Matematické hlavolamy a základy teorie grup

1. kapitola. Hry a postupy

In: Jiří Tůma (author): Matematické hlavolamy a základy teorie grup. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1988. pp. 5–26.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404168

První kapitola

HRY A POSTUPY

1.1. Rubikova krychle.*) Velkou vlnu zájmu o matematické hry a hlavolamy v nedávné době má na svědomí především maďarský architekt a průmyslový návrhář E. Rubik. Šťastný nápad, jak zkonstruovat hračku, která by poskytovala ohromné množství možností pro vzájemnou polohu jednotlivých prvků a byla přitom kompaktní, zachovávala dobře tvar a „padla do ruky“, byl neméně dokonale realizován, a Rubikovy krychle postupně zaplavily řadu zemí po celém světě. Později jsme se mohli také dočíst o podobných hračkách ve tvaru koule, čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu, o krychlích $4 \times 4 \times 4$ nebo $5 \times 5 \times 5$, dokonce o simulacích čtyřdimenzionální Rubikovy krychle na počítačích. Autoři všech dalších hraček se nechali nepochybně inspirovat Rubikovou krychlí. Jejich vynálezy mají jeden společný rys: nepřeberné množství možných pozic, které způsobuje, že řešení je stejně obtížné a komplikované jako u Rubikovy krychle. Jsou to všechno „Rubikovy kostky“, přestože E. Rubik sám už s nimi neměl většinou vůbec nic společného.

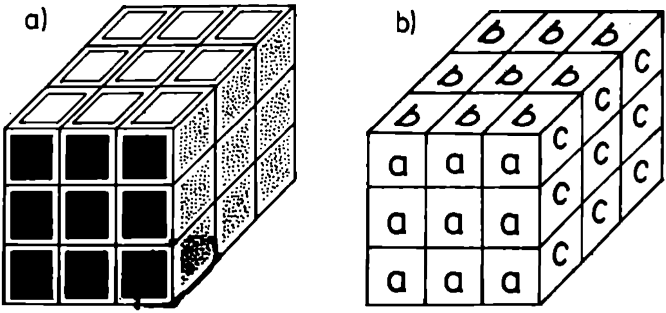
Novináři se obvykle předháněli v superlativech o obtížnosti hlavolamů, vyskytly se i názory, že některé z nich jsou pro člověka zcela nezvládnutelné, že je dokáže zvládnout pouze výkonný počítač. Občas jsme

*) Autor dává přednost tomuto pojmenování před zavedeným názvem Rubikova kostka (pozn. red.).

sice mohli najít zmínky o souvislostech Rubikovy krychle a matematiky, o permutacích a grupách, většinou ale články neobsahovaly nic jiného než nějaký obvykle odněkud opsaný postup, jak krychli složit, a vybízely čtenáře k jeho bezduchému používání. Jak na takový postup přijít, už v článcích nebylo. A nikde jsme se také nedočetli, že pojmy a metody potřebné ke zkrocení Rubikových krychlí znali někteří matematici už na počátku minulého století. Byl to zejména geniální francouzský matematik E. Galois (1811—1832), který teorii grup, tak se oblast matematiky, kterou můžeme při řešení Rubikových krychlí použít, rozvinul a získal pro ni patřičné místo ve struktuře matematiky. Jeho myšlenky byly tehdy tak neobvyklé, že trvalo řadu let, než byly patřičně pochopeny a doceněny. Galois se toho nedočkal, zemřel předčasně na následky zranění utrpěných v souboji.

Dnes už se nám na Galoisových myšlenkách nezdá nic neobvyklého. A Rubikovy krychle jsou přímo ideální pomůckou, na které můžeme některé z těchto myšlenek vysvětlit a demonstrovat jejich účinnost. Vydejme se tedy nyní za jejich tajemstvím. Naučíme se přemýšlet o celé řadě hlavolamů a spolu s tím nahlédneme do světa matematiky, která není právě běžnou součástí školních osnov. Nebudeme příliš počítat, ani nebudeme odvozovat a používat složité vzorce. Ke skládání Rubikových krychlí není nic takového potřeba.

Původní Rubikova krychle bude osou celé knížky. Všechny pojmy a metody budeme demonstrovat především na ní. Budeme se snažit pochopit logiku skládání Rubikovy krychle a získat tak schopnost rychle a samostatně vyhledávat postupy vhodné k řešení nejrůznějších hlavolamů podobného typu, dokonce i těch dosud nevymyšlených. Žádné postupy se nebudeme pouze mechanicky učit, naopak se pokusíme vysvětlit význam každého tahu a ukázat různé jiné možnosti, jak dosáhnout stejného cíle. Proto také nebudeme používat obvyklého označení jednotlivých stěn krychle písmeny P — pravá, L — levá, C — čelní, Z — zadní, H — horní a D — dolní, které bylo vymyšleno pro zapisování postupů, a označíme si jednotlivé stěny prostě písmeny *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* jako na obrázku 1.1.b.



