Čtvrtá kapitola

VŠECHNO NA SPRÁVNÉ MÍSTO!

4.1. Strategie řešení hlavolamů. Konečně se dostáváme k praktickému skládání hlavolamů. V předchozích kapitolách jsme dokázali neřešitelnost řady pozic na nejrůznějších hračkách. Stačilo k tomu dobře rozlišovat sudé a liché permutace na množinách pohyblivých prvků. Neřešitelnost pozic potom vyplynula z faktu, že žádným postupem nešlo převést všechny pohyblivé prvky současně na správná místa. Klíčovou roli přitom hrálo pravidlo o paritě složení permutací. Nyní nás čeká opačný úkol, najít postupy, kterými srovnáme zbývající pozice do pozic, ve kterých jsou všechny prvky na správných místech. Tím se naučíme řešit hlavolamy bez orientace a částečně budeme také umět řešit hlavolamy s orientací.

Na většině hlavolamů existuje nesmírně mnoho řešitelných pozic, nemůžeme proto pro každou pozici zvlášť uvést potřebný postup. Musíme zvolit jiný přístup. Naučíme se nacházet postupy, které na jednotlivých hračkách dělají co možná nejjednodušší permutace, a ukážeme, že každou řešitelnou pozici jde složit pomocí těchto jednoduchých permutací. K tomu především potřebujeme vytipovat vhodné jednoduché permutace, které jde udělat nějakým postupem a kterými je možné složit každou pozici. V odstavci 3.10. jsme zjistili, že každou permutaci můžeme složit z transpozic. Transpozice ale nejsou vhodný kandidát, protože na mnoha hlavolamech, třeba právě na Rubikově krychli, čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu je možné nějakým postupem udělat pouze sudou permutaci, nikdy lichou transpozici.

Jiné jednoduché permutace jsou trojcykly, permutace, které mají pouze jeden cyklus délky 3 a ostatní cykly délky 1. Každý trojcyklus je sudá permutace, neobsahuje žádný cyklus sudé délky. Dokážeme teď, že

každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů.

Vezmeme si nějakou sudou permutaci p. Tu lze složit z transpozic a počet transpozic musí být sudý: $p = t_1 \circ \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{2m}$. Protože je skládání permutací asociativní, můžeme psát také $p = (t_1 \circ t_2) \circ (t_3 \circ t_4) \circ \ldots \ldots \circ (t_{2m-1} \circ t_{2m})$. Jak vypadají složení dvojic transpozic v jednotlivých závorkách — cvičení 3.21? Pokud jsou dvojcykly v obou transpozicích t_{2i-1}, t_{2i} na dvojicích prvků, které se protínají, je složení $t_{2i-1} \circ t_{2i}$ trojcyklus — cvičení 3.21. Jsou-li dvojcykly v transpozicích t_{2j-1}, t_{2j} na disjunktních dvojicích prvků, má permutace $t_{2j-1} \circ t_{2j}$ dva cykly délky 2 a ostatní jednoprvkové. Vezmeme v tomto případě libovolný prvek k, který leží v dvojcyklu transpozice t_{2j-1}, a libovolný prvek l, který leží v dvojcyklu permutace t_{2j}. Protože pro transpozici (k, l) platí $(k, l) \circ (k, l) = n$, platí také

$$t_{2j-1} \circ t_{2j} = t_{2j-1} \circ n \circ t_{2j} = t_{2j-1} \circ \circ (k, l)) \circ (k, l)) \circ t_{2j} = (t_{2j-1} \circ (k, l)) \circ ((k, l) \circ t_{2j}) .$$

V posledních dvou závorkách jsou vždy složení dvou transpozic, dvojcykly u transpozic v první závorce mají společný prvek k, jejich složení je tedy trojcyklus. Stejně tak je $(k, l) \circ t_{2j}$ trojcyklus, příslušné dvojcykly se protínají v l. V tomto případě je proto $t_{2j-1} \circ t_{2j}$ složení dvou trojcyklů. Je-li $t_{2i-1} = t_{2i}$, pak, protože jde o transpozice, $t_{2i-1} \circ t_{2i} = n$, a permutaci $t_{2i-1} \circ t_{2i}$ můžeme ve vyjádření p jako složení transpozic vynechat. Ve vyjádření $p = (t_1 \circ t_2) \circ (t_3 \circ t_4) \circ \ldots \circ (t_{2m-1} \circ t_{2m})$ je proto každé složení transpozic v závorce buď trojcyklus, nebo složení dvou trojcyklů. Libovolnou sudou permutaci p jsme tak vyjádřili jako složení nějakých trojcyklů.

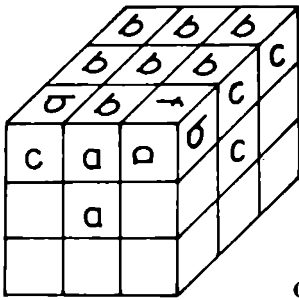
Proč je výhodnější pokoušet se dělat trojcykly? Skutečnost, že z nich lze složit pouze sudé permutace, není na závadu — každou hračku lze nejvýše jedním tahem převést do pozice, která má polohovou permutaci sudou. Pokud jsou u hračky pouze sudé tahy, každá řešitelná pozice je sudá. Pokud je nějaká hračka v liché řešitelné pozici, musí existovat nějaký tah A, který udělá lichou permutaci $a = A\boldsymbol{V}$. Uděláme-li v liché pozici $\boldsymbol{q}$ tah A, dostaneme pozici, jejíž polohová permutace je $q \circ a$, a ta je sudá podle pravidla o paritě složení permutací. Můžeme se tak snadno omezit pouze na skládání sudých pozic. Pro trojcykly navíc mluví především to, že můžeme poměrně snadno nacházet postupy, které trojcykly udělají.

Po tomto více teoretickém úvodu zdůvodňujícím použití trojcyklů jako jednoduchých operací na hlavolamech si ukážeme, jak najít postupy, které udělají trojcykly na Rubikově krychli.

4.2. Jak udělat trojcykly? V předchozím odstavci jsme zjistili, že každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů a že každou řešitelnou pozici na libovolném hlavolamu dostaneme nejvýše jedním tahem do pozice, která má polohovou permutaci sudou. Teď se tedy potřebujeme naučit dělat trojcykly.

Začneme opět Rubikovou krychlí. Ukážeme si docela jednoduchý trik, jak najít postupy, které udělají trojcykly. Tento trik budeme v různě modifikovaných verzích používat v dalším textu mnohokrát. Mimo jiné nám umožní dokázat, že všechny sudé pozice na Rubikově krychli jde vhodným postupem převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech, nebo že všechny pozice na uších jsou řešitelné, atd.

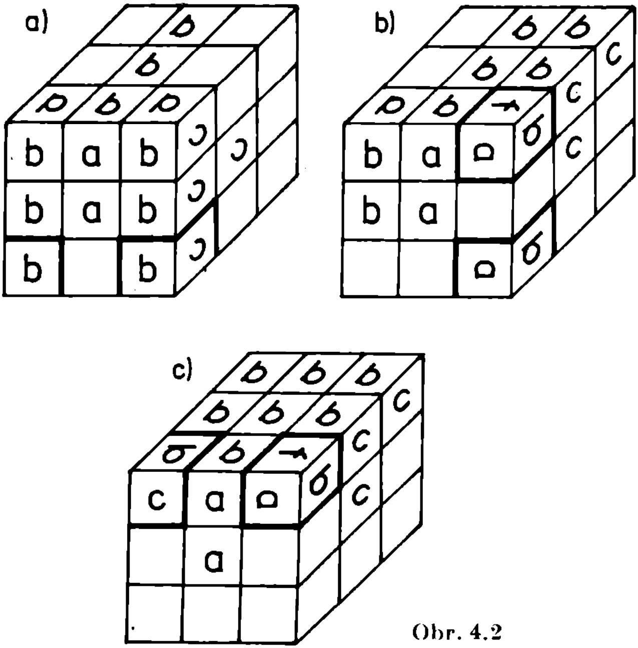
Dříve než najdeme postup, který udělá trojcyklus na rohových kostičkách tak, aby všechny zbývající rohové i hranové zůstaly na původních místech, vysvětlíme si postup, který udělá na první pohled podstatně méně. Základní pozici převede do pozice schematicky znázorněné na obrázku 4.1.



Obr. 4.1

V horní vrstvě *b* jsou prohozené pouze rohové prvky *abc* a *abf* a všechny ostatní kostičky v této vrstvě jsou na původních místech. Na poloze zbývajících kostiček, které neleží ve vrstvě *b*, vůbec nezáleží, mohou být libovolně přeházené. Najít nějaký takový postup je docela snadné. Jedna z mnoha možných cest je podrobně vysvětlena na obrázku 4.2.

Nejdříve pomocí tahů $C^{-1}F$ přesuneme obě rohové kostičky *abc* a *abf* do dolní vrstvy, obrázek 4.2.a. Další dva tahy E (spodní vrstva) a C dostanou kostičku *abf*



Obr. 4.2

na místo *abc* a vrátí *bc* a *bcd* zpět na původní správná místa — obrázek 4.2.b. Postup dokončíme tahy $E^{-1}F^{-1}$, kterými dostaneme kostičku *abc* na místo *abf* a vrátíme *bf* a *bdf* zpátky na správné místa — obrázek 4.2.c. Celý postup $C^{-1}FECE^{-1}F^{-1}$ tak udělá přesně to, co jsme chtěli. Prohodí v horní vrstvě *b* kostičky *abc* a *abf* a zbývající prvky v této vrstvě nechá na původních místech. Tento postup označíme *P*. Je to jednoduchý a srozumitelný postup a není obtížné ho objevit. A každý může snadno přijít na nějaký jiný, který udělá ve vrstvě *b* stejnou změnu. Jedním z nich je například P^{-1}.

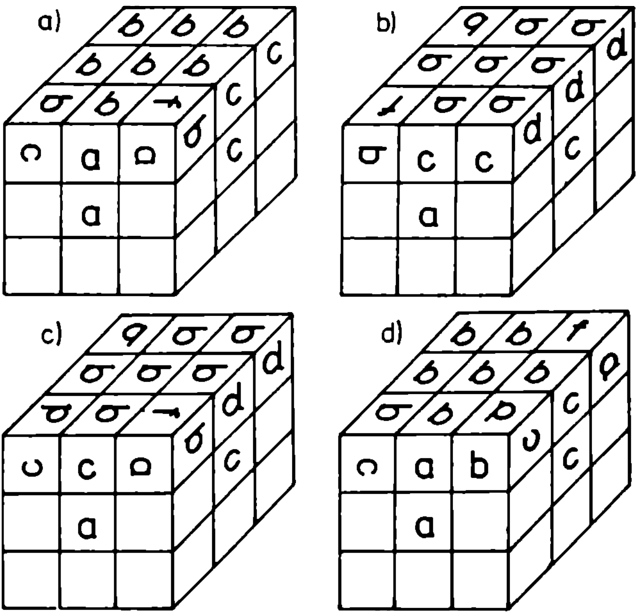
Cvičení 4.1. Ověřte, že následující postupy prohodí ve vrstvě *b* rohové kostičky *abc* a *abf* a ostatní prvky ve vrstvě *b* ponechají na původních místech. Zdůvodněte každý tah!

a) $P^{-1} = FEC^{-1}E^{-1}F^{-1}C$, b) $FC^{-1}E^{-1}F^{-1}EC$,

c) $C^{-1}E^{-1}FECF^{-1}$.

Postup *P* rozháže zbytek krychle mimo vrstvu *b* a není nijak vidět, co má vlastně společného s nějakým trojcyklem na rohových kostičkách.

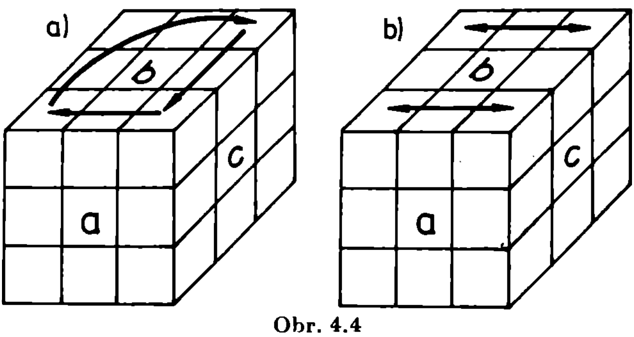
Teď přijde ke slovu nejdůležitější trik. Vysvětlíme si ho pomocí obrázku 4.3.



Obr. 4.3

V základní pozici jsme udělali postup P a dostali pozici 4.3.a. Pak uděláme tah B, kterým dostaneme kostičky *abf* a *bcd* na místa *abf* a *abc* — obrázek 4.3.b. A nyní je klíčový moment. Chceme prohodit kostičky *abf* a *bcd*, které jsou na místech *abf* a *abc*, a jinak v horní vrstvě *b* nic nezměnit. To už umíme udělat několika způsoby, a my si vybereme postup P^{-1} inverzní k P. Ten totiž navíc vrátí všechny zbývající kostičky, které neleží v *b*, na původní místa — obrázek 4.3.c. Důvod je v tom, že permutace $b = BV$ s prvky mimo stěnu *b* nehýbá, a postup P^{-1} na nich udělá permutaci inverzní k permutaci $p = PV$. Proto se všechny vrátí zpět na správná místa. Nakonec zbývá tahem B^{-1} vrátit všechny hranové prvky a také rohovou kostičku *bdf* ve vrstvě *b* na původní místa — obrázek 4.3.d. V horní vrstvě *b* jsme udělali dvě transpozice — postupem P jsme prohodili *abc* a *abf* a postupem P^{-1} *abf* a *bcd*. Celkově jsme tak udělali trojcyklus, který prvek *abc* přesunuje na místo prvku *abf*, prvek *abf* posílá na místo *bcd* a prvek *bcd* zpět na místo *abc*. Schematicky je to vyznačeno na obrázku 4.4.a. Použili jsme na to postup

$$(C^{-1}FECE^{-1}F^{-1})B(FEC^{-1}E^{-1}F^{-1}C)B^{-1} = PBP^{-1}B^{-1}.$$



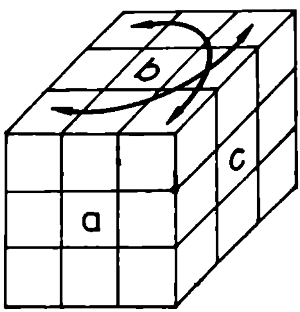
Obr. 4.4

Místo postupu P a k němu inverzního P^{-1} jsme mohli použít také jakýkoliv jiný postup, který udělá v horní vrstvě b stejnou permutaci jako P, a postup k němu inverzní. Například můžeme P nahradit každým z postupů uvedených ve cvičení 4.1. Není proto vůbec nutné naučit se celý postup zpaměti, stačí si pamatovat jeho strukturu $PBP^{-1}B^{-1}$ a vědět, co má postup P ve vrstvě b udělat.

