plošky jsou v černých vrstvách. Správně orientované prvky budou mít opět orientaci 0. Na obrázku 5.4.a vidíme rohové prvky se špatnou orientací.

Oba prvky označené svislými šipkami jsou oproti správné orientaci pootočené o 120° doprava. Hodnota orientace těchto prvků bude 1. Další dva rohové prvky označené vodorovnými šipkami jsou vůči správné orientaci pootočené o 120° vlevo. Orientace takto pootočených prvků bude mít hodnotu 2. Nyní můžeme o každém rohovém prvku rozhodnout, jakou má orientaci. Například prvek v levém dolním rohu na obrázku 5.4.a je správně, má orientaci 0. Prvek v pravém dolním zadním



Obr. 5.4

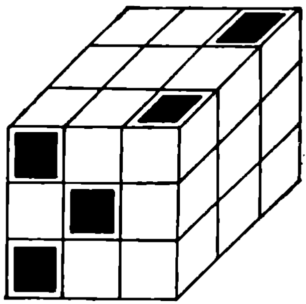
rohu má černou plošku v bílé vrstvě, je orientovaný špatně. Oproti správné orientaci je pootočený o 120° doleva, má proto orientaci 2. Prvek v levém zadním horním rohu je pootočený o 120° doprava, jeho orientace se rovná 1.

V případě hranových prvků tvořily možné orientace grupu $\mathbf{Z}_2$ — grupu orientací hranových prvků. Také u rohových prvků bychom rádi našli grupu, která by odpovídala možným orientacím těchto prvků. Máme tři orientace, 0, 1, 2. Nyní budeme uvažovat nějaký rohový prvek a pootočíme jej v duchu o 120° vpravo na stejném místě. Pokud měl původně správnou orientaci 0, bude potom pootočený o 120° doprava a bude mít orientaci 1. Pokud měl původně orientaci 1, bude pak pootočený o 240° vpravo, tj. o 120° vlevo, bude mít tedy orientaci 2. Prvek s orientací 2 bude mít po otočení orientaci správnou — 0. Chceme-li vyjádřit pootočení vpravo o 120° přičtením čísla 1 k původní orientaci, tak, jak to vychází v prvních dvou případech, musí mít hledaná grupa orientací rohových prvků vlastnost $2 + 1 = 0$. Taková grupa skutečně existuje.

Grupa $\mathbf{Z}_3$. Na množině $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ definujeme operaci skládání takto: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 2 = 2 \oplus 0 = 2$ (prvek 0 je tedy neutrální), $1 \oplus 1 = 2$, $1 \oplus 2 = 2 \oplus 1 = 0$, $2 \oplus 2 = 1$. K prvku 1 je inverzní prvek 2, a k 2 je proto inverzní 1. Ke každému prvku Z_3 tak existuje prvek inverzní. Zbývá ověřit asociativitu, rovnost $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ pro každé tři prvky $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$. Můžeme to udělat tak, že probereme postupně všech $3.3.3 = 27$ možných voleb trojice čísel x, y, z. Mnohem jednodušší je ale všimnout si, že číslo $x \oplus y$ je vždy zbytek čísla $x + y$ (normální součet celých čísel) při dělení číslem 3. Oba výrazy $(x \oplus y) \oplus z$ a $x \oplus (y \oplus z)$ se proto rovnají zbytku při dělení součtu $x + y + z$ číslem 3. Rovnost $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ tedy platí a $\mathbf{Z}_3$ je opravdu grupa. A protože platí $x \oplus y = y \oplus x$ pro každé dva prvky $\mathbf{Z}_3$, je to navíc grupa komutativní.

Pootočíme-li nějaký rohový prvek o 120° vpravo, dostaneme jeho novou orientaci tak, že k původní orientaci přičteme prvek 1 v grupě $\mathbf{Z}_3$. Potočit nějaký prvek o 120° vlevo znamená totéž jako pootočit jej dvakrát o 120° vpravo. Prvek s orientací x bude mít tedy po otočení o 120° vlevo orientaci $(x \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus (1 \oplus 1) = x \oplus 2$. Novou orientaci dostaneme tak, že k původní orientaci přičteme prvek 2 v grupě $\mathbf{Z}_3$. Grupa $\mathbf{Z}_3$ tak dobře vystihuje vlastnosti orientace rohových prvků, budeme jí proto říkat *grupa orientací rohových prvků.*

Každému rohovému prvku v každé pozici nyní umíme přiřadit nějaký prvek grupy $\mathbf{Z}_3$. Tak jako v případě hranových prvků budeme zkoumat součet $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8$ orientací všech rohových prvků v grupě $\mathbf{Z}_3$ Jak se tento součet změní, uděláme-li nějaký tah? Jednoduché to je v případě otočení černou vrstvou. Podívejme se na pozici 5.4.b, kterou dostaneme z 5.4.a otočením přední černé vrstvy o 90° vpravo. Leží-li nějaký prvek v této vrstvě černou ploškou (tj. má orientaci 0 v pozici 5.4.a, jako třeba prvek vlevo dole), bude v ní touto ploškou ležet i po otočení. Prvky se správnou orientací 0 zůstanou správně orientované i nadále. Je-li nějaký prvek v pozici 5.4.a pootočený doprava (tj. má orientaci 1, jako třeba prvky vpravo dole a vpravo nahoře v přední vrstvě), bude pootočený doprava i nadále. Stejně tak prvky s orientací 2 (třeba vlevo nahoře) budou mít orientaci 2 i po uvedeném tahu. Otočení černou vrstvou nezmění orientaci žádného prvku, součet $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8$ se tedy také nezmění, protože se nezmění žádný z prvků x_i grupy $\boldsymbol{Z}_3$.



Obr. 5.5

Složitější je to v případě otočení bílou vrstvou. Na obrázku 5.5. vidíme pozici, kterou dostaneme ze správné pozice 5.1.b po otočení pravou bílou vrstvou. Všechny čtyři rohové prvky v této vrstvě měly původně správnou orientaci 0, nyní je jejich orientace změněná. Prvek, který byl původně dole v přední vrstvě, je v nové pozici v přední vrstvě vpravo nahoře a má orientaci $1 = 0 \oplus 1$. Pokud by měl původně orientaci x_i, bude jeho nová orientace rovná $x_i \oplus 1$. Rovněž prvek, který byl původně vzadu nahoře a v nové pozici je vzadu dole, má novou orientaci 1. Pokud by jeho orientace byla x_j, bude nová orientace $x_j \oplus 1$. Zbylé dva prvky v pravé bílé vrstvě mají novou orientaci 2, k původní orientaci musíme tentokrát přičíst v grupě $\boldsymbol{Z}_3$ prvek 2, abychom dostali orientaci novou. Otáčíme-li pravou bílou vrstvou v libovolné pozici, musíme k původním orientacím dvou prvků v této vrstvě přičíst 1 a kde druhým dvěma 2, abychom dostali orientace v nové pozici. Podobně ověříme, že se stejně změní orientace prvků i po otočení ostatními bílými vrstvami.

A jak se změní součet $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8$ po otočení nějakou bílou vrstvou? Můžeme předpokládat, že orientace prvků v této vrstvě jsou x_1, x_2, x_3 a x_4. V nové pozici se bude součet orientací rohových prvků rovnat $(x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 2) \oplus (x_3 \oplus 1) \oplus (x_4 \oplus 2) \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_8$. Grupa $\boldsymbol{Z}_3$ je komutativní, v uvedeném součtu můžeme jednotlivé prvky libovolně přerovnat, celý součet se proto rovná také $(x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8) \oplus (1 \oplus 2) \oplus (1 \oplus 2)$. V grupě $\boldsymbol{Z}_3$ ale platí $1 \oplus 2 = 0$, součet orientací v nové pozici se proto rovná $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8$, což je součet orientací v původní pozici. Součet orientací všech rohových prvků zůstává tedy po každém tahu stejný, přestože se orientace jednotlivých prvků mohou měnit. Každou řešitelnou pozici dostaneme nějakým postupem z pozice základní, ve všech řešitelných pozicích je proto součet orientací rohových prvků stejný jako v pozici základní. V té jsou ale všechny prvky orientované správně, mají orientaci 0. Součet orientací všech rohových prvků je tedy v základní pozici rovný 0. Stejný součet 0 musí být proto v každé řešitelné pozici. Pozice se součtem orientací rohových prvků rovným 1 nebo 2 jsou proto neřešitelné.

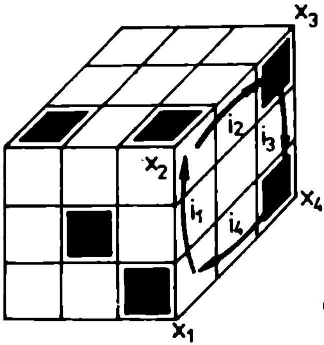
Nyní přeneseme výsledky z pomocné krychle 5.1.b na normální krychli použitím stejné úvahy jako v případě hranových prvků. Zvolíme dvě protilehlé vrstvy, třeba *a* a *d*, a budeme jim říkat černé — dominantní. Zbývající vrstvy jsou bílé — recesívní. Každý rohový prvek má právě jednu plošku označenou *a* nebo *d*, a těmto ploškám budeme rovněž říkat dominantní. Je-li rohový prvek dominantní ploškou v dominantní vrstvě, má správnou orientaci 0, je-li potočený doprava (nebo doleva), má orientaci 1 (nebo 2). Speciálně, je-li nějaký prvek na správném místě, má orientaci 0, právě když je správně orientovaný. Z poznatků o krychli 5.1.b plyne následující pravidlo o orientacích rohových prvků.

> Je-li součet orientací rohových prvků v nějaké pozici na Rubikově krychli různý od 0 (v grupě $\mathbf{Z}_3$), je pozice neřešitelná.

Odtud vyplývá neřešitelnost pozice na obrázku 1.14.b. Všechny prvky až na jeden mají správnou orientaci 0, poslední má orientaci 1. Součet orientací je tedy $1 \neq 0$, pozice je opravdu neřešitelná.

Při důkazech pravidel o orientacích hranových a rohových prvků jsme museli vždy probírat řadu případů v závislosti na tom, jak byly jednotlivé prvky orientované. Nyní dokážeme pravidlo o orientacích rohových prvků ještě jednou rafinovanějším způsobem, který budeme v dalším textu používat i u ostatních hraček. Vezměme si krychli 5.1.b v libovolné pozici, třeba v pozici na obrázku 5.6.

Na obrázku je šipkami vyznačený jeden tah — otočení bílou vrstvou. Uděláme-li tento tah čtyřikrát po sobě, vrátí se krychle opět do pozice 5.6., všechny prvky budou zase na původních místech a s původní orientací. Teď budeme předpokládat, že orientace prvku vpravo dole v přední vrstvě je $x_1 \in Z_3$. Po jednom tahu bude orientace tohoto prvku $x_1 \oplus i_1$, kde i_1 je nějaký prvek grupy $\mathbf{Z}_3$. Uděláme-li další tah, bude mít prvek orientaci $(x_1 \oplus i_1) \oplus i_2$, při třetím tahu přičteme i_3 a při čtvrtém i_4. Po čtyřech tazích bude tento prvek zpět



Obr. 5.6

na původním místě a s orientací $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$. Tato orientace se ale musí rovnat orientaci původní, tj., $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = x_1$. Složíme nyní obě strany poslední rovnosti s prvkem $x^{-1} \in Z_3$. Dostaneme $x^{-1} \oplus x_1 \oplus$ $\oplus\, i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = x^{-1} \oplus x_1$, tj., $i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0$. Při jakékoliv definici správných orientací na jednotlivých místech musí platit $i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0$. (To je v souladu s původním přístupem, kdy jsme ukázali $i_1 = i_3 = 1$ a $i_2 = i_4 = 2$.).

Jak se změní součet orientací $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus$ $\oplus \ldots \oplus x_8$ po jednom tahu? Bude se rovnat

$$(x_1 \oplus i_1) \oplus (x_2 \oplus i_2) \oplus (x_3 \oplus i_3) \oplus (x_4 \oplus i_4) \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_8 =$$
$$= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_8 \oplus (i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4).$$

Ukázali jsme už, že výraz v závorce se rovná neutrálnímu prvku 0 grupy $\mathbf{Z}_3$. Žádný tah tedy součet orientací nezmění, po libovolném postupu bude stejný jako na počátku, tj. 0. Řešitelné pozice proto musí mít součet orientací rohových prvků rovný 0.

Všimněte si, že při posledním důkazu jsme nepoužívali téměř žádné speciální vlastnosti Rubikovy krychle. Jediné, co jsme použili, byla skutečnost, že při opakování stále jednoho tahu se všechny prvky vrátily poprvé na původní místa také s původní orientací. Jinými slovy, opakováním stále jednoho tahu ze základní pozice nedostaneme nikdy nějaký prvek zpět na původní místo se změněnou orientací, vždy jenom zase s orientací původní. Takovou vlastnost mají téměř všechny ostatní hry s orientací. Proto také všechny hry, aspoň pokud jde o orientaci, mají velmi podobné vlastnosti. Jedinou výjimku tvoří koule.

5.2. Jak složit Rubikovu krychli. Ve třetí kapitole a v prvním odstavci této kapitoly jsme se naučili poznávat mnoho neřešitelných pozic na Rubikově krychli. Každá pozice, jejíž polohová permutace je lichá, je neřešitelná. Také všechny pozice, ve kterých je součet orientací hranových nebo rohových prvků různý od 0, jsou neřešitelné. Nyní ukážeme, že všechny ostatní pozice už řešitelné jsou. Tyto pozice musí mít následující vlastnosti:

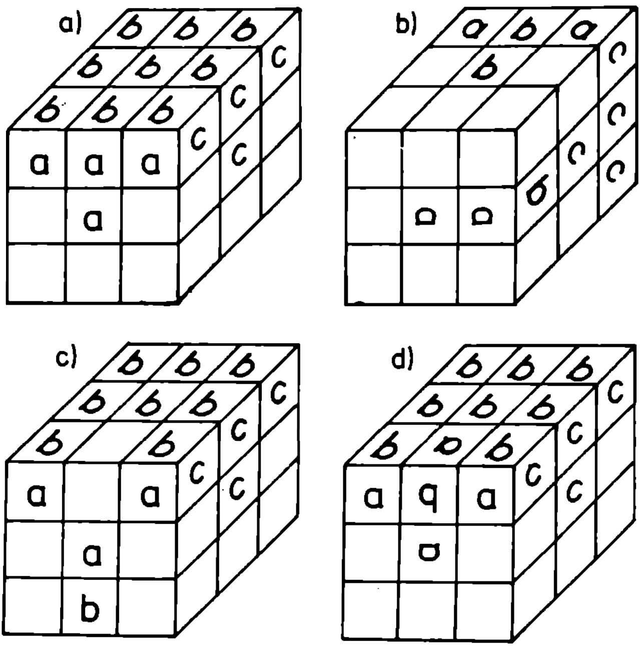
a) polohová permutace je sudá,

b) součet orientací hranových prvků je 0 (v grupě $\boldsymbol{Z}_2$),

c) součet orientací rohových prvků je také 0 (v grupě $\boldsymbol{Z}_3$).

Vezměme si tedy nějakou takovou pozici $\boldsymbol{p}$. Ve čtvrté kapitole jsme ukázali, že existuje postup, který tuto pozici převede do pozice $\boldsymbol{q}$, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Součet orientací hranových nebo rohových prvků se žádným postupem nezmění, bude se proto rovnat 0 i v pozici $\boldsymbol{q}$. Znamená to speciálně, že v pozici *q* je sudý počet špatně orientovaných hranových prvků.

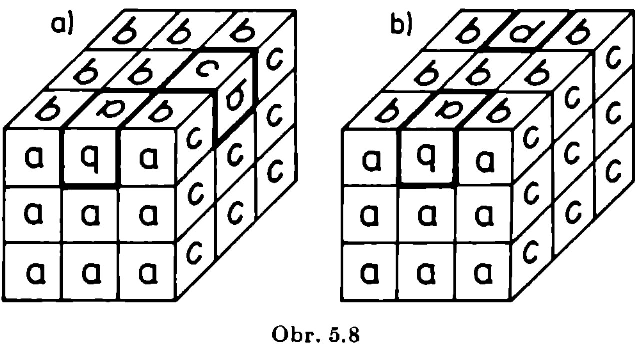
Jak opravit orientace hranových prvků? Použijeme opět známý trik s konjugováním postupů. Nejdříve najdeme nějaký postup, který v jedné vrstvě změní orientaci jediného hranového prvku, a všechny ostatní prvky v této vrstvě ponechá na původních místech a s původní orientací. Budeme měnit orientaci prvku *ab* ve vrstvě *b*, a jako obvykle začneme v základní pozici 5.7.a.