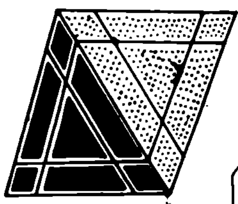
Obr. 1.1

Zadní stěna má písmeno *d*, dolní *e* a levá *f*. Naše označení nemá žádný vztah k tomu, jak krychli držíme, a v konkrétních případech je možné používat barvy jednotlivých stěn. My nebudeme barev používat nejen proto, že různé krychle mohou být různě obarvené, ale také proto, že při jiném obarvení nemusí být stěny jednobarevné, nebo je dokonce správná pozice určena nějakými obrázky, nikoliv barvami. Navíc nemáme barevné obrázky k dispozici.

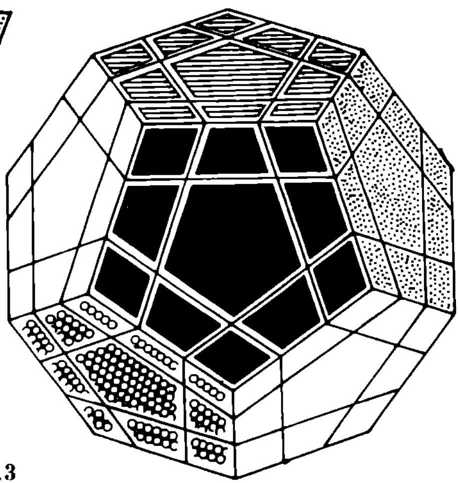
V každé stěně krychle leží vždy devět malých kostiček. Těmto skupinám kostiček budeme říkat *krajní vrstvy*. Každou z krajních vrstev můžeme otočit o 90° vpravo nebo vlevo. Tato otočení budeme považovat za základní tahy. Ostatní možná otočení jsou z nich složena.

Tak například otočit krajní vrstvou o 180° znamená otočit dvakrát po sobě o 90° a otočit střední vrstvou je totéž jako otočit obě s ní rovnoběžné krajní vrstvy v opačném směru. Krajní vrstvy budeme označovat stejnými písmeny jako příslušné stěny — *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Otočení nějakou krajní vrstvou o 90° vpravo pak budeme označovat odpovídajícím velkým písmenem. Otočení vrstvou *c* budeme tedy zapisovat C, vrstvou *a* písmenem A, atd. Otočení doleva budeme zapisovat stejným písmenem a vpravo nahoru připíšeme $^{-1}$: A^{-1}, E^{-1}, F^{-1}, atd. Otočení stěnou *b* vlevo budeme zapisovat B^{-1}.

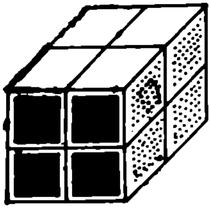
Vtipný Rubikův mechanismus lze různými způsoby modifikovat, měnit vzájemnou polohu a počet os otáčení, případně počet prvků v jednotlivých vrstvách. Dostáváme tak hračky ve tvaru čtyřstěnu — obr. 1.2., dvanáctistěnu — obr. 1.3., krychli 2 × 2 × 2 — obr. 1.4., krychli 4 × 4 × 4 — obr. 1.5.



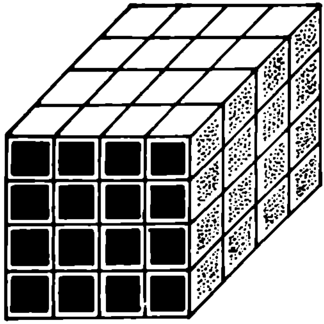
Obr. 1.2



Obr. 1.3

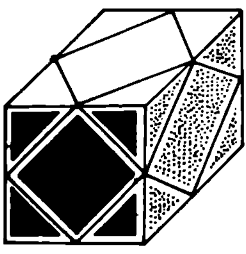


Obr. 1.4

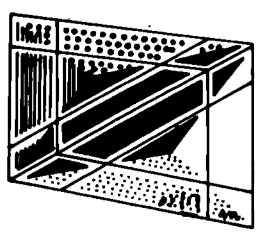


Obr. 1.5

Jiná mechanická konstrukce vede ke kosé krychli. Tato hra má sice tvar krychle, později si ale vysvětlíme, že pokud jde o způsob řešení, je to vlastně jenom čtyřstěn obarvený podle obrázku 1.7.



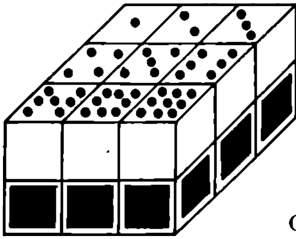
Obr. 1.6



Obr. 1.7

U všech těchto hraček se může stejný prvek objevit na stejném místě různě pootočený, orientovaný. Budeme říkat, že jsou to *hry s orientací*. Další modifikace Rubikova mechanismu vede na *hru bez orientace*.