Nepatrnou úpravou najdeme také postup, který udělá permutaci schematicky znázorněnou na obrázku 4.4.b. Pokud uděláme po postupu P tah B dvakrát, tj. BB, prohodí postup P^{-1} v horní vrstvě prvky bcd a bdf, a po zpětném vrácení hranových kostiček na původní místa dvojicí tahů $B^{-1}B^{-1}$ dostaneme permutaci, která má pouze dva dvojcykly, jeden prohazuje abc a abf a druhý bcd a bdf.

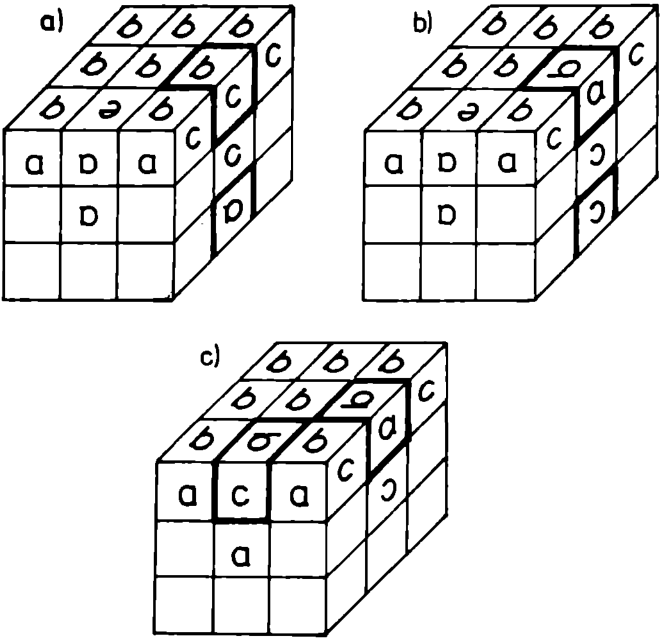
Cvičení 4.2. Najděte postup, který udělá permutaci na obrázku 4.5. Všechny prvky zůstanou na původních místech až na dvě dvojice rohových kostiček ve vrstvě b.

Návod. Najděte napřed postup, který ve vrstvě b prohodí pouze dva rohové prvky v protilehlých vrcholech, a ostatní prvky v b nechá na původních místech.



Obr. 4.5

Nyní si, už poněkud stručněji, vysvětlíme, jak najít postup, který udělá trojcyklus na hranových kostičkách, a všechno ostatní ponechá na původních místech. Můžeme to udělat v podstatě zcela stejně jako trojcyklus na rohových kostičkách. Nejdříve najdeme nějaký postup *Q*, který prohodí ve vrstvě *b* pouze dva hranové prvky, a ty, které v *b* neleží, může zpřeházet libovolně. Jeden z mnoha takových postupů je vysvětlen na obrázku 4.6.



Obr. 4.6

Nejdříve pomocí tahů CF^{-1} uvolníme kostičku *ab*, abychom ji mohli posunovat ve vrstvě *a*, a neměnili přitom polohu jiných prvků, které patří do *b*. Potom tahy AA přemístíme *ab* do spodní vrstvy *e*, tahy $C^{-1}F$ vrátíme zbývající prvky z *b* na původní místa a tahem E posuneme *ab* ve spodní vrstvě pod prvek *bc* — obrázek 4.6.a. Nyní tahy $A^{-1}D$ uvolníme vrstvu *c*, tahy CC přesuneme *ab* na místo *bc* a tahy $D^{-1}A$ vrátíme zbylé prvky *b* zpět na původní místa. Zbývá přemístit prvek *bc* z dolní vrstvy na místo *ab*. To uděláme tahy $E^{-1}F^{-1}CA^{-1}A^{-1}C^{-1}F$ — obrázek 4.6.c. Je to vlastně inverze první části postupu. Celý postup Q má potom tvar

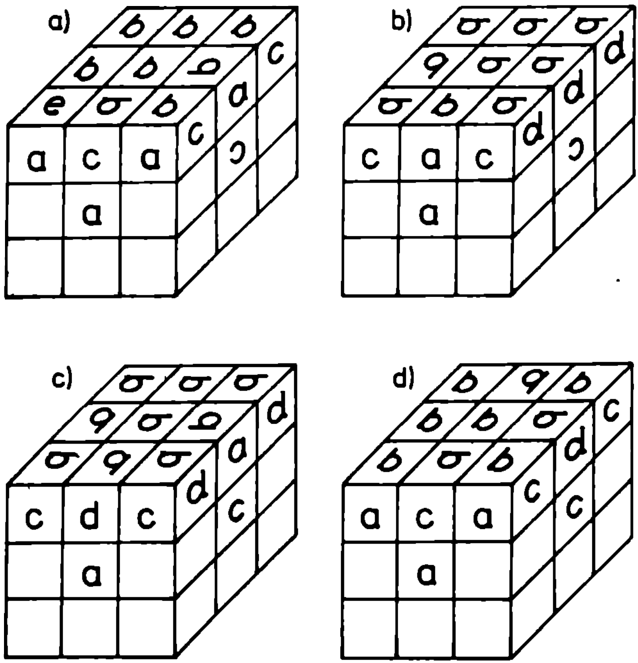
$$Q =$$
$$= F^{-1}CAAC^{-1}FE|A^{-1}DCCD^{-1}A|E^{-1}F^{-1}CA^{-1}A^{-1}C^{-1}F\,.$$

Rozdělili jsme jej do tří snadno pochopitelných částí.

Cvičení 4.3. Ověřte, že následující dva postupy prohodí ve vrstvě *b* pouze dva prvky *ab* a *bc*, a ostatní prvky *b* nechají na původních místech. Zdůvodněte každý tah!

a) Q^{-1}, b) $CF^{-1}AFC^{-1}|A^{-1}DCCD^{-1}A|CF^{-1}A^{-1}FC^{-1}\,.$

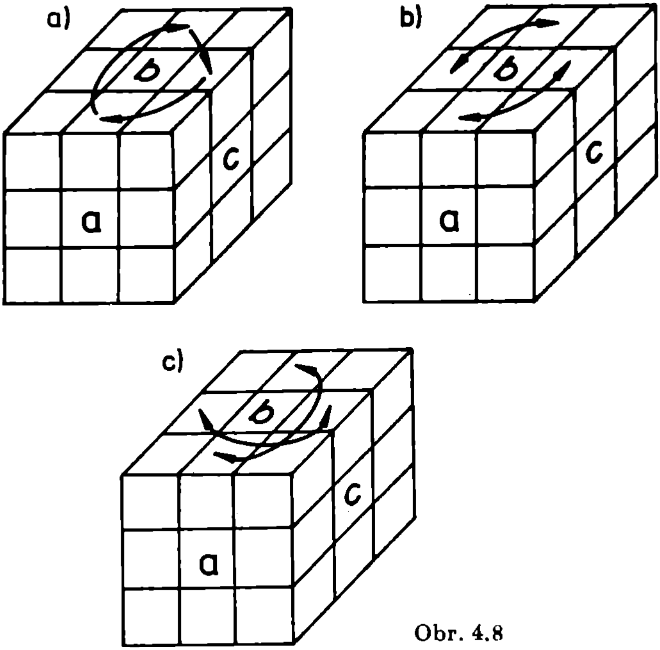
S postupem Q nyní uděláme trojcyklus na hranových kostičkách stejně snadno, jako jsme ho udělali na rohových s postupem P. Nejdříve tahem B přesuneme kostičky *ab* a *bd* na místa *ab* a *bc* — obrázek 4.7.b. Potom postupem Q^{-1} prohodíme kostičky *ab* a *bd* na místech *ab* a *bc* a vrátíme všechny prvky, které neleží ve vrstvě *b* na původní správná místa — obrázek 4.7.c. Nakonec tahem B^{-1} vrátíme na původní místa také všechny kostičky ve vrstvě *b*, s výjimkou tří hranových *ab*, *bc* a *bd* — obrázek 4.7.d.
Postupem $QBQ^{-1}B^{-1}$ jsme tak udělali trojcyklus, který posílá *ab* na místo *bd*, *bd* na místo *bc* a *bc* zpět na místo



Obr. 4.7

ab. Všechny ostatní prvky zůstaly na místě, dokonce i s původní orientací. Udělali jsme tak permutaci, která je schematicky znázorněná na obrázku 4.8.a.

Stejně jako v případě rohových prvků můžeme stejného triku použít k nalezení postupů, které udělají jiné jednoduché permutace na hranových kostičkách. Tak například postupem $QBBQ^{-1}B^{-1}B^{-1}$ uděláme permutaci na obrázku 4.8.b.



Obr. 4.8

Cvičení 4.4. Najděte postup, který udělá permutaci na obrázku 4.8.c. Napřed najděte postup, který prohodí hranové kostičky *ab* a *bd*, a všechny ostatní prvky ve vrstvě *b* zůstanou na původních místech.

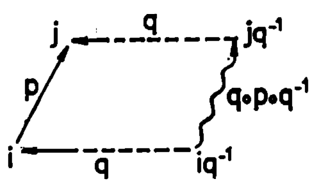
Podívejme se ještě jednou na postupy, které jsme našli v tomto odstavci. Vždy jsme začínali nějakým postupem P nebo Q. Kdybychom udělali ihned postup inverzní, P^{-1} nebo Q^{-1}, vrátili bychom krychli zpět do původní pozice. My jsme ale postup P^{-1} nebo Q^{-1} nevrátili přímo. Mírně jsme ho pozměnili na $BP^{-1}B^{-1}$ nebo

$BQ^{-1}B^{-1}$ (případně $BBP^{-1}B^{-1}B^{-1}$ nebo $BBQ^{-1}B^{-1}B^{-1}$). Tím jsme dosáhli toho, že se značná část prvků vrátila zpět na původní místa, ale ne všechny. V horní vrstvě *b* jsme postupem $BP^{-1}B^{-1}$ nebo $BQ^{-1}B^{-1}$ udělali jinou transpozici než postupem *P* nebo *Q*, a tyto dvě transpozice dohromady udělaly hledaný trojcyklus.

Tento trik má svůj původ v matematickém pojmu konjugovaných permutací a vysvětlíme ho v příštím odstavci. Budeme zkoumat, jak se změní permutace, kterou udělá nějaký postup *P*, jestliže před *P* vložíme nějaký jiný postup *Q* a po postupu *P* uděláme inverzní postup Q^{-1}. Jinými slovy, jak se liší permutace, které udělají postupy *P* a QPQ^{-1}.

4.3. Konjugované postupy a permutace. Postupům *P* a QPQ^{-1} budeme říkat *konjugované postupy*, budeme také říkat, že postup QPQ^{-1} je *konjugovaný* k postupu *P*. Postupem *P* uděláme permutaci $p = PV$ a postupem *Q* permutaci $q = QV$. Víme také, jakou permutaci uděláme konjugovaným postupem QPQ^{-1} — je to $(QPQ^{-1})V = q \circ p \circ q^{-1}$. Permutacím p a $q \circ p \circ q^{-1}$ budeme také říkat *konjugované permutace.*

Jak se liší permutace p a $q \circ p \circ q^{-1}$? Vysvětlíme si to na obrázku 4.9.



Obr. 4.9

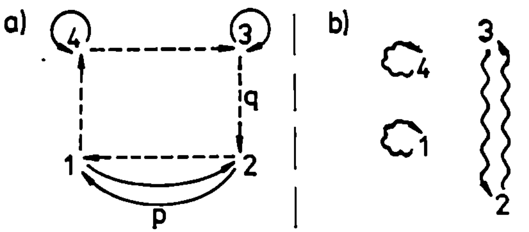
Vezmeme nějaký prvek $i \in I$. Ten se permutací p zobrazí do $j = ip$. V grafu p tomu odpovídá šipka z i

do j. Tato šipka určuje jinou šipku v grafu konjugované permutace $q \circ p \circ q^{-1}$: kam se zobrazí prvek iq^{-1}? Snadno spočítáme, že $(iq^{-1})q \circ p \circ q^{-1} = (iq^{-1} \circ q)p \circ \circ q^{-1} = i(p \circ q^{-1}) = (ip)q^{-1} = jq^{-1}$. Prvek iq^{-1} se permutací $q \circ p \circ q^{-1}$ zobrazí do jq^{-1}. Nakreslíme ještě šipky permutace q, které vedou do bodů i a j (čárkovaně). Jejich počáteční body jsou právě iq^{-1} a jq^{-1}. V grafu permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ vede šipka z bodu iq^{-1} do jq^{-1}. Graf konjugované permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ tedy z grafů permutací p a q dostaneme posunutím, přeložením, grafu p proti směru šipek grafu q.

Jeden malý příklad. Na množině $I = \{1, 2, 3, 4\}$ vezmeme dvě permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 1, 3, 4 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 4, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

Jejich grafy jsou na obrázku 4.10.a. Graf p nyní dosuneme proti směru šipek grafu q a dostaneme tak graf konjugované permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ na obrázku 4.10.b.



