Oddělitelnost množin

2. kapitola. Oddělitelnost konvexních mnohostěnů

In: Jaroslav Morávek (author); Milan Vlach (author): Oddělitelnost množin. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1987. pp. 25–35.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404158

2. kapitola

ODDĚLITELNOST KONVEXNÍCH MNOHOSTĚNŮ

2.1. Konvexní mnohostěny

V tomto odstavci budeme definovat důležitou třídu podmnožin prostoru R^n, které budeme nazývat konvexními mnohostěny. Konvexní mnohostěny budou pro nás důležité tím, že pojem konvexního mnohostěnu zobecňuje v jistém smyslu pojem konvexního mnohoúhelníku v rovině a zároveň i pojem množiny všech řešení soustavy lineárních nerovnic (popřípadě rovnic). Při výkladu budeme postupovat takto: Nejprve uvedeme definici konvexního mnohostěnu, potom ukážeme geometrickou interpretaci tohoto pojmu a nakonec uvedeme některé základní vlastnosti konvexních mnohostěnů potřebné v dalším výkladu.

Soustavou m lineárních nerovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (kde m, n jsou přirozená čísla), nazýváme soustavu nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m, \end{aligned} \tag{16}$$

kde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ jsou daná čísla.

Množinu všech bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n, jejichž souřadnice vyhovují všem nerovnicím soustavy (16) nazýváme *konvexním*[1]) *mnohostěnem* v prostoru R^n definovaným soustavou (16).

Konvexním mnohostěnem v prostoru R^n je tedy každá taková množina K bodů prostoru R^n, pro kterou existuje taková soustava lineárních nerovnic o n neznámých, že množina K představuje množinu všech řešení této soustavy.

Příklad 1. Prázdná množina je konvexním mnohostěnem v prostoru R^n, neboť představuje množinu všech řešení nerovnice

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n \leqq -1 .$$

Příklad 2. Prostor R^n je konvexním mnohostěnem v prostoru R^n, neboť představuje množinu všech řešení soustavy

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n \leqq 1 .$$

Příklad 3. V prostoru R^1 jsou konvexními mnohostěny pouze tyto množiny: (a) prázdná množina; (b) prostor R^1; (c) množiny těch bodů $X = (x_1)$ prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1 \leqq b$, kde a, b jsou čísla, pro která je $a \leqq b$; (d) množiny těch bodů $X = (x_1)$ prostoru R^1, pro které platí $x_1 \leqq b$, kde b je jisté číslo; (e) množiny těch

---

[1]) To, že konvexní mnohostěn je konvexní množina, dokážeme později; viz věta 2.

bodů $X = (x_1)$ prostoru R^1, pro které platí $a \leqq x_1$, kde a je jisté číslo.

Podejme si hned *důkaz* tvrzení obsaženého v příkladu 3. Je-li K konvexní mnohostěn v prostoru R^1, pak K představuje množinu všech řešení jisté soustavy nerovnic tvaru:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 &\leqq b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 &\leqq b_m. \end{aligned} \tag{17}$$

Může nastat právě jedna z těchto dvou možností:

1. Soustava (17) nemá řešení.
2. Soustava (17) má řešení.

Nastává-li první možnost, dostáváme případ (a). Stačí tedy dále vyšetřovat pouze druhou možnost. Nechť je tedy množina K neprázdná. Potom nastává právě jedna z těchto čtyř vzájemně se vylučujících možností:

(2a) $a_{i1} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$;
(2b) existují takové indexy i_0, j_0, že platí
$a_{i_01} > 0, a_{j_01} < 0$;
(2c) $a_{i1} \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a existuje takový index i_0, že platí $a_{i_01} > 0$;
(2d) $a_{i1} \leqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a existuje takový index i_0, že platí $a_{i_01} < 0$.

Nastává-li případ (2a), musí být $b_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$, neboť podle předpokladu soustava (17) má řešení. Avšak je-li $a_{i1} = 0$ a $b_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$, je řešením soustavy (17) každé reálné číslo; nastává tedy případ (b).

Nastává-li případ (2b), dostáváme případ (c): Nechť $i_0, i_1, \ldots, i_r$ jsou všechny indexy, pro které platí $a_{i_0 1} > 0$, $a_{i_1 1} > 0, \ldots, a_{i_r 1} > 0$, a nechť $j_0, j_1, \ldots, j_s$ jsou všechny indexy, pro které platí $a_{j_0 1} < 0$, $a_{j_1 1} < 0, \ldots, a_{j_s 1} < 0$.

Označíme-li písmenem a největší z čísel $\frac{b_{j_0}}{a_{j_0 1}}, \frac{b_{j_1}}{a_{j_1 1}}, \ldots, \frac{b_{j_s}}{a_{j_s 1}}$ a písmenem b nejmenší z čísel $\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 1}}, \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 1}}, \ldots, \frac{b_{i_r}}{a_{i_r 1}}$. je množina K tvořena všemi čísly x_1, pro která platí $a \leqq x_1 \leqq b$.