1.2. Domino. Tato hra je vlastně Rubikova krychle bez jedné střední vrstvy.

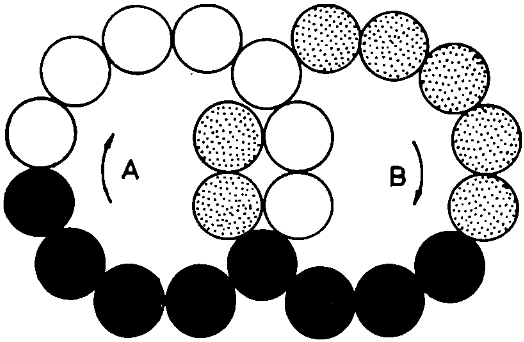


Obr. 1.8

Má dvě čtvercové vrstvy s devíti kostičkami a čtyři krajní vrstvy po šesti kostičkách. Otočíme-li horní vrstvou o 90° vpravo, dostaneme stejnou pozici jako po otočení dolní vrstvou o 90° vpravo. Důležitý je relativní pohyb prvků vůči sobě, nikoliv jejich absolutní pohyb v prostoru. Otočení některou čtvercovou vrstvou o 90° vpravo budeme označovat A, vlevo pak A^{-1}. Obdélníkové vrstvy můžeme pootáčet pouze o 180°, otočíme-li je vpravo nebo vlevo, dostaneme vždy stejnou pozici. Otočení bočními obdélníkovými vrstvami budeme označovat podle obrázku 1.8. — přední vrstvou B, pravou C, zadní D a levou E. A proč je domino hra bez orientace? Každý pohyblivý prvek má jednu dominovou plošku označenou tečkami. Ta se musí v jakékoliv pozici objevit v horní nebo dolní čtvercové stěně, protože boční vrstvy můžeme otáčet pouze o 180°. Stejný prvek se proto nikdy neobjeví na stejném místě různě pootočený, vždycky musí být dominová ploška ve čtvercové stěně. Pokud se nám podaří dostat všechny prvky na správná místa, je hračka složená. O orientace prvků se nemusíme vůbec starat.

Bez orientace je také další hra.

1.3. Uši. Tady není potřeba žádná důmyslná prostorová konstrukce. Uši jsou hra rovinná.



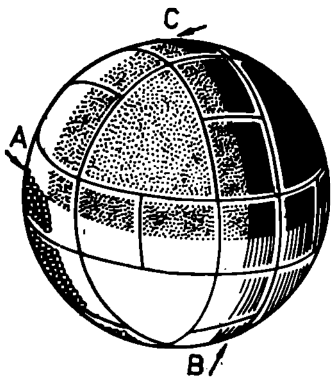
Obr. 1.9

Přesto jde o hru velice zajímavou, a pokud nemáme řešení tolik usnadněné obarvením kuliček jako na obrázku 1.9., také dost obtížnou. Hru tvoří dvaadvacet kuliček ve dvou protínajících se uších po dvanácti kuličkách. Různé varianty se mohou lišit nejen obarvením, ale také počtem kuliček v uších. Nejjednodušší povolené tahy jsou pootočení uchem „o jednu kuličku", tj. o 30°. Uši si označíme písmeny A, B a stejně budeme označovat příslušná pootočení vpravo. Otočení vlevo pak budeme zapisovat A^{-1} a B^{-1}.

Na rozdíl od Rubikovy krychle nebo domina můžeme na uších přesunout kteroukoliv kuličku na místo jakékoliv jiné. Naproti tomu na Rubikově krychli, dominu, čtyřstěnu, dvanáctistěnu a dalších hračkách existují pohyblivé prvky dvou různých typů — rohové a hranové. Žádný prvek jednoho typu nemůžeme nikdy přesunout na místo prvku druhého typu. V každé pozici je rohový prvek na místě jiného rohového prvku a hranový na místě hranového. Budeme říkat, že Rubikova krychle, domino, čtyřstěn, dvanáctistěn aj. jsou *hry nesouvislé*, existují na nich prvky různých typů. Uši jsou *hra souvislá*, každá kulička může být na místě libovolné jiné. Krychle $2 \times 2 \times 2$ je také souvislá hra, navíc s orientací.

Uvedeme si ještě jeden příklad souvislé hry s orientací.

1.4. Koule. Tato hra se prodávala buď s obarvením podle obrázku 1.10., nebo také jako zeměkoule.



Obr. 1.10

Jednotlivé čtverce můžeme posunovat ve třech navzájem kolmých pruzích, které si označíme opět A, B, C. Na obrázku jsou naznačené tahy A, B, C, posunutí v opačném směru pak budeme zapisovat A^{-1}, B^{-1} a C^{-1}. Později si ukážeme, že je výhodné považovat dva protilehlé čtverce za různé plošky jednoho a téhož prvku. Jsou v jakékoliv pozici proti sobě a jejich vzájemnou polohu nemůžeme nijak změnit. Koule poskytuje pro orientaci prvku na stejném místě nejvíce možností — čtyři pootočení a navíc ještě převrácení, záměnu obou čtverců tvořících jeden prvek. Celkem je tedy pro orientaci jednoho prvku osm možností. Z tohoto důvodu je teorie koule složitější než u jiných hraček (nikoliv řešení!), a probereme si ji až v závěru páté kapitoly.

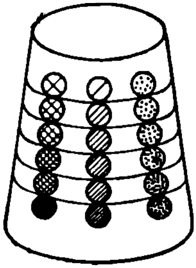
Ve výčtu her nemůžeme zapomenout ani na všeobecně známý hlavolam, který vymyslel někdy kolem roku 1870 slavný americký hádankář Sam Loyd.