Obr. 5.7

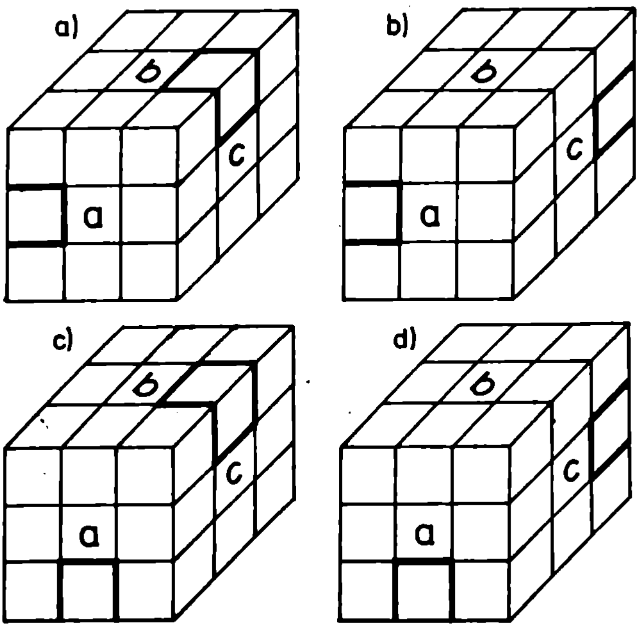
Nejdříve tahy CF^{-1} prvek *ab* uvolníme a tahem A jej odsuneme z vrstvy *b*. Dostaneme pozici 5.7.b. Nyní tahy FC^{-1} přesuneme *ab* do dolní vrstvy a vrátíme zbylé prvky v *b* na původní místa. Pak tahem E^{-1} přesuneme *ab* zpět do vrstvy *a* — pozice 5.7.c. Dále tahy CF^{-1} znovu uvolníme prvek *ab* ve vrstvě *a*, tahy AA ho přesuneme na správné místo se změněnou orientací a tahy FC^{-1} vrátíme ostatní prvky z vrstvy *b* zpět na původní místa. Dostali jsme tak pozici 5.7.d. Celý postup $R =$ $= CF^{-1}AFC^{-1}E^{-1}CF^{-1}AAFC^{-1}$ tedy v horní vrstvě *b* otočí hranový prvek *ab*, a všechny ostatní prvky *b* nechá na původních místech a s původní orientací. Prvky mimo vrstvu *b* se přeházely, to už ale umíme spravit.

Pomocí postupu R najdeme jiný postup, který změní orientaci pouhých dvou hranových prvků. Tahem B přesuneme prvek *bc* na místo *ab*. Nyní inverzní postup R^{-1} vrátí všechno mimo vrstvu *b* zpět na původní místa a změní orientaci prvku na místě *ab*, tj. prvku *bc*. Nakonec tahem B^{-1} vrátíme všechny prvky vrstvy *b* zpátky. Celý postup $RBR^{-1}B^{-1}$ tedy udělá pozici na obrázku 5.8.a. Změní orientaci dvou hranových prvků na místech *ab* a *bc* a všechno ostatní zůstane na původních místech a s původní orientací.



Obr. 5.8

Konjugujeme-li inverzní postup R^{-1} tahy BB, dostaneme postup $RBBR^{-1}B^{-1}B^{-1}$. Tímto postupem uděláme pozici na obrázku 5.8.b, hranové prvky *ab*, *bd* mají změněnou orientaci. Pokud potřebujeme změnit orientaci nějakých dvou prvků, které neleží ve stejné vrstvě, najdeme nějaký pomocný postup, který tyto dva prvky přesune do jedné vrstvy, a tímto postupem konjugujeme $RBR^{-1}B^{-1}$ nebo $RBBR^{-1}B^{-1}B^{-1}$. Tak například prvky vyznačené na obrázku 5.9.a otočíme postupem $A(RBR^{-1}B^{-1})A^{-1}$, prvky vyznačené na obrázku 5.9.b postupem $AC^{-1}(RBR^{-1}B^{-1})CA^{-1}$ nebo postupem $AD(RBBR^{-1}B^{-1}B^{-1})D^{-1}A^{-1}$.

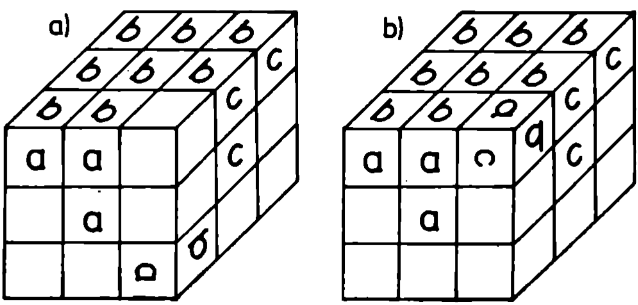


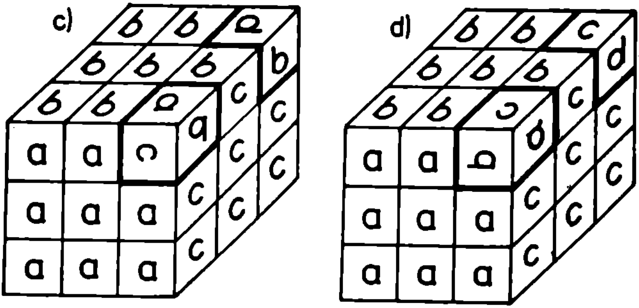
Obr. 5.9

Cvičení 5.3. Najděte postupy, které otočí prvky vyznačené na obrázku 5.9.c a 5.9.d, a všechny ostatní nechají na původních místech a s původní orientací.

Postupem $RBR^{-1}B^{-1}$, případně postupy k němu konjugovanými, umíme změnit orientaci vždy dvou hranových prvků současně. Předpokládali jsme, že v pozici q je sudý počet špatně orientovaných hranových prvků (to je důsledkem vlastnosti b) počáteční pozice p). Tento počet umíme postupně snižovat vždy o dva prvky. Dostaneme se tak nakonec do nějaké pozice r, ve které jsou nejenom všechny prvky na správných místech, ale navíc všechny hranové se správnou orientací.

Abychom dostali z pozice r pozici základní, musíme ještě umět měnit orientace rohových prvků. Také tady nás konjugování snadno dovede k cíli. Jako vždy uděláme napřed nejjednodušší možné rohové otočení v horní vrstvě b — pootočíme prvek abc doprava, a všechno ostatní ve vrstvě b zůstane na místě. To je jednoduché, nejdříve tahem C^{-1} dostaneme abc do dolní vrstvy, potom tahem E oddělíme abc od ostatních prvků vrstvy b a tahem C vrátíme zbylé prvky b zpět na svá místa — obrázek 5.10.a.





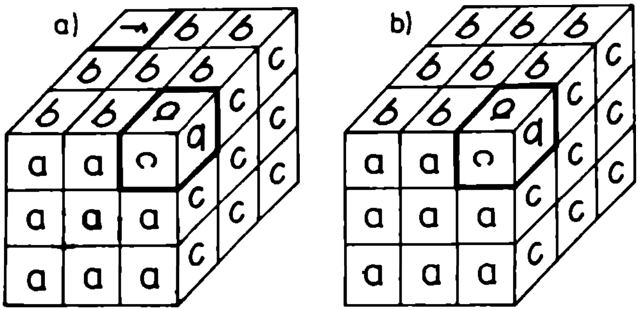
Obr. 5.10

Nyní vrátíme *abc* zpět do vrstvy *b* postupem $E^{-1}C^{-1}EC$ — obrázek 5.10.b. Celý postup $S = C^{-1}ECE^{-1}C^{-1}EC$ pootočí prvek *abc* doprava, a jinak nechá vrstvu *b* beze změny. Zbylá část krychle se rozháže, to už ale umíme napravit. Tahem B přesuneme prvek *bcd* na místo *abc*, pak inverzním postupem S^{-1} vrátíme všechny prvky mimo vrstvu *b* zpět na místa. Postup S^{-1} navíc pootočí prvek na místě *abc* — tj. prvek *bcd* — doleva. Pak tahem B^{-1} umístíme zpět prvky ve vrstvě *b* na původní místa. Postup $SBS^{-1}B^{-1}$ proto udělá pozici na obrázku 5.10.c, pootočí *abc* doprava, *bcd* doleva, a jinak zůstane všechno na původních místech a s původní orientací.

Inverzní postup S^{-1} pootáčí *abc* doleva. Pokud bychom zahájili postupem S^{-1}, tj., udělali $S^{-1}BSB^{-1}$, dostaneme pozici 5.10.d. Prvek *abc* je pootočený doleva a *bcd* doprava.

Cvičení 5.4. Ověřte, že místo postupu S můžeme použít také postup $C^{-1}ECAEA^{-1}$. Vysvětlete každý tah!

Zatím umíme pootáčet pouze dva sousední rohové prvky. Jiné dvojice rohových prvků snadno pootočíme pomocí konjugování. Tak například prvky *abc* a *bdf* pootočíme postupem $SBBS^{-1}B^{-1}B^{-1}$ nebo postupem $D^{-1}(SBS^{-1}B^{-1})D$, viz obrázek 5.11.a. Dva protilehlé prvky *abc* a *def* (neviditelný na obrázku 5.11.b) otočíme třeba postupem $DD(SBS^{-1}B^{-1})D^{-1}D^{-1}$ nebo $D^{-1}(SBBS^{-1}B^{-1}B^{-1})D$.



Obr. 5.11

Naučili jsme se pootočit libovolné dva rohové prvky, jeden doleva a druhý doprava, tak, aby všechno ostatní zůstalo na původních místech a s původní orientací. Nyní už snadno dostaneme krychli z pozice ***r*** do pozice základní. Zbývá opravit orientace rohových prvků. Pokud jsou nějaké špatně, musí být špatně aspoň dva. V opačném případě by totiž sedm rohových prvků mělo orientaci 0, a pouze jeden orientaci nenulovou, 1 nebo 2. V každém případě by byl součet orientací rohových prvků různý od neutrálního prvku $0 \in \boldsymbol{Z}_3$, a to by bylo ve sporu s vlastností c) pozice ***r***.

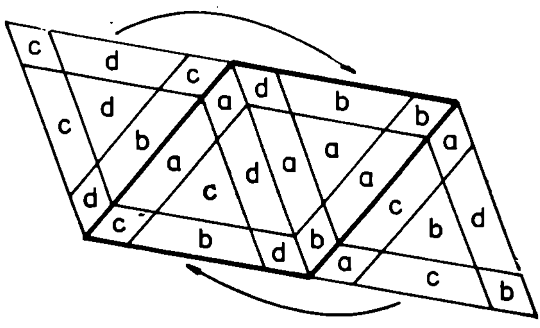
Víme tedy, že jsou aspoň dva rohové prvky orientované špatně. Vezmeme si dva takové rohové prvky a vhodně konjugovaným postupem $SBS^{-1}B^{-1}$ je pootočíme tak, aby aspoň jeden z nich byl po tomto postupu dobře orientovaný. Takto snižujeme počet špatně orientovaných rohových prvků tak dlouho, až zůstanou pouze dva. Protože je součet orientací stále 0, musí být jeden z nich pootočený doprava a druhý doleva. Vhodně konjugovaným postupem $SBS^{-1}B^{-1}$ pak uděláme správnou orientaci u obou současně, krychle je složená.

Tím jsme zcela vyjasnili, jaké pozice na Rubikově krychli jsou řešitelné, a našli postupy, jak je složit. Nepotřebovali jsme k tomu umět mnoho. Postupy P a Q ze čtvrté kapitoly, postupy R, S z tohoto odstavce, a hlavně dobře používat trik s konjugováním. Není naprosto nutné znát postupy P, Q, R, S zpaměti, vystačíme s jakýmikoliv postupy, které udělají v horní vrstvě totéž co P, Q, R nebo S. Takové postupy můžeme vymýšlet přímo při skládání, v podstatě stačí umět z každé pozice složit správně jednu vrstvu. To je docela jednoduché, každý to po nějaké době snadno zvládne. Zbytek už závisí pouze na správném používání triku s konjugováním.

5.3. Čtyřstěn a dvanáctistěn. Polohová permutace každé řešitelné pozice musí být u obou hraček sudá jak na rohových, tak na hranových prvcích. V předchozí kapitole jsme se naučili každou takovou pozici převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Nyní si ujasníme, jak je to s orientacemi.

Nejdříve musíme opět zvolit nějaký způsob, jak o každém prvku na každém místě rozhodnout, jakou má orientaci. Čtyřstěn má čtyři vrstvy — a, b, c, d, dvanáctistěn jich má dvanáct — a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l. Na každém pohyblivém prvku zvolíme opět jednu plošku a prohlásíme ji za dominantní. Využijeme k tomu uspořádání písmen podle abecedy. Hranový prvek má dvě složky a dominantní bude ta z nich, která je označená písmenem, jež je v abecedě dříve. Druhá ploška bude recesívní. Tak na prvku *ab* je ploška *a* dominantní a *b* recesívní. Na prvku *dg* je *d* dominantní atd. Podobně na rohových prvcích bude dominantní vždy ploška označená písmenem, které je v abecedě nejdříve. Na prvku *abc* je dominantní ploška *a*, na prvku *cdg* je dominantní *c* atd. (Všimněte si, že podobně jsme volili dominantní plošky také na Rubikově krychli, pouze uspořádání písmen bylo jiné než v abecedě, používali jsme uspořádání *a*, *d*, *b*, *e*, *c*, *f*.)

Které hranové prvky budeme považovat za správně orientované, a které budou orientované špatně? Vysvětlíme si to v pozici na čtyřstěnu na obrázku 5.12.



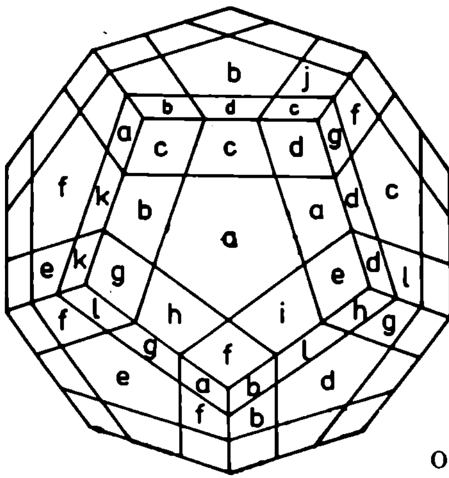
Obr. 5.12

Prvek *ad* je na místě *ac*. Dominantní ploška *a* je ve stěně *a*, ve které má v základní pozici být dominantní ploška *a* prvku *ac*. Prvek *ad* budeme považovat za správně orientovaný. Prvek *ac* je na místě *ab*, dominantní ploška *a* je ve stěně *a*, kde má být v základní pozici dominantní ploška *a* prvku *ab*. Také *ac* je dobře orientovaný. Prvek *bc* je špatně orientovaný, dominantní ploška b je ve stěně c, kde má být v základní pozici recesívní ploška prvku bc. Obecně můžeme definovat, že nějaký hranový prvek je orientovaný dobře, je-li jeho dominantní ploška ve stejné stěně, ve které má být dominantní ploška prvku na stejném místě v základní pozici. Udělejte si následující cvičení.

Cvičení 5.5. Rozhodněte, které z následujících prvků jsou orientované dobře a které špatně:

a) na čtyřstěnu 5.12. prvky ab, bd, cd,

b) na dvanáctistěnu 5.13. prvky bk, cd, ad, bf, gh, ef.



Obr. 5.13

Tak jako u krychle budeme označovat orientace hranových prvků elementy grupy $\mathbf{Z}_2$, prvek má orientaci 0, je-li orientovaný dobře, a má orientaci 1, je-li orientovaný špatně. Každé pozici pak můžeme přiřadit součet orientací (v grupě $\mathbf{Z}_2$) všech hranových prvků. Tak třeba v pozici 5.12. jsou dva prvky, *bc* a *cd*, orientované špatně, ostatní čtyři jsou orientované dobře. Součet orientací se rovná $1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$. Na čtyřstěnu a dvanáctistěnu platí stejné pravidlo o orientacích hranových prvků jako na Rubikově krychli.

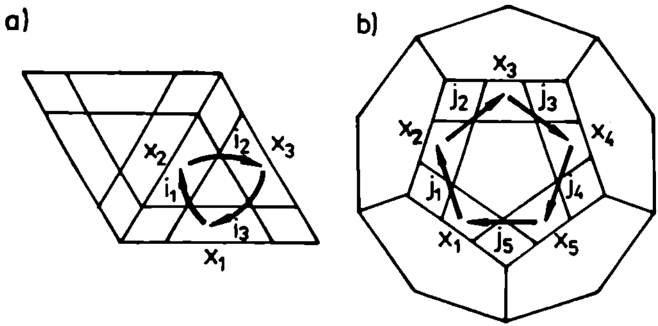
> Každá pozice na čtyřstěnu nebo na dvanáctistěnu s lichým počtem špatně orientovaných hranových prvků je neřešitelná.