Nastává-li případ (2c) a jsou-li $i_0, i_1, \ldots, i_r$ všechny indexy, pro které platí $a_{i_0 1} > 0$, $a_{i_1 1} > 0, \ldots, a_{i_r 1} > 0$, dospíváme k případu (d), neboť množina K je tvořena všemi čísly x_1, pro která platí $x_1 \leqq b$, kde b je nejmenší z čísel $\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 1}}, \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 1}}, \ldots, \frac{b_{i_r}}{a_{i_r 1}}$.

Je už zřejmé, jakým způsobem dospějeme k tomu, že možnosti (2d) odpovídá případ (e).

Poznámka. Získané výsledky můžeme shrnout také takto: Konvexním mnohostěnem v prostoru R^1 je buď prázdná množina, nebo celý prostor R^1, nebo průnik konečného počtu uzavřených poloprostorů prostoru R^1 (uzavřené poloprostory prostoru R^1 je přirozené nazývat uzavřenými polopřímkami).

Příklad 4. Vyšetřujme nyní konvexní mnohostěny v prostoru R^2. Nechť K je konvexní mnohostěn v prostoru R^2 daný soustavou nerovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leqq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots&\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leqq b_m. \end{aligned} \tag{18}$$

Jestliže v nerovnici $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqq b_i$, kde i je jedno z čísel $1, 2, \dots, m$, je alespoň jedno z čísel a_{i1}, a_{i2} různé od nuly, pak je touto nerovnicí určen jistý uzavřený poloprostor prostoru R^2 (v případě prostoru R^2 je přirozené nazývat tento poloprostor uzavřenou polorovinou).

Jestliže je $a_{i1} = a_{i2} = 0$, pak buď tato nerovnice nemá řešení ($b_i < 0$), nebo souřadnice libovolného bodu prostoru R^2 jsou jejím řešením ($b_i \geqq 0$). Vzhledem k tomu, že řešení soustavy (18) jsou představována těmi body prostoru R^2, jejichž souřadnice vyhovují všem nerovnicím soustavy (18), dostáváme, že konvexní mnohostěn v prostoru R^2 je buď množina prázdná, nebo celý prostor R^2, nebo množina, která je průnikem konečně mnoha uzavřených polorovin (tento průnik může být také prázdnou množinou). Všimněme si ještě, že každý průnik konečného počtu uzavřených polorovin je konvexním mnohostěnem v prostoru R^2.

Čtenář už sám nahlédne, že analogická situace nastává v případě konvexních mnohostěnů v prostoru R^3 (pouze místo o průniku uzavřených polorovin musíme hovořit o průniku uzavřených poloprostorů).

Rovněž v případě konvexního mnohostěnu v prostoru R^n zadaného soustavou (16) můžeme říci, že K je buď prázdná množina, nebo celý prostor (viz příklad 1 a příklad 2), nebo průnik konečného počtu poloprostorů určených těmi nerovnicemi $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqq b_i$, ve kterých je alespoň jedno z čísel $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ různé od nuly.

Konvexní mnohostěny mají jednu důležitou vlastnost, kterou uvedeme bez důkazu, ale kterou budeme v dalším výkladu často používat.

Uvažujme zobrazení prostoru R^n do prostoru R^m, které je definováno tak, že bodu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru R^n přiřazuje prvek $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ prostoru R^m podle předpisu

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n, \end{aligned} \tag{*}$$

kde c_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla. Zobrazení tvaru (*) se nazývá *lineární zobrazení.*

Je-li K konvexní mnohostěn v prostoru R^n, pak jeho obrazem při zobrazení definovaném předpisem (*) je jistá množina L bodů prostoru R^m (bod $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ prostoru R^m patří do množiny L, existuje-li takový bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mnohostěnu K, že pro souřadnice bodů Y, X platí (*)). Dá se dokázat, že platí tato věta:

Věta 1. *Je-li K konvexní mnohostěn v prostoru R^n, je obraz L množiny K při zobrazení určeném předpisem (*) konvexním mnohostěnem v prostoru R^m.*

Na závěr tohoto odstavce dokážeme ještě tuto větu:

Věta 2. *Konvexní mnohostěn v prostoru R^n je konvexní množinou.*

Důkaz. Nechť K je konvexní mnohostěn v prostoru R^n určený soustavou (16) a nechť body $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ prostoru R^n patří do množiny K. Podle definice konvexní množiny stačí dokázat, že pro každé číslo λ, pro které platí $0 \leqq \lambda \leqq 1$, patří bod $X = \lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1, \lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2, \ldots, \lambda y_n + (1 - \lambda) z_n$ do množiny K. Stačí tedy dokázat, že platí

$$\begin{aligned}
&a_{11}(\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1) + a_{12}(\lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2) + \ldots \\
&\ldots + a_{1n}(\lambda y_n + (1 - \lambda) z_n) \leqq b_1, \\
&a_{21}(\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1) + a_{22}(\lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2) + \ldots \\
&\ldots + a_{2n}(\lambda y_n + (1 - \lambda) z_n) \leqq b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&a_{m1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1) + a_{m2}(\lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2) + \ldots \\
&\ldots + a_{mn}(\lambda y_n + (1 - \lambda) z_n) \leqq b_m.
\end{aligned}$$