1.5. Patnáctka. Patrnáctka vzbudila ve své době stejnou pozornost jako mnohem rafinovanější Rubikova krychle o více než sto let později. Je to hra rovinná podobně jako uši. Srovnat přeházená čísla do správného pořadí na obrázku 1.11. není příliš obtížné, a snad jediný opravdový problém vzniká s pozicí, která je „téměř" složená, pouze čísla 14 a 15 jsou přehozená.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obr. 1.11

Podrobnému rozboru této hry se budeme věnovat ve druhé kapitole. Povoleným tahem u patnáctky je posunutí čísla na sousední prázdné místo, tahy je možné provádět pouze na dvojicích sousedních polí, ne však kdykoliv, ale pouze tehdy, je-li jedno z těchto polí prázdné. Tím se patnáctka podstatně liší od všech předchozích hlavolamů, u kterých je možné pootáčet skupiny prvků pouze na základě jejich umístění, nezávisle na tom, jaké prvky to právě jsou. Patnáctka má naproti tomu jeden významný prvek — prázdné místo — který určuje, jaké tahy můžeme v pozici udělat. Podobnou vlastnost má také babylónská věž, prostorové varianty patnáctky.



Obr. 1.12

1.6. Tahy. Úplné a neúplné hry. Uvedený přehled her stačí pro představu, jaké hlavolamy budeme řešit. Nyní si ujasníme společné rysy těchto her a uvědomíme si také některé důležité odlišnosti. Všechny hry se skládají z nějakých prvků, jejichž vzájemnou polohu můžeme podle určitých pravidel měnit. Jsou to kostičky na krychlích a dominu, kuličky na uších a babylónské věži, čísla u patnáctky apod. Nejjednodušší možné změny vzájemné polohy prvků nazýváme *tahy*. Jaké tahy můžeme dělat? Na krychlích, dominu, čtyřstěnu, dvanáctistěnu můžeme otočit libovolnou krajní vrstvou prvků kolem osy této vrstvy. Každý tah lze provést kdykoliv, nezávisle na tom, jaké prvky ve vrstvě leží. Naproti tomu u patnáctky můžeme posunout libovolný prvek na s ním sousední prázdné místo. Tahy děláme na dvojicích sousedních míst, ne však kdykoliv, ale pouze tehdy, je-li jedno z těchto dvou míst prázdné.

Všimněte si zásadní odlišnosti pravidla pro patnáctku od pravidel pro krychle, domino, čtyřstěn, dvanáctistěn a další hry. Zatímco u Rubikovy krychle stačí uvést, kde jsou pohyblivé skupiny prvků — krajní vrstvy — a jak jimi můžeme otáčet, u patnáctky musíme navíc dodat, co tuto skupinu prvků tvoří — jedno z obou sousedních míst musí být prázdné. Podobnou vlastnost má i babylónská věž. Tady existují tahy obou typů. Vrstvami můžeme otáčet kdykoliv, navíc můžeme ještě posunout kuličku na sousední prázdné místo ve stejném sloupci.

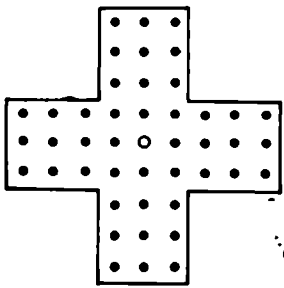
Hry, u kterých je možnost provádět určité tahy nějakým způsobem omezena, budeme nazývat *neúplné hry*. Patnáctka a babylónská věž jsou jediné příklady neúplných her, které budeme v této knize studovat. Jejich neúplnost je způsobena prázdnými místy, dírami, na které můžeme jiné prvky posunovat. Existují také neúplné hry, které žádné díry neobsahují, možnost provádět určité tahy v některých pozicích je omezena jiným způsobem.

Na Rubikově krychli, čtyřstěnu, dominu, dvanáctistěnu, krychlích $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$ a na dalších hrách můžeme v každé pozici udělat libovolný z možných tahů, pro postupné provádění tahů neexistují žádná omezení. Takovým hrám budeme říkat *úplné hry*. S výjimkou druhé kapitoly se budeme zabývat téměř výhradně úplnými hrami. Poznatky z těchto her půjde ale aplikovat i na obě neúplné hry, patnáctku a babylónskou věž.

Ještě na jednu vlastnost tahů upozorníme. Na každé hře můžeme libovolný tah vrátit. Nebo jinak řečeno, ke každému tahu existuje *tah inverzní*. Otočíme-li na Rubikově krychli vrstvou b, tj. uděláme-li tah B, pak zpět do původní pozice se vrátíme tahem B^{-1}, otočením téže vrstvy vlevo. Podobně ke každému jinému otočení vpravo X je inverzní tah X^{-1}. Otočíme-li napřed vlevo, uděláme-li nějaký tah X^{-1}, vrátíme vše zpět tahem X, k tahu X^{-1} je tedy inverzní tah X.