Obr. 4.10

Cvičení 4.5. Nakreslete grafy permutací p, q a $q \circ p \circ \circ q^{-1}$.

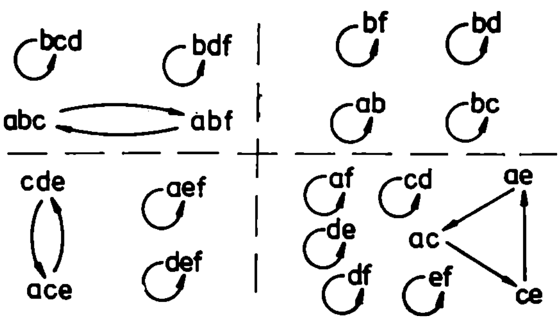
a) $p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 3, 1, 4 \end{pmatrix}$ $\qquad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 3, 4, 1 \end{pmatrix}$

b) $p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 2, 3, 4, 1, 5 \end{pmatrix}$ $\qquad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5, 2, 3, 4, 1 \end{pmatrix}$

c) $p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 4, 5, 6, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$ $\qquad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 6, 1, 2, 3, 4, 5 \end{pmatrix}$

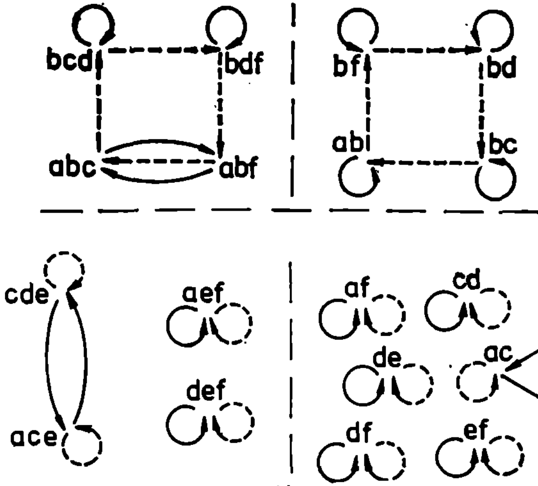
Cvičení 4.6. Jak dostaneme graf permutace $q^{-1} \circ p \circ \circ q$ z grafů permutací p a q?

Zhruba řečeno, permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ je „permutace p přeložená na jiné místo permutací q". Jestliže místo nějakého postupu *P* uděláme postup QPQ^{-1}, znamená to, že jsme permutaci $p = PV$ přesunuli jinam pomocí postupu *Q*. Právě to jsme udělali při hledání postupů na Rubikově krychli v minulém odstavci. Podívejme se na nalezené postupy ještě jednou. Našli jsme nějaký postup *P*, který na krychli udělal permutaci na obrázku 4.11.



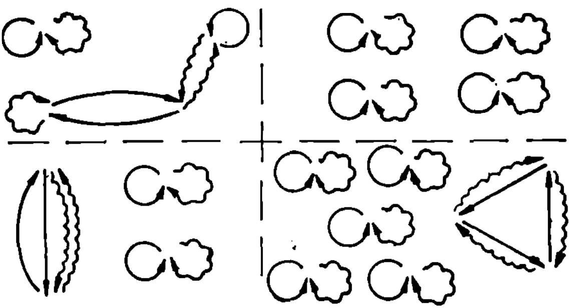
Obr. 4.11

V horní polovině jsou prvky z vrstvy b. Potom jsme inverzní permutaci p^{-1} přeložili postupem B—obrázek 4.13.



Obr. 4.12

Udělali jsme tak permutaci $b \circ p^{-1} \circ b^{-1}$, která je na obrázku 4.13. nakreslena vlnovkovými šipkami.



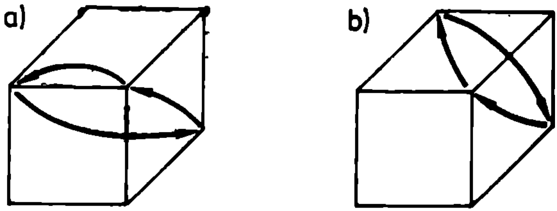
Obr. 4.13

Mimo vrstvu b se permutace $b \circ p^{-1} \circ b^{-1}$ shoduje s p^{-1}, protože b permutaci p^{-1} mimo vrstvu b nepřekládá. Postup $PBP^{-1}B^{-1}$ proto všechny prvky, které neleží v b, nechá na původních místech. Na tom, co přesně postup P udělá mimo vrstvu b, vůbec nezáleží. V samotné vrstvě b jsme postupem P udělali transpozici na prvcích abc, abf. Také postup P^{-1} tyto prvky prohodí a ostatní v b nechá na místě. Postupem $BP^{-1}B^{-1}$ jsme transpozici (abc, abf) přeložili do transpozice na prvcích abf, bcd. Celý postup $PB^{-1}P^{-1}B^{-1}$ pak udělá hledaný trojoyklus na rohových kostičkách.

Překládání permutací pomocí konjugovaných postupů je velmi účinný prostředek pro řešení hlavolamů a všechny postupy, které v dalším textu najdeme, jsou na něm založeny. Místo překládání budeme nyní používat matematický termín *konjugování*.

4.4. Další trojcykly na Rubikově krychli. Ve druhém odstavci jsme našli postupy, které udělají určité trojcykly na rohových nebo hranových kostičkách, a ostatní prvky ponechají na původních místech. Tyto trojcykly jsou schematicky znázorněné na obrázcích 4.4.a. a 4.8.a. Při skládání krychle ale někdy postřebujeme udělat trojcykly také na jiných místech, než jenom v jedné vrstvě. Konjugováním už známých postupů toho snadno dosáhneme.

Rohové trojcykly. Potřebujeme udělat například trojcyklus na obrázku 4.14.a. Postupem $PBP^{-1}B^{-1}$ umíme udělat trojcyklus znázorněný na obrázku 4.4.a. Tento postup nyní musíme konjugovat nějakým dalším postupem, který přemístí kostičky z rohů vyznačených na obrázku 4.14.a do rohů v horní vrstvě, na kterých už trojcyklus udělat umíme. K tomu stačí použít otočení zadní vrstvou d doprava. Postup $D(PBP^{-1}B^{-1})D^{-1}$ pak udělá trojcyklus na obrázku 4.14.a.



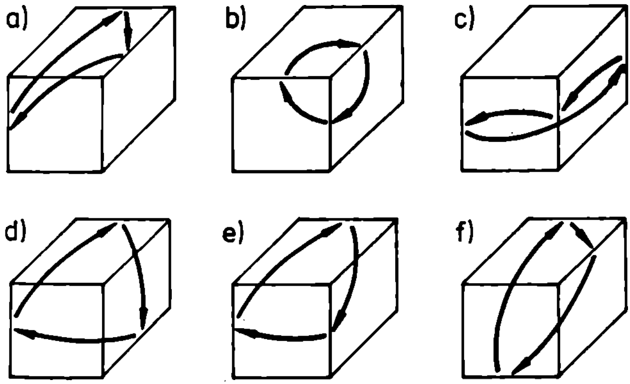
Obr. 4.14

Jak udělat velký trojcyklus na obrázku 4.14.b? Opět stačí najít postup, který přesune tři vyznačené kostičky do jedné stěny, a tímto postupem konjugovat už známý postup $PBP^{-1}B^{-1}$. Takový postup najdeme snadno, stačí třeba FD. Postupem $FD(PBP^{-1}B^{-1})D^{-1}F^{-1}$ pak uděláme trojcyklus na obrázku 4.14.b.

Na obrázcích 4.4.a, 4.14.a a 4.14.b jsou všechny tři možné polohy tří různých vrcholů na krychli. Takže už umíme udělat každý trojcyklus na rohových prvcích tak, aby všechny ostatní prvky zůstaly na původních místech.

Hranové trojcykly. Podobně můžeme pomocí postupu Q z druhého odstavce udělat všechny možné trojcykly na hranových kostičkách. Vždy stačí najít nějaký jednoduchý postup, který tři díly, které chceme prohodit, převede na místa tří vyznačených prvků na obrázku 4.8.a, a tímto postupem konjugovat $QBQ^{-1}B^{-1}$. Tři prvky na obrázku 4.15.a převedeme na místa na obrázku 4.8.a tahem A. Trojcyklus 4.15.a proto uděláme postupem $A(QBQ^{-1}B^{-1})A^{-1}$. Pro trojcyklus na obrázku 4.15.b použijeme tahy CD, hledaný postup je

$CD(QBQ^{-1}B^{-1})D^{-1}C^{-1}$. V případě 4.15.c stačí konjugovat postupem DCA^{-1}, příslušný trojcyklus proto uděláme postupem $DCA^{-1}(QBQ^{-1}B^{-1})AC^{-1}D^{-1}$. V případě 4.15.d stačí $ACC(QBQ^{-1}B^{-1})C^{-1}C^{-1}A^{-1}$.



Obr. 4.15

Cvičení 4.7. Najděte postupy, kterými uděláme trojcykly na obrázcích 4.15.e a 4.15.f.

Tak jako v případě rohových prvků můžeme nyní probírat všechny možné polohy tří hranových kostiček na krychli, pro každou z nich najít jednoduchý postup, který tyto tři kostičky převede do jedné stěny, a tímto postupem konjugovat už známý postup $QBQ^{-1}B^{-1}$. Pro každé tři hranové prvky tak najdeme postup, který na nich udělá trojcyklus, a všechny ostatní prvky nechá na místě.

Ukážeme si ještě jeden způsob, jak dokázat, že existují postupy, které udělají libovolný hranový trojcyklus.

Tento způsob je sice více teoretický, zbaví nás ale povinnosti rozebírat mnoho různých případů. Vybereme tři hranové prvky i, j, k a chceme udělat trojcyklus, který posílá i na místo j, j na místo k a k zpět na místo i. Hranové kostičky tvoří orbitu na krychli, existuje proto postup, který kostičku i převede na místo ab. Nyní si všimněme, že otáčením vrstvami c, d, e a f můžeme stále ještě pohybovat každou hranovou kostičkou, s výjimkou té, která je právě na místě ab, tj. v našem případě i. Existuje proto postup složený z tahů C, D, E, F, který přesune j na místo bd a nechá i na místě ab. A opět si všimneme, že pomocí tahů C, E, F můžeme stále ještě pohybovat všemi hranovými prvky, s výjimkou těch, které jsou na místech ab a bd. Z těchto tahů složíme postup, který přesune k na místo bc a nechá i na místě ab a j na místě bd. Tím jsme si ukázali, že vždy existuje postup R, který libovolné tři hranové prvky i, j, k převede na místa ab, bd a bc. Postupem R nyní konjugujeme náš známý postup $QBQ^{-1}B^{-1}$, který udělá trojcyklus na prvcích ab, bd a bc. Konjugovaný postup $R(QBQ^{-1}B^{-1})R^{-1}$ pak udělá hledaný trojcyklus na kostičkách i, j a k.

Můžeme shrnout:

> Na Rubikově krychli můžeme udělat libovolný rohový a libovolný hranový trojcyklus.

Připomeňme si znovu, že všechny postupy, které trojcykly udělají, najdeme vhodným jednoduchým konjugováním postupů $PBP^{-1}B^{-1}$ a $QBQ^{-1}B^{-1}$ z druhého odstavce.

4.5. Každou sudou pozici na Rubikově krychli můžeme převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. To už nyní snadno dokážeme. Začneme v nějaké sudé pozici. Obě polohové permutace na rohových a hranových kostičkách musí být současně sudé nebo současně liché. Pokud jsou liché, otočíme libovolnou vrstvou o 90° a dostaneme novou pozici, ve které jsou polohové permutace na rohové i hranové orbitě už sudé. V předchozím odstavci jsme našli postupy, které udělají libovolné trojcykly na rohových kostičkách. Z odstavce 4.1. víme, že každou sudou permutaci jde složit z trojcyklů. Pomocí těchto postupů můžeme převést krychli do pozice, ve které jsou všechny rohové prvky na správných místech. Polohová permutace na hranových kostičkách musí být v této nové pozici sudá. Protože jsme se v minulém odstavci naučili dělat také libovolné hranové trojcykly tak, aby všechny ostatní prvky zůstaly na místě, můžeme znovu použít výsledku z prvního odstavce a dokázat, že novou pozici (s rohovými prvky na správných místech) jde převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech.

Tím jsme doplnili naše poznatky o Rubikově krychli z předchozí kapitoly. Žádná lichá pozice nejde převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech (a je proto neřešitelná), sudé pozice takto převést jdou.

Závěrem několik poznámek. Postup, kterým jsme v tomto odstavci dostali všechny prvky na správná místa, je hodně pomalý, a nikomu nedoporučuji skládat Rubikovu krychli právě tímto způsobem. Naším hlavním cílem bylo přesvědčit se o tom, že to opravdu jde, a ukázat metodu, jak najít postupy, které udělají nějaké jednoduché permutace. Mnohem rychlejší způsob skládání kostky spočívá v obyčejném dávání prvků na správná místa a se správnou orientací, „dokud to jde“. Tak snad každý složí aspoň jednu vrstvu, a většinou i dvě. Teprve v závěru, kdy už nevystačíme s pouhou prostorovou představivostí, obvykle k tomu dojde při skládání poslední vrstvy, použijeme postupy, které jsme našli v této kapitole, ve druhém odstavci. Ty jsou k tomu už připravené, prohazují kostičky pouze v jedné vrstvě.

Všimněme si také, že v první části důkazu při přemisťování rohových kostiček na správná místa jsme vůbec nepotřebovali postupy, které dělají trojcykly na rohových prvcích, a současně nechávají hranové prvky na místě. Hranové prvky na počátku nebyly v žádné speciální poloze. Ke stejnému účelu by nám posloužily i postupy, které na rohových kostičkách udělají trojcykly, a hranové prvky libovolně přeházejí. Těmito postupy bychom rovněž dostali pozici, ve které jsou všechny rohové prvky na správných místech. Dále bychom pokračovali už stejně. To je důležité si uvědomit zvláště při skládání čtyřstěnu, kdy je velmi snadné dostat všechny čtyři rohové prvky na správná místa, a vlastní skládání čtyřstěnu probíhá pouze na hranových kostičkách.