Při důkazu použijeme metodu ze závěru prvního odstavce. Začneme čtyřstěnem. Nechť jsou v nějaké pozici orientace jednotlivých hranových prvků $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, a otočme vrstvou, ve které jsou třeba prvky s orientacemi x_1, x_2 a x_3. Po tomto tahu budou mít prvky v této vrstvě orientace $x_1 \oplus i_1$, $x_2 \oplus i_2$, $x_3 \oplus i_3$, kde i_1, i_2, i_3 jsou nějaké prvky grupy $\mathbf{Z}_2$. Opakujeme-li tento tah třikrát, změní se orientace x_1 na $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3$. Tento prvek musí mít ale po trojnásobném opakování jednoho tahu stejnou pozici jako na počátku, tj., $x_1 \oplus \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 = x_1$. Odtud plyne $i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 = 0$. Součet orientací všech hranových prvků po jednom tahu bude tedy

$$(x_1 \oplus i_1) \oplus (x_2 \oplus i_2) \oplus (x_3 \oplus i_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 =$$
$$= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus (i_1 \oplus i_2 \oplus i_3) =$$
$$= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6,$$

tj., bude stejný jako v původní pozici před tahem. Žádný tah tedy součet nezmění a každá řešitelná pozice jej musí mít stejný jako pozice základní, tedy 0. Podle cvičení 5.1. musí být proto v každé řešitelné pozici sudý počet prvků s orientací 1, neboli sudý počet špatně orientovaných hranových prvků.

Cvičení 5.6. Dokažte pravidlo o orientacích hranových prvků na dvanáctistěnu — obrázek 5.14.b.



Obr. 5.14

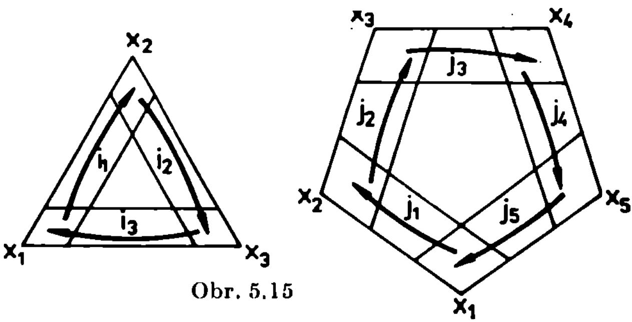
Analogicky dokážeme také pravidla o orientacích rohových prvků na čtyřstěnu a dvanáctistěnu. Stejně jako u hranových prvků budeme definovat, kdy má rohový prvek správnou orientaci. Řekneme, že rohový prvek je orientovaný dobře, má orientaci 0, je-li dominantní pološkou ve stejné stěně, ve které je dominantní ploškou prvek na stejném místě v základní pozici. Je-li prvek oproti správné orientaci pootočený o 120° vpravo, přiřadíme mu hodnotu orientace 1, a je-li pootočený vlevo, bude mít hodnotu 2. Pár příkladů definici osvětlí. Na obrázku 5.12. je prvek *abd* na místě *abc*. Dominantní ploška *a* je ve stěně *b*, zatímco v základní pozici má být dominantní ploška prvku *abc* na stejném místě ve stěně *a*. Prvek *abd* je tedy pootočený o 120° vpravo, má orientaci 1. Vpravo dole na místě *abd* je prvek *abc*. Dominantní ploškou *a* je ve stěně *b*, v základní pozici má být dominantní ploška prvku *abd* na stejném místě ve stěně *a*. Prvek *abc* je tedy pootočený o 120° vlevo, má orientaci 2. Nahoře na místě *acd* je prvek *acd*. Dominantní ploškou *a* je ve stěně *c*, zatímco v základní pozici musí být dominantní ploškou ve stěně *a*. Prvek *acd* je tedy pootočený vpravo, má orientaci 1. Zbývá prvek *bcd*. Ten je vlevo dole na místě *bcd*. Dominantní ploška *b* je ve stěně *b*. Prvek *bcd* je správně, má orientaci 0.

Cvičení 5.7. Určete hodnoty orientací následujících prvků na dvanáctistěnu v pozici na obrázku 5.13.: *abc*, *cdg*, *deh*, *abf*, *gkl*.

Každé pozici můžeme opět přiřadit součet (v grupě $\mathbf{Z}_3$) orientací všech rohových prvků. Tak jako ve všech předchozích případech můžeme ukázat, že se tento součet po žádném tahu nezmění. U všech řešitelných pozic je proto stejný jako v pozici základní, tj. 0.

Každá pozice na čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu, která má součet orientací rohových prvků různý od neutrálního prvku grupy $\mathbf{Z}_3$, je neřešitelná.

Cvičení 5.8. Dokažte právě uvedené pravidlo. Návod je na obrázku 5.15. Je pozice 5.12. řešitelná?



Obr. 5.15

Shrňme dosavadní poznatky o čtyřstěnu a dvanáctistěnu. Má-li být pozice řešitelná, musí mít následující vlastnosti:

a) polohová permutace musí být sudá jak na hranových, tak na rohových prvcích,

b) počet špatně orientovaných hranových prvků musí být sudý,

c) součet orientací rohových prvků musí být neutrální prvek 0 grupy $\mathbf{Z}_3$.

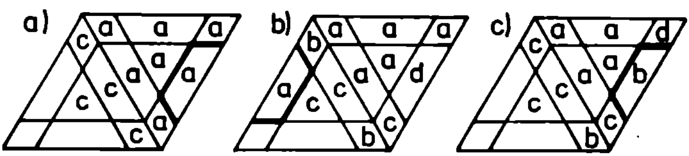
Dokážeme nyní, že každá taková pozice opravdu řešitelná je. Ve čtvrté kapitole jsme si ukázali, jak pozici splňující podmínku a) převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správném místě. Zbývá ještě správně orientovat jednotlivé hranové a rohové prvky.

Jednodušší to je u dvanáctistěnu. Můžeme použít v podstatě stejné postupy jako na krychli. Postup $R = CF^{-1}AFC^{-1}D^{-1}CF^{-1}A^{-1}A^{-1}FC$ změní orientaci prvku *ab* ve vrstvě *b*, a jinak všechny prvky v této vrstvě ponechá na původních místech a s původní orientací. (Vysvětlení postupu je doslova stejné jako v případě krychle.) Postup $RBR^{-1}B^{-1}$ pak změní orientace prvků *ab* a *bc*, a jinak nic nezmění. Konjugováním tohoto postupu ukážeme, že lze změnit orientace libovolné dvojice hranových prvků na dvanáctistěnu tak, aby všechny ostatní rohové i hranové prvky zůstaly na původních místech a s původní orientací. Postupným prováděním vhodně konjugovaného postupu $RBR^{-1}B^{-1}$ opravíme orientace všech špatně orientovaných hranových prvků (na počátku jich byl sudý počet!).

Stejně snadno opravíme orientace rohových prvků. Postupem $S = C^{-1}DCD^{-1}C^{-1}DC$ pootočíme ve vrstvě *b* prvek *abc* vpravo, a jinak nic v této vrstvě nezměníme. Vysvětlení postupu je opět doslova stejné jako v případě krychle. Postup $SBS^{-1}B^{-1}$ pak pootočí *abc* vpravo, *bch* vlevo, a jinak ponechá všechny prvky na původních místech a s původní orientací. Dalším konjugováním postupu $SBS^{-1}B^{-1}$ pootočíme libovolné dva rohové prvky, jeden vpravo a druhý vlevo. A protože součet orientací rohových prvků v původní pozici byl 0, opravíme takto postupně orientace všech rohových prvků. Na dvanáctistěnu umíme tedy složit každou řešitelnou pozici a dokázat neřešitelnost těch ostatních.

Skládat čtyřstěn je obtížnější, každým tahem změníme polohu více než poloviny pohyblivých prvků. Ve čtvrté kapitole jsme se naučili, jak dostat každý prvek na správné místo. Zbývá ještě všechny správně orientovat. Začneme hranovými. V základní pozici 5.16.a chceme v horní vrstvě *a* změnit orientaci hranového prvku *ab* tak, aby zbývající dva hranové prvky v této vrstvě, tj. *ac* a *ad*, zůstaly na původních místech a s původní orientací, a aby rovněž všechny rohové prvky v této vrstvě zůstaly na původních místech. Orientace rohových prvků nás v této chvíli nebude zajímat.

Jak tedy změnit orientaci prvku *ab*? Nejdříve si jej odsuneme z vrstvy *a* tak, aby všechno ostatní v *a* zůstalo na původních místech. To už umíme ze čtvrté kapitoly: postup $B^{-1}ACA^{-1}$ přesune *ab* na místo *cd* — obrázek 5.16.b.



Obr. 5.16

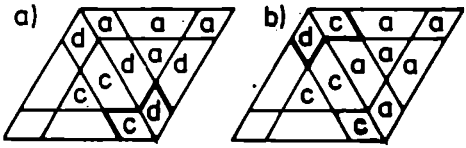
Nyní musíme vrátit *ab* zpět do vrstvy *a* s opačnou orientací. Uděláme to stejným postupem, pouze zaměníme otočení vrstvou *c* za otočení *d*: uděláme $BA^{-1}D^{-1}A$. Celý postup $R = B^{-1}ACA^{-1}BA^{-1}D^{-1}A$ udělá pozici 5.16.c, všechny prvky ve vrstvě a zůstaly na původních místech, a z hranových změnil orientaci pouze ab.

Další část je už rutinní. Postupem $RAR^{-1}A^{-1}$ změníme u hranových prvků pouze orientace ab a ad, a všechny rohové a hranové prvky zůstanou na původních místech.

Cvičení 5.9. Ověřte, že místo postupu R můžeme použít rovněž postup $B^{-1}ACADAB^{-1}$.

Vhodně konjugovaným postupem $RAR^{-1}A^{-1}$ pak můžeme změnit orientace libovolných dvou hranových prvků, a dostaneme tak pozici, ve které jsou všechny prvky na správných místech a hranové navíc se správnou orientací. Postupem $RAR^{-1}A^{-1}$ jsme sice změnili také orientace některých rohových prvků (nikoliv polohu!), to nám ale v tuto chvíli nevadí, protože jsme o jejich orientaci dosud nic nepředpokládali. Tu opravíme až nakonec.

Musíme to udělat tak, aby se správná orientace hranových prvků už nepokazila. Znamená to tentokrát najít postup S, který v horní vrstvě změní orientaci jediného rohového prvku, třeba acd, a všechno ostatní nechá ve vrstvě a na původních místech a s původní orientací. Začneme opět v základní pozici 5.16.a. Budeme se snažit o to, aby trojice prvků abc, ab a abd zůstávala stále pohromadě. Začneme tedy tahy $B^{-1}CD^{-1}$. Dostaneme pozici 5.17.a. Nyní tahem A^{-1} přemístíme prvek acd od ac k ad, a pak vrátíme všechno zpět do vrstvy a tahy $C^{-1}DB^{-1}$. Celý postup $S = B^{-1}CD^{-1}A^{-1}C^{-1}DB^{-1}$ udělá pozici 5.17.b, ve vrstvě a je všechno na původních místech s původní orientací, pouze prvek acd je pootočený doleva. Postupem $SAS^{-1}A^{-1}$ pootočíme acd doleva a abc doprava. Můžeme si vždy horní vrstvu vybrat tak, aby na místech abc a acd byly dva špatně orientované prvky. Postup $SAS^{-1}A^{-1}$ pak opraví orientaci aspoň jednoho z nich. Jelikož je součet orientací rohových prvků $0 \in \boldsymbol{Z}_3$, dostaneme nakonec základní pozici. Umíme tedy už řešit také čtyřstěn.



Obr. 5.17

5.4. Další krychle: $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$, $5 \times 5 \times 5$ a $^*n \times n \times n$. $2 \times 2 \times 2$. Zopakujme si dosavadní poznatky. V každé pozici můžeme krychli natočit tak, aby prvek *abf* byl v levém horním rohu ploškou *a* v přední stěně. Tento prvek považujeme za pevný a polohu a orientaci zbývajících sedmi prvků posuzujeme vzhledem k *abf*. Libovolný ze zbývajících sedmi pohyblivých prvků můžeme přesunout na místo každého jiného, krychle $2 \times 2 \times 2$ je tedy souvislá hra. Každý ze tří možných základních tahů C, D, E udělá lichou permutaci — čtyřcyklus. Polohové permutace řešitelných pozic mohou být proto jak sudé, tak liché. Ve skutečnosti každou pozici můžeme převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Jde to udělat v podstatě stejnými postupy, jaké jsme používali při přemísťování rohových prvků na Rubikově krychli.

K zapisování postupů budeme používat znovu otočení všemi vrstvami, nejenom těmi, které neobsahují základní prvek *abf*. A označení tahů bude záviset na tom, jak krychli držíme, nikoliv na poloze prvku *abf* — otočení horní vrstvou bude B, otočení přední A, zadní D, dolní E, pravou C a levou F.

Jak udělat trojcyklus? Opět použijeme konjugování, a k tomu potřebujeme prohodit v horní vrstvě *b* dva prvky, třeba *abc* a *bcd*, tak, aby *bdf* a *abf* zůstaly na původním místě. To uděláme snadno postupem $P = C^{-1}D^{-1}ED$. Další už je dobře známé. Postup $PBP^{-1}B^{-1}$ udělá trojcyklus na prvcích *abc*, *bdf*, *bcd* a zbývající prvky zůstanou na původních místech a s původní orientací. Dále použijeme výsledku následujícího cvičení.

Cvičení 5.10. Dokažte, že libovolné tři pohyblivé prvky můžeme nějakým postupem posunout na místa *abc*, *bdf* a *bcd*.

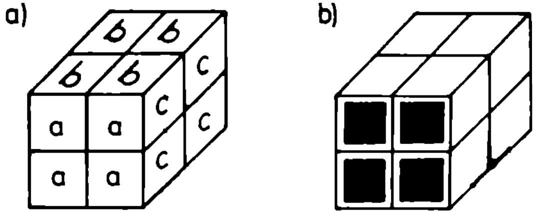
V důsledku tohoto cvičení můžeme vhodným konjugováním postupu $PBP^{-1}B^{-1}$ udělat libovolný trojcyklus, a tím tedy převést každou pozici se sudou polohovou permutací do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. A tím to umíme z každé pozice. Je-li na počátku lichá, stačí napřed libovolným tahem dostat krychli do pozice sudé.

> Z každé pozice na krychli $2 \times 2 \times 2$ můžeme dostat pozici, ve které jsou všechny prvky na správných místech.

Zbývá ještě všechny prvky správně orientovat. Tak jako v případě Rubikovy krychle zvolíme barvy *a* a *d* za dominantní a orientacím prvků přiřadíme hodnoty 0, 1, 2 podle polohy jejich dominantních plošek. Naprosto stejně jako u Rubikovy krychle dokážeme pravidlo o orientacích prvků na krychli $2 \times 2 \times 2$.

Je-li součet orientací všech pohyblivých prvků v nějaké pozici na krychli $2 \times 2 \times 2$ různý od neutrálního prvku 0 grupy $\mathbf{Z}_3$, je tato pozice neřešitelná.

Cvičení 5.11. Dokažte právě uvedené pravidlo.



Obr. 5.18

V šestém odstavci této kapitoly dokážeme Křížovu větu, která popisuje možné orientace prvků na všech hlavolamech s orientací uvedených v této knížce, speciálně také na krychli $2 \times 2 \times 2$.

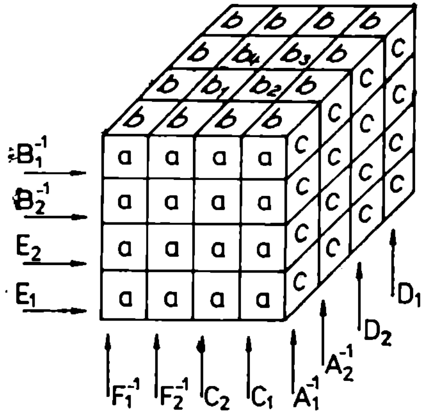
Všechny pozice, ve kterých je součet orientací různý od neutrálního prvku $0 \in \mathbf{Z}_3$, jsou tedy neřešitelné. Ty zbývající složíme postupem známým už z Rubikovy krychle. Postup $R = C^{-1}ECE^{-1}C^{-1}EC$ pootočí prvek *abc* vpravo, a všechno ostatní ve vrstvě *b* zůstane na původních místech a s původní orientací. Postup $RBR^{-1}B^{-1}$ pak pootočí *abc* vpravo, *bcd* vlevo, a jinak nic nezmění. Vhodným konjugováním tohoto postupu pootočíme prvky na libovolných dvou místech a tím složíme celou krychli $2 \times 2 \times 2$.