Na každé hračce budeme inverzní tah k tahu X označovat symbolem X^{-1}. To je v souladu s předchozím označením, k otočení vpravo je inverzní otočení vlevo. A protože k otočení vlevo je inverzní otočení vpravo, platí $(X^{-1})^{-1} = X$ pro každý tah na libovolném hlavolamu.

Existenci inverzních tahů na hlavolamech budeme zkráceně nazývat *vlastností inverze*. Je to vlastnost víceméně samozřejmá, všechny uvedené hry ji mají. Existuje ale také poměrně rozšířená hra samotář (později poněkud nadneseně nazývaná hledač géniů), která vlastnost inverze nemá.



Obr. 1.13

Touto hrou se nebudeme vůbec zabývat. Vyžaduje naprosto jiný přístup než hry s vlastností inverze. Z té okamžitě plyne existence inverzních postupů, a inverzní postupy budeme při řešení hlavolamů používat neustále.

1.7. Postupy. Kouzlo Rubikovy krychle a všech dalších úplných her spočívá v ničím neomezené možnosti provádět jednotlivé tahy po sobě v libovolném pořadí, vytvářet z nich postupy. Každou posloupnost tahů budeme nazývat *postup*. Tak například $P = BF^{-1}DAC^{-1}BBE$ je postup na Rubikově krychli. Posloupnost $Q = AC^{-1}BBBCA^{-1}A^{-1}C$ může být postupem na Rubikově krychli, dominu i kouli. Každá posloupnost tahů na úplné hře odpovídá postupu, který můžeme skutečně realizovat.

Hlavním důsledkem úplnosti hry je skutečnost, že můžeme postupy skládat, provádět po sobě. Složením uvedených postupů P a Q je postup $PQ = BF^{-1}DAC^{-1}BBE\,AC^{-1}BBBCA^{-1}A^{-1}C$. Složený postup závisí na pořadí, v němž P a Q provádíme, složíme-li je v opačném pořadí, dostaneme obvykle postup zcela jiný. Tato volnost ve skládání postupů je velice důležitá vlastnost úplných her. U neúplných her ji nemáme. Například u patnáctky můžeme dva postupy P a Q složit, provést po sobě, pouze tehdy, jestliže „navazují", prázdné místo musí být po skončení postupu P na stejném místě, na jakém je při zahájení postupu Q. V jiných případech není možné po skončení postupu P postupem Q pokračovat.

Vlastnost inverze má jiný důležitý důsledek — každý postup lze vrátit, ke každému existuje *postup inverzní*. Postup P vrátíme tak, že provádíme inverzní tahy k tahům postupu P v opačném pořadí. K postupu $P = ABCA^{-1}$ je inverzní postup $AC^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Inverzní postup k P budeme označovat symbolem P^{-1}. A protože platí pro každý tah $(X^{-1})^{-1} = X$, platí také vždy $(P^{-1})^{-1} = P$. Zopakujme si ještě jednou: k postupu P dostaneme inverzní postup P^{-1} tak, že nahradíme každý tah postupu P tahem inverzním a provedeme je v opačném pořadí. Ověřte si to na dalších příkladech postupů na Rubikově krychli.

U inverzních postupů se ještě chvilku zdržíme.

Mohlo by se zdát, že k postupu $P = A$ na Rubikově krychli existuje kromě $P^{-1} = A^{-1}$ ještě další inverzní postup, a to $Q = AAA$. Čtyřnásobným otočením jedné vrstvy ve stejném směru přece také vrátíme krychli zpět do původní pozice. Tady je třeba zdůraznit, že postup $Q = AAA$ není inverzní k postupu $P = A$, je to jenom jeden z mnoha dalších postupů, které udělají totéž, co postup $P^{-1} = A^{-1}$. Na rozdíl od postupu P^{-1} při něm využíváme konkrétní vlastnosti Rubikovy krychle, v tomto případě toho, že stěny na krychli jsou čtvercové. Na čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu nevrátí postup Q po P hru do původní pozice. Zato postupem P^{-1} vrátíme po postupu P do původní pozice jakoukoliv hru. Postup P^{-1} na konkrétních vlastnostech hry vůbec nezávisí.

Všimněme si ještě jednoho důležitého rysu inverzních postupů. Známe-li postup P, nemusíme o inverzním postupu P^{-1} vůbec přemýšlet. Stačí zcela mechanicky nahradit každý tah postupu P tahem inverzním a udělat je v opačném pořadí. Jednoduchost určení inverzního postupu ke známému postupu P je velice užitečná při řešení konkrétních hlavolamů. Nad každým jiným postupem Q, který udělá totéž co P^{-1}, musíme aspoň trochu přemýšlet a využít při něm konkrétních vlastností hry. Je-li možné použít Q na jednom hlavolamu, nemusí být použitelný na jiném.

Závěrem této části o úplných hrách ještě označíme jeden zvláštní postup. Je to postup nulový, neutrální, postup, kterým nic neděláme, ničím jsme neotočili ani nic neposunuli. Takový postup budeme označovat N.

Cvičení 1.1. Najděte inverzní postupy k následujícím postupům: $ABCA^{-1}$, $BD^{-1}B^{-1}D$, N, $ABB^{-1}A^{-1}$, $ABCDEF$.