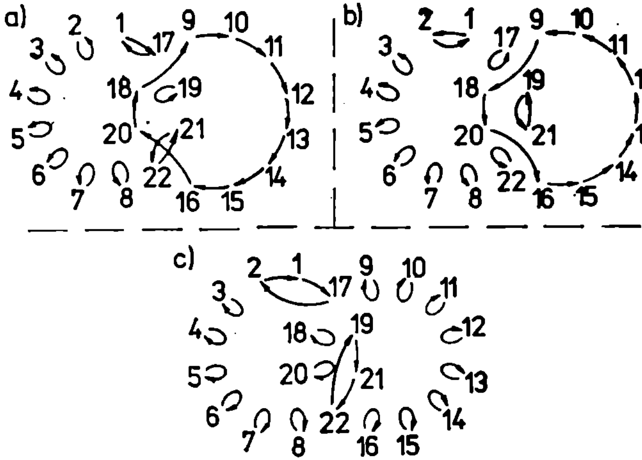
V dalších odstavcích použijeme trik s konjugováním při řešení jiných hlavolamů.

4.6. Uši. Budeme skládat verzi s dvanácti kuličkami v každém uchu — obrázek 3.8. Ukážeme, že každou pozici jde složit. Z předchozí kapitoly víme, že každý tah je lichý. Jsou-li na počátku uši v liché pozici, stačí udělat jeden tah, a dostaneme pozici sudou. Strategie skládání bude potom opět založená na výsledku z odstavce 4.1. — každou sudou permutaci jde složit z trojcyklů. Budeme postupovat stejně jako u Rubikovy krychle. Napřed musíme najít postup, který udělá vůbec nějaký trojcyklus, a potom ukážeme, že vhodným konjugováním tohoto postupu uděláme jakýkoliv trojcyklus.

Začneme tedy hledáním postupu, který udělá trojcyklus. Kdybychom měli použít zcela stejný nápad jako u Rubikovy krychle, museli bychom najít nějaký postup X, který by v jednom z uší — třeba A — udělal jedinou transpozici — třeba (1, 2) — a všechny ostatní kuličky v A nechal na původních místech. Postup $AX^{-1}A^{-1}$, konjugovaný k inverznímu postupu X^{-1}, by potom udělal transpozici (2, 3) v uchu A a vrátil všechny kuličky v B na původní místa. Celý postup $XAX^{-1}A^{-1}$ by tak přesunul 1 na místo 3, 3 na místo 2 a 2 zpět na místo 1. Ostatní kuličky by nechal na původních místech. Problém je v tom, že najít postup X s těmito vlastnostmi je dost obtížné, nemáme k dispozici tolik různých tahů jako na krychli.

Musíme se proto obejít bez postupu X s uvedenými vlastnostmi a udělat trojcyklus poněkud jiným způsobem. Konjugování postupů a permutací bude hrát i nadále klíčovou roli.

Chceme najít jednoduchý postup, který by prohodil nějaké dvě kuličky v uchu A, a přitom A příliš nerozházel. Kuličky můžeme přehazovat pouze v okolí obou průsečíků, zvolíme proto 1 a 17. Pomocí tahů BAB^{-1} přesuneme kuličku 17 na místo 1 a tahy $A^{-1}B$ vrátíme 1 zpět do ucha A na místo 17. Většina kuliček v A se vrátí na původní místa, nevrátí se ale všechny. U dolního průsečíku se prohodí také 21 a 22. Celý postup $P = BAB^{-1}A^{-1}B$ udělá permutaci na obrázku 4.16.a. Důležité je, že všechny kuličky, které byly původně v A, přejdou opět do A. Nyní budeme inverzní postup $P^{-1} = B^{-1}ABA^{-1}B^{-1}$ konjugovat tahem A. Konjugovaným postupem $AP^{-1}A^{-1}$ uděláme permutaci na obrázku 4.16.b. Celý postup $Q = P(AP^{-1}A^{-1})$ potom udělá složení permutací z obrázků a) a b), které je na obrázku 4.16.c.



Obr. 4.16

Místo jednoho trojcyklu se nám podařilo udělat trojcykly dva.

Přesto jsme se k jednomu trojcyklu přiblížili. Zbývající trik by mělo napovědět následující cvičení.

Cvičení 4.8. Na množině $I = \{i, j, k, l\}$ vezmeme dva trojcykly. Trojcyklus s posílá i do j, j do k a k zpět do i, trojcyklus t posílá k do j, j do l a l zpět do k:

$$s = \begin{pmatrix} i, j, k, l \\ j, k, i, l \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} i, j, k, l \\ i, l, j, k \end{pmatrix}.$$

Nakreslete grafy následujících permutací:

a) $s \circ s$, b) $s^{-1} \circ t$, c) $s \circ t$, d) $s \circ t^{-1}$.

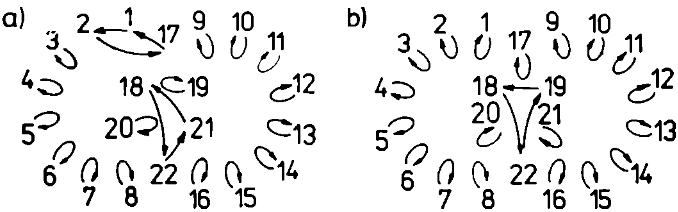
Pro nás je důležitý zvláště případ c), který ukazuje, že složení dvou různých trojcyklů může být opět trojcyklus. Všimněte si, jaká je poloha trojcyklů s, t v tomto případě. Šipky mezi dvojicí prvků j, k, které leží v obou z nich, jdou proti sobě.

Inverzním postupem Q^{-1} bychom vrátili všechno na původní místa. Náš trik vždy spočívá v tom, že místo Q^{-1} uděláme vhodný konjugovaný postup $RQ^{-1}R^{-1}$. V našem případě udělá každý konjugovaný postup $RQ^{-1}R^{-1}$ opět dva trojcykly, protože je udělá Q, a tedy také Q^{-1}. My se chceme jednoho zbavit, třeba trojcyklu, který posílá 17 do 2, 2 do 1 a 1 do 17. K tomu potřebujeme, aby postup R nechal prvky 17, 1, 2 na místě. Abychom se nezbavili současně i druhého trojcyklu, musíme jej postupem R posunout. Chtěli bychom, aby měl posunutý trojcyklus vůči původnímu na kuličkách 19, 21 a 22 stejnou polohu, jakou měly trojcykly s a t ve cvičení. K tomu stačí postupem R zaměnit jeden z prvků 19, 21 a 22 za nějaký jiný a zbývající dva nechat na místě. Teď, když už víme, jaké vlastnosti by měl postup R mít, je jeho nalezení snadné. Napřed tahem A^{-1} posuneme kuličky 17, 1, 2 mimo průsečíky (abychom si je nepřeházeli), pak tahem B posuneme kuličku 18 na místo 19 a nakonec tahem A vrátíme 17, 1, 2, 21 a 22 na původní místa. Můžeme proto zvolit $R = A^{-1}BA$. V odstavci o konjugovaných postupech a permutacích jsme vysvětlili, jakou permutaci postup $RQ^{-1}R^{-1}$ udělá. Její graf je na obrázku 4.17.a. Liší se od grafu permutace q^{-1} inverzní ke $q = QU$ (obrázek 4.16.c) záměnou prvku 19 za prvek 18. Složeným postupem $Q(RQ^{-1}R^{-1})$ pak uděláme hledaný trojcyklus, jeho graf na obrázku 4.17.b je složením grafů permutací, které udělají postupy Q a $RQ^{-1}R^{-1}$, obrázky 4.16.c a 4.17.a. Je to trojcyklus, který posílá 18 na místo 22, 22 na místo 19 a 19 zpět na místo 18. Připomeňme si, že $R = A^{-1}BA$, $P = BAB^{-1}A^{-1}B$ a $Q = PAP^{-1}A^{-1}$. Celý postup je tedy

$$S = \underbrace{\overbrace{BAB^{-1}A^{-1}}^{r}BA\overbrace{B^{-1}ABA^{-1}B^{-1}}^{P^{-1}}A^{-1}}_{Q}\ \underbrace{A^{-1}BA}_{R}$$

$$\underbrace{A\overbrace{BAB^{-1}A^{-1}}^{P}BA^{-1}\overbrace{B^{-1}ABA^{-1}B^{-1}}^{P^{-1}}}_{Q^{-1}}\ \underbrace{A^{-1}B^{-1}A}_{R^{-1}}\ .$$

Je to dlouhý postup, smysl každého tahu by měl být ale jasný.



Obr. 4.17

Zbývá ukázat, že můžeme udělat každý trojcyklus. Tady už můžeme postupovat zcela stejně jako u krychle. Tři prvky, na kterých chceme trojcyklus udělat, musíme posunout na místa 18, 19, 22, na kterých to už umíme. Vhodně konjugovaným postupem S tak uděláme hledaný trojcyklus. Omezíme se jen na několik příkladů. Abychom udělali trojcyklus, který posílá 19 na místo 21, 21 na místo 22 a 22 zpět na místo 19, tj. trojcyklus v jednom uchu, musíme posunout 21 na místo 18 tak, aby 19 a 22 zůstaly na místě. To uděláme třeba postupem $ABBA^{-1}$. Tímto postupem konjugujeme S, hledaný trojcyklus proto uděláme postupem
$(ABBA^{-1})S(AB^{-1}B^{-1}A^{-1})$. Trojcyklus, který posílá 1

na místo 3, 3 na místo 2 a 2 na místo 1, pak uděláme konjugováním posledního postupu nějakým postupem, který převede 1, 2, 3 na místa 22, 21, 19. Stačí proto $AAAA(ABBA^{-1}SAB^{-1}B^{-1}A^{-1})A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}$.

Cvičení 4.9. Najděte postupy na uších, které udělají následující trojcykly:

a) 9 na místo 11, 11 na místo 6 a 6 zpět na místo 9,
b) 2 na místo 4, 4 na místo 12 a 12 zpět na místo 4,
c) 2 na místo 7, 7 na místo 14 a 14 zpět na místo 2.

Tak můžeme udělat každý trojcyklus (jak si za chvíli dokážeme). Z nich složíme každou sudou permutaci (odstavec 4.1.). A protože každou lichou pozici převedeme jedním tahem do pozice sudé, umíme složit každou pozici.

Na uších lze složit každou pozici.

Stejně jako u Rubikovy krychle, nikomu nedoporučuji, aby takto postupoval při skládání uší od samého počátku. Opět je mnohem rychlejší dávat kuličky na správná místa, dokud to jde, a teprve potom dělat potřebné trojcykly vhodným konjugováním postupu S, nebo ještě lépe, nějakého vlastního postupu. Varianty uší, které byly v prodeji, obsahovaly vždy několik kuliček stejné barvy. To skládání podstatně ulehčuje, protože přehození kuliček stejné barvy není vidět. Trojcykly můžeme proto dělat také tak, že konjugujeme postup Q nějakým postupem, který na místa kuliček v jednom z trojcyklů převede tři kuličky stejné barvy. S výhodou můžeme takto používat i krátký postup P.

Zbývá ještě pořádně ukázat, že můžeme udělat jakýkoliv trojcyklus. Budeme postupovat stejně jako v případě hranových kostiček na Rubikově krychli. Umíme udělat trojcyklus na místech 1, 2, 3, stačí proto libovolné tři kuličky i, j, k vhodným postupem přemístit na místa 1, 2, 3. Tímto postupem pak konjugujeme postup, který udělá trojcyklus na kuličkách 1, 2, 3.

Napřed posuneme kuličku k na místo 17 a tahem A^{-1} pak na místo 1. Potom najdeme kuličku j. Je-li v uchu B, posuneme ji vhodným opakováním tahu B na místo 17, k zůstává na místě 1. Tahem A^{-1} pak dostaneme k na místo 2 a j na místo 1. Není-li j v uchu B, vhodným opakováním tahu A^{-1} posuneme j do jednoho z průsečíků tak, aby k zůstala na jednom z míst 1—8. Tahem B pak přemístíme j do ucha B a opakováním tahu A vrátíme k zpět na místo 1. Z ucha B už umíme dostat j na místo 1 a k na místo 2. S kuličkou i postupujeme analogicky. Je-li v uchu B, posuneme ji na místo 17, a tahem A^{-1} dostaneme všechny tři kuličky tam, kam chceme: k na místo 3, j na místo 2 a i na místo 1. Pokud i není v uchu B, opakujeme napřed vhodně tah A^{-1}, abychom dostali i do jednoho z průsečíků a j, k zůstaly v oblouku na místech 1—8. Tahem B pak dostaneme i do ucha B a opakováním tahu A vrátíme k na místo 2 a j na místo 1. Z ucha B už i spolu s j a k na místa 1, 2, 3 umíme dostat. Tím jsme ukázali, že na uších jde opravdu udělat každý trojcyklus.

Cvičení 4.10. Dokažte, že libovolných šest různých kuliček můžeme vhodným postupem dostat na místa 1, 2, 3, 4, 5, 6, aniž byste používali toho, že umíme každou pozici složit.

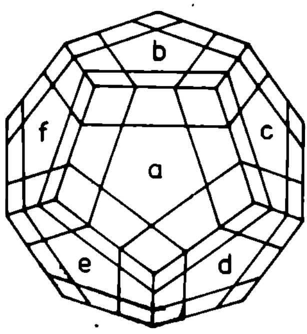
A jak je to s variantou s třinácti kuličkami v jednom uchu? Postup S funguje i na ní. Funguje i na mnoha dalších.