$4 \times 4 \times 4$. Na rozdíl od krychle $2 \times 2 \times 2$ je krychle $4 \times 4 \times 4$ nesouvislá, má tři orbity. Jednu tvoří rohové prvky, druhou hranové a třetí stěnové. Jinak má ale krychle $4 \times 4 \times 4$ mnohem blíž ke krychli $2 \times 2 \times 2$ než k normální Rubikově $3 \times 3 \times 3$. Opět neexistují žádné pevné prvky, tak si znovu vybereme prvek *abf*, který budeme považovat za pevný, a polohu a orientaci všech ostatních prvků budeme posuzovat vzhledem k němu.

Na krychli $4 \times 4 \times 4$ můžeme otáčet krajními nebo středními vrstvami. Otočení krajní vrstvou udělá jeden čtyřcyklus na rohových a jeden na stěnových kostičkách, zatímco na hranových udělá čtyřcykly dva. Tento tah je tedy sudý na hranové orbitě a lichý na rohové a stěnové. Otočení střední vrstvou udělá na stěnových prvcích dva čtyřcykly a na hranových jeden. Toto otočení je proto liché na hranové orbitě a sudé na stěnové a rohové orbitě.

Každý tah má proto stejnou paritu na rohové a stěnové orbitě. Libovolná pozice, kterou dostaneme nějakým postupem z pozice základní (tj. řešitelná), musí mít stejnou vlastnost. Nyní najdeme postupy, které každou takovou pozici převedou do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Můžeme předpokládat, že pozice je sudá jak na rohové, tak na stěnové orbitě, v případě potřeby otočíme libovolnou krajní vrstvou, a že je také sudá na hranové orbitě. Pokud by byla lichá, otočíme střední vrstvou.

Označení tahů je na obrázku 5.19. na další stránce. Dva vyznačené hranové prvky prohodíme v horní vrstvě postupem $Q = F_2A_2E_1A_2^{-1}E_1^{-1}F_2^{-1}$. Všechny ostatní prvky v horní vrstvě zůstanou na původních místech a s původní orientací. Pomocí Q už známým trikem uděláme trojcyklus na hranových kostičkách v horní vrstvě a dalším konjugováním libovolný hranový trojcyklus. Všechny hranové prvky tedy umíme dostat na správná místa, aniž bychom pohnuli prvky rohovými nebo stě-



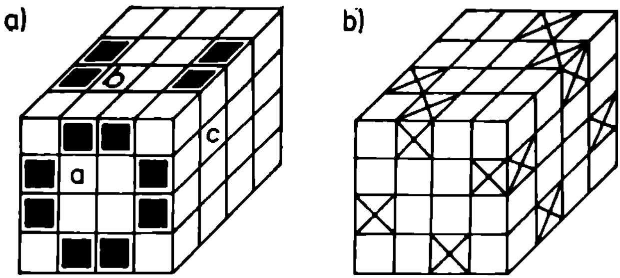
Obr. 5.19

novými. Elementární rohovou transpozici v horní vrstvě uděláme třeba postupem $P = A_1D_1E_1D_1^{-1}E_1^{-1}A_1^{-1}$ (prohodíme *abc* a *bcd*) a stěnové prvky b_1 a b_2 prohodíme postupem $S = F_2A_2E_2A_2^{-1}E_2^{-1}F_2^{-1}$. Z těchto postupů dostaneme opět postupy, které udělají libovolný rohový nebo stěnový trojcyklus. To už stačí k převedení každé pozice do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Postupujeme rychle, pro nikoho, kdo se při čtení dostal až sem, by už ale neměly existovat při skládání hlavolamů žádná velké problémy.

A jak je to s orientacemi prvků? Prvek *abc* pootočíme doprava starým známým způsobem: $R = C_1^{-1}E_1C_1E_1^{-1}C_1^{-1}E_1C_1$. Postup $RBR^{-1}B^{-1}$ pak pootočí *abc* vpravo, *bcd* vlevo, a všechno ostatní ponechá beze změny. A protože součet orientací rohových prvků musí být v každé řešitelné pozici rovný $0 \in \mathbf{Z}_3$ (dokážeme to v šestém odstavci — Křížova věta), umíme správně orientovat všechny rohové prvky.

U stěnových prvků při normálním označení stěn barvami nemůžeme různé orientace rozlišit, zbývá tedy orientovat hranové. Pokoušíme-li se najít postup, který by udělal elementární hranové otočení v horní vrstvě, třeba prvku *ab* vyznačeného na obrázku 5.19., zjistíme, že se stejný prvek vrací na stejné místo vždy se stejnou orientací, jakou měl původně. Jde vůbec otočit prvek *ab* tak, aby všechno ostatní v horní vrstvě zůstalo na původních místech?

Ne, a proč to nejde, si vysvětlíme pomocí obrázku 5.20. Na něm je orientační systém pro hranové prvky podobný systému z obrázku 5.1.a.

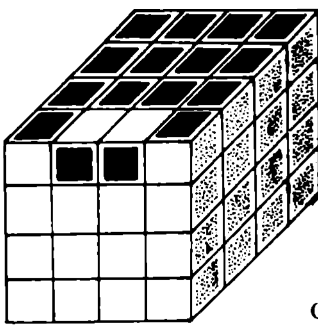


Obr. 5.20

Pouze tahy A_1, D_1, C_1 a F_1, tj. otočení přední, zadní, pravou a levou vrstvou, nemění orientace žádných hranových prvků. Zbývající tahy, otočení horní a dolní vrstvou B_1 a E_1 a všechna otočení středními vrstvami, mění orientace všech hranových prvků, které v příslušných vrstvách leží. Každý prvek se tedy může objevit na různých místech s různou orientací vzhledem k orientačnímu systému 5.20.a. Nemůže se ale vyskytnout různě orientovaný na stejném místě. Dokážeme to pomocí obrázku 5.20.b.

Na něm jsou křížky vyznačena určitá místa pro hranové prvky. Jsou to všechna místa, jejichž prvky na sebe můžeme převádět, používáme-li pouze tahy A_1, D_1, C_1 a F_1. Tyto tahy nemění orientace hranových prvků. Označeným místům budeme říkat místa typu X. Pokud tedy používáme pouze tahy neměnící orientaci hranových prvků, můžeme převést prvek z místa typu X zase jenom na jiné místo typu X. Každý jiný tah, který mění orientace hranových prvků, naopak převádí prvky z místa typu X na místa, která typ X nemají, říkejme jim třeba místa typu Y. Orientaci nějakého hranového prvku změníme pouze za cenu toho, že změníme typ místa, na kterém se nachází, z X na Y, nebo naopak. Má-li být nějaký prvek na počátku a na konci nějakého postupu na stejném místě, musí být počet těchto změn nutně sudý. Každý hranový prvek se proto musí vrátit na stejné místo vždy se stejnou orientací. Hranové prvky na krychli $4 \times 4 \times 4$ jsou bez orientace, pokud jsou na správném místě, mají v řešitelné pozici nutně také správnou orientaci. Žádný postup, který by udělal elementární hranové otočení v jedné vrstvě, neexistuje, a ani ho nepotřebujeme.

Každý, kdo si někdy hrál s krychlí $4 \times 4 \times 4$, teď asi namítne pozici 5.21.

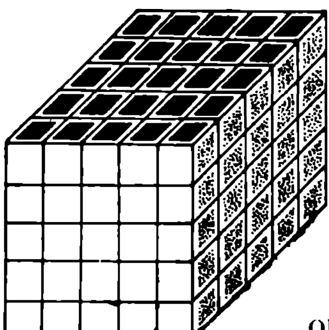


Obr. 5.21

V ní jsou pouze dva špatně orientované hranové prvky. jinak je všechno správně. A přesto je tato pozice řešitelná. Není to ve sporu s tím, že hranové prvky mohou být na správném místě pouze se správnou orientací? Vtip je v tom, že oba prvky jsou obarvené stejně, takže jsou na správných místech pouze zdánlivě, ve skutečnosti jsou prohozené. Pokud se nám je podaří zaměnit, změní každý z nich typ místa, na kterém se nachází, a tím se také změní jeho orientace na správnou. V pozici na obrázku 5.21. jsou tedy dva hranové prvky prohozené, polohová permutace pozice je na hranové orbitě lichá. Uděláme napřed libovolný tah střední vrstvou, třeba C_2. Dostaneme tak pozici, jejíž polohová permutace je sudá na všech třech orbitách, a pak už používáme pouze postupy uvedené dříve.

5 × 5 × 5. Umíme-li skládat Rubikovu krychli 3 × 3 × 3 a krychli 4 × 4 × 4, složíme snadno také krychli 5 × 5 × 5 na obrázku 5.22. To už ponecháme jako složitější cvičení.

Najděte všechny orbity, rozhodněte, které prvky se mohou objevit na stejném místě s různou orientací, na-



Obr. 5.22

jděte postupy, které udělají elementární transpozice na jednotlivých orbitách, případně elementární otočení, pokud jsou možná. A pokud vám to půjde dobře, můžete vyzkoušet síly na krychli *$n \times n \times n$. Tady je důležité rozlišit případy, kdy je n sudé a kdy liché.

***5.5. Matematický model hlavolamů s orientací. Věncový součin grup.** Ve třetí kapitole jsme sestrojili matematický model úplných her bez orientace. Různým pozicím odpovídaly různé permutace na množině I pohyblivých prvků. Každý tah udělal nějakou permutaci, těmto permutacím jsme říkali generátory. Postupnému provádění tahů odpovídalo skládání permutací-generátorů. Umět řešit hlavolam pak znamenalo popsat všechny permutace, které můžeme dostat skládáním generátorů (tj. popsat řešitelné pozice), a pro každou takovou permutaci najít nějaké konkrétní vyjádření jako složení generátorů (tj. najít postup, který každou řešitelnou pozici složí). Stejný model jsme používali také při zkoumání polohy prvků u her s orientací. Orientace ale nebyla v tomto modelu nijak zachycena.

Nyní sestrojíme model úplných her s orientací, který bude obsahovat také všechny potřebné informace o orientacích jednotlivých prvků.

Názornější bude začít s nějakou souvislou hrou s orientací. Takovou známe dosud pouze jednu — krychli $2 \times 2 \times 2$. Jak můžeme zapsat polohu a orientaci všech prvků v nějaké (řešitelné nebo neřešitelné) pozici p? Polohu a orientaci posuzujeme vzhledem k prvku abf, který považujeme na pevný. Polohu zaznamenávat umíme. Je popsána permutací p na množině $I = \{abc, ace, aef, bcd, bdf, cde, def\}$ všech pohyblivých prvků. Zbývá nějak zachytit orientace. Vzhledem k orientačnímu systému na obrázku 5.18.b má orientace každého pohyblivého prvku hodnotu 0, 1 nebo 2 v grupě $\boldsymbol{Z}_3$. Orientaci všech prvků popíšeme zobrazením $g: I \to \to Z_3$, které každému prvku $i \in I$ přiřadí hodnotu jeho orientace $ig \in Z_3$. Poloha a orientace všech prvků v pozici p je tak zcela popsána dvojicí (p, g), kde p je permutace na množině I a g je zobrazení z množiny I do grupy $\boldsymbol{Z}_3$. Tato dvojice pozici p úplně popisuje, pro jednoduchost budeme dvojici (p, g) s pozicí p ztotožňovat a psát $\mathsf{p} = (p, g)$. Prvek i je na místě ip a má orientaci ig vzhledem k orientačnímu systému 5.18.b. Zobrazení g budeme nazývat *zobrazení orientace*.

Jakou dvojicí je popsána základní pozice n? Každý prvek i je na správném místě, poloha prvků je popsána identickou permutací n na množině I. Každý prvek má navíc správnou orientaci 0. Zobrazení orientace, které každému prvku $i \in I$ přirazuje neutrální prvek grupy orientací (v tomto případě $\boldsymbol{Z}_3$), budeme vždy označovat písmenem o, $io = 0$. Základní pozice n je tedy popsána dvojicí (n, o).

Postupem P uděláme ze základní pozice na krychli $2 \times 2 \times 2$ nějakou pozici $\mathsf{PU} = \mathsf{p} = (p, g)$. Jiným postupem Q uděláme pozici $\mathsf{QU} = \mathsf{q} = (q, h)$. Jakou pozici uděláme složeným postupem PQ? Vezmeme libovolný prvek $i \in I$. Musíme určit, na jakém místě a s jakou orientací bude po provedení postupu PQ ze základní pozice. Poloha je jasná — postupem P přejde z místa i na místo ip a z tohoto místa dále postupem Q na místo $(ip)q = i(p \circ q)$. Zbývá určit funkci orientace v pozici $(\mathsf{PQ})\mathsf{U}$. Prvek i je po postupu P na místě ip s orientací ig. Děláme-li postup Q ze základní pozice, změní se původní orientace 0 prvku na místě ip na orientaci $(ip)h$ v pozici q. Tentokrát ale děláme postup Q z pozice p, ve které má prvek na místě ip orientaci ig. Postupem Q přejde tento prvek dále na místo $i(p \circ q)$ a jeho původní orientace ig se změní na $ig \oplus (ip)h$. Funkce orientace k v pozici $(\boldsymbol{PQ})\boldsymbol{U}$ je proto popsána rovností $ik = ig \oplus (ip)h$ (sčítáme v grupě $\boldsymbol{Z}_3$). Postupem $\boldsymbol{PQ}$ tedy uděláme pozici $(p \circ q, k)$. Tuto pozici můžeme nazvat složení pozic $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ a označíme ji $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$. Definovali jsme tak složení libovolných dvou pozic, které dostaneme ze základní pozice nějakými postupy, tj. libovolných dvou řešitelných pozic. Naprosto stejně můžeme ale skládat i neřešitelné pozice.

Definice skládání pozic na krychli 2 × 2 × 2. Jsou-li $\boldsymbol{p} = (p, g)$ a $\boldsymbol{q} = (q, h)$ dvě pozice, pak jejich složení $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} = (p \circ q, k)$, kde funkce orientace k je definována předpisem $ik = ig \oplus (ip)h$.

Polohové permutace pozic na hlavolamech spolu s operací skládání permutací tvoří grupu. Ukážeme nyní, že také všechny pozice na krychli 2 × 2 × 2 s právě definovanou operací skládání pozic tvoří grupu.

Grupa pozic na krychli 2 × 2 × 2. Musíme ověřit axiómy grupy. Pokud jde o existenci neutrálního prvku, máme očividného kandidáta — základní pozici $\boldsymbol{n} = (n, o)$. Platí $(p, g) \circ (n, o) = (p \circ n, k)$, kde $ik = ig \oplus (ip)o = ig \oplus 0 = ig$. Protože také $p \circ n = p$, platí $(p, g) \circ (n, o) = (p, g)$. Stejně spočítáme $(n, o) \circ (p, g) = (n \circ p, l) = (p, l)$, kde $il = io \oplus (in)g = 0 \oplus ig = ig$, tj. $(n, o) \circ (p, g) = (p, g)$. Pozice $\boldsymbol{n} = (n, o)$ je tedy skutečně neutrální vzhledem k operaci skládání.

Dále budeme hledat inverzní prvek k pozici (p, g). Inverzní pozici k nějaké pozici $\boldsymbol{p} = (p, g)$, kterou uděláme nějakým postupem $\boldsymbol{P}$, bychom měli udělat nejspíš inverzním postupem $\boldsymbol{P}^{-1}$. Jakou pozici tento postup udělá? Polohová permutace je jasná, je to inverzní permutace p^{-1} k permutaci p. Postup $\boldsymbol{P}$ přemístí prvek i na místo $j = ip$ a jeho nová orientace bude ig. Inverzní postup $\boldsymbol{P}^{-1}$ vrátí prvek i z místa $j = ip$ na místo $i = jp^{-1}$ a orientace bude správná 0, tj. k orientaci ig musíme přičíst $(ig)^{-1} = ((jp^{-1})g)^{-1}$. Zkusme tedy jako kandidáta na inverzní prvek k pozici $\boldsymbol{p} = (p, g)$ pozici (p^{-1}, h), kde $ih = ((ip^{-1})g)^{-1}$. Potom platí $(p, g) \circ (p^{-1}, h) = (p \circ p^{-1}, k) = (n, k)$, kde $ik = ig \oplus (ip)h = ig \oplus (((ip)p^{-1})g)^{-1} = ig \oplus ((i(p \circ p^{-1}))g)^{-1} = ig \oplus (ig)^{-1} = 0$. Hodnota zobrazení orientace k se proto vždy rovná $0 \in \boldsymbol{Z}_3$, tj. $k = o$. Tím jsme dokázali $(p, g) \circ (p^{-1}, h) = (n, o)$. Podobně ukážeme také $(p^{-1}, h) \circ (p, g) = (n, o)$, tj. (p^{-1}, h) je opravdu inverzní pozice k pozici (p, g).