Speciální postupy u neúplných her. Na neúplných hlavolamech nemůžeme postupy libovolně skládat. Při zkoumání těchto her proto nebudeme používat všechny postupy, ale pouze některé — *speciální*. U patnáctky bude speciální postup takový, který začíná a končí prázdným místem v pravém dolním rohu, tam, kde má být prázdné místo také ve správné pozici 1.11. Každé dva speciální postupy můžeme potom složit a inverzní postup ke speciálnímu postupu je rovněž speciální. Speciální postupy mají tedy, pokud jde o skládání, stejné vlastnosti jako všechny možné postupy na úplných hlavolamech.

Na babylónské věži budeme za speciální považovat postupy, které začínají a končí v pozicích, v nichž jsou obě „díry" ve spodní části věže prázdné, není v nich žádná kulička. Také tady můžeme speciální postupy libovolně skládat a inverzní postupy ke speciálním jsou opět speciální.

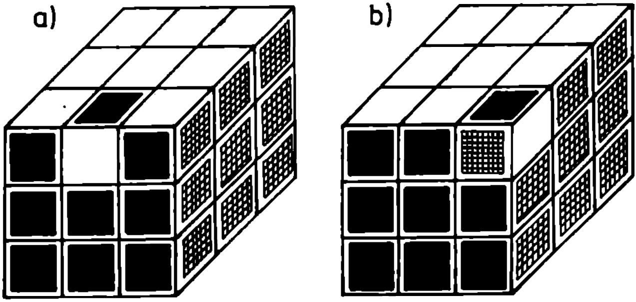
1.8. Vztah mezi postupy a pozicemi. Správnou pozici na Rubikově krychli budeme považovat za základní. Ve správné pozici je pro každou rohovou a hranovou kostičku jednoznačně určeno správné místo (a také správná orientace) — více se tomu budeme věnovat ve třetí kapitole. Také na čtyřstěnu a dvanáctistěnu je při normálním obarvení ve správné pozici jediné správné místo (a orientace) pro každý pohyblivý prvek. Správné pozice budeme opět považovat za základní. Podobnou vlastnost má domino. Jiné je to na uších. Ve správné pozici 1.9. může být každá kulička na místě libovolné jiné kuličky stejné barvy. Žádná nemá pouze jedno správné místo. Je to způsobeno tím, že vždy několik kuliček má stejnou barvu a nemůžeme je nijak rozlišit. To usnadňuje řešení, při teoretickém zkoumání ale budeme dávat přednost situaci, kdy každý pohyblivý prvek má v základní pozici jediné správné místo. Až to bude potřeba, označíme jednotlivé kuličky čísly od 1 do 22 a zvolíme opět jednu pozici, kterou budeme považovat za základní.

Na každém hlavolamu tedy vybereme nějakou základní pozici. Základní pozici budeme vždy označovat symbolem n. Vždy to bude správná, nebo jedna ze správných pozic, do kterých chceme hračku složit. A vždy to uděláme tak, aby měl každý prvek v základní pozici jednoznačně určené správné místo. Každý postup P udělá ze základní pozice nějakou jinou pozici p, budeme to zapisovat $PU = p$. Pozice u jednotlivých hraček mohou být značně složité a různé, a stejně složité je pochopit, jakou pozici nějaký postup udělá. Postupně se naučíme pozice zapisovat a naučíme se také nacházet postupy, které v pozicích udělají určité malé změny.

Pouze s neutrálním postupem N žádné problémy nejsou. Postupem N nic neuděláme, základní pozice se nezmění, platí proto $NU = n$.

1.9. Řešitelné a neřešitelné pozice. Zdaleka ne všechny pozice na Rubikově krychli můžeme nějakým postupem převést do správné základní pozice n. Na obrázku 1.14. jsou dvě typické neřešitelné pozice, v jednom případě jsou všechny kostičky na správných místech, i ty neviditelné, a pouze jedna hranová je špatně orientovaná, ve druhém případě je špatně orientovaná pouze jedna rohová kostička. Zdůvodnit neřešitelnost těchto pozic není zcela jednoduché, uděláme to až v páté kapitole.

Každá pozice p, kterou uděláme ze základní n nějakým postupem P, je řešitelná. Pokračujeme-li po postupu P inverzním postupem P^{-1}, vrátíme krychli z pozice



Obr. 1.14

p zpět do pozice základní. Pozici $p = PU$ tedy složíme, převedeme do základní pozice postupem P^{-1}. Platí také naopak, že každou řešitelnou pozici *q* můžeme udělat ze základní pozice *n* nějakým postupem. Složíme-li pozici *q* postupem Q a pokračujeme-li dále inverzním postupem Q^{-1}, dostaneme zpět původní pozici *q*. Po postupu Q je krychle v základní pozici *n*, platí tedy $(Q^{-1})\ U = q$. Zcela stejně můžeme uvažovat také o ostatních hlavolamech. Dostáváme tak následující jednoduché, ale důležité pravidlo.

Řešitelné jsou přesně ty pozice, které můžeme udělat nějakým postupem z pozice základní.

Neřešitelné pozice takto udělat nemůžeme; abychom je dostali, musíme hračku rozebrat.