4.7. Dvanáctistěn, čtyřstěn, domino, patnáctka, babylónská věž. U dalších her budeme postupovat rychleji.

Dvanáctistěn. Vzhledem k tomu, že jedna vrstva tvoří jen malou část hračky, je nalezení postupů, které prohodí v jedné vrstvě jen dva rohové nebo dva hranové prvky, jednoduché.

Jak prohodit rohové prvky *acd* a *ade* tak, aby zbývající prvky ve vrstvě *a* zůstaly na původních místech? Tahy $C^{-1}E$ dostaneme obě kostičky mimo vrstvu *a*. Zbývá je nějak zaměnit, a přitom nepohnout ostatními prvky *a*. K tomu máme na dvanáctistěnu velký prostor, můžeme to udělat třeba tahy $G^{-1}HG$ (*ade* je už tam, kde má být), a potom $H^{-1}E^{-1}C$ vrátíme vše zpět do vrstvy *a*. Postupem $P = C^{-1}EG^{-1}HGH^{-1}E^{-1}C$ tedy prohodíme ve vrstvě *a* dva rohové prvky *acd* a *ade*. Postupem $PAP^{-1}A^{-1}$ potom uděláme trojcyklus na rohových kostičkách *ade*, *abc*, *acd* a vhodným konjugováním tohoto postupu uděláme jakýkoliv rohový trojcyklus.

Cvičení 4.11. Stejnou metodou, jakou jsme použili u hranových kostiček na Rubikově krychli, dokažte, že libovolné tři rohové prvky na dvanáctistěnu můžeme převést na místa *ade*, *acd* a *abc*.



Obr. 4.18

Protože každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů, umíme libovolnou pozici, která má polohovou permutaci na rohových kostičkách sudou, převést do pozice, ve které jsou všechny rohové prvky na správných místech. Má-li být pozice řešitelná, musí být také její polohová permutace na hranových kostičkách sudá. Zbývá proto najít postup, který udělá nějaký trojcyklus na hranových kostičkách, a ponechá všechny rohové prvky na správných místech.

To je rovněž snadné. Prohodíme nejdříve nějaké dva hranové prvky, třeba *ac* a *ad*, ve vrstvě *a*. Tahy BD^{-1} uvolníme prvek *ac* a tahem C^{-1} jej přesuneme mimo vrstvu *a*. Tahy DB^{-1} vrátíme zbývající prvky z *a* zpět na původní místa. Nyní tahy CE^{-1} uvolníme *ad*, tahy $D^{-1}D^{-1}$ posuneme *ac* na jeho místo a opět vrátíme postupem EC^{-1} všechno ostatní zpět do vrstvy *a*. Nakonec přesuneme *ad* na místo *ac* postupem $D^{-1}BGCCB^{-1}D$. Prvky *ac* a *ad* jsme pak prohodili postupem

$$Q = BD^{-1}C^{-1}DB^{-1}CE^{-1}D^{-1}D^{-1}EC^{-1}D^{-1}BGCCB^{-1}D.$$

Snadno asi najdete jednodušší postup, který udělá ve vrstvě *a* totéž, co Q. Postupem $QAQ^{-1}A^{-1}$ uděláme trojcyklus na hranových prvcích *ab*, *ac*, *ad* a všechno ostatní zůstane na původních místech. A nakonec konjugováním tohoto postupu uděláme jakýkoliv trojcyklus.

Cvičení 4.12. Dokažte, že libovolné tři hranové prvky můžeme vhodným postupem převést na místa *ad*, *ab* a *ac*.

Každou pozici, která má polohovou permutaci sudou jak na rohových, tak na hranových prvcích, umíme tedy převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Z minulé kapitoly už víme, že u ostatních pozic to nejde. Objasnili jsme tak zcela, které pozice na dvanáctistěnu jde srovnat.

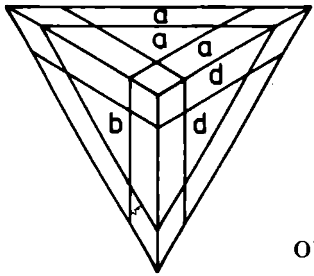
Každá pozice na dvanáctistěnu se sudou polohovou permutací na rohových i hranových prvcích lze převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech.

Čtyřstěn. Aby mohla být pozice vůbec řešitelná, musí být její polohová permutace sudá jak na rohových, tak na hranových kostičkách. Čtyřstěn má čtyři rohové prvky a každou sudou permutaci na čtyřprvkové množině můžeme složit z nejvýše dvou trojcyklů. Protože každé tři rohové prvky leží v jedné vrstvě, můžeme na čtyřstěnu udělat libovolný trojcyklus na rohových prvcích, hranové přitom ale nezůstanou na místě! V každém případě tak stačí nejvýše dva tahy, abychom dostali všechny rohové prvky na správná místa.

Abychom dostali na správná místa i prvky hranové, najdeme opět postup, který udělá nějaký hranový trojcyklus, a všechno ostatní nechá na místě. Jeho konjugováním pak už uděláme každý hranový trojcyklus. Dosud jsme vždy začínali postupem, který prohodil dva hranové prvky v jedné vrstvě. V případě čtyřstěnu to znamená najít postup, který třeba ve vrstvě *a* prohodí dva hranové prvky, a ostatní kostičky v této vrstvě (tj. jeden hranový a tři rohové) nechá na původních místech. U Rubikovy krychle a dvanáctistěnu se nám podařilo najít dokonce takové postupy, které tyto prvky nechaly nejen na původním místě, ale i s původní orientací. Najít takové postupy na čtyřstěnu se zdá být obtížnější, podstatnou roli zde hraje skutečnost, že v každé vrstvě leží více než polovina všech pohyblivých prvků.

Na rozdíl od krychle a dvanáctistěnu není na čtyřstěnu dost prostoru mimo jednu vrstvu, a to činí jeho skládání obtížnějším. V této chvíli nám jde o to, abychom dostali všechny prvky na správná místa, a tak si orientací nebudeme zatím všímat.

Jak prohodit prvky *ad* a *ac*?



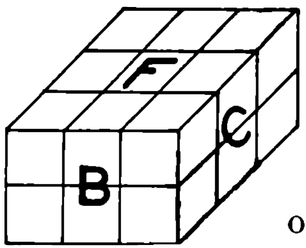
Obr. 4.19

Postupem $D^{-1}ABA^{-1}$ zůstanou ve vrstvě *a* všechny prvky na původních místech s výjimkou *ad*, který si vystřídá místo s protilehlým prvkem *bc*. Nyní použijeme konjugování. Tahem A posuneme prvek *ac* na místo *ad*, pak uděláme stejný postup $D^{-1}ABA^{-1}$, kterým zaměníme *ac* za *ad*, a zakončíme konjugování tahem A^{-1}. Prvek *ad* je už na místě *ac*, a zbývá pouze vyměnit prvek *bc* z vrstvy *a* za *ac*. To už umíme, stačí udělat opět $D^{-1}ABA^{-1}$. Celý postup, který prohodí ve vrstvě *a* prvky *ad* a *ac* tak, že všechny ostatní prvky v *a* zůstanou na místě (některé se změněnou orientací), se proto rovná $Q = (D^{-1}ABA^{-1})A(D^{-1}ABA^{-1})A^{-1}(D^{-1}ABA^{-1})$.

Dále už pokračujeme standardním způsobem. Postupem $QAQ^{-1}A^{-1}$ uděláme trojcyklus prohazující hranové prvky *ab*, *ac* a *ad*, a ponechávající všechny ostatní pohyblivé prvky na původních místech. Jeho dalším konjugováním uděláme libovolný hranový trojcyklus. Každou pozici, která je sudá jak na hranových, tak na rohových kostičkách, umíme tak převést do pozice se všemi prvky na správných místech. Ze třetí kapitoly víme, že u jiných pozic to nejde. Tím jsme zcela vyjasnili, kdy můžeme dostat každý prvek na správné místo, a našli postup, jak to udělat.

Každou pozici na čtyřstěnu, která má polohovou permutaci sudou na rohových i na hranových prvcích, lze srovnat do pozice se všemi prvky na správných místech.

Domino. Skládání domina je podstatně ulehčené tím, že existuje poměrně jednoduchý postup, který prohodí pouze dva hranové prvky, a všechny ostatní nechá na původních místech. Připomeňme si označení stěn:

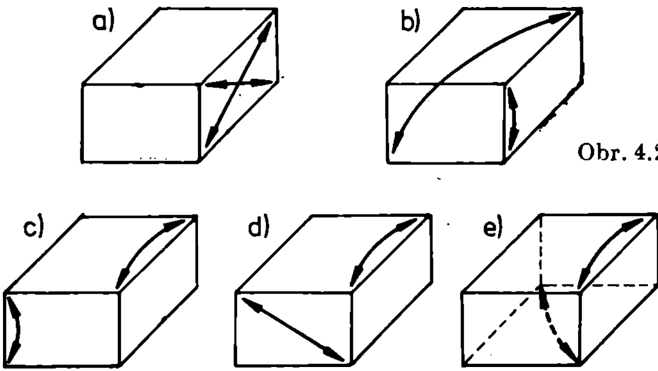


Obr. 4.20

Tímto postupem je $Q = BAABAABAA$ a prohodíme jím prvky 14 a 16 v dolní vrstvě (tah A je otočení dolní vrstvou). Snadno se přesvědčíme, že jeho konjugováním uděláme každou hranovou transpozici, a tedy libovolnou permutaci na hranových kostičkách, která nechává všechny rohové na původních místech.

Cvičení 4.13. Stejně jako v případě hranových prvků na Rubikově krychli dokažte, že libovolné dva hranové prvky i, j na dominu můžeme vhodným postupem převést na místa 14 a 16.

Zbývá dopravit nějak všechny rohové prvky na správná místa. Konjugováním postupu Q pak už umíme přemístit na správná místa i hranové prvky, aniž bychom si rohové opět rozházeli. Začneme zase postupem, který prohodí v horní vrstvě dva rohové prvky, a zbývající dva nechá na místě. Hranové prvky nás v této chvíli nezajímají. Prosté otočení boční vrstvou C udělá permutaci na obrázku 4.21.a. Nyní stačí konjugovat tah C nějakým postupem, který přesune tyto dva dvojcykly tak, že jeden bude v horní vrstvě a druhý v dolní. Konjugujeme-li tahem A, uděláme postup ACA^{-1} a permutaci na obrázku 4.21.b.



Obr. 4.21

Dalším konjugováním tahem B uděláme postup $BACA^{-1}B^{-1}$ a permutaci na obrázku 4.21.c. Teď konjugujeme tahem A^{-1}, postupem $A^{-1}BACA^{-1}B^{-1}A$ uděláme permutaci 4.21.d. A nakonec konjugujeme tahem E, celý postup $P = EA^{-1}BACA^{-1}B^{-1}AE^{-1}$ prohodí v horní vrstvě dva hranové prvky 3 a 9 a zbylé dva 1 a 7 nechá na původních místech — obrázek 4.21.e.

Dále pokračujeme obvyklým způsobem. Pro tento jediný okamžik označíme otočení horní vrstvou vpravo písmenem F. Postupem $PFP^{-1}F^{-1}$ uděláme trojcyklus na rohových prvcích v horní vrstvě a jeho konjugováním libovolný trojcyklus na rohových kostičkách, a tím i každou sudou permutaci. Pokud náhodou na počátku není permutace na rohových prvcích sudá, stačí udělat napřed tah A.

Každá pozice na dominu je řešitelná.

Patnáctka. Ve druhé kapitole jsme ukázali, že sudé pozice s lichým prázdným místem a liché se sudým prázdným místem jsou neřešitelné. Nyní ukážeme, že všechny ostatní pozice řešitelné jsou. Především si ujasníme, že každou takovou pozici lze převést do sudé pozice s prázdným místem 16. Každý tah dělá totiž transpozici, a je tedy lichý. Je-li pozice sudá, je prázdné místo také sudé, a sudým počtem tahů ho přesuneme na místo 16. Uděláme tím sudou permutaci, nová pozice proto bude zase sudá. Je-li pozice lichá, je prázdné místo také liché, po lichém počtu tahů ho dostaneme na místo 16. Uděláme tím lichý počet transpozic, lichou permutaci, nová pozice bude proto sudá.

Při praktickém skládání je třeba umět složit pozici na obrázku 4.22.

Cvičení 4.14. Najděte postup, který převede pozici na obrázku 4.22. do pozice základní.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
15	13	14	

Obr. 4.22

Postup P, který jsme našli ve cvičení, je speciální, začíná a končí prázdným místem v pravém dolním rohu. Použijeme ho také při našem důkazu, že zbývající pozice na patnáctce jsou řešitelné. Druhý potřebný krok je obsahem dalšího cvičení.

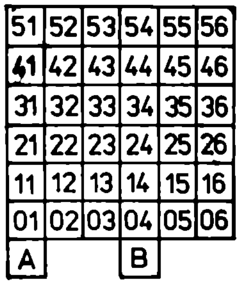
Cvičení 4.15. Vezměte v základní pozici tři libovolné prvky i, j, k (prázdné místo mezi nimi není) a dokažte, že existuje speciální postup, který převede i na místo 13, j na místo 14 a k na místo 15.

Tento postup označíme Q. Postup P ze cvičení 4.14. udělal trojcyklus na místech 13, 14 a 15. Protože jsou P i Q speciální, můžeme je skládat. Konjugovaný postup QPQ^{-1} pak udělá trojcyklus na prvcích i, j a k. Tím jsme ukázali, že existují speciální postupy, které udělají libovolné trojcykly. Každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů, můžeme tedy složit každou sudou pozici s prázdným místem 16. Na počátku jsme ukázali, že do takové pozice můžeme snadno převést každou potenciálně řešitelnou pozici. Dokázali jsme tak pravidlo uvedené už ve druhé kapitole.

> Každá sudá pozice se sudým prázdným místem a každá lichá pozice s lichým prázdným místem je řešitelná.