Protože $b_i = \lambda b_i + (1 - \lambda) b_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, vyplývá platnost poslední soustavy z našich předpokladů násobením každé nerovnice platné soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n &\leqq b_1, \\ a_{21}y_2 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n &\leqq b_m \end{aligned}$$

číslem λ, každé nerovnice platné soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1n}z_n &\leqq b_1, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2n}z_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \ldots + a_{mn}z_n &\leqq b_m \end{aligned}$$

číslem $(1 - \lambda)$ a sečtením odpovídajících si nerovnic.

2.2. Oddělitelnost konvexních mnohostěnů

Buďte M_1 a M_2 dvě neprázdné podmnožiny prostoru R^n. Budeme říkat, že množiny M_1 a M_2 jsou (vzájemně) *oddělitelné*, jestliže existují taková čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, že alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je různé od nuly a že pro všechny body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny M_1 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n > b$$

a pro všechny body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny M_2 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b.$$

Užijeme-li terminologie zavedené v předchozí kapitole, můžeme právě vyslovenou definici vyjádřit také takto: Dvě neprázdné podmnožiny M_1 a M_2 prostoru R^n nazýváme oddělitelnými množinami, jestliže existuje taková nadrovina prostoru R^n, že množiny M_1 a M_2 leží v opačných otevřených poloprostorech touto nadrovinou určených.

Podle definice je zřejmé, že oddělitelné množiny nemají společné body. Snadno ukážeme, že neprázdné množiny, které nemají společné body, nemusí být oddělitelné. Nechť např. M_1 je sjednocením množin A_1, A_2, A_3, A_4, kde množiny A_1, A_2, A_3, A_4 jsou definovány takto (znázorněte si uvedené množiny v rovině):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1, \quad x_2 = 0\},\\
A_2 &= \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1, \quad x_2 = 1\},\\
A_3 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1\},\\
A_4 &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 1,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1\},
\end{aligned}$$

(tj. A_1 je množina bodů, jejichž souřadnice splňují podmínky $0 \leqq x, \leqq 1$ a $x_2 = 0$; způsob zápisu A_2, A_3 a A_4 je zcela analogický. Uvedeného způsobu definice množin se v matematice běžně používá) a nechť množina M_2 je tvořena těmito dvěma body: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Je zřejmé, že množiny M_1 a M_2 jsou neprázdné a nemají společné body. Přitom však množiny M_1 a M_2 nejsou oddělitelné, protože kdyby existovala taková čísla a_1, a_2, b, že alespoň jedno z čísel a_1, a_2 je různé od nuly a že pro každý bod $X = (x_1, x_2)$ množiny M_1 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 > b$$

a zároveň pro každý bod $X = (x_1, x_2)$ množiny M_2 platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 < b\,,$$

muselo by platit

$$a_1 + a_2 > 2b\,,$$

neboť body (0,1), (1,0) patří do množiny M_1 a zároveň

$$a_1 + a_2 < 2b\,,$$

neboť body $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ patří do množiny M_2.

Pro konvexní mnohostěny však platí tato věta (sr. s větou C v předchozí kapitole):

Věta 3. *Dva neprázdné konvexní mnohostěny v prostoru R^n jsou oddělitelné právě tehdy, nemají-li společné body.*

Jak jsme se již zmínili, od důkazu této věty upouštíme, avšak v dalším výkladu si ukážeme některé její aplikace.

Cvičení

1. Dokažte, že konvexní mnohostěn v prostoru R^n je množina buď prázdná, nebo jednobodová, nebo obsahující nekonečně mnoho bodů.

2. Znázorněte tyto konvexní mnohostěny v prostoru R^1:

a) $3x_1 \leqq 4,\quad 2x_1 \leqq 10,\quad 3x_1 \leqq 13,$

b) $-3x_1 \leqq -4,\quad -2x_1 \leqq 10,\quad -3x_1 \leqq -13,$

c) $3x_1 \leqq 4,\quad -2x_1 \leqq -1,\quad 0x_1 \leqq 1,\quad -3x_1 \leqq 0,\quad 5x_1 \leqq 8.$

3. Dokažte, že průnik dvou konvexních mnohostěnů v prostoru R^n je konvexním mnohostěnem.

4. Ukažte, že sjednocení dvou konvexních mnohostěnů v prostoru R^n nemusí být konvexním mnohostěnem v prostoru R^n.

5. Znázorněte tyto konvexní mnohostěny v prostoru R^2:

a) $0x_1 + x_2 \geqq 0;$

b) $x_1 + 0x_2 \geqq 0,\quad 0x_1 + x_2 \geqq 0;$

c) $x_1 + x_2 \leqq 1,\quad x_2 \leqq 1,\quad x_1 - x_2 \leqq 1.$