Neřešitelnost pozic na obrázku 1.14. má důležité důsledky: v žádné pozici neexistuje postup, kterým by bylo možné pootočit pouze jednu rohovou nebo jednu hranovou kostičku, a ostatní ponechat na původních místech a s původní orientací. Kdyby takové postupy existovaly, mohli bychom je použít také na pozice z obr. 1.14., pootočili bychom právě tu jednu špatně orientovanou kostičku, a pozice by byly rázem složené. Při skládání krychle proto nemůžeme postupovat tak, že správné orientace jednotlivých kostiček děláme „po jedné“, musíme vždy měnit orientace aspoň dvou současně. Stejné vlastnosti má i většina ostatních hlavolamů. Pochopit, které pozice jsou řešitelné a které nikoliv, je důležité k tomu, abychom volili správné metody skládání hraček, a nepokoušeli se o nemožné.

Umět řešit hlavolam znamená nejenom umět každou řešitelnou pozici převést nějakým postupem do pozice základní, ale navíc také umět poznat neřešitelné pozice a vysvětlit, proč neřešitelné jsou. Bez této druhé schopnosti bychom mohli bezvýsledně trávit čas v pokusech řešit něco, co se vyřešit nedá.

Pozice budeme zkoumat v dalších kapitolách, nyní se vrátíme zpět k postupům a probereme některé méně zřejmé vlastnosti.

***1.10. Redukované postupy.** Různé postupy mohou vést ke stejným pozicím. Tak například v postupu $P = BAA^{-1}C$ je dvojice tahů AA^{-1} zbytečná, stejnou pozici uděláme také postupem $\overline{P} = BC$. Platí to nejen na krychli, ale i na dvanáctistěnu, kouli, čtyřstěnu, dominu a na všech ostatních hlavolamech s vlastností inverze. Naproti tomu dvojice postupů $R = A$ a $S = AAAAA$ vede k téže pozici pouze na Rubikově krychli, nikoliv však na čtyřštěnu, kouli nebo dvanáctistěnu.

V tomto odstavci budeme zkoumat, které dvojice postupů vedou ke stejné pozici vždy, bez ohledu na konkrétní vlastnosti hry. Výchozím bodem je vlastnost inverze, která zajišťuje možnost vrátit libovolný tah.

Složením XX^{-1} nebo $X^{-1}X$ dvojice inverzních tahů v libovolném pořadí vrátíme vždy hru do předchozí pozice, nezměníme nic. Vynecháme-li tedy v nějakém postupu dvojici sousedních inverzních tahů, změníme sice postup, ale takto změněný postup povede ke stejné pozici jako ten původní. Každý postup můžeme redukovat postupným vynecháváním sousedních dvojic tahů XX^{-1} nebo $X^{-1}X$. Tak například redukcí postupu $P = ABCC^{-1}B^{-1}CA^{-1}ABA^{-1}$ dostáváme postupy $ABB^{-1}CA^{-1}ABA^{-1}$, $ACA^{-1}ABA^{-1}$ a $ACBA^{-1}$. Poslední postup je už redukovaný, žádný tah v něm bezprostředně nevracíme, žádné dva po sobě jdoucí tahy nejsou tvaru XX^{-1} nebo $X^{-1}X$.

Cvičení 1.2. Které z následujících postupů jsou redukované? $BCC^{-1}D$, $ABA^{-1}B^{-1}$, N, $ABCDC^{-1}B^{-1}A^{-1}$, $ABCC^{-1}A^{-1}$.

Cvičení 1.3. Redukujte tyto postupy: $BD^{-1}DAC^{-1}CA^{-1}$, $AFAA^{-1}F^{-1}B^{-1}BCC^{-1}A^{-1}$, N, ABC, $CE^{-1}EFF^{-1}C^{-1}CA^{-1}AD^{-1}DC^{-1}C$.

Dvojice sousedních inverzních tahů při redukování nějakého postupu vybíráme libovolně, některé takové dvojice vzniknou až po vynechání řady jiných, a není na první pohled zřejmé, že různým výběrem těchto dvojic dostaneme vždy stejný redukovaný postup. Na následujících řádcích dokážeme, že tomu tak opravdu je.

Levá redukce. Nejdříve popíšeme jednu speciální metodu vynechávání dvojic XX^{-1} nebo $X^{-1}X$. V postupu P najdeme první dvojici zleva sousedních inverzních tahů a vynecháme ji. Dostaneme jiný postup, v něm opět najdeme první dvojici zleva sousedních inverzních tahů a vynecháme ji, a to stále opakujeme, až dostaneme redukovaný postup, v němž žádné dva sousední tahy už nejsou navzájem inverzní. Tento postup označíme $\overline{P}$ a budeme mu říkat *levá redukce* postupu P. Například při redukci postupu

$$P = ABC^{-1}DD^{-1}CB^{-1}CA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1}$$

touto metodou dostáváme postupy

$$ABC^{-1}CB^{-1}CA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1},$$

$$ABB^{-1}CA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1}, ACA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1},$$

$$ACBB^{-1}C^{-1}D^{-1}, ACC^{-1}D^{-1}, AD^{-1}.$$

Platí tedy $$\overline{P} = AD^{-1}.$$

Tímto způsobem najdeme současně levé redukce všech postupů Q, které dostáváme z P jako částečné mezivýsledky. Pro každý takový postup Q proto platí $\overline{Q} = \overline{P}$.