Babylónská věž. Tato u nás hodně rozšířená hra je prostorovou variantou patnáctky. Její řešení je v podstatě stejně jednoduché, až na jedno obtížnější místo — prohození dvou kuliček. Ukážeme si, jak pomocí vhodné modifikace triku se šachovnicí a rozlišení sudých a lichých permutací toto místo snadno překonat.

Začneme podrobnějším popisem hry. Na obrázku 4.23. vidíme rozvinutou základní pozici, místo barevných kuliček používáme opět čísla.



Obr. 4.23

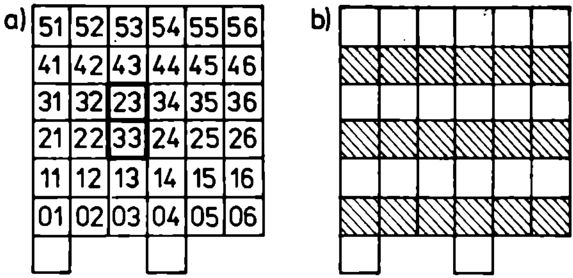
Jednotlivé vrstvy budeme označovat symboly (0), (1), (2), (3), (4), a (5). Ve vrstvě (5) leží čísla 51, 52, 53, 54, 55, 56. Každou vrstvou můžeme otáčet vůči zbývajícím vrstvám, na obrázku se to projeví jako posunutí příslušného řádku vpravo nebo vlevo. Posunutí vpravo budeme označovat symbolem příslušné vrstvy — (2), (5), atd., pro označení posunutí vlevo přidáme opět $^{-1}$: $(2)^{-1}$, $(0)^{-1}$ a $(5)^{-1}$. Tak třeba po tahu (3) bude číslo 31 na místě čísla 32, 32 na místě 33 atd. Číslo 36 bude na místě 31. Tah $(2)^{-1}$ přesune 21 na místo 26, 26 na místo 25 atd. Kromě těchto tahů můžeme ještě posunovat kuličky vertikálně ve sloupci obsahujícím prázdné místo. Prázdné místo se objeví, pokud do jednoho ze dvou míst označených A, B (nikoliv do obou současně) posuneme kuličku ze sousedního pole 01 nebo 04. Při těchto tazích můžeme posunout kuličku na s ní sousední prázdné místo. Nemůžeme je proto dělat kdykoliv, nezávisle na tom, jaké prvky se na sousedních místech nacházejí — babylónská věž je hra neúplná.

Jestliže žádná kulička není na některém ze dvou míst A, B, budeme říkat, že věž je ve speciální pozici. Postupům, které začínají a končí ve speciální pozici, říkáme také speciální. Speciální postupy můžeme libovolně skládat.

Posunutí kuličky na sousední prázdné místo ve stejném sloupci udělá transpozici. Jaké další transpozice můžeme snadno udělat? Budeme předpokládat, že pozice, ve které se věž nachází, není speciální — na jednom z míst A, B je nějaká kulička. Potom můžeme jednoduše udělat řadu dalších transpozic. Ukážeme si jak na konkrétním případě. Nechť je prázdné třeba místo 23. Vhodným opakováním tahu (3) dostaneme nad prázdné místo 23 libovolnou z kuliček na místech 31—36, pak ji transpozicí (23, 33) přesuneme na místo 23 a opakováním tahu $(3)^{-1}$ vrátíme zbývající kuličky ve vrstvě (3) na původní místa. Uděláme tak transpozici, která na prázdné místo 23 přesune libovolnou z kuliček v sousední vrstvě (3). Naprosto stejně najdeme také postup, který na místo 23 přesune libovolnou z kuliček v druhé sousední vrstvě (1), a všechny ostatní ponechá na původních místech .Umíme tedy jednoduše udělat ty transpozice, které na prázdné místo posunou kteroukoliv z kuliček v sousední vrstvě.

Skládáme-li věž, jsme obvykle v pokušení používat pouze tyto transpozice. To však ke složení všech pozic nestačí. Speciálně tímto způsobem nedokážeme prohodit dvě kuličky tak, aby všechny ostatní zůstaly na původních místech. Dokážeme to vhodnou aplikací metody, kterou jsme použili už u patnáctky.

Každé posunutí kuličky na prázdné místo v sousední vrstvě budeme považovat za jeden tah. Těmito tahy děláme různé transpozice. Proč nestačí ke složení pozice na obrázku 4.24.a se dvěma přehozenými kuličkami 23 a 33? Tato pozice je lichá, má jediný sudý cyklus. Základní pozice 4.23. je sudá. Každým tahem uděláme nějakou transpozici, lichou pozici 4.24.a proto můžeme složit, pokud to vůbec nějak jde, pouze lichým počtem tahů-transpozic. A to vyloučíme správným použitím triku se šachovnicí. Jednotlivá místa na věži obarvíme podle obrázku 4.24.b.



Obr. 4.24

Každý tah-transpozice změní barvu prázdného místa, z jedné speciální pozice do druhé — třeba z pozice 4.24.a do základní — se proto můžeme dostat jen sudým počtem tahů-transpozic, nikdy lichým. Pozici 4.24.a tedy použitím pouhých tahů-transpozic nikdy nesložíme. Naprosto stejně se ukáže, že tahy-transpozice nestačí ke složení žádné speciální pozice, která má polohovou permutaci lichou. Stačí pouze na sudé speciální pozice. To už dokážeme běžným způsobem. Nejprve najdeme speciální postup, který udělá nějaký trojcyklus, potom konjugováním uděláme všechny trojcykly a nakonec použijeme výsledku z odstavce 4.1.

Cvičení 4.16. a) Najděte speciální postup z tahů transpozic, který udělá trojcyklus na místech 31, 41, 51.

b) Dokažte, že pro libovolné tři kuličky i, j, k existuje speciální postup z tahů-transpozic, který přemístí i na místo 31, j na místo 41 a k na místo 51.

c) Dokažte, že libovolný trojcyklus se dá udělat vhodným speciálním postupem složeným jen z tahů-transpozic.

d) Dokažte, že pomocí tahů-transpozic lze složit každou sudou speciální pozici.

A jak tedy složíme pozici 4.24.a? Odpověď je jednoduchá. Musíme ji napřed nějak dostat do sudé speciální pozice. Ve cvičení jsme právě dokázali, že takové pozice složit jdou. Tahem-transpozicí to neuděláme, zbývá jenom otočení nějakou vrstvou. Jakou pozici tak dostaneme? Otočením uděláme permutaci, která má jeden cyklus délky 6 a zbývající jednoprvkové. Otočení je lichý tah. Z liché pozice 4.24.a tak dostaneme pozici sudou. Protože je to navíc pozice speciální, stačí k jejímu složení dále používat už jenom tahy-transpozice. Otočením nějakou vrstvou tak dostaneme z každé liché speciální pozice sudou speciální pozici, kterou už umíme složit. Všechny speciální pozice proto složit jdou. A jelikož z každé pozice se snadno dostaneme do speciální, jsou všechny pozice řešitelné.

Na babylónské věži jsou všechny pozice řešitelné.

Cvičení 4.17. a) Dokažte, že pozice se dvěma přehozenými kuličkami na babylónské věži, která má lichý počet sloupců, je neřešitelná.

b) Popište řešitelné pozice na takových věžích.

***4.8. k-tranzitivní grupy permutací.** Mnohokrát jsme už používali postupy, které nějakou trojici prvků přemístily na místo jiné trojice. Dařilo se nám to díky tomu, že grupy polohových permutací na jednotlivých hlavolamech byly „dostatečně bohaté". Ukážeme si nyní matematický pojem, který tuto bohatost zachycuje. V souvislosti s tím také zopakujeme souvislé a nesouvislé hry.

Říkáme, že nějaká grupa $\mathbf{G}$ permutací na množině I je *tranzitivní*, jestliže pro každé dva prvky $i, j \in I$ existuje permutace $p \in \mathbf{G}$ taková, že $ip = j$.

Je-li $\mathbf{G}$ grupa všech polohových permutací na nějaké hře, pak tranzitivita $\mathbf{G}$ znamená, že každý pohyblivý prvek i lze nějakým postupem převést na místo libovolného jiného pohyblivého prvku j. Nějaká hra je proto souvislá, právě když grupa polohových permutací na této hře je tranzitivní.

U nesouvislých hlavolamů jsme rozlišovali orbity. Totéž můžeme udělat u libovolné permutační grupy. Je-li $\mathbf{G}$ grupa permutací na I a $i, j \in I$ libovolné dva prvky, pak říkáme, že i je *ekvivalentní* s j, jestliže existuje permutace $p \in \mathbf{G}$ taková, že $ip = j$.

Axiómy grupy mají následující tři důsledky.

a) Je-li i ekvivalentní s j a j ekvivalentní s k, pak také i je ekvivalentní s k. Podle předpokladů existují permutace $p, q \in G$ takové, že $ip = j$ a $jq = k$. Potom $i(p \circ q) = (ip)q = k$, tj., opravdu i je ekvivalentní s k.

b) Každý prvek $i \in I$ je ekvivalentní sám se sebou, neboť identická permutace na I zobrazuje i do i.

c) Je-li i ekvivalentní s j, pak také j je ekvivalentní s i.

Existuje totiž permutace $p \in G$ taková, že $ip = j$. Potom ale $jp^{-1} = i$, tj., j je ekvivalentní s i.

Maximálním množinám vzájemně ekvivalentních prvků budeme říkat *orbity* grupy G. Podle bodu b) každý prvek $i \in I$ leží v nějaké orbitě. Ukážeme, že různé orbity jsou disjunktní, nemají žádný společný prvek. Jsou-li K, L dvě orbity, které se protínají, j nějaký jejich společný prvek, potom každý prvek $k \in K$ je ekvivalentní s j a prvek j je ekvivalentní s každým prvkem $l \in L$. Podle vlastnosti a) je také k ekvivalentní s l. V množině $K \cup L$ jsou proto každé dva prvky ekvivaletnní. Vzhledem k tomu, že K i L jsou maximální množiny vzájemně ekvivalentních prvků, platí $K, L \supseteq K \cup L$. Protože je také $K \cup L \supseteq K, L$, dostáváme tak $K = L = K \cup L$. Tím jsme dokázali, že různé orbity permutační grupy G jsou disjunktní.

Orbity na nějakém hlavolamu tak, jak jsme je používali, odpovídají orbitám grupy polohových permutací tohoto hlavolamu.

Grupa permutací G na množině I je tranzitivní, právě když jsou každé dva prvky I ekvivalentní, a to je, právě když má pouze jednu orbitu. Jestliže G není tranzitivní a J je nějaká orbita, potom každá permutace $p \in G$ zobrazuje každý prvek $j \in J$ do jednoznačně určeného prvku $jp \in J$. Zobrazení p_J, které každému prvku $j \in J$ přiřazuje prvek $jp_J = jp \in J$, je, jak snadno ověříme, vzájemně jednoznačné zobrazení, tj. permutace na množině J. Říkáme mu *restrikce* p na J. Připomeňme si, že v případě polohové permutace p nějaké pozice na Rubikově krychli, čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu, jsme restrikci p na rohovou (hranovou) orbitu říkali rohová (hranová) část p.

Cvičení 4.18. Předpokládejme, že G je nějaká grupa permutací na množině I a J orbita G. Dokažte, že množina všech restrikcí p_J permutací $p \in G$ na J spolu s operací skládání tvoří grupu. Této grupě budeme říkat *restrikce* $\mathbf{G}$ na J a označovat ji $\mathbf{G}_J$.

Návod. Ověřte axiómy grupy.

Samotná tranzitivita grup polohových permutací, případně jejich restrikcí na orbity, nám při skládání her nestačila, potřebovali jsme více. Každou trojici různých prvků z jedné orbity přemístit vhodným postupem na místa nějaké jiné trojice. Odpovídající vlastnost grupy polohových permutací popisuje následující důležitý pojem.

Říkáme, že grupa $\mathbf{G}$ permutací na množině I je *k-tranzitivní* (k je nenulové přirozené číslo menší nebo rovné počtu prvků I), jestliže pro každé dvě posloupnosti $i_1, i_2, \ldots, i_k$ a $j_1, j_2, \ldots, j_k$ různých prvků I existuje permutace $p \in G$ taková, že $i_l p = j_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, \ldots, k$. Jinak řečeno, grupa $\mathbf{G}$ je k-tranzitivní, jestliže každou tabulku permutace na I, ve které je už napsáno libovolně k sloupců, můžeme doplnit do tabulky permutace patřící do $\mathbf{G}$. Nebo ještě jinak, libovolných k šipek mezi prvky množiny I (z každého a do každého nejvýše jedna) můžeme vždy doplnit do grafu nějaké permutace z $\mathbf{G}$.

Grupa permutací je tedy 1-tranzitivní, právě když je tranzitivní. Je-li $k \geq 2$, pak každá k-tranzitivní grupa je samozřejmě $(k - 1)$-tranzitivní. Následující jednoduché tvrzení nám poněkud usnadní zjišťování, kdy je nějaká grupa k-tranzitivní.

Kdy je grupa tranzitivní? *Grupa* $\mathbf{G}$ *permutací na množině* $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ *je* k*-tranzitivní, právě když splňuje jednu z následujících dvou podmínek.*

1. *Pro každou posloupnost* $i_1, \ldots, i_k$ *různých prvků* I

existuje permutace $p \in G$ taková, že $lp = i_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$.

2. *Pro každou posloupnost $i_1, \ldots, i_k$ různých prvků I existuje permutace $r \in G$ taková, že $i_l r = l$ pro všechna $l = 1, 2, \ldots, k$.*

Důkaz. Je-li $\mathbf{G}$ k-tranzitivní, pak permutace p taková, že $lp = i_l$ pro všechna l existuje podle definice k-tranzitivních grup.