Zbývá ověřit asociativitu skládání pozic. Zvolíme tři libovolné pozice $\boldsymbol{p} = (p, g)$, $\boldsymbol{q} = (q, h)$ a $\boldsymbol{r} = (r, k)$. Máme ukázat rovnost $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{r})$. Platí $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} = (p \circ q, l)$, kde $il = ig \oplus (ip)h$. Potom $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{r} = (p \circ q, l) \circ (r, k) = ((p \circ q) \circ r, m)$, kde $im = il \oplus (i(p \circ q))k = (ig \oplus (ip)h) \oplus (i(p \circ q))k$. Nyní budeme počítat $\boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{r}) = (p, g) \circ (q \circ r, s)$, kde zobrazení orientace s je definované pevností $is = ih \oplus (iq)k$. Potom $(p, g) \circ (q \circ r, s) = (p \circ (q \circ r), t)$ a $it = ig \oplus (ip)s = it \oplus ((ip)h \oplus (i(p \circ q))k)$. Protože operace skládání v grupě $\boldsymbol{Z}_3$ je asociativní, platí $it = im$ pro každé $i \in I$. A protože také skládání permutací je asociativní, máme rovněž $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$. Tím jsme dokázali, že opravdu platí $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{r})$. Množina všech pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ spolu s operací skládání tvoří grupu.

Při konstrukci grupy pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ jsme používali dvě grupy — grupu všech permutací na množině I pohyblivých prvků a grupu orientací, v tomto případě $\boldsymbol{Z}_3$. Žádné speciální vlastnosti těchto dvou grup jsme nepotřebovali. Ve skutečnosti je konstrukce grupy pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ velice speciálním případem obecné a důležité konstrukce v teorii grup, věncového součinu grup.

Definice věncového součinu grup. Předpokládejme, že $\boldsymbol{P} = (P, \circ)$ je permutační grupa na nějaké množině I a $\boldsymbol{G} = (G, \oplus)$ libovolná grupa. Na množině všech dvojic tvaru (p, g), kde $p \in P$ a $g{:}I \to G$ je zobrazení, definujeme operaci skládání předpisem $(p, g) \circ (q, h) = (p \circ q, k)$ zobrazení k je definováno formulí $ik = ig \oplus (ip)h$. Množinu všech dvojic (p, g) spolu s právě definovanou operací skládání budeme nazývat *věncový součin grup* $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{G}$ a označovat ji budeme $\boldsymbol{P} \int \boldsymbol{G}$.

Věncový součin grup je grupa. To jsme vlastně dokázali už před definicí věncového součinu. Při důkazu, že množina pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ s operací skládání tvoří grupu, jsme nijak nevyužívali speciálních vlastností grupy polohových permutací a grupy $\boldsymbol{Z}_3$, a celý důkaz můžeme doslova zopakovat i v případě obecných grup $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{G}$.

> Grupa všech možných pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ se rovná věncovému součinu $\boldsymbol{S}_7 \int \boldsymbol{Z}_3$.

A teď zpátky k Rubikově krychli. Tady je situace o něco málo komplikovanější, protože grupy orientací prvků z různých orbit jsou různé — $\boldsymbol{Z}_3$ u rohové orbity a $\boldsymbol{Z}_2$ u hranové. Jak tedy popíšeme polohu a orientaci všech prvků v nějaké pozici $\boldsymbol{p}$? Začneme rohovými prvky. Jejich poloha je popsána permutací p_1 na množině $J = \{abc, abf, ace, aef, bcd, bdf, cde, def\}$ všech rohových prvků. Jejich orientace jsou stejně jako u krychle $2 \times 2 \times 2$ popsány zobrazením orientace $g_1{:}J \to Z_3$, které každému rohovému prvku $j \in J$ přiřadí hodnotu jeho orientace $jg_1 \in Z_3$ vzhledem k nějakému pevně zvolenému orientačnímu systému, například k tomu na obrázku 5.1.b. Poloha a orientace všech rohových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ je tedy popsána dvojicí (p_1, g_1).

Podobně popíšeme také polohu a orientaci hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$. Poloha je určená permutací p_2 na množině $K = \{ab, ac, ae, af, bc, bd, bf, cd, ce, de, df, ef\}$ všech hranových prvků. Každý z nich má dvě možné orientace $0, 1 \in Z_2$ a tato orientace je popsána zobrazením orientace $g_2 : K \to Z_2$, které každému prvku $k \in K$ přiřazuje hodnotu jeho orientace kg_2 vzhledem k nějakému orientačnímu systému, třeba k tomu na obrázku 5.1.a. Poloha a orientace všech hranových prvků je potom popsána dvojicí (p_2, g_2). Celá pozice $\boldsymbol{p}$ je jednoznačně popsána dvojicí dvojic $((p_1, g_1), (p_2, g_2))$. Pro jednoduchost budeme tuto dvojici dvojic s pozicí $\boldsymbol{p}$ ztotožňovat a psát $\boldsymbol{p} = ((p_1, g_1), (p_2, g_2))$.

Také pozice na Rubikově krychli můžeme přirozeným způsobem skládat. Uděláme-li postupem P pozici $P\boldsymbol{U} = \boldsymbol{p} = ((p_1, g_1), (p_2, g_2))$ a postupem Q pozici $Q\boldsymbol{U} = \boldsymbol{q} = ((q_1, h_1), (q_2, h_2))$, jakou pozici uděláme složeným postupem PQ? Zcela stejně jako v případě krychle $2 \times 2 \times 2$ ukážeme, že postup PQ udělá pozici $(PQ)\boldsymbol{U} = ((p_1 \circ q_1, k_1), (p_2 \circ q_2, k_2))$, kde $jk_1 = jg_1 \oplus (jp_1)h_1$ (sčítáme v grupě $\boldsymbol{Z}_3$), a $ik_2 = ig_2 \oplus (ip_2)h_2$ (tady sčítáme v $\boldsymbol{Z}_2$). Tuto definici skládání pozic na Rubikově krychli můžeme rozšířit i na neřešitelné pozice.

Definice skládání pozic na Rubikově krychli. Jsou-li $\boldsymbol{p} = ((p_1, g_1), (p_2, g_2))$ a $\boldsymbol{q} = ((q_1, h_1), (q_2, h_2))$ dvě pozice na Rubikově krychli, pak jejich složení je pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} = ((p_1 \circ q_1, k_1), (p_2 \circ q_2, k_2))$, kde $jk_1 = jg_1 \oplus (jp_1)h_1$ a $ik_2 = ig_2 \oplus (ip_2)h_2$.

Podíváme-li se pouze na rohové části pozic, vidíme, že jejich skládání je zcela stejné jako skládání v grupě $\boldsymbol{S}_J \int \boldsymbol{Z}_3$, která je věncovým součinem symetrické grupy na množině J s grupou $\boldsymbol{Z}_3$. Podobně skládání hranových částí pozic na Rubikově krychli je stejné jako skládání ve věncovém součinu $\boldsymbol{S}_K \int \boldsymbol{Z}_2$. A vzpomeneme-li si na definici obyčejného součinu grup ze čtvrté kapitoly, vidíme, že skládání pozic na Rubikově krychli je stejné jako operace skládání v součinu grup $(\boldsymbol{S}_J \int \boldsymbol{Z}_3) \times \times (\boldsymbol{S}_K \int \boldsymbol{Z}_2)$. Vzhledem k tomu, že množina J má osm prvků a K dvanáct, dostáváme, že:

> Množina všech možných pozic na Rubikově krychli spolu s operací skládání pozic je grupa a rovná se součinu grup $(\boldsymbol{S}_8 \int \boldsymbol{Z}_3) \times (\boldsymbol{S}_{12} \int \boldsymbol{Z}_2)$.

Matematický model Rubikovy krychle pak vypadá následovně. V grupě všech možných pozic $(\boldsymbol{S}_8 \int \boldsymbol{Z}_3) \times \times (\boldsymbol{S}_{12} \int \boldsymbol{Z}_2)$ zvolíme pozice $\boldsymbol{a} = A\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{b} = B\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{c} = C\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{d} = D\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{e} = E\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{f} = F\boldsymbol{U}$. Jsou to pozice, které uděláme jednotlivými tahy. Umět řešit Rubikovu krychli pak znamená popsat množinu všech pozic, které dostaneme skládáním prvků $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, tj. popsat všechny řešitelné pozice a pro každou řešitelnou pozici $\boldsymbol{p}$ najít nějaké její vyjádření jako složení prvků $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, neboli najít postup $\boldsymbol{P}$, kterým pozici $\boldsymbol{p}$ složíme. Obojí už umíme.

Stručně ještě uvedeme grupy všech možných pozic na dalších hlavolamech s orientací, kterými jsme se dosud zabývali. Na čtyřstěnu jsou dvě orbity, čtyřprvková rohová a šestiprvková hranová. Grupa orientací rohových prvků je $\boldsymbol{Z}_3$, hranových $\boldsymbol{Z}_2$.

> Grupa všech možných pozic na čtyřstěnu se rovná součinu $(\boldsymbol{S}_4 \int \boldsymbol{Z}_3) \times \times (\boldsymbol{S}_6 \int \boldsymbol{Z}_2)$.

Podobně popíšeme grupu pozic na dvanáctistěnu.

> Grupa všech možných pozic na dvanáctistěnu se rovná součinu $(\boldsymbol{S}_{20} \int \boldsymbol{Z}_3) \times$ $\times (\boldsymbol{S}_{30} \int \boldsymbol{Z}_2)$.

Na krychli $4 \times 4 \times 4$ mohou mít různou orientaci rohové a hranové prvky, orientace stěnových prvků zanedbáváme. Rohových prvků je osm a grupa jejich orientací je $\boldsymbol{Z}_3$, hranových prvků je dvacet čtyři a grupa orientací je $\boldsymbol{Z}_2$. Také stěnových prvků je čtyřiadvacet.

> Grupa všech možných pozic na krychli $4 \times 4 \times 4$ se rovná součinu $(\boldsymbol{S}_8 \int \boldsymbol{Z}_3) \times$ $\times (\boldsymbol{S}_{24} \int \boldsymbol{Z}_2) \times \boldsymbol{S}_{24}$.

Připomeňme ještě jednou, že všemi možnými pozicemi na nějakém hlavolamu rozumíme všechny pozice, které můžeme udělat tak, že hračku rozebereme a zase složíme. Patří sem tedy i pozice neřešitelné.

Grupy řešitelných pozic. Také všechny řešitelné pozice na každém úplném hlavolamu tvoří spolu s operací skládání grupu, podgrupu grupy všech možných pozic. Řešitelné pozice jsou ty, které můžeme udělat ze základní pozice nějakým postupem. Jsou-li tedy $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ dvě řešitelné pozice, pak $\boldsymbol{p} = PU$ a $\boldsymbol{q} = QU$ pro nějaké postupy P, Q. Složeným postupem PQ uděláme pozici $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ (tak je skládání pozic definované), pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je proto také řešitelná. Nulovým postupem N základní pozici nezměníme, uděláme jím tedy vlastně neutrální prvek grupy všech možných pozic. A protože postupy PP^{-1} a $P^{-1}P$ nic nezměníme, hra zůstane v základní pozici, platí, že pozice $(PP^{-1})U = (P^{-1}P)U$ je neutrální prvek grupy všech možných pozic. Označíme-li $(P^{-1})U = r$, rovnají se obě pozice $(PP^{-1})U = p \circ r$ a $(P^{-1}P)U = r \circ p$ neutrálnímu prvku, r je proto inverzní prvek k p. Tím jsme dokázali, že:

> Množina všech řešitelných pozic na nějakém úplném hlavolamu spolu s operací skládání pozic je podgrupa grupy všech možných pozic na tomto hlavolamu.

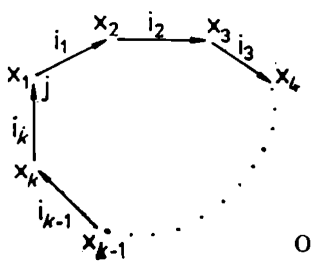
***5.6. Křížova věta.** Řešitelné pozice na všech možných hlavolamech jsme charakterizovali na mnoha místech v předchozím textu. Vlastnosti polohových permutací jsme zkoumali ve třetí a čtvrté kapitole, orientace v prvních odstavcích této kapitoly. Tam jsme se také zmínili o Křížově větě, která popisuje možné orientace prvků v řešitelných pozicích. Nyní si pro zajímavost tuto velmi pěknou větu uvedeme. Jejím autorem je Igor Kříž, bývalý úspěšný účastník matematických olympiád a nyní posluchač matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Uvažujeme nějakou orbitu na úplném hlavolamu s orientací, jejíž prvky se mohou na stejném místě vyskytovat s různými orientacemi. Budeme předpokládat, že grupa G orientací prvků této orbity je komutativní. Takovou vlastnost mají všechny hlavolamy v této knize, grupa orientací byla dosud vždy Z_2 nebo Z_3. Dále budeme předpokládat, že opakováním žádného tahu nemůžeme změnit orientaci nějakého prvku naší orbity. Jinak řečeno, opakujeme-li jeden tah tak dlouho, až se nějaký prvek z naší orbity vrátí na původní místo, vrátí se tam hned poprvé také s původní orientací. I tuto vlastnost mají všechny dosud zkoumané hlavolamy, na žádném nemůžeme změnit orientaci nějakého prvku na stejném místě opakováním pouze jednoho tahu. Nyní zvolíme na hlavolamu orientační systém v naší vybrané orbitě tak, abychom mohli o každém prvku na každém místě rozhodnout, jakou má orientaci, a aby hodnota orientace správně orientovaného prvku na správném místě byla rovná neutrálnímu prvku 0 grupy orientací $\mathbf{G}$. Takové orientační systémy jsme vždy volili.

A jak zní Křížova věta?

> Za uvedených předpokladů má součet orientací všech prvků dané orbity v každé řešitelné pozici hodnotu $0 \in \mathbf{G}$.

Důkaz je celkem jednoduchý. Předpokládejme, že hra je v nějaké pozici p. Vezmeme si jeden prvek j ve zvolené orbitě a budeme předpokládat, že má orientaci $x_1 \in \mathbf{G}$. Nyní uděláme nějaký tah. V grafu polohové permutace, kterou tento tah udělá, leží námi zvolený prvek j v nějakém cyklu délky $k \geq 1$ — obrázek 5.23. Další prvky v tomto cyklu mají v pozici p orientace $x_2, x_3, \ldots, x_k$ podle obrázku. U šipek v grafu permutace jsou zaznamenané prvky $i_1, i_2, \ldots, i_k$ grupy orientací $\mathbf{G}$.



Obr. 5.23

Tyto prvky zachycují, jak se změní orientace jednotlivých prvků v tomto cyklu, uděláme-li zvolený tah. Prvek s orientací x_1 bude mít po tomto tahu orientaci $x_1 \oplus i_1$, prvek s orientací x_2 bude mít novou orientaci $x_2 \oplus i_2$ atd.

Prvek j se dostane poprvé zpět na své původní místo, opakujeme-li zvolený tah k-krát po sobě. Přitom se jeho původní orientace mění postupně z x_1 na $x_1 \oplus i_1$, pak na $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2$ atd., až nakonec po k tazích bude mít hodnotu $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus i_k$. Druhý předpoklad říká, že se tato hodnota bude rovnat opět počáteční orientaci x_1. Z rovnosti $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus i_k = x_1$ plyne $i_1 \oplus i_2 \oplus \oplus \ldots \oplus i_k = 0$.