Odvodíme ještě několik dalších pravidel levé redukce. Předpokládejme, že postup P je složením postupů R a S, tj. $P = RS$. Redukujeme-li popsanou metodou postup P, redukujeme zpočátku postup R a teprve po nalezení jeho levé redukce $\overline{R}$ vynecháváme dvojice, které obsahují aspoň jeden tah patřící do S. Jeden z mezivýsledků se tedy rovná $\overline{R}S$. Z poslední věty předchozího odstavce víme, že levá redukce postupu $\overline{R}S$ se rovná levé redukci celého postupu $P = RS$, platí proto $\overline{\overline{R}S} = \overline{RS}$.

Jak se liší levé redukce postupů P a PXX^{-1}? Jeden z mezivýsledků se rovná $\overline{P}XX^{-1}$. Je-li poslední tah postupu $\overline{P}$ různý od X^{-1}, můžeme už vynechat v $\overline{P}XX^{-1}$ pouze dva poslední tahy, platí proto $\overline{PXX^{-1}} = \overline{\overline{P}XX^{-1}} = \overline{P}$. Je-li poslední tah $\overline{P}$ roven X^{-1}, musíme při redukci $\overline{P}XX^{-1}$ vynechat dvojici $X^{-1}X$. Na konci ale zůstane další X^{-1}, dostaneme tedy opět postup $\overline{P}$. Vždy proto platí $\overline{PXX^{-1}} = \overline{P}$, a podobně také $\overline{PX^{-1}X} = \overline{P}$.

Je-li P redukovaný postup, nejsou žádné dva sousední tahy navzájem inverzní, žádnou dvojici tahů nemůžeme vypustit, proto je $\overline{P} = P$.

Vezměme si nyní libovolný postup P a v něm nějakou dvojici sousedních inverzních tahů XX^{-1}. Postup P rozdělíme na postup Q před dvojicí XX^{-1}, dvojici XX^{-1} a na postup R po XX^{-1}, tj. $P = QXX^{-1}R$. Pomocí už odvozených pravidel levé redukce dostáváme $\overline{P} = \overline{(\overline{QXX^{-1}})\,R} = \overline{(\overline{Q})\,R} = \overline{\overline{Q}R} = \overline{QR}$, což znamená, že levá redukce postupu P se rovná levé redukci postupu QR, který dostaneme z P vynecháním libovolné dvojice sousedních tahů XX^{-1}. Vynecháním jiné dvojice než první zleva jsme tedy nic nezkazili.

Redukujeme-li postup P libovolně, dostáváme postupy $P = Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, a každý postup Q_i vznikne vynecháním nějaké dvojice sousedních inverzních tahů z Q_{i-1}. Podle poslední dokázané vlastnosti levé redukce platí $\overline{Q_i} = \overline{Q_{i-1}}$, levé redukce všech postupů Q_i se proto rovnají. Platí tedy také $\overline{P} = \overline{Q_k}$. Postup Q_k je ale redukovaný, tj. $\overline{P} = \overline{Q_k} = Q_k$. Libovolnou redukcí postupu P dostaneme zase jednom levou redukci $\overline{P}$. Tím jsme dokázali jednoznačnost redukce postupů.

Postupným vynecháváním sousedních dvojic inverzních tahů z postupu P dostaneme vždy stejný redukovaný postup $\overline{P}$.

Ke každému postupu P nyní umíme najít jeho redukci $\overline{P}$ a tímto redukovaným postupem uděláme vždy stejnou pozici jako postupem P. Platí to pro každou hru. Dva postupy P a Q, jejichž redukce $\overline{P}$ a $\overline{Q}$ se rovnají, proto také udělají stejné pozice.

Inverzní postup P^{-1} k redukovanému postupu P je rovněž redukovaný. Nemůže obsahovat dva sousední inverzní tahy, protože ani P je neobsahuje. Také neutrální postup N je redukovaný. Naproti tomu složení dvou postupů P a Q nemusí být redukovaný postup ani za předpokladu, že P a Q redukované jsou, jak se snadno přesvědčíme na příkladu $P = AB$, $Q = B^{-1}C$. Můžeme ale najít redukci $\overline{PQ}$ jejich složení, která už samozřejmě redukovaná je. Postupu $\overline{PQ}$ budeme říkat *redukované* složení postupů P a Q a budeme jej označovat $P \circ Q$, abychom jej odlišili od obyčejného složení PQ.

Cvičení 1.4. Najděte složení PQ a redukované složení $P \circ Q$ následujících dvojic postupů:

$P = ABC$	$Q = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$
$P = ABC$	$Q = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
$P = ABB^{-1}CF^{-1}$	$Q = FA^{-1}B^{-1}C$
$P = ABB^{-1}A^{-1}$	$Q = N$
$P = CF^{-1}HB^{-1}BAC^{-1}$	$Q = CA^{-1}D^{-1}DH^{-1}F$.