Nechť naopak $\mathbf{G}$ splňuje podmínku 1., $i_1, i_2, \ldots, i_k$ a $j_1, j_2, \ldots, j_k$ jsou dvě posloupnosti různých prvků I. Potom existují permutace $p, q \in G$ takové, že $lp = i_l$ a $lq = j_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$. Pak ale platí $i_l(p^{-1} \circ q) = j_l$ pro všechna $l = 1, 2, \ldots, k$, $\mathbf{G}$ je tudíž k-tranzitivní.

Dokázat, že také podmínky 1. a 2. jsou ekvivalentní, je snadné. Platí $lp = i_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$, právě když $i_l p^{-1} = l$ pro všechna l.

Ve cvičení 4.10. jsme ukázali, že libovolných šest kuliček na uších můžeme vhodným postupem převést na místa 1, 2, ..., 6. Grupa všech řešitelných pozic na uších je tedy podle podmínky 2. 6-tranzitivní. Ukážeme ještě, jak moc tranzitivní jsou symetrická a alternativní grupa.

Symetrická grupa $\mathbf{S}_I$ na množině $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, která má m prvků, je m-tranzitivní, alternativní grupa $\mathbf{A}_I$ je $(m - 2)$-tranzitivní.

Dokážeme to pomocí podmínky 1. Je-li $i_1, i_2, \ldots, i_m$ posloupnost různých prvků I, pak

$$p = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \end{pmatrix}$$

je tabulka permutace $p \in \mathbf{S}_I$, která zobrazuje každý prvek $l = 1, 2, \ldots, m$ do i_l. Symetrická grupa $\mathbf{S}_I$ je tudíž m-tranzitivní.

Je-li $i_1, i_2, \ldots, i_{m-2}$ posloupnost různých prvků I, pak pouze dva prvky I v ní neleží. Označíme je i a j. Nyní uvažujeme dvě různé permutace na množině I:

$$p = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m-2, & m-1, & m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_{m-2}, & i, & j \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m-2, & m-1, & m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_{m-2}, & j, & i \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že $q = p \circ (i, j)$. Právě jedna z permutací p, q je tedy lichá a druhá sudá. Vždy proto existuje sudá permutace, která zobrazuje každý prvek $l = 1, 2, \ldots, m-2$, do i_l. Podle podmínky 1. je alternativní grupa $\mathbf{A}_I$ $(m-2)$-tranzitivní.

Grupa všech řešitelných pozic na uších je proto ve skutečnosti 22-tranzitivní, každá pozice je řešitelná.

Závěrem tohoto odstavce ještě krátká poznámka. 4-tranzitivních grup je velice málo. Pokud množina I nemá právě 11, 12, 23 nebo 24 prvků, pak jediné 4-tranzitivní grupy, které na I existují, jsou symetrická a alternativní grupa. Na množinách s 11, 12, 23 a 24 prvky existuje vždy ještě jedna další 4-tranzitivní grupa, a žádné jiné 4-tranzitivní grupy neexistují. To je matematikům známo pouze několik let a je to důsledkem jednoho z nejobtížnějších tvrzení, které kdy bylo v matematice dokázáno. Více si o tom povíme v posledním dvouhvězdičkovém odstavci této kapitoly.

***4.9. Součin grup.** Tentokrát zahájíme zcela mimořádně čtyřstěnem. Na čtyřstěnu jsou dvě orbity, jednu tvoří čtyři rohové prvky, druhou šest hranových. Polohová permutace p libovolné pozice $\mathbf{p}$ určuje dvě různé restrikce — restrikci na rohovou orbitu, kterou označíme p_1, a restrikci na hranovou orbitu, kterou označíme p_2. Polohu všech pohyblivých prvků v pozici $\mathbf{p}$ můžeme popsat nejenom permutací p, ale také dvojicí restrikcí (p_1, p_2). Permutace p_1 je permutace na čtyřprvkové množině $\{abc, abd, acd, bcd\}$ rohových kostiček, p_2 je permutace na šestiprvkové množině $\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$ hranových kostiček.

Které dvojice (p_1, p_2) permutací odpovídají polohové permutaci nějaké srovnatelné pozice? V minulé kapitole jsme dokázali, že polohová permutace p každé srovnatelné pozice je sudá jak na rohových, tak na hranových prvcích, tj. p_1 a p_2 jsou v tomto případě sudé. V této kapitole jsme naopak dokázali, že každou pozici, jejíž polohová permutace má obě restrikce sudé, lze srovnat. Polohovým permutacím srovnatelných pozic proto odpovídají dvojice (p_1, p_2), kde p_1 a p_2 jsou sudé permutace na množinách rohových a hranových prvků. Každá polohová permutace p je jednoznačně určená svými restrikcemi p_1 a p_2. Jsou-li p a q dvě různé polohové permutace na čtyřstěnu, pak platí aspoň jedna z nerovností $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$. Různým polohovým permutacím proto odpovídají různé dvojice restrikcí. To znamená, že mezi polohovými permutacemi srovnatelných pozic na čtyřstěnu a dvojicemi (p_1, p_2) sudých permutací na čtyřprvkové, resp. šestiprvkové množině existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, které označíme $\mathbf{W}$. Platí

$$p\mathbf{W} = (p_1, p_2).$$

Polohové permutace tvoří grupu — grupu polohových permutací čtyřstěnu. Skládání mezi prvky této grupy můžeme pomocí zobrazení $\mathbf{W}$ přenést na množinu dvojic (p_1, p_2). Vezmeme dvě polohové permutace p, q. Platí $p\mathbf{W} = (p_1, p_2)$ a $q\mathbf{W} = (q_1, q_2)$. Čemu se rovná $(p \circ q)\mathbf{W}$? Musíme najít restrikce složené permutace $p \circ q$ na rohovou a hranovou orbitu. Libovolný rohový prvek i se permutací $p \circ q$ zobrazí do prvku $i(p \circ q) = (ip)q = (ip_1)q_1 = i(p_1 \circ q_1)$. Restrikce $p \circ q$ na rohovou orbitu se tedy rovná $p_1 \circ q_1$. Zcela stejně snadno se ověří, že restrikce $p \circ q$ na hranovou orbitu se rovná $p_2 \circ q_2$. Platí proto $(p \circ q)\boldsymbol{W} = (p_1 \circ q_1, p_2 \circ q_2)$. Mezi dvojicemi restrikcí můžeme tak přirozeným způsobem definovat operaci skládání, která dvojicím (p_1, p_2) a (q_1, q_2) přiřadí dvojici $(p_1, p_2) \circ (q_1, q_2) = (p_1 \circ q_1, p_2 \circ q_2)$. Dokážeme nyní v mnohem obecnějším tvaru, že takto definovaná operace skládání má vlastnosti grupy. Nejdříve ale jednu definici.

Vezmeme dvě grupy $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ definované na množinách G_1 a G_2. Operaci skládání budeme v obou případech označovat stejným symbolem $\circ$. Dále označíme $G_1 \times G_2$ kartézský součin množin G_1 a G_2, tj. množinu všech uspořádaných dvojic (g_1, g_2), kde $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$. Na množině $G_1 \times G_2$ definujeme operaci skládání takto: $(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2)$. Ukážeme, že množina $G_1 \times G_2$ s takto definovaným skládáním tvoří grupu. Budeme ji nazývat *součinem grup* $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ a označovat $\boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2$.

Musíme ověřit, že množina $G_1 \times G_2$ s operací skládání splňuje aiómy grupy. Pokud jde o asociativu, platí

$$\begin{aligned}
&((g_1, g_2) \circ (h_1, h_2)) \circ (i_1, i_2) = \\
&= (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2) \circ (i_1, i_2) = \\
&= ((g_1 \circ h_1) \circ i_1, (g_2 \circ h_2) \circ i_2) = \\
&= (g_1 \circ (h_1 \circ i_1), g_2 \circ (h_2 \circ i_2)) = \\
&= (g_1, g_2) \circ (h_1 \circ i_1, h_2 \circ i_2) = \\
&= (g_1, g_2) \circ ((h_1, h_2) \circ (i_1, i_2)).
\end{aligned}$$

Asociativita tedy plyne z toho, že operace v obou grupách $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ jsou asociativní. Jsou-li n_1 a n_2 neutrální prvky v grupách $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$, pak pro každý prvek $(g_1, g_2) \in G_1 \times$

$\times G_2$ platí $(g_1, g_2) \circ (n_1, n_2) = (g_1 \circ n_1, g_2 \circ n_2) = (g_1, g_2)$, a také $(n_1, n_2) \circ (g_1, g_2) = (g_1, g_2)$. Dvojice (n_1, n_2) je proto neutrální prvek. A nakonec, jsou-li $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$ libovolné prvky, existují k nim inverzní prvky g_1^{-1} a g_2^{-1}. Potom platí $(g_1, g_2) \circ (g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 \circ g_1^{-1}, g_2 \circ g_2^{-1}) = (n_1, n_2)$, a také $(g_1^{-1}, g_2^{-1}) \circ (g_1, g_2) = (n_1, n_2)$. Prvek (g_1^{-1}, g_2^{-1}) je tedy inverzní k prvku (g_1, g_2). Množina $G_1 \times G_2$ spolu s operací skládání je tedy opravdu grupa.

Teď už není těžké dokázat, že zobrazení $\boldsymbol{W}$, které jsme definovali na počátku odstavce, je izomorfismus grupy polohových permutací na čtyřstěnu a součinu alternativních grup $\boldsymbol{A}_4 \times \boldsymbol{A}_6$.

> Grupa polohových permutací na čtyřstěnu je izomorfní součinu alternativních grup $\boldsymbol{A}_4 \times \boldsymbol{A}_6$.

Cvičení 4.19. Dokažte následující vlastnost grupy polohových permutací na dvanáctistěnu:

> Grupa polohových permutací na dvanáctistěnu je izomorfní součinu alternativních grup $\boldsymbol{A}_{20} \times \boldsymbol{A}_{30}$.

Stejně můžeme dokázat o dominu:

> Grupa řešitelných pozic na dominu je izomorfní součinu symetrických grup $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_8$.

Cvičení 4.20. Dokažte právě uvedenou vlastnost grupy řešitelných pozic na dominu.

A jak je to s Rubikovou krychlí? Také tady určuje každá polohová permutace p nějaké srovnatelné pozice $\boldsymbol{p}$ dvě restrikce p_1 a p_2 na rohovou a hranovou orbitu. Z minulé kapitoly víme, že obě restrikce musí být současně sudé nebo současně liché. V této kapitole jsme dokázali, že každou pozici $\boldsymbol{p}$, jejíž polohová permutace p má tuto vlastnost, lze srovnat. Grupa polohových permutací na Rubikově krychli je proto izomorfní s podgrupou součinu symetrických grup $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$, kterou tvoří takové dvojice (p_1, p_2), ve kterých mají obě permutace p_1 a p_2 stejnou paritu. Jsou buď obě sudé, nebo obě liché. Této podgrupě můžeme říkat *paritní podgrupa* $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$ a označíme ji $\boldsymbol{R}$.

Ukážeme, že index paritní podgrupy v grupě $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$ se rovná 2. K tomu stačí najít nějaký prvek x grupy $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$, který neleží v $\boldsymbol{R}$ a pro který platí $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12} = R \cup Rx$. V grupě $\boldsymbol{R}$ leží všechny dvojice (p_1, p_2), kde p_1 a p_2 mají stejnou paritu. Zvolíme $x = (n, t)$, n je identická permutace na rohové orbitě a t je libovolná transpozice na hranové orbitě. Permutace n a t mají různou paritu, proto $x \notin R$. Jestliže nyní nějaká dvojice (q_1, q_2) neleží v R, pak q_1, q_2 mají různou paritu. Dvojice $(q_1, q_2) \circ (n, t) = (q_1, q_2 \circ t)$ potom musí ležet v R. Pak platí $(q_1, q_2) = (q_1, q_2) \circ ((n, t) \circ (n, t)) = ((q_1, q_2) \circ (n, t)) \circ (n, t) \in Rx$. Odtud vyplývá, že $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12} = R \cup Rx$, tj. paritní podgrupa $\boldsymbol{R}$ má index 2 v $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$.

> Grupa polohových permutací na Rubikově krychli je izomorfní s paritní podgrupou součinu symetrických grup $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$. Paritní podgrupa má index 2 v $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$.

****4.10. Mathieuovy grupy a vícetranzitivní permutační grupy.** Dosud se nám u každého hlavolamu podařilo najít postupy, které udělaly transpozici nebo trojcyklus. To řešení velmi usnadňovalo, konjugováním jsme našli postupy, které udělaly libovolnou transpozici nebo trojcyklus. A složit každou permutaci z transpozic nebo každou sudou permutaci z trojcyklů už je snadné. Nejobtížnější je vždy udělat vůbec nějakou transpozici nebo trojcyklus. Také při tom používáme konjugování. Nemůžeme to ale dělat mechanicky, musíme vždy také přemýšlet o konkrétních vlastnostech hračky, abychom mohli konjugování dobře použít.

Existuje vůbec nějaký hlavolam, na kterém by nešlo udělat transpozici nebo trojcyklus? Pokud vím, nikdo takový nevyrobil. Můžeme si ho ale představit. Pro zajímavost teď ukážeme matematické modely dvou takových hlavolamů. Připomeňme si, modelem hry bez orientace je vždy nějaká množina I (odpovídající pohyblivým prvkům) a několik permutací-generátorů na I (které si představujeme jako tahy). „Řešení" takové hry spočívá v popisu grupy všech permutací, které lze z generátorů poskládat, a v nalezení metody, jak každou takovou permutaci z generátorů složit. Grupy permutací, které ukážeme, objevil kolem roku 1860 francouzský matematik E. Mathieu a na jeho počest jsou nyní nazývány *Mathieuovy grupy.*

První z nich budeme označovat $\boldsymbol{M}_{12}$. Je definována na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Patří do ní všechny permutace na I, které lze dostat skládáním následujících tří generátorů:

$$a = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \\ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 12 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \\ 1, 2, 7, 10, 6, 4, 11, 3, 9, 5, 8, 12 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \\ 12, & 11, & 6, & 8, & 9, & 3, & 10, & 4, & 5, & 7, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakreslete si grafy těchto permutací, abyste měli představu, jak složitá je jejich vzájemná poloha, a jak obtížné by asi bylo „řešení“ takové hry.