Sečteme-li nyní hodnoty orientací všech prvků v cyklu obsahujícím j po provedení zvoleného tahu, dostaneme $(x_1 \oplus i_1) \oplus (x_2 \oplus i_2) \oplus \ldots \oplus (x_k \oplus i_k)$. Protože grupa G je komutativní, můžeme jednotlivé prvky součtu libovolně proházet, aniž by se výsledek změnil. Součet orientací se proto rovná také $(x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_k) \oplus (i_1 \oplus i_2 \oplus \oplus \ldots \oplus i_k) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_k$, neboť $i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus \oplus i_k = 0$. Součet orientací prvků v jednom cyklu se tedy provedením zvoleného tahu nezmění. A protože to platí pro všechny cykly, nezmění se ani součet orientací všech prvků v naší orbitě. Platí to také pro každý tah, součet orientací všech prvků ve zvolené orbitě je proto stejný jako součet orientací všech prvků v pozici základní. V ní je každý prvek na správném místě a se správnou orientací. Podle toho, jak jsme zvolili orientační systém, má jeho orientace v základní pozici hodnotu $0 \in \mathsf{G}$. Součet orientací všech prvků naší orbity v základní pozici je tedy 0, a takový musí být i v každé řešitelné pozici.

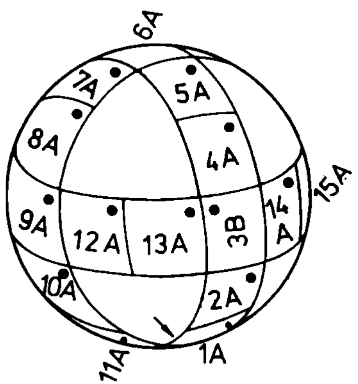
Z Křížovy věty tedy okamžitě plynou vlastnosti orientací prvků v řešitelných pozicích na všech dosud zkoumaných hlavolamech.

***5.7. Koule a kosá krychle.** Jsou to poslední dva hlavolamy v této knížce, které ještě neumíme řešit.

Koule. Koule — obrázek 1.10. — není o nic obtížnější než ostatní hlavolamy. Její teorie je ale poněkud komplikovanější, a proto ji uvedeme až nyní. Na kouli je třicet pohyblivých čtverečků. Můžeme si je rozdělit do patnácti dvojic, každou dvojici tvoří vždy dva protilehlé čtverce. Tyto dva čtverce mají vůči sobě stále stejnou polohu, v každé pozici jsou na dvou protilehlých místech. Zvolíme-li v každém z nich jeden roh tak, aby jejich spojnice byla průměrem koule, žádný postup tuto vlastnost nezmění. Pokud se nám podaří jeden ze čtverců pootočit doprava, pootočí se druhý automaticky doleva. Dvojice protilehlých čtverců mají stejnou vlastnost jako dvojice plošek na hranových kostičkách na Rubikově krychli — jejich poloha a orientace jsou vzájemně propojené, jeden vůči druhému nemůžeme ani posunout, ani otočit. Při skládání koule je proto musíme považovat za jeden prvek. Tím jsme počet pohyblivých prvků zmenšili na polovinu, na patnáct. Každý je tvořený dvojicí protilehlých čtverečků.

Při obarvení podle obrázku 1.10. jsou některé prvky nerozlišitelné, jsou obarvené stejně. Ve správné pozici tak mohou být na různých místech. Jako vždy změníme označení tak, aby měl každý prvek v základní pozici jediné správné místo a jedinou správnou orientaci. Základní pozice je na obrázku 5.24 na další stránce. Pohyblivé prvky jsou označené čísly 1, 2, 3, ..., 15, každý z nich má jednu dominantní plošku, označenou A, a druhou recesívní, kterou označíme B. $3A$ je dominantní ploška prvku 3, $11B$ je recesívní ploška prvku 11. Na obrázku 5.24. je navíc šipkou označené správné místo a orientace pro prvek 1, přesněji pro jeho dominantní plošku $1A$. Poloha a orientace všech ostatních prvků je pak jednoznačně určená vzhledem k prvku 1.

Na každé plošce zvolíme dále jeden řídicí vrchol. U dominantních plošek (ty jsou všechny aspoň částečně vidět na obrázku 5.24.) to bude vrchol vpravo nahoře nad



Obr. 5.25

označením, tj. vpravo nahoře nad $1A$, $2A$, atd. Na recesívních ploškách zvolíme řídicí vrchol tak, aby spojnice řídicích vrcholů obou protilehlých plošek tvořících jeden prvek byla průměr krychle. Řídicí vrcholy jsou na obrázcích označené tečkami.

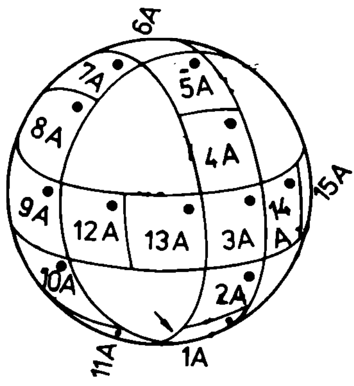
Jaké orientace může mít jeden prvek na stejném místě? Vysvětlíme to třeba na prvku 3. Může být tak jako na obrázku 5.24., nebo pootočený o 90°, 180° nebo 270° vpravo. Tato různá pootočení tvoří grupu, stejně jako ji tvořily různé orientace hranových nebo rohových prvků na Rubikově krychli. Tentokrát je to grupa $\boldsymbol{Z}_4$.

Grupa $\boldsymbol{Z}_4$. Na množině $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ definujeme operaci skládání takto: $x \oplus y$ se rovná zbytku čísla $x + y$ (normální součet) při dělení číslem 4. Tak třeba

$2 \oplus 3 = 1$, $2 \oplus 2 = 0$ atd. Zcela stejně jako v případě grup $\boldsymbol{Z}_2$ a $\boldsymbol{Z}_3$ lze dokázat, že množina $\boldsymbol{Z}_4$ s právě definovanou operací tvoří grupu. Budeme ji označovat $\boldsymbol{Z}_4$. Je to grupa komutativní. Všimněte si, že součet (tj. složení) dvou sudých nebo dvou lichých prvků v grupě $\boldsymbol{Z}_4$ je sudý, součet lichého se sudým pak lichý. Tato vlastnost bude důležitá.

Cvičení 5.12. Ověřte, že $\boldsymbol{Z}_4$ splňuje axiómy grupy.

Prvek 3 může být navíc převrácený, recesívní ploškou $3B$ na místě dominantní $3A$, jako na obrázku 5.25.



Obr. 5.24

Převrácený prvek může být také pootočený čtyřmi různými způsoby. Celkem je proto pro orientaci jednoho prvku na stejném místě osm různých možností.

Jakou grupu těchto osm možných orientací tvoří? Orientaci každého prvku na správném místě popíšeme dvojicí (x, y). Číslo x udává, je-li prvek převrácený nebo ne. Je-li $x = 0$, prvek převrácený není, je dominantní ploškou tam, kde má být dominantní ploška také v základní pozici. V opačném případě bude $x = 1$. Druhé číslo y udává, jak je prvek pootočený. Tady musíme být trochu opatrnější. Otočíme-li jednu plošku doprava o 90°, otočí se ploška protilehlá také o 90°, *ale doleva*. Otočení budeme proto posuzovat pouze podle dominantních plošek. Je-li řídicí vrchol dominantní plošky tam, kde má být řídicí vrchol plošky na stejném místě v základní pozici, má y hodnotu 0. Je-li dominantní ploška oproti správné orientaci otočená o 90° doprava, má y hodnotu 1. Je-li otočená o 180° nebo 270° vpravo, má y hodnotu 2 nebo 3. Podle recesívních plošek to pak vychází přesně naopak. Číslo y má hodnotu 0, 1, 2, 3, je-li recesívní ploška pootočená o 0°, 90°, 180°, 270° *doleva*. Prvek 3 na obrázku 5.25. má tedy hodnotu $y = 1$. Jeho celková orientace je (1, 1), je převrácený a recesívní ploška je otočená o 90° vlevo (dominantní pak musí být otočená o 90° vpravo).

Všimněte si také, že dvojnásobným převrácením se vrátí dominantní ploška na původní místo. Číslo x proto budeme považovat za prvek grupy $\boldsymbol{Z}_2$, číslo y pak za prvek grupy $\boldsymbol{Z}_4$.

Dominantní plošky a řídicí vrcholy nyní využijeme pro určení hodnoty orientace prvku na libovolném místě, tj. ke stanovení orientačního systému na kouli. Je-li dominantní ploška nějakého prvku i tam, kde má být dominantní ploška prvku na stejném místě v základní pozici, bude $x = 0$. V opačném případě bude $x = 1$. Je-li navíc dominantní ploška pootočená vůči plošce na stejném místě v základní pozici o 0°, 90°, 180° nebo 270° vpravo, bude hodnota y rovná 0, 1, 2, nebo 3. Chceme-li posuzovat orientaci podle recesívní plošky, musíme brát v úvahu otočení vlevo. Každému prvku na každém místě tak umíme přiřadit jednoznačně nějakou dvojici $(x, y) \in Z_2 \times Z_4$, která popisuje jeho orientaci. Pozici $\boldsymbol{p}$ potom můžeme stejně jako u jiných hlavolamů s orientací popsat dvojicí (p, g), kde p je polohová permutace na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ a g je zobrazení orientace, které každému prvku i přiřazuje jeho orientaci $ig \in Z_2 \times Z_4$. Budeme psát $\boldsymbol{p} = (p, g)$.

Jak se mění orientace prvku, uděláme-li nějaký postup? Vezmeme si základní pozici a v ní nějaký prvek i. Má správnou orientaci $(0, 0)$. Postupem P přejde na místo ip a jeho orientace bude $ig = (x, y)$. Pokud by byl prvek i na počátku pootočený, měl orientaci $(0, v)$, pak jeho dominantní ploška bude vůči dominantní plošce v prvním případě stále pootočená o $v . 90°$ *vpravo*. Po postupu P se tedy původní orientace $(0, v)$ prvku i ve druhém případě změní na $(x, v \oplus y)$, sčítáme v grupě $\boldsymbol{Z}_4$. Zatím to vychází podle očekávání. K překvapení dojde, jestliže je prvek i na počátku překlopený, má orientaci $(1, v)$. Nyní se recesívní ploška prvku i pohybuje po stejné dráze, po jaké se pohybovala dominantní ploška stejného prvku v prvním případě, kdy jsme začínali v základní pozici. Tehdy se dominantní ploška pootočila o $y . 90°$ vpravo. Tentokrát se pootočí stejně recesívní ploška — o $y . 90°$. vpravo. Orientaci ale posuzujeme podle dominantní plošky. Protože se recesívní ploška otočila o $y . 90°$ vpravo, musí se dominantní ploška otočit o $y . 90°$ vlevo, tj. o $(4 - y) . 90°$ vpravo. Jestliže se v prvním případě prvek i překlopil, tj. jestliže $x = 1$, pak se překlopí také v posledním případě. Počáteční orientace $(1, v)$ prvku i se tak změní na $(1 \oplus x, v \oplus (4 - - y))$. Orientace prvku i proto neskládáme stejně jako v součinu $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4$, skládání je v tomto případě jiné:

$$(0, v) \circ (x, y) = (0 \oplus x, v \oplus y),$$

první součet je v grupě $\boldsymbol{Z}_2$, druhý v $\boldsymbol{Z}_4$,

$$(1, v) \circ (x, y) = (1 \oplus x, v \oplus (4 - y)),$$

také tady jsou oba součty v $\boldsymbol{Z}_2$ a $\boldsymbol{Z}_4$, rozdíl $4 - y$ je normální rozdíl celých čísel.

Množina $Z_2 \times Z_4$ s právě definovanou operací tvoří grupu. Neutrální prvek je $(0, 0)$, k $(0, y)$ je inverzní $(0, 4 - y)$, k $(1, y)$ je inverzní $(1, y)$. Trochu pracnější je ověřit asociativitu, necháme to jako další cvičení. Tuto grupu budeme označovat $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$, abychom ji odlišili od obyčejného součinu $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$. Obě grupy jsou definované na stejných množinách, operace skládání jsou ale různé. Grupa $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ se nazývá *semidirektní* (polopřímý) *součin* grup $\mathbf{Z}_2$ a $\mathbf{Z}_4$. Je to speciální případ další důležité základní konstrukce v teorii grup — semidirektního součinu dvou grup. Abychom odlišili operace skládání v grupách $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ a $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$, budeme používat v $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ symbol $\oplus$ místo $\circ$.

Všimněme si ještě toho, že grupa $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ není komutativní, $(0, 1) \oplus (1, 0) = (1, 1)$ a $(1, 0) \oplus (0, 1) = (1, 3)$. Koule je tak jediná hračka v této knize, na které je grupa orientací nekomutativní. Jednu vlastnost má ale skládání v grupě $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ společnou se skládáním v grupě $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$. Ve složení $(u, v) \oplus (x, y) = (r, s)$ můžeme o paritě čísel r, s rozhodnout pouze na základě znalosti parity čísel u, x a v, y. Jsou-li obě čísla u, x sudá nebo obě lichá, pak je také $r = u \oplus x$ sudé. Je-li jedno sudé a jedno liché, je $r = u \oplus x$ liché. Čísla y a $4 - y$ jsou buď obě sudá, nebo obě lichá. Jsou-li čísla v, y obě sudá, nebo obě lichá, pak také v, $4 - y$ jsou obě sudá, nebo obě lichá. Prvek s je buď $v \oplus y$, nebo $v \oplus (4 - y)$, v každém případě je proto sudý. Je-li jedno z čísel v, y sudé a druhé liché, je s v každém případě liché. Žádná tato vlastnost také nezávisí na pořadí, v jakém prvky skládáme.

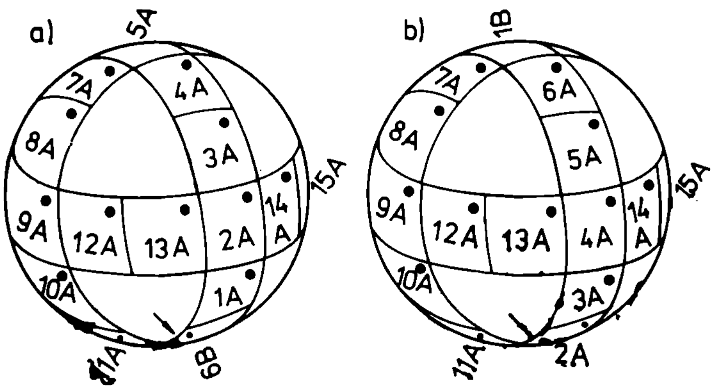
Každou pozici $\boldsymbol{p}$ na kouli můžeme tedy popsat dvojicí $\boldsymbol{p} = (p, g)$, kde p je polohová permutace na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ a $g : I \to \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ je zobrazení orientace. Jednotlivé pozice můžeme pak skládat tak, jak jsme se to naučili v odstavci 5.5. Dostáváme tak grupu všech možných pozic na kouli.

> Grupa všech pozic na kouli se rovná věncovému součinu $\boldsymbol{S}_{15} \int (\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4)$.

Poznamenejme, že v definici zobrazení orientace složené pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ musíme používat skládání v grupě $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4$, tj. $\oplus$.

Nyní popíšeme řešitelné pozice a najdeme postupy jak je složit. K popisu řešitelných pozic nemůžeme použít Křížovu větu, grupa orientací $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4$ není komutativní. Koule navíc nesplňuje ani druhý předpoklad Křížovy věty. Opakujeme-li jeden tah šestkrát, vrátí se všechny prvky v příslušném pruhu zpět na původní místa převrácené, dominantní plošky budou na místech recesívních. Koule je tak jediná hra, na které můžeme měnit orientaci prvků opakováním jediného tahu. Poloha a orientace prvků spolu úzce souvisí. Řešitelné pozice musíme popsat jinak, bez použití Křížovy věty.

Probereme, jaké pozice udělají jednotlivé tahy. Začneme B a B^{-1}.

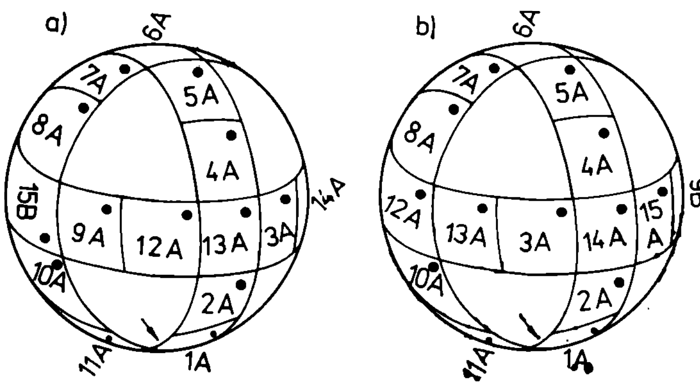


Obr. 5.26

Na obrázku a) je pozice po tahu B, na b) pak po inverzním B^{-1}. Tah B udělá cyklus délky šest na prvcích 1, 2, 3, 4, 5, 6, ostatní zůstávají na místě. Orientace všech prvků s výjimkou 6 je stejná jako původní — (0, 0). Prvek 6 je převrácený, recesívní ploška $6B$ je na místě dominantní $1A$. Recesívní ploška je pootočená o 90° vlevo, dominantní $6A$ proto musí být o 90° vpravo. Orientace prvku 6 je (1, 1). Tah B tedy udělá pozici $\mathbf{p} = (p, g)$, polohová permutace je lichá a součet orientací všech prvků v (grupě $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$) je (1, 1), obě čísla v součtu jsou lichá.

S tahem B^{-1} je to stejné. Udělá šesticyklus, a pouze prvek 1 změní orientaci. Recesívní ploška $1B$ je na místě dominantní $6A$ a otočená o 90° vlevo. Dominantní ploška $1A$ je proto otočená o 90° vpravo, orientace prvku 1 je tedy také (1, 1). Součet orientací všech prvků v pozici, kterou udělá tah B^{-1}, je proto (1, 1), také tady jsou obě čísla lichá.

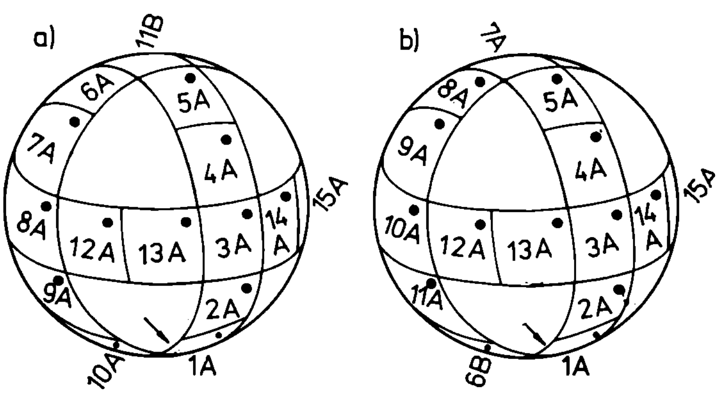
Podobné je to s tahy A a A^{-1}.



Obr. 5.27

Tah A na obrázku a) udělá šesticyklus a změní orientaci pouze prvku 15. Recesívní ploška $15B$ na dominantním místě je otočená o 90° vpravo, dominantní $15A$ proto musí být vlevo. Prvek 15 má orientaci (1, 3). Pozice je lichá a součet orientací všech prvků je (1, 3), obě čísla jsou zase lichá. Stejné to je s tahem A^{-1} — obrázek b). Tentokrát se mění orientace pouze u prvku 9 a je také (1, 3). Součet orientací všech prvků je (1, 3), všechno je zase liché.

A nakonec tahy C a C^{-1}.



Obr. 5.28

Oba tahy udělají cyklus délky šest, každý mění orientaci dvou prvků. Na obrázku a) je pozice po tahu C, změněnou orientaci mají prvky 6 a 11. Prvek 6 je pouze pootočený doleva, není převrácený, má orientaci (0, 3). Recesívní ploška $11B$ je na místě dominantní plošky $6A$, správně otočená. Prvek 11 má orientaci (1, 0). Všechny zbývající prvky mají správnou orientaci (0, 0). Součet orientací všech prvků závisí na pořadí, v jakém je sčítáme, může být buď $(0, 3) \oplus (1, 0) = (1, 3)$, nebo $(1, 0) \oplus (0, 3) = (1, 1)$. V každém případě jsou obě čísla v součtu lichá, což je pro nás důležité. Stejné je to po tahu C^{-1} — obrázek b). Změní se orientace prvku 7 na $(0, 1)$ a prvku 6 na $(1, 0)$. Jejich součet je buď $(0, 1) \oplus (1, 0) = (1, 1)$, nebo $(1, 0) \oplus (0, 1) = (1, 3)$, obě čísla jsou vždy lichá.

Můžeme shrnout: každý tah udělá lichou permutaci a součet orientací všech prvků v nové pozici (v grupě $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4$ a v libovolném pořadí) je nějaký prvek $(r, s) \in \in \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4$, ve kterém jsou obě čísla r, s vždy lichá.

Uděláme nyní dva tahy, jeden udělá pozici $\boldsymbol{p} = (p, g)$ a druhý $\boldsymbol{q} = (q, h)$. Jejich složení proto udělá pozici $p \circ q = (p \circ q, k)$, kde $ik = ig \oplus (ip)\, h$. Permutace $p \circ \circ q$ bude sudá, je složením dvou lichých. Ještě potřebujeme sečíst všechny orientace $ik = ig \oplus (ip)\, h$ v nějakém pořadí. Můžeme to udělat třeba tak, že sečteme napřed všechny orientace ig a pak všechny orientace $(ip)\, h$. Součet se tím změní, protože grupa $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4$ není komutativní, nezmění se ale parita čísel ve výsledku (x, y). Sečtením všech orientací ig dostaneme nějaký prvek (r, s), obě čísla jsou lichá. Také sečtením všech orientací $(ip)\, h$ dostaneme nějaký prvek (u, v), ve kterém jsou obě čísla u, v lichá, sčítáme orientace všech prvků v pozici $\boldsymbol{q}$. Celkový součet orientací prvků v pozici $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je proto $(r, s) \oplus (u, v) = (x, y)$. Tento výsledek závisí na tom, v jakém pořadí orientace ik sčítáme, nezávisí na něm ale parita čísel x, y. V tomto případě jsou obě sudá. Uděláme-li dva tahy, je ve výsledné pozici všechno sudé — jak polohová permutace, tak obě čísla v libovolném součtu orientací všech prvků. Po třech tazích bude všechno liché, po čtyřech zase sudé. V každé řešitelné pozici musí být proto buď všechno sudé, nebo všechno liché.

Je-li v nějaké pozici $\mathbf{p} = (p, g)$ na kouli polohová permutace p lichá a v součtu (r, s) orientací ig všech prvků i (v grupě $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ a v libovolném pořadí) aspoň jedno z čísel r, s sudé, nebo permutace p sudá a aspoň jedno z čísel r, s liché, je pozice neřešitelná.

A nakonec ukážeme, jak pozice, ve kterých je všechno sudé nebo všechno liché, dostat do základní pozice 5.24. Můžeme předpokládat, že v pozici $\mathbf{p} = (p, g)$ je všechno sudé, v opačném případě stačí udělat jeden tah. Nejdříve dostaneme všechny prvky na správná místa. Tak jako vždy se napřed pokusíme udělat transpozici v jednom pruhu, třeba v A, tak, aby všechno ostatní v A zůstalo na původních místech. To je jednoduché. Postup $P = BAB^{-1}A^{-1}B$ prohodí v pruhu A prvky 3 a 13 a všechno ostatní v A nechá na místě. Postup $PAP^{-1}A^{-1}$ proto udělá trojcyklus na prvcích 3, 12, 13, a jinak na kouli nic nezmění. Konjugováním tohoto postupu uděláme každý trojcyklus a tím i každou sudou permutaci. Dostaneme tak pozici $\mathbf{q} = (n, h)$, ve které je polohová permutace identická, všechno je na správném místě.

V součtu orientací všech prvků v pozici $\mathbf{q}$ musí být proto obě čísla sudá. Speciálně to znamená, že je v $\mathbf{q}$ sudý počet převrácených prvků. Dva sousední prvky 12 a 13 převrátíme třeba takto: postup $(PAP^{-1}A^{-1})\,A^{-1}$ nechá mimo pruh A všechno na místě, v pruhu A nechá na místě prvky 12 a 13 a na zbývajících čtyřech udělá čtyřcyklus. 3 bude na místě 9, 9 na místě 15, 15 na 14 a 14 na místě 3. Navíc bude prvek 9 převrácený. Uděláme-li $(PAP^{-1}A^{-1})\,A^{-1}$ čtyřikrát po sobě, vrátí se všechny prvky na původní místa a prvky 3, 9, 14 a 15 budou převrácené. Nyní šestinásobným opakováním tahu A převrátíme všechno v pruhu A, prvky 3, 9, 14 a 15 pak převrácené nebudou, zato 12 a 13 ano. Konjugováním tohoto postupu převrátíme libovolné dva prvky a dostaneme tak nakonec pozici **r**, ve které je všechno na správném místě a nepřevrácené, pouze snad špatně otočené. Součet všech otočení musí být sudý.

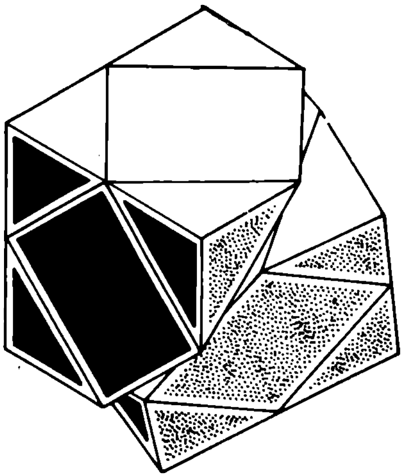
A jak změníme otočení? Postupem $Q = BBBA^{-1}A^{-1}A^{-1}CCCAAA$ otočíme prvek 3 o 90° vlevo, jinak všechno ostatní v pruhu A zůstane na původních místech a s původní orientací. Postup $QAQ^{-1}A^{-1}$ otočí prvek 3 vlevo, 13 vpravo, a jinak nic nezmění. Konjugováním $QAQ^{-1}A^{-1}$ můžeme pootočit libovolné dva prvky, jeden vlevo a druhý vpravo. Jestliže byl součet orientací v pozici **r** rovný (0, 0), dostaneme tak nakonec pozici základní. Jestliže byl (0, 2), dostaneme pozici, ve které všechny prvky až na jeden mají správnou orientaci (0, 0), ten poslední pak (0, 2).

Nechť je to třeba prvek 3. Uděláme napřed šestkrát tah B a potom šestkrát A. Prvek 3 se vrátí na původní místo a se správnou orientací (0, 0). Všechny ostatní prvky v pruzích B, A jsou převrácené, je jich celkem 10. Ty převrátíme zpět se správnou orientací postupným používáním postupu na převrácení, napřed v pruhu A a potom v pruhu B. Tolik o kouli.

Každá pozice na kouli, ve které je buď všechno sudé, nebo všechno liché, je řešitelná.

Kosá krychle je maskovaný čtyřstěn. Pokud není z obrázku 1.6. jasné, jaké se na kosé krychli dají dělat tahy, pak na dalším obrázku je jeden naznačený.

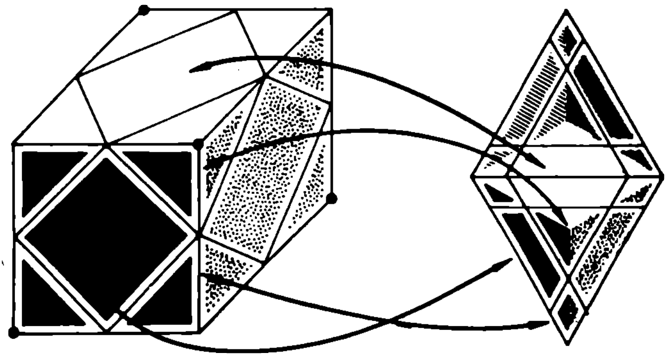
Krychle má čtyři dlouhé tělesové úhlopříčky a rovina kolmá na některou z nich a procházející středem dělí krychli na dvě přesně stejné poloviny. Tyto poloviny lze vůči sobě pootáčet o 120° nebo 240°.



Obr. 5.29

Obarvení, které ze čtyřstěnu dělá kosou krychli, je na obrázku 1.7. A proč jsou obě hračky, aspoň pokud jde o řešení, stejné, si vysvětlíme na obrázku 5.30.

Na krychli jsou vyznačené čtyři rohy. Každý tah můžeme považovat za otočení tou polovinou, která obsahuje ve středu vyznačený vrchol. Tyto rohy jsou potom pevné, mohou se pootáčet, nemohou ale měnit polohu. Odpovídají tak stěnovým prvkům na čtyřstěnu. Čtverce ve středech stěn na krychli potom odpovídají hranovým prvkům a neoznačené vrcholy na krychli rohovým prvkům na čtyřstěnu. Otočení polovinou krychle, která obsahuje některý označený roh ve středu, pak změní vzájemnou polohu a orientaci prvků na krychli zcela

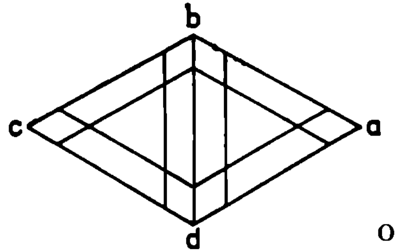


Obr. 5.30

stejně jako otočení vrstvou čtyřstěnu obsahující příslušný stěnový prvek. Na obou hračkách se prvky prohazují stejně, umíme-li řešit jednu z nich, umíme i druhou.

Abychom uměli řešit čtyřstěn obarvený podle obrázku 1.7., musíme se ještě naučit pootáčet stěnové prvky. Při normálním obarvení to nebylo třeba. Tady si pomůžeme dalším trikem. Dosud jsme považovali stěnové prvky na čtyřstěnu za pevné a rohové a hranové za pohyblivé. Za tah jsme považovali otočení jednou vrstvou, každý měnil polohu tří rohových a tří hranových prvků. Nyní zaměníme roli stěnových a rohových kostiček. Rohové budeme považovat za pevné a stěnové za pohyblivé. Za tah budeme považovat otočení doplňkem vrstvy, tj. jednou rohovou, třemi hranovými a třemi stěnovými prvky mimo nějakou vrstvu. Stěnové prvky mění vůči nyní pevným rohovým polohu zcela stejně, jako původně měnily rohové vůči stěnovým. Označíme si rohové prvky písmeny *a*, *b*, *c*, *d* podle obrázku 5.31.

Stěnové prvky pak můžeme zapsat seznamem rohů,



Obr. 5.31

které leží ve stejné vrstvě. Na obrázku vidíme stěnové prvky *abd* a *bcd*. Dále už můžeme postupovat stejně jako na normálně obarveném čtyřstěnu. Pomocí nějakého orientačního systému pro stěnové prvky zjistíme, že v každé řešitelné pozici musí být součet orientací těchto prvků 0 (v grupě $\mathbf{Z}_3$, což je grupa orientací stěnových prvků). Postupem $S = B^{-1}CD^{-1}A^{-1}C^{-1}BD^{-1}$ (tahy interpretujeme jako otočení skupin prvků kolem rohů!) pootočíme stěnový prvek *acd* doleva, jinak všechny ostatní prvky sousedící s rohovým *a* zůstávají na původních místech a s původní orientací. Postup $SAS^{-1}A^{-1}$ potom otočí *acd* doleva a *abc* doprava, všechny ostatní stěnové a hranové prvky zůstávají na původních místech a s původní orientací. A protože v postupu $SAS^{-1}A^{-1}$ otáčíme každým rohovým prvkem tolikrát doleva, kolikrát doprava, nezmění se ani původní správná orientace rohových prvků.

****5.8. Typy pozic — Rubikova krychle a koule.** Budeme říkat, že dvě pozice na Rubikově krychli jsou ***podobné***, jestliže jednu z druhé můžeme dostat nějakým postupem. Každé dvě řešitelné pozice $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ jsou podobné. Pozici $\mathbf{p}$ uděláme nějakým postupem P a pozici $\mathbf{q}$ postupem Q. Složeným postupem $P^{-1}Q$ pak uděláme pozici $(P^{-1}Q)\,\mathbf{U} = (P^{-1}\mathbf{U}) \circ (Q\mathbf{U} = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{q}$. Uděláme-li postup

$P^{-1}Q$ v pozici p, dostaneme pozici $\boldsymbol{p} \circ (P^{-1}Q)\, \boldsymbol{U} = \boldsymbol{p} \circ$ $\circ\, (\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1}) \circ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$. Z pozice $\boldsymbol{p}$ dostaneme $\boldsymbol{q}$ postupem $P^{-1}Q$.

Naučíme se teď určovat typy pozic tak, aby dvě pozice měly stejný typ, právě když jsou podobné. Vyjdeme z popisu řešitelných pozic uvedeného v odstavci 5.2. Řešitelná pozice $\boldsymbol{p}$ musí mít tyto vlastnosti:

a) polohová permutace musí být sudá,

b) součet orientací hranových prvků v grupě $\boldsymbol{Z}_2$ musí být 0,

c) součet orientací rohových prvků v grupě $\boldsymbol{Z}_3$ musí být také 0.

Libovolné (i neřešitelné) pozici $\boldsymbol{p}$ nyní přiřadíme trojici čísel (r, s, t), kterou budeme nazývat typ pozice $\boldsymbol{p}$ a označovat $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T}$, takto:

je-li $\boldsymbol{p}$ sudá pozice, pak $r = 0$, je-li lichá, pak $r = 1$. Čísla 0, 1 budeme považovat za prvky grupy $\boldsymbol{Z}_2$;

s je součet orientací hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ v grupě $\boldsymbol{Z}_2$,

t je součet orientací rohových prvků v pozici p v grupě $\boldsymbol{Z}_3$.

Platí tedy $r, s \in \boldsymbol{Z}_2$ a $t \in \boldsymbol{Z}_3$. Je-li pozice $\boldsymbol{p}$ řešitelná, pak $r = s = t = 0$, tj. $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$. Tato vlastnost řešitelné pozice charakterizuje, pokud je $\boldsymbol{p}$ neřešitelná, nesplňuje aspoň jednu z podmínek a), b), c), a aspoň jedno z čísel r, s, t je proto různé od 0.

Vezmeme si nyní dvě pozice $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ s typy $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$ a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (u, v, w)$. Jaký je typ složené pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} =$ $= (p \circ q, k)$? Označíme $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = (x, y, z)$. Číslo x popisuje paritu polohové permutace $p \circ q$. Ta je sudá, právě když jsou obě polohové permutace p, q současně sudé nebo současně liché, a je lichá, právě když je jedna z nich sudá a druhá lichá. V každém případě dostaneme číslo x tak, že sečteme čísla r a u v grupě $\boldsymbol{Z}_2$: $x = r \oplus u$.

Je-li orientace hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ popsána zobrazením orientace g a v pozici $\boldsymbol{q}$ zobrazením h, pak orientace hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je popsána zobrazením orientace k, které každému hranovému prvku i přiřazuje hodnotu orientace $ik = ig \oplus (ip)\, h$. Máme-li sečíst všechna čísla ik, využijeme toho, že je grupa $\boldsymbol{Z}_2$ komutativní. Můžeme to udělat také tak, že sečteme napřed čísla ig a k jejich součtu pak přičteme součet všech čísel $(ip)\, h$. Součet čísel ig — orientací všech hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ — se rovná s. V součtu čísel $(ip)\, h$ sčítáme orientace všech hranových prvků v pozici $\boldsymbol{q}$, neboť permutace p je vzájemně jednoznačné zobrazení. Jejich součet je proto v. Součet orientací všech hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je proto rovný $y = s \oplus v$.

Podobně se dokáže také $z = t \oplus w$ (v grupě $\boldsymbol{Z}_3$). Typ pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je proto $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = (r \oplus u,\ s \oplus v,\ t \oplus w)$. Typ složené pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ tak závisí pouze na typech pozic $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$, nikoliv na pozicích samotných.

Na množině všech typů pozic můžeme proto přirozeným způsobem definovat operaci skládání. Složení typů (r, s, t) a (u, v, w) je typ $(r, s, t) \circ (u, v, w) = (r \oplus u, s \oplus \oplus v, t \oplus w)$. Snadno se opět ověří, že množina všech možných typů s takto definovanou operací skládání je grupa. Tuto grupu budeme nazývat grupa typů pozic na Rubikově krychli. Má dvanáct prvků, pro čísla r, s máme vždy dvě možnosti 0, 1, pro číslo t pak tři možnosti 0, 1, 2. Typ (0, 0, 0) je neutrální prvek a k typu (r, s, t) je inverzní typ (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}). Vzpomeneme-li si na definici součinu grup, můžeme říct, že grupa typů pozic na Rubikově krychli se rovná součinu $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \times \boldsymbol{Z}_3$. A pravidlo o typu složené pozice, které jsme před chvilkou odvodili, můžeme vyjádřit také takto: $(\boldsymbol{p} \circ \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{q}\boldsymbol{T}$.

Jaký je typ inverzní pozice $\boldsymbol{p}^{-1}$? Protože $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1} =$

$= \boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$, platí také $(0, 0, 0) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ (\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T}$. Typ $(\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T}$ je proto inverzní k typu $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T}$. Je-li $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$, pak $(\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T} = (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1})$.

Nyní můžeme dokázat, že dvě pozice $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ mají stejný typ, právě když můžeme jednu z druhé dostat nějakým postupem. Je-li $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$, pak $(\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}) \circ (r, s, t) = (0, 0, 0)$. Pozice $\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}$ je proto řešitelná. Existuje postup P, který ji udělá, $P\boldsymbol{U} = \boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}$. Uděláme-li postup P v pozici $\boldsymbol{p}$, dostaneme novou pozici $\boldsymbol{p} \circ (P\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1}) \circ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$.

Nechť naopak nějakým postupem R dostaneme z pozice $\boldsymbol{p}$ pozici $\boldsymbol{q}$. Postup R udělá nějakou řešitelnou pozici $\boldsymbol{r}$ a platí $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}$. Potom $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{r}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ (0, 0, 0) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T}$. Pozice $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ mají proto stejný typ.

Zajímavá je také grupa typů pozic na kouli. Vlastnosti pozice $\boldsymbol{p}$ jsme zjišťovali pomocí trojice (p, r, s), kde p byla polohová permutace pozice $\boldsymbol{p}$ a (r, s) byl nějaký součet orientací všech prvků v pozici $\boldsymbol{p}$. Zajímala nás pouze parita p, r, s. Pozice je řešitelná, právě když je buď všechno sudé, tj. jak permutace p, tak čísla r, s, anebo všechno liché. Takovým pozicím přiřadíme typ $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$. V neřešitelných pozicích nemá všechno stejnou paritu. Dva z prvků p, r, s mají paritu stejnou a třetí jinou. Typ pozice pak určíme podle toho, který z prvků p, r, s má paritu různou od druhých dvou. Je-li v pozici $\boldsymbol{p}$ polohová permutace sudá a obě čísla r, s jsou lichá, nebo permutace p lichá a obě čísla r, s sudá, bude typ $\boldsymbol{p}$ rovný $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (1, 0, 0)$. Liší-li se parita čísla r od parity p a s, pak $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 1, 0)$, a je-li parita s odlišná od p a r, pak $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 1)$. Každá pozice má jeden z typů $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Označíme si

$(1, 0, 0) = a$, $(0, 1, 0) = b$, $(0, 0, 1) = c$ a $(0, 0, 0) = 1$.

Snadno se ověří. že je-li $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = a$ a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = b$, pak $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\ \boldsymbol{T} = c$. Podobně v případě $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = b$ a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = c$ je $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\ \boldsymbol{T} = a$, atd. Na množině $\{1, a, b, c\}$ typů pozic definujeme operaci skládání takto: $1 \circ a = a \circ 1 = a$, $1 \circ b = b \circ 1 = b$, $1 \circ c = c \circ 1 = c$, $a \circ a = b \circ b = c \circ c = 1$, $a \circ b = b \circ a = c$, $a \circ c = c \circ a = b$ a nakonec $b \circ c = c \circ b = a$. Množina $\{1, a, b, c\}$ s touto operací tvoří grupu, kterou označíme $\boldsymbol{K}$. Platí, že typ složené pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ se rovná složení typů pozic $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ v grupě $\boldsymbol{K}$. $\boldsymbol{K}$ je tak *grupa typů pozic* na kouli. Grupa $\boldsymbol{K}$ se nazývá *Kleinova grupa* na počest znamenitého německého matematika Felixe Kleina (1849—1925).

Podobně můžeme určit grupy typů pozic i na dalších hračkách. Pro zajímavost uvedeme některé z nich už bez dalšího vysvětlování. Na čtyřstěnu a dvanáctistěnu to je grupa $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3$, na krychli $2 \times 2 \times 2$ to je $\boldsymbol{Z}_3$. Na krychli $4 \times 4 \times 4$ to je $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3$, u patnáctky $\boldsymbol{Z}_2$. Grupa typů pozic na kosé krychli je $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3 \times \boldsymbol{Z}_3$.

****5.9. Normální podgrupy a faktorové grupy.** Způsob, jakým jsme sestrojili v minulém odstavci grupu typů pozic na Rubikově krychli a na kouli, je opět speciální případ jedné základní konstrukce v teorii grup. Naši výpravu za tajemstvím Rubikových kostek proto skončíme tam, kde teorie grup začíná — definicí normální podgrupy a konstrukcí faktorové grupy.

Podgrupa $\boldsymbol{H}$ grupy $\boldsymbol{G}$ se nazývá *normální*, jestliže pro každý prvek $g \in \boldsymbol{G}$ a každý prvek $h \in \boldsymbol{H}$ leží konjugovaný prvek $g \circ h \circ g^{-1}$ také v $\boldsymbol{H}$.

Každá podgrupa komutativní grupy je normální, platí $g \circ h \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \circ h = h \in \boldsymbol{H}$.

Alternativní grupa $\boldsymbol{A}_l$ je normální podgrupa symetrické grupy $\boldsymbol{S}_I$, permutace $g \circ h \circ g^{-1}$ je sudá, je-li $h \in \boldsymbol{A}_I$.

Také grupa $\boldsymbol{R}$ řešitelných pozic na Rubikově krychli je normální podgrupa grupy všech možných pozic $\boldsymbol{P}$. Je-li $\boldsymbol{p}$ řešitelná pozice, tj. $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$, a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$, pak $(\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}^{-1})\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ (\boldsymbol{q}^{-1})\ \boldsymbol{T} = (r, s, t) \circ$ $\circ\ (0, 0, 0) \circ (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}) = (0, 0, 0)$. Pozice $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}^{-1}$ je proto také řešitelná, leží v $\boldsymbol{R}$.

Obě nevlastní podgrupy $\{n\}$ a $\boldsymbol{G}$ grupy $\boldsymbol{G}$ jsou také normální.

Každá normální podgrupa $\boldsymbol{H}$ grupy $\boldsymbol{G}$ určuje jinou grupu — *faktorovou grupu* $\boldsymbol{G}$ podle $\boldsymbol{H}$, která se označuje $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$. Faktorovou grupu $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ nyní sestrojíme. Jako vždy označíme G a H množiny, na kterých jsou grupy $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$ definované. Platí $H \subseteq G$.

Je-li x libovolný prvek grupy $\boldsymbol{G}$, pak symbolem Hx označíme množinu všech prvků množiny $\boldsymbol{G}$, které jsou tvaru $h \circ x$, $h \in H$. Stejnou věc jsme dělali při důkazu Lagrangeovy věty. Tak jako tehdy teď dokážeme, že dvě množiny Hx a Hy jsou buď disjunktní, nebo se rovnají. Předpokládejme, že existuje prvek $z \in Hx \cap$ $\cap\ Hy$. Potom $z = h_1 \circ x$ a $z = h_2 \circ y$ pro nějaké prvky h_1, h_2 grupy $\boldsymbol{H}$. Z rovnosti $h_1 \circ x = h_2 \circ y$ plyne $h_2^{-1} \circ$ $\circ\ h_1 \circ x = y$ a $h \circ h_2^{-1} \circ h_1 \circ x = h \circ y$ pro každý prvek $h \in H$. Každý prvek $h \circ y \in Hy$ se tak rovná nějakému prvku $h \circ h_2^{-1} \circ h_1 \circ x \in Hx$. Hy je proto podmnožina Hx. Zcela stejně se dokáže také $Hx \subseteq Hy$, obě množiny Hx a Hy se proto rovnají. Celá množina G se tak rozpadá do vzájemně disjunktních množin Hx. Těmto množinám říkáme *rozkladové třídy* grupy $\boldsymbol{G}$ podle podgrupy $\boldsymbol{H}$. V případě, že je $\boldsymbol{H}$ konečná grupa, jsou všechny rozkladové třídy stejně velké; na tom byl založen důkaz Lagrangeovy věty. Budeme také říkat, že dva prvky ve stejné rozkladové třídě jsou podobné, mají stejný typ.

Ukážeme nyní, že typ (tj. rozkladová třída) složení

$x \circ y$ závisí pouze na typech (rozkladových třídách) prvků x a y. Vezmeme nějaký prvek $h_1 \circ x$, který leží ve stejné rozkladové třídě jako x, a nějaký prvek $h_2 \circ y$ ze stejné rozkladové třídy jako y. Pro jejich složení platí:

$$(h_1 \circ x) \circ (h_2 \circ y) = h_1 \circ x \circ h_2 \circ y =$$
$$= h_1 \circ x \circ h_2 \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = h_1 \circ x \circ h_2 \circ x^{-1} \circ$$
$$\circ\, y \circ x = h_1 \circ (x \circ h_2 \circ x^{-1}) \circ x \circ y =$$
$$= (h_1 \circ (x \circ h_2 \circ x^{-1})) \circ (x \circ y).$$

Prvek $x \circ h_2 \circ x^{-1}$ leží v podgrupě $\boldsymbol{H}$, protože je $\boldsymbol{H}$ normální. Složení $h_1 \circ (x \circ h_2 \circ x^{-1})$ také leží v $\boldsymbol{H}$. Prvky $x \circ y$ a $(h_1 \circ x \circ h_2 \circ x^{-1}) \circ (x \circ y)$ proto leží ve stejné rozkladové třídě $\boldsymbol{G}$ podle $\boldsymbol{H}$, mají stejný typ. Rozkladová třída, ve které leží prvek $x \circ y$, tak závisí pouze na tom, v jakých rozkladových třídách leží prvky x a y. Vybereme-li místo x prvek $h_1 \circ x$ ze stejné rozkladové třídy jako x a místo y prvek $h_2 \circ y$ ze stejné rozkladové třídy jako y, pak jejich složení $(h_1 \circ x) \circ (h_2 \circ y) = (h_1 \circ x \circ \circ h_2 \circ x^{-1}) \circ (x \circ y)$ leží ve stejné rozkladové třídě jako složení $x \circ y$.

Dvě rozkladové třídy Hx a Hy můžeme proto složit, přiřadit jim třídu $H(x \circ y)$. Právě jsme si ukázali, že složení libovolného prvku z Hx s libovolným prvkem z Hy leží vždy v $H(x \circ y)$. Na množině G/H všech rozkladových tříd jsme tak definovali operaci skládání, a dokážeme, že G/H s touto operací tvoří grupu.

a) $(Hx \circ Hy) \circ Hz = H(x \circ y) \circ Hz = H((x \circ y) \circ z) = H(x \circ (y \circ z)) = Hx \circ H(y \circ z) = Hx \circ (Hy \circ Hz)$, skládání rozkladových tříd je proto asociativní.

b) Je-li n neutrální prvek $\boldsymbol{G}$, pak $Hn \circ Hx = H(n \circ x) = Hx$ a $Hx \circ Hn = Hx$ pro každou třídu Hx. Třída Hn je proto neutrální vzhledem k operaci skládání tříd.

c) $Hx \circ Hx^{-1} = H(x \circ x^{-1}) = Hn$ a také $Hx^{-1} \circ \circ Hx = H(x^{-1} \circ x) = Hn$, třída Hx^{-1} je proto inverzní k Hx, tj. $(Hx)^{-1} = Hx^{-1}$.

Množina všech rozkladových tříd spolu s operací skládání tříd tak tvoří opravdu grupu. Tato grupa je slíbená *faktorová grupa* $\mathbf{G}$ *podle* $\mathbf{H}$.

Závěrem můžeme také přesně definovat, co jsou to jednoduché grupy, o kterých jsme se zmínili v odstavci 3.17. Grupa $\mathbf{G}$ je *jednoduchá*, jestliže kromě nevlastních podgrup neobsahuje žádnou jinou normální podgrupu.

Prvním matematikem, který systematicky používal pojmy, jako jednoduchá grupa, normální podgrupa, faktorová grupa, byl právě E. Galois. Zmínili jsme se o něm už v úvodu první kapitoly. Od něho se datují počátky rozvoje teorie grup. V současnosti jsou grupy používány snad ve všech oblastech matematiky. Teorie grup je, velmi zhruba řečeno, nauka o symetriích. O symetriích těles, prostorů, umístění předmětů v prostoru, o symetriích fyzikálních zákonů, matematických úloh atd. První a často nejdůležitější krok při řešení nějaké úlohy spočívá právě ve vyjasnění jejích symetrií. Také my jsme se snažili vždy objasnit, jaké vlastnosti jsou společné všem řešitelným pozicím na hlavolamech, jak moc jsou řešitelné pozice symetrické.

A tím končí náš výlet za tajemstvím Rubikových kostek. Naučili jsme se zapisovat polohu prvků na hlavolamech, kreslit grafy pozic, rozlišovat orientace prvků a poznávat neřešitelné pozice. Trik s konjugováním nám umožnil poměrně snadno hlavolamy řešit. Seznámili jsme se také s několika základními pojmy teorie grup. A snad jste také získali trochu úctu k matematikům, kteří už více než sto padesát let před Rubikem znali všechno potřebné k tomu, aby snadno zvládli věci zdánlivě tak nezvládnutelné, jako jsou Rubikovy kostky.