Druhý příklad, který ukážeme, je grupa M_{24}. Je definována na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 24\}$. Patří do ní všechny permutace na I, které lze dostat skládáním následujících tří generátorů:

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 15, & 16, & 17, & 18, & 29, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 16, & 17, & 18, & 19, & 10, & 21, & 22, & 23, & 1, & 24 \end{matrix} \right),$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, \\ 1, & 2, & 17, & 13, & 4, & 6, & 9, & 18, & 3, & 7, & 12, & 23, & 14, & 19, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 20, & 15, & 10, & 11, & 5, & 22, & 16, & 21, & 8, & 24 \end{matrix} \right),$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \\ 24, & 23, & 12, & 16, & 18, & 10, & 20, & 14, & 21, & 6, & 17, & 3, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 22, & 8, & 19, & 4, & 11, & 5, & 15, & 7, & 9, & 13, & 2, & 1 \end{matrix} \right).$$

Nakreslete si opět grafy těchto permutací.

Snadno se ověří, že obě grupy M_{12} a M_{24} jsou tranzitivní. O trochu víc práce dá dokázat, že jsou 2-tranzitivní. Matematiky zaujaly především proto, že jsou obě 5-tranzitivní a nejsou 6-tranzitivní.

Tuto vlastnost dokazovat nebudeme (není to snadné!), pouze s její pomocí ukážeme, že grupy M_{12} a M_{24} neobsahují žádnou transpozici ani trojcyklus. Může grupa

$\mathbf{M}_{12}$ obsahovat nějakou transpozici? Kdyby ji obsahovala, pak by také, protože je 5-tranzitivní (2-tranzitivita by v této chvíli zcela stačila), obsahovala všechny ostatní transpozice (konjugování!). Z transpozic lze ale složit každou permutaci, grupa $\mathbf{M}_{12}$ by tedy musela obsahovat všechny permutace na I a byla by 12-tranzitivní. My ale víme, že není ani 6-tranzitivní. $\mathbf{M}_{12}$ tedy žádnou transpozici neobsahuje. Zcela stejně se ukáže, že neobsahuje ani žádný trojcyklus. Kdyby totiž nějaký měla, pak by opět z 5-tranzitivity plynulo, že obsahuje všechny trojcykly, a tedy všechny sudé permutace na I. Musela by být 10-tranzitivní, což zase není. $\mathbf{M}_{12}$ proto neobsahuje ani žádný trojcyklus.

Cvičení 4.21. Podobně dokažte, že grupa $\mathbf{M}_{24}$ neobsahuje žádnou transpozici ani trojcyklus.

E. Matheiu odvodil z grup $\mathbf{M}_{12}$ a $\mathbf{M}_{24}$ další zajímavé grupy, které se také nazývají Mathieuovy grupy. Způsob, jak to udělal, je důležitou standardní metodou v teorii permutačních grup. Proto si ji nyní podrobněji ukážeme.

Vezmeme si nějakou permutační grupu $\mathbf{G}$ na množině I a libovolný prvek $a \in I$. Symbolem G_a označíme množinu všech permutací z $\mathbf{G}$, které zobrazují prvek a do sebe, tj., $p \in G_a$, právě když $ap = a$. Říkáme také, že p *fixuje* a. Množina G_a spolu s operací skládání permutací je podgrupa grupy $\mathbf{G}$. Jestliže p a q fixují a, pak jejich složení $p \circ q$ také fixuje a. G_a obsahuje také neutrální permutaci n (ta fixuje každý prvek I) a spolu s každou permutací p také permutaci k ní inverzní. Grupu $\mathbf{G}_a$ budeme nazývat *stabilizátor bodu a* v grupě $\mathbf{G}$. Grupa $\mathbf{G}_a$ závisí nejenom na původní grupě $\mathbf{G}$, ale také na volbě prvku $a \in I$. Dokážeme, že v případě tranzitivní grupy $\mathbf{G}$ různé volby dávají izomorfní grupy.

Izomorfismus mezi stabilizátory různých bodů. *Buď* $\mathbf{G}$ *tranzitivní grupa permutací na množině* I *a* a, $b \in I$ *dva prvky. Potom jsou stabilizátory* $\mathbf{G}_a$ *a* $\mathbf{G}_b$ *izomorfní.*

Důkaz. Grupa $\mathbf{G}$ je tranzitivní, existuje proto permutace $s \in G$ taková, že $as = b$. Jestliže permutace p fixuje bod a, pak permutace $s^{-1} \circ p \circ s$ fixuje bod b. Skutečně, platí $b(s^{-1} \circ p \circ s) = (bs^{-1})p \circ s = a(p \circ s) = as = b$. Každé permutaci $p \in G_a$ můžeme proto přiřadit jednoznačně určenou permutaci $p\mathbf{W} = s^{-1} \circ p \circ s \in G_b$. Dokážeme, že takto definované zobrazení $\mathbf{W}$ je izomorfismus stabilizátorů G_a a G_b. Nejdříve ukážeme, že je zobrazení $\mathbf{W}$ vzájemně jednoznačné. Je-li $p\mathbf{W} = q\mathbf{W}$, pak $s^{-1} \circ p \circ s = s^{-1} \circ q \circ s$. Odtud plyne $s \circ (s^{-1} \circ p \circ s) \circ s^{-1} = s \circ (s^{-1} \circ q \circ s) \circ s^{-1}$, tj. $p = q$. Pro každou permutaci $r \in G_b$ existuje $p \in G_a$ takové, že $r = p\mathbf{W}$. Je-li totiž $t \in G_b$, pak $br = b$. Potom $a(s \circ r \circ s^{-1}) = a$, tj. $s \circ r \circ s^{-1} \in G_a$. Pro permutaci $p = s \circ r \circ s^{-1}$ platí $p\mathbf{W} = s^{-1} \circ p \circ s = s^{-1} \circ (s \circ r \circ s^{-1}) \circ s = r$. Zobrazení $\mathbf{W}$ je tedy opravdu vzájemně jednoznačné.

Dále platí $(p \circ q)\mathbf{W} = s^{-1} \circ (p \circ q) \circ s = s^{-1} \circ (p \circ s \circ s^{-1} \circ q) \circ s = (s^{-1} \circ p \circ s) \circ (s^{-1} \circ q \circ s) = p\mathbf{W} \circ q\mathbf{W}$, zobrazení $\mathbf{W}$ proto zachovává operaci skládání. Zachovává také neutrální prvek, $n\mathbf{W} = s^{-1} \circ n \circ s = n$. Nakonec $(p^{-1})\mathbf{W} = s^{-1} \circ p^{-1} \circ s = (s^{-1} \circ p \circ s)^{-1} = (p\mathbf{W})^{-1}$. Tím je dokázáno, že $\mathbf{W}$ je izomorfismus stabilizátorů G_a a G_b.

V případě tranzitní grupy $\mathbf{G}$ tedy vůbec nezáleží na tom, jaký prvek $a \in I$ zvolíme, stabilizátory všech prvků jsou izomorfní. Ukážeme ještě, jak je to s tranzitivitou stabilizátorů.

Tranzitivita stabilizátoru bodu. *Je-li* $\boldsymbol{G}$ *k-tranzitivní grupa permutací* ($k \geq 2$) *na množině* I, *pak stabilizátor* $\boldsymbol{G}_a$ *bodu* $a \in I$ *je* $(k - 1)$*-tranzitivní grupa permutací na množině* $I - \{a\}$.

Důkaz je jednoduchý. Jsou-li $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ a $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ dvě posloupnosti různých prvků množiny $I - \{a\}$, doplníme je prvkem a na posloupnosti $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k = a$ a $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}, j_k = a$ různých prvků I. Grupa $\boldsymbol{G}$ je k-tranzitivní na I, existuje proto permutace $p \in G$ taková, že $i_l p = j_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$. Speciálně tedy platí $ap = i_k p = j_k = a$, tj., $p \in G_a$. Existuje proto permutace $p \in G_a$, která zobrazuje i_l do j_l pro všechna $l = 1, 2, \ldots, k - 1$, grupa $\boldsymbol{G}_a$ je opravdu $(k - 1)$-tranzitivní na množině $I - \{a\}$.

E. Mathieu zkoumal stabilizátor prvku 12 v grupě $\boldsymbol{M}_{12}$. My si tento stabilizátor označíme $\boldsymbol{M}_{11}$. Protože je $\boldsymbol{M}_{12}$ 5-tranzitivní na množině $\{1, 2, \ldots, 12\}$, je $\boldsymbol{M}_{11}$ 4-tranzitivní na množině $\{1, 2, \ldots, 11\}$. Symbolem $\boldsymbol{M}_{23}$ dále označíme stabilizátor bodu 24 v grupě $\boldsymbol{M}_{24}$. Grupa $\boldsymbol{M}_{23}$ je 4-tranzitivní na množině $\{1, 2, 3, \ldots, 23\}$.

Nyní můžeme konečně pořádně zformulovat větu o existenci vícetranzitivních grup, o které jsme se zmínili v odstavci 4.8.

Každá 4-tranzitivní permutační grupa je buď symetrická grupa, nebo alternativní grupa, nebo jedna z Mathieuových grup $\boldsymbol{M}_{11}$, $\boldsymbol{M}_{12}$, $\boldsymbol{M}_{23}$, $\boldsymbol{M}_{24}$.

Grupy $\boldsymbol{M}_{11}$ a $\boldsymbol{M}_{23}$ jsou 4-tranzitivní, a nejsou 5-tranzitivní. Každá 5-tranzitivní grupa permutací je proto buď symetrická, nebo alternativní grupa, anebo jedna ze dvou 5-tranzitivních Mathieuových grup — $\boldsymbol{M}_{12}$ a $\boldsymbol{M}_{24}$. A protože žádná z Mathieuových grup není 6-tranzitivní, jediné 6-tranzitivní grupy permutací jsou symetrické a alternativní grupy.

Při řešení hlavolamů jsme hledali postupy, které udělají transpozici nebo trojcyklus, aniž bychom si byli jisti, že takové postupy existují. O jejich existenci se teď můžeme přesvědčit pomocí uvedeného výčtu 4-tranzitivních grup permutací. Ukážeme si to na jediném příkladu — na uších.

Celkem jednoduše se dá ukázat, že grupa všech řešitelných pozic na uších je 6-tranzitivní, udělali jsme to ve cvičení 4.10. Nezbývá tedy jiná možnost, než že grupa všech řešitelných pozic je buď symetrická, nebo alternativní. Každý tah je lichý, nemůže to proto být alternativní grupa, a musí to být grupa symetrická. Každou pozici lze tedy složit, mimo jiné proto existují postupy, které udělají transpozici nebo trojcyklus. Víme tedy, že takové postupy existují, zbývá je nějak najít.

Úplný seznam 4-tranzitivních permutačních grup je důsledkem tzv. *klasifikace konečných jednoduchých grup*, dosažené před několika lety. Nemůžeme se pouštět do vysvětlování, co tato klasifikace říká. Omezíme se pouze na velice hrubou analogii. Každé složené přirozené číslo je součinem menších prvočísel, prvočíslo už jako součin nějakých menších čísel vyjádřit nemůžeme. Prvočísla jsou tedy jakési stavební kameny, ze kterých násobením dostaneme všechna ostatní přirozená čísla. Také konečné grupy můžeme násobit. Násobení grup je ale mnohem složitější záležitost než násobení přirozených čísel. Velice speciální příklad součinu dvou grup jsme si ukázali v minulém odstavci. Konečné jednoduché grupy jsou podobné stavební kameny, ze kterých můžeme dostat každou konečnou grupu násobením, žádná jednoduchá grupa jako součin dvou menších grup už vyjádřit nejde. Podobně jako prvočísel, také konečných jednoduchých grup je nekonečně mnoho. Počátkem osmdesátých let se podařilo dokončit seznam všech těchto grup. U většiny konečných jednoduchých grup je jasné, kde se vzaly. Zbývá ale malá skupina 26 jednoduchých grup, kterým se říká *sporadické*, o nichž se sice ví, že existují, příčina jejich existence ale není jasná. První sporadické grupy objevil právě E. Mathieu. Kromě čtyř už uvedených to byla ještě pátá grupa — stabilizátor bodu 23 v grupě M_{23} — která se označuje M_{22}. Šestá sporadická grupa byla objevena až po více než sto letech, a pak během necelých dvaceti let následovaly další, až se jejich seznam uzavřel na čísle 26. Žádné jiné nikdo nenajde, neexistují.

To je ale jenom část pozoruhodné historie Mathieuových grup. Kolem roku 1950 našly zcela nečekanou aplikaci v teorii samoopravných kódů, oblasti matematiky, která tvoří teoretický základ bezchybného přenosu informace, a umožnila současnou revoluci v přenosu informací. Mathieuovy grupy tak dobře ilustrují jednotlivé etapy vývoje matematické teorie. Na počátku byly zajímavé jen jako překvapivé izolované příklady. Po dlouhé době byly logicky zařazeny do rozsáhlé matematické teorie, která vznikla zčásti také ze snahy vysvětlit, kde se tyto příklady vzaly, najít příklady podobné, případně dokázat, že další neexistují. A praktická aplikace, o které první matematik zaujatý zvláštností těchto příkladů vůbec neměl, a ani nemohl mít tušení, se objevila zcela nečekaně. Kdo měl v roce 1860 ponětí o fotografiích Saturnova prstence, přenosu televizního signálu prostřednictvím družic, počítačích provádějících statisíce operací za sekundu nebo sondách odebírajících automaticky vzorky hornin z povrchu Měsíce? Nic z toho by bez samoopravných kódů nebylo